

Superresoluutio

LuK-tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikka
2026
Elina Tuomela
Tarkastaja:
Dos. T. K.

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan ja tähtitieteen laitos

Tuomela Elina Superresoluutio

LuK-tutkielma, 21 s., 3 liites.
Fysiikka
Maaliskuu 2026

Superresoluutio kuvaa tilannetta, jossa klassisen optiikan mukaan kahta lähekkäin olevaa valonlähdettä ei voida havaita erillisiksi. Valon diffraktio ja kuvantamisjärjestelmän optiset ominaisuudet aiheuttavat rajan resoluutiolle. On kuitenkin osoitettu, että kvanttimekaniikan keinoin pystytään ohittamaan tämä raja. Superresoluutiossa kaksi lähdettä voidaan havaita erillisiksi, vaikka ne olisivat resoluution rajaa lähempänä.

Kvanttioptiikan superresoluution yksi toteutusmenetelmä on SPADE, jossa valo hajotetaan useisiin Hermite–Gaussisiin moodeihin. Menetelmällä pystytään keräämään valon sisältämä informaatio lähteiden etäisyydestä. Tähän asti parhaimmat tulokset SPADE:n toimivuudesta on antanut MPLC-tekniikka. Se tekee valon moodihajotuksen passiivisen kuvantamisen keinoin, mikä tarkoittaa sitä, ettei valolähteitä tarvitse manipuloida. Näin SPADE:lla on sovelluskohteita esimerkiksi tähtitieteen havainnoissa.

Asiasanat: diffraktio, Rayleighin raja, Cramér-Raon raja, Fisher-informaatio, passiivinen kuvantaminen, superresoluutio, SPADE, MPLC, resoluutio, tähtitiede

Sisällys

Johdanto	1
1 Klassisesta optiikasta	2
1.1 Klassinen diffraktio	2
1.2 Rayleighin raja	2
2 Klassista estimaatioteoriaa	4
2.1 Fisher-informaatio	5
2.2 Cramér-Rao raja	7
3 Superresoluution teoria	7
3.1 Parametrin arviointi kvanttimekaniikan keinoin	7
3.2 SPADE-menetelmä	9
3.3 Vaihtoehtoinen passiivinen kuvantamismetodi	13
4 SPADE:n kokeellinen varmennus	14
4.1 Tehtyjä tutkimuksia	14
4.2 MPLC-menetelmä	14
5 Yhteenveto	17

Johdanto

Kaksi lähekkäin olevaa valonlähdettä erottuu toisistaan vain, jos niiden välinen etäisyys on tarpeeksi suuri. Näin klassisen fysiikan mukaan on olemassa raja, jonka ylittäessä valonlähteitä ei voida enää erottaa erillisiksi [1]. Valon ominaisuus taipua eli diffraktoitua aiheuttaa yhdessä ilmaisimien ominaisuuksien ja kohinalähteiden kanssa rajan resoluutiolle, jota kutsutaan Rayleighin rajaksi, kriteeriksi tai joissakin lähteissä jopa kiroukseksi [2].

Tämän klassisen resoluution rajan ohittavat menetelmät saavuttavat superresoluutioksi kutsutun ilmiön. Vastaanottimen erottelukyky eli resoluutio kertoo, mikä on kahden erillisenä havaitun valonlähteen pienin etäisyys toisistaan. Superresoluutiossa kaksi lähdettä voidaan havaita erillisiksi, vaikka ne olisivat lähempänä kuin mitä klassinen raja sallii. [3]

Diffraktiorajan kiertäviä superresoluutiotekniikoita on kehitelty monia, mutta suurin osa niistä edellyttää joko valonlähteen ominaisuuksien monimutkaista hallintaa tai valaistun näytteen manipulointia [2]. Tekniikoita on esimerkiksi emission päälle-pois-kytkentä, lähikenttälouotaukset (engl. near field probing) ja optisten epälinearisuuksien hyödyntäminen [4]. Emission päälle-pois -kytkentää hyödyntävässä STED-menetelmässä (engl. stimulated emission depletion) loisteaineet toimivat aktiivisina elementteinä, ja niiden fluoresenssi voidaan hetkellisesti sammuttaa stimuloitun emission avulla, jolloin signaalia voidaan tallentaa Rayleighin rajan ylittäviltä alueilta. Menetelmää käytetään erityisesti elävien solujen kuvantamisessa ja biotieteiden sovelluksissa. [5]

STED ja useimmat muut näistä menetelmistä perustuvat kuitenkin lähteiden ominaisuuksien muokkaukseen, mikä ei ole mahdollista esimerkiksi tähtitieteen havainnoissa. Siksi tarvitaankin erilainen, passiivinen kuvantamistapa [4]. Uudenlaisen menetelmän; SPADE:n (engl. spatial mode demultiplexing) esitteli Tsang et al. vuonna 2016 [6].

1 Klassisesta optiikasta

1.1 Klassinen diffraktio

Diffraktio on hyvin yleinen ilmiö. Se kuvaa valon ominaisuutta taipua. Arkielämässä diffraktiota voi havaita esimerkiksi, kun valo kulkee raon läpi, säteilee esteen takaa tai ohittaa teräviä reunoja. Esimerkiksi valolähteen eteen laitetun esineen varjossa esineen reunat sumenevat diffraktion johdosta.

Valonlähde, jonka synnyttämät aallot kulkevat pienestä raosta, muodostaa varjostimelle interferenssikuvion kuvan 1 mukaisesti. Huygensin periaatteen mukaan jokainen osa raosta toimii uutena aallonlähteenä. Rako siis muodostuu monesta hyvin läheltä olevasta valonlähteestä, jotka interferoivat keskenään.

Aaltojen vaihe-erosta riippuen aallot voivat vahvistaa tai heikentää toisiaan. Kun aallot ovat samassa vaiheessa, tapahtuu vahvistava interferenssi. Kun taas aallot ovat täsmälleen vastakkaisissa vaiheissa, tapahtuu tuhoava interferenssi, jolloin aallot kumoutuvat kokonaan. Kuvassa 1 ilmiö huomataan voimakkaina valoalueina sekä tyhjinä kohtina varjostimella.

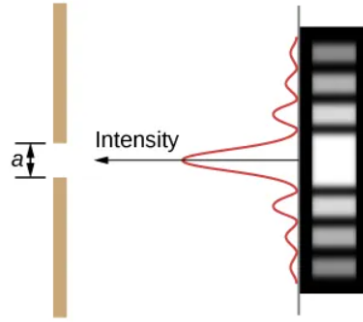
Voidaan myös huomata, että varjostimen keskimmäisenä oleva alue on kaikkein kirkkain ja alueiden kirkkaus himmenee intensiteettimaksimien lisääntyessä. Intensiteettiä kuvaa funktio:

$$I_{\theta} = I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2, \quad (1)$$

jossa $\beta = 2\pi a \sin \theta / \lambda$, I_{θ} on intensiteetti kulmalla θ , I_0 on intensiteetti kulmalla $\theta = 0$, a on raon leveys, θ on kulma sekä λ on aallonpituus. Kuvassa 1 on myös esitetty intensiteettijakauma yhden raon tapauksessa. [7]

1.2 Rayleighin raja

Tarkastellaan nyt kahden ei-koherentin pistemäisen aallonlähteen diffraktiota, kun ne kulkevat pyöreästä raosta. Nämä aallonlähteet voisivat olla kaksi tähteä taivaalla,



Kuva 1. Diffraktiota havainnollistava kuva yhden raon tapauksessa, jossa a on raon leveys. [8]

joita tarkastellaan teleskoopin linssin kautta. Diffraktion aiheuttava rako olisi tässä tapauksessa teleskoopin sisääntuloaukko. Koska rako on pyöreä, aksiaalisymmetrian takia valolähde muodostaa Airyn diffraktiokiekkon, jota on mallinnettu erilaisilla raon säteillä kuvassa 2. [1]

Rayleighin kriteerin mukaan intensiteettikäyrät voidaan erottaa toisistaan juuri ja juuri, kun ensimmäisen tähden Airyn kiekon keskikohta tulee toisen kiekon ensimmäisen minimin päälle. Tämän voi huomata myös kuvan 2 d-kohdasta. Jos käyrät ovat tätä rajaa lähempänä, niitä ei voida enää havaita erillisiksi. [7]

Airyin kiekon ensimmäisen renkaan säteen antaa kaava

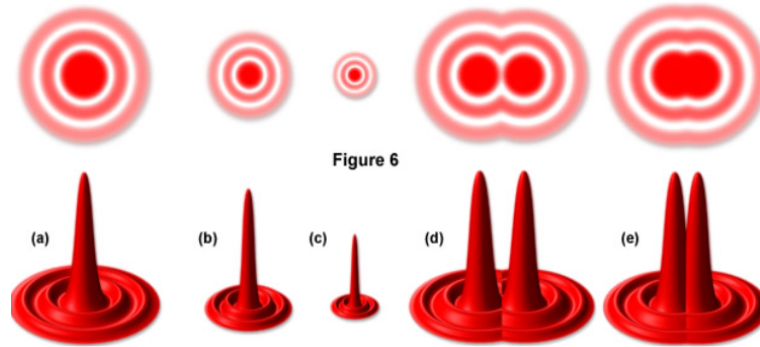
$$q_1 = 1,22 \frac{f\lambda}{a},$$

jossa f on aallon taajuus, λ sen aallonpituus ja a on raon läpimittta. Tässä teleskooppi esimerkissä a olisi apertuurin eli pääpeilin halkaisija. Kuvaan 3 on merkitty tätä sädettä vastaava kulma, joka noudattaa yhtälöä

$$\sin \theta = \frac{q_1}{f}$$

$$\Delta\theta \approx \sin \theta = \frac{q_1}{f} = 1,22 \frac{\lambda}{a}.$$

Resoluution raja saadaan ilmaistua tähtien välisen etäisyyden avulla, kuten kuvassa



Kuva 2. Kuvissa a, b ja c on eri halkaisijoita olevilla raoilla tuotettuja Airyn diffraktiokiekkoja sekä kaksiulotteisessa että kolmiulotteisessa mallissa. Kuvissa d ja e on kahden eri aallonlähteen tuottamat Airyn kiekot. Kuvan e aaltolähteet ovat lähempänä toisiaan kuin kuvassa d. [9]

3

$$(\Delta\varphi)_{\min} = 1,22\frac{\lambda}{a}. \quad (2)$$

Tämä rajoitus tunnetaan nimellä Rayleighin raja. [1]

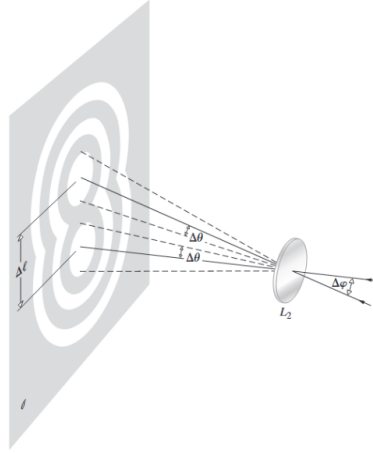
Pelkkä diffraktio ei siis aseta perustavanlaatuisia rajoja resoluutiolle. Rajaan vaikuttaa myös kohinalähteet ja ilmaisimien ominaisuudet [2].

2 Klassista estimaatioteoriaa

Kerättyä dataa mallinnetaan matemaattisesti todennäköisyyden tiheysfunktiona (eng. probability density function PDF), joka riippuu tuntemattomasta parametrasta θ . On intuitiivisesti selvää, että koska θ vaikuttaa todennäköisyyteen, myös estimoitava θ voidaan päätellä havaitusta datasta.

Hyvän estimaattorin keskeisiä ominaisuuksia ovat harhattomuus ja pieni varianssi. Harhattomien estimaattorien joukossa pienimmän varianssin estimaattori (eng. minimum value unbiased estimator, MVUE) nimensä mukaisesti minimoi varianssin.

Tässä kohdassa tulee oleelliseksi asettaa alaraja minkä tahansa harhattoman estimaattorin varianssille. Alaraja tarjoaa keinon arvioida estimaattorien suorituskykyä ja todeta, onko estimaattori MVUE estimaattori. Yleisimmin käytetty alaraja



Kuva 3. Pällekkäiset Airyn kiekot. $\Delta\varphi$ on kahden tulevan aaltorintaman välinen kulma. $\Delta\theta$ kuvaa saapuvan aaltorintaman ja suoran, joka kulkee ensimmäisen Airyn kiekon säteen kautta, välistä kulmaa. [1]

on Cramér–Raon alaraja, joka perustuu Fisher-informaatioon. Fisher-informaatio kuvaa mittausjärjestelmän sisältämää tietoa tuntemattomasta parametrasta. [10]

Myöhemmin huomataan, että Fisher-informaatiolla on myös keskeinen rooli kahden aaltolähteen etäisyyden estimoinnissa kvanttioptiikan näkökulmasta [11].

2.1 Fisher-informaatio

Fisher-informaatio toimii matemaattisen parametrin estimoinnin pohjana. Sillä on kaksi tärkeää roolia: mitata mahdollisuutta arvioida parametrin virheellisyyttä sekä toimia systeemin tai ilmiön epäjärjestyksen mittana. [12]

Havaittua dataa kuvataan PDF:llä estimoitaessa parametria θ . Kun tiheysfunktiota tarkastellaan kuin se olisi tuntemattoman parametrin funktio, siitä puhutaan todennäköisyysfunktiona [10]. Sitä kuvataan Gaussin käyrällä

$$\Phi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta_1 - \theta)^2}{2\sigma^2}\right] d\theta_1,$$

jossa σ^2 on varianssi, σ keskihajonta ja θ_1 on välin $d\theta_1$ päässä θ :sta [13].

Mitä enemmän tuntematon parametri vaikuttaa todennäköisyysfunktioon, sitä paremmin voimme estimoida sen. Tämä näkyy siinä, että kapeampi todennäköisyys-

funktio on täsmällisemmin estimoitavissa. [10]

Funktion terävyyttä voidaan arvioida tehokkaasti yhtälöllä

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\log(\Phi)) = -\frac{1}{\sigma^2}, \quad (3)$$

missä $\Phi = S'(\phi)$ on nyt kaikkien otosten kokonaisfrekvenssi, joille valittu tilastollinen suure saa arvon θ_1 . ϕ on tietyn otoksen esiintymistodennäköisyys, jonka logaritmi on

$$\log \phi = C + \sum \log f,$$

jossa f kuvaa yksittäisen havainnon todennäköisyyttä annetulla parametrilla θ , C on esim. normalisointitekijöistä tai muista parametreista riippumattomista termeistä koostuva vakio. [13]

Kehitetään $\log f$ sarjaksi:

$$\begin{aligned} \log f(\theta) &= \log f(\theta_1) + \overline{\theta - \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\theta_1) + \frac{1}{2} \overline{\theta - \theta_1}^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(\theta_1) + \dots \\ \log f &= \log f_1 + a \overline{\theta - \theta_1} + \frac{b}{2} \overline{\theta - \theta_1}^2 + \dots, \end{aligned}$$

missä symbolin päällä oleva viiva tarkoittaa symbolin odotusarvoa. Myös ϕ :lle saadaan sarjakehitelmä:

$$\log \phi = C + \overline{\theta - \theta_1} S(a) + \frac{1}{2} \overline{\theta - \theta_1}^2 S(b) + \dots$$

Optimaalisessa tilastossa $S(a) = 0$. Kun n kasvaa, ainoat termit tässä lausekkeessa, jotka eivät pienene kohti nollaa, ovat

$$\log \phi = C + \frac{1}{2} n \bar{b} (\overline{\theta - \theta_1})^2,$$

sillä $S(b)$ poikkeaa arvosta nb vain noin $\sqrt{n}\sigma_b$ verran ja erotus $\theta - \theta_1$ on suuruusluokkaa $n^{-1/2}$. Saadaan yhtälö

$$\phi \propto e^{\frac{1}{2} n \bar{b} (\overline{\theta - \theta_1})^2}.$$

Tämä tekijä on jatkuva kaikille otoksille, jotka saavat saman arvon θ_1 . Tästä syystä funktion Φ :n vaihtelu θ :n suhteen määräytyy saman tekijän mukaan, eli

$$\log \Phi = C + \frac{1}{2} n \bar{b} (\theta - \theta_1)^2.$$

Josta saadaan viimein Fisher-informaationa tunnetta yhtälö yllä olevan ja kaavan 3 perusteella

$$-\frac{1}{\sigma_{\theta_1}^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log \Phi = n \bar{b}, \quad (4)$$

missä $b = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(\theta_1)$.

2.2 Cramér-Rao raja

Yleisempi muoto Fisher-informaatiosta tunnetaan nimellä Cramér-Raon raja. Se sitoo varianssin ja odotusarvon välille relaation:

$$\text{Var}[\theta_1] \geq -\frac{1}{E[n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(\theta_1)]}, \quad (5)$$

jossa E on toisen derivaattatermin odotusarvo. [10]

3 Superresoluution teoria

3.1 Parametrin arviointi kvanttimekaniikan keinoin

Tarkastellaan lähtötilaa $\hat{\rho}$, joka riippuu parametrilla θ . Se on tuntematon reaaliluku, jonka suuruutta halutaan arvioida. Parametrin θ estimointi perustuu mittaustuloksiin $\hat{\rho}(\theta)$.

Mittaustulokset voisivat olla diskreettejä, esimerkiksi mitattujen hiukkasten lukumäärä. Ne voivat myös olla jatkuvia, kuten intensiteettijakauma, jota käsiteltiin klassisen optiikan näkökulmasta. Kvanttiteoriassa mittaustulokset esitetään joukko-

na hermiittisiä operaattoreja $\hat{E}(\epsilon)$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

$$\begin{aligned}\hat{E}(\epsilon) &\geq 0 \\ \sum_{\epsilon} \hat{E}(\epsilon) &= 1.\end{aligned}$$

Eli jokainen operaattori on epänegatiivinen, ja niiden summana saadaan identiteetti. Tällaista joukkoa kutsutaan positiivisten operaattorien mitaksi eli POM:ksi.

Ehdollinen todennäköisyys havaita mittaustulos ϵ parametrin θ arvolla voidaan ilmaista operaattorin jäljen, eli matriisin diagonaalialkioiden summana

$$p(\epsilon|\theta) = \text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\hat{\rho}(\theta)]. \quad [14]$$

Raja parametrin θ arvioinnin tarkkuudelle saadaan maksimoimalla klassinen Fisher-informaatio yli kaikkien mahdollisten POM:ien $\{\hat{E}(\epsilon)\}$. Tämä on siis kvanttioptiikan Cramér-Raon raja:

$$\Delta^2 \hat{\theta} \geq \frac{1}{N\mathcal{F}[\hat{\rho}(\theta), \{\hat{E}(\epsilon)\}]} \geq \frac{1}{N\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}[\hat{\rho}(\theta)]},$$

missä N on kokeen toistojen määrä ja $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ on kvantti Fisher-informaatio, joka on määritelty kuten alla. [11]

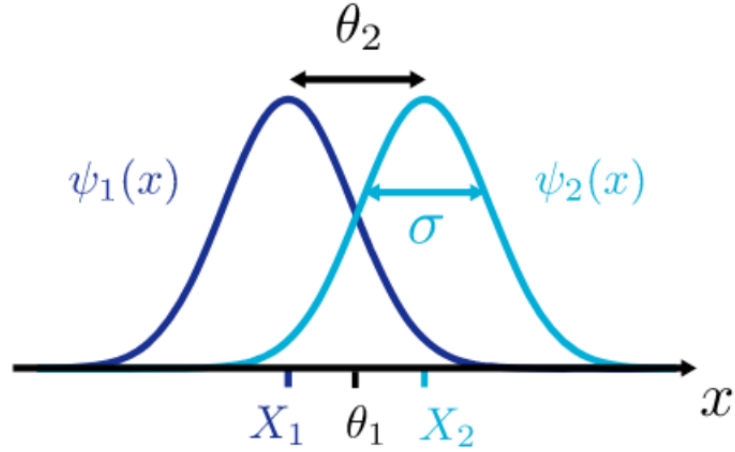
$$\mathcal{F}_{\mathcal{Q}} = \max_{\{E_y(\vec{x})\}} \mathcal{F}[\hat{\rho}(\theta), \{E_y(\vec{x})\}] = \text{Tr}[\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_{\theta}^2] \quad (6)$$

Klassisessa Fisher-informaatiossa keskeisessä roolissa on funktion logaritminen derivaatta, kuten kaavassa 4, joten sille tarvitaan vastine myös kvanttioptiikkaan. Klassisessa tapauksessa pätee:

$$\frac{d\hat{p}(\theta)}{d\theta} = \frac{d \log(\hat{p}(\theta))}{d\theta} \hat{p}(\theta),$$

joten suure, joka kerrottuna todennäköisyysjakaumalla tuottaa derivaattansa, on logaritminen derivaatta. Vastine tälle on operaattori \hat{L}_{θ} . [15]

\hat{L}_{θ} :n valinta ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen operaattorien epäkommutatiivisuudesta johtuen. Tämän vuoksi on valittu, että \hat{L}_{θ} on symmetrinen logaritmiderivaatta,



Kuva 4. Kahdesta pistemäisestä lähteestä syntyvät aaltofunktiot kuvatasolla. X_1 ja X_2 kuvaavat pistelähteen paikkaa. θ_1 on keskikohta, θ on lähteiden etäisyys, jota estimoidaan. σ on pistevastefunktion leveys.[6]

joka toteuttaa alla olevan yhtälön.

$$\frac{d\hat{\rho}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2}(\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_\theta + \hat{L}_\theta\hat{\rho}(\theta))$$

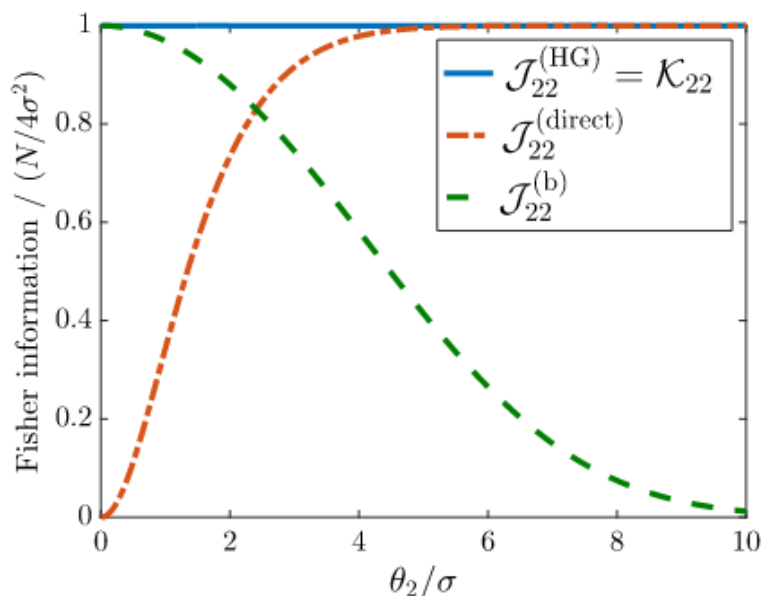
Kuten yhtälössä 6 on esitetty, kvantti Fisher-informaatio kuvaa suurinta mahdollista määrää klassista Fisher-informaatiota, joka voidaan saavuttaa maksimoimalla kaikkien mahdollisten POM-mittausten yli. Näin ollen se toimii tarkkuuden ylärajana ja määrittää parametrin θ arvioinnin perimmäisen herkkyyden riippumatta käytetystä mittalaitteistosta. Täsmällisemmin pätee:

$$\mathcal{F}[\hat{\rho}(\theta), \{\hat{E}(\epsilon)\}] \leq \text{Tr}[\hat{L}_\theta\hat{\rho}(\theta)^2] = \mathcal{F}_Q,$$

josta voidaan huomata, ettei oikea puoli yhtälöstä riipu POM:n valinnasta. [11]

3.2 SPADE-menetelmä

Vuonna 2016 julkaistussa artikkelissa Tsang et al. esittelivät aivan uudenlaisen super-resoluution kuvantamismenetelmän: SPADE:n (eng. spatial mode demultiplexing) [6]. Työssä tutkittiin kvanttimittauksen teorian avulla kuinka tarkasti kahden epäkoherentin pistemäisen lähteen välinen etäisyys voidaan estimoida [2].



Kuva 5. Etäisyyden arvioimisen Fisherin informaatio normalisoidulla Gaussin jakauksella, missä informaatiot ovat ideaaliselle Hermite-Gaussisen kannalle $\mathcal{J}_{22}^{\text{HG}}$, klassiselle tapaukselle $\mathcal{J}_{22}^{\text{direct}}$, suoralle kuvantamiselle ja binääriselle SPADE:lle $\mathcal{J}_{22}^{\text{b}}$. Klassisessä tapauksessa etäisyyden pienentyessä Fisherin informaatio lähestyy nollaa, kun taas SPADE:n informaatio pysyy vakiona. [6]

SPADE:lla voidaan ohittaa klassisen kuvantamisen asettamat rajoitteet sekä Rayleighin raja hyödyntämällä lineaarista optista käsittelyä ennen fotonien laskentaa. SPADE kykenee ideaalitapauksessa estimoimaan kahden lähteen välisen erotusetäisyyden optimaalisella kvantti Fisher-informaatiolla, vaikka lähteiden etäisyys olisi kuinka pieni tahansa. [6]

Seuraavaksi johdetaan SPADE-menetelmän kvantti Fisher-informaatio kahdelle yhtä kirkkaalle, epäkoherentille valonlähteelle, joiden välinen etäisyys on θ , lähteiden [6, 11] mukaisella menettelyllä. Valonlähteet tuottavat kuvan 4 mukaiset aaltofunktiot. Kuvassa on valonlähteiden etäisyyttä merkitty θ :n sijasta θ_2 :lla.

Aloitetaan aaltofunktioiden kannasta $\{|\phi_q\rangle; q = 0, 1, \dots\}$. Tällaisen kannan ominaisvektorit ovat muotoa

$$|\phi_q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_q(x) |x\rangle. \quad (7)$$

Ehdollinen todennäköisyys havaita fotonin q . moodissa on

$$P_1(q) \approx \frac{1}{2}(|\langle \phi_q | \psi_1 \rangle|^2 + |\langle \phi_q | \psi_2 \rangle|^2). \quad (8)$$

Symbolit $|\psi_1\rangle$ ja $|\psi_2\rangle$ kuvaavat niitä vastaavien aaltofunktioiden spatiaali moodeja, jotka tässä esityksessä ovat Hermite–Gaussisia. Myöhemmin ymmärretään, miksi juuri tämä valinta on hyödyllinen. [6]

Aaltofunktiot ovat muotoa:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \psi_0\left(x + \frac{\theta}{2}\right) \\ \psi_2(x) &= \psi_0\left(x - \frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

missä $\psi_0(x)$ on kuvantamissysteemin normalisoitu pistevastefunktio (engl. point-spread function, PSF), jonka tyypillisesti oletetaan noudattavan Gaussin jakaumaa [11]. Aaltofunktioissa on myös oletettu, että kuvassa 4 esitetty lähteiden keskipiste θ_1 on origossa $\theta_1 = 0$.

Todennäköisyys havaita fotonin moodissa q sievenee nyt muotoon

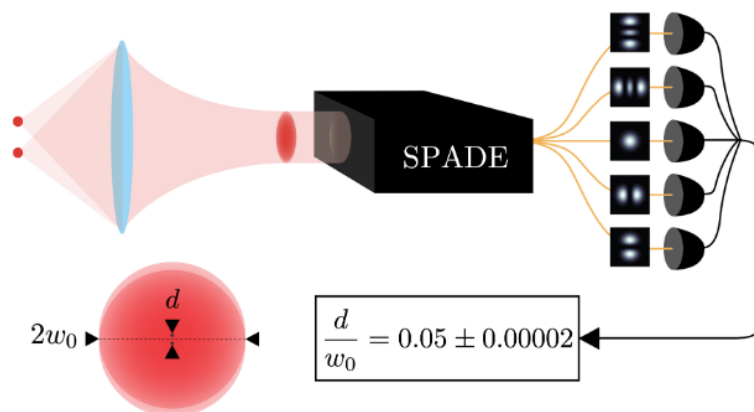
$$P_a(q) \approx |\langle \phi_q | \psi_1 \rangle|^2 = |\langle \phi_q | \psi_2 \rangle|^2 = \exp(\mathcal{Q}) \frac{\mathcal{Q}^q}{q!}, \quad (9)$$

jossa $\mathcal{Q} \equiv \frac{\theta^2}{16\sigma^2}$. Tämä malli pätee, vaikka valonlähteillä ei olisikaan sama intensiteetti tai vaikka $\hat{\rho}$ ei olisi puhdas tila, vaan olisi mikä tahansa $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ ja $|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ yhdistelmä. [6]

Hermite–Gaussisen kannan mittauksen klassinen Fisher-informaatio yli M välin on

$$\mathcal{F}^{\text{SPADE}}(\theta) = N \sum_{q=0}^{\infty} P(q | \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(P(q | \theta)) \right)^2 = \frac{N}{4\sigma^2} = \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}, \quad (10)$$

mikä tarkoittaa sitä, että SPADE on ideaalinen menetelmä etäisyyden estimointiin, sillä sen Fisher-informaatio on suurin, mikä on mahdollista saavuttaa. Muun kannan käyttö olisi siis myös mahdollista, mutta nimenomaan Hermite–Gaussisella kannalla saavutetaan haluttu kvantti Fisher-informaatio.

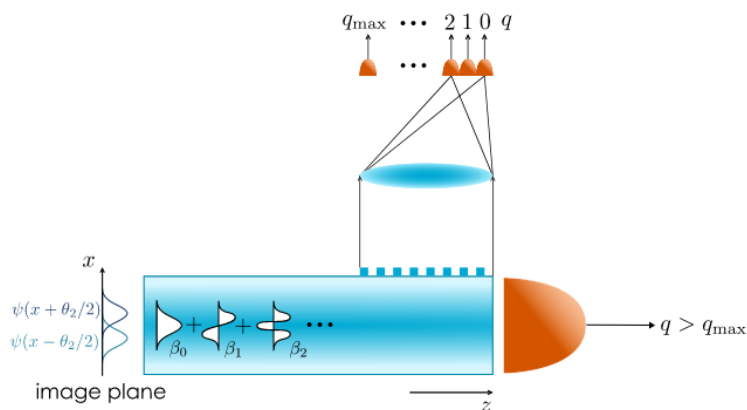


Kuva 6. SPADE-menetelmä perustuu tulevan valon hajottamiseen Hermite–Gaussian-moodipohjaan. Kuvassa esitetyt lukuarvot ovat tyypillisiä tuloksia koeasetelmasta, jossa d on kahden säteen poikittainen erotus kuvatasossa ja w_0 säteiden halkaisija samassa tasossa. [2]

Kuvasta 5 voidaan todeta sama graafisesti. Suoran kuvantamisen Fisher-informaatio (oranssi viiva) lähestyy nollaa, kun etäisyys pienenee, kun taas SPADE-menetelmän Fisher-informaatio (sininen viiva) pysyy vakiona [11]. Kuvan 5 vihreä viiva kuvaa binääristä SPADE:a, jossa valoa ei hajoteta kaikkiin Hermite–Gaussisiin moodeihin, vaan mitataan vain, onko fotoni perusmoodissa vai ei. Tämä menetelmä toimii kuvan perusteella hyvin, kun lähteiden etäisyys lähenee nollaa. Sen Fisher-informaatio on kuitenkin jopa suoraa kuvantamista pienempi, kun etäisyys on suuri.

Kuvassa 6 on esitetty piirros, mitä SPADE-menetelmä tekee. Se siis kuvastaa sitä kuinka kahden pisteen lähettämät aaltorintamat saapuvat SPADE:lle, joka muuntaa yhdistyneen valon viiteen Hermite–Gaussiseen moodiin. Käytännössä Tsang et al. esittivät yhden mahdollisen SPADE-menetelmän toimintaperiaatteen kuvassa 7. Putken päässä on fotonilaskuri, joka havaitsee kaikki jäljelle jäävät korkeampien kertalukujen ja vuotavien moodien fotonit. [6]

Nyt on siis esitetty teoreettinen mittaussuunnitelma, joka perustuu spatiaalisten moodien hajotukseen, epäkoherenttien optisten lähteiden kaukokenttäkuvantamiseen kohteille. SPADE voi estimoida niiden toisia tai korkeampia momentteja



Kuva 7. Havainnollistava kuva monimuotoiseen aaltoputkeen perustuvasta SPADE-menetelmästä. Siinä on hilalähtökytkin, kaukokentän fotonilaskenta ja monimuotoisen aaltoputken päässä oleva fotonilaskuri, joka havaitsee kaikki jäljelle jäävät fotonit korkeampien kertalukujen tai vuotavien moodien osalta. [6]

huomattavasti tarkemmin kuin mihin suora kuvantaminen voi yltää. SPADE:n luotettavuutta ovat lisänneet tutkijoiden suorittamat nopeat demonstraatiot. Haluttu kokeellinen varmennus saavutettiin kuitenkin vasta myöhemmin. [16]

3.3 Vaihtoehtoinen passiivinen kuvantamismetodi

SPADE-menetelmä ei ole ainoa mahdollisista superresoluution passiivisista kuvantamismenetelmistä. Nair ja Tsang et al. esittivät toisenkin ajatuksen: pixSLIVER:n (engl. the interferometric pixelated superlocalization by image inversion interferometry), joka käyttää pikselöityneen detektorin järjestelmää kahdessa interferometrin ulostulossa. Se erottaa kuvatasossa olevan kentän symmetriseen ja antisymmetriseen komponenttiin ja mittaa niiden intensiteettijakaumat.

SLIVER-menetelmä lähestyy Cramér–Raon rajaa etäisyyden estimoinnissa, kun pikselien määrää lisätään. Se on kokeellisesti yksinkertaisempi kuin SPADE-menetelmä. SLIVER tarvitsee kuitenkin useampia mitattavia pikseleitä saavuttaakseen saman kvantti Fisher-informaation määrän kuin SPADE saavuttaa pienellä määrällä moo- deja. SLIVER siis vaatii enemmän resursseja. [17]

4 SPADE:n kokeellinen varmennus

4.1 Tehtyjä tutkimuksia

Vuonna 2020 julkaistussa Optican artikkelissa esitellään SPADE:n kokeellinen toteutus käyttäen korkeaa intensiteettiä ja suuria siirtymiä [3]. Saadut tulokset osoittavat erittäin hyvää yhtäpitävyyttä teorian kanssa ja varmistavat menetelmän käytettävyyden. Samalla tutkimuksessa korostui SPADE-menetelmän spatiaalikanavien välinen kytkentä (engl. crosstalk) tärkeänä ja väistämättömänä tekijänä. Se on otettava huomioon tämän kaltaisten järjestelmien suorituskyvyn arvioinnissa.

Lopuksi tutkijat toteavat, että tämä mittausmenetelmä voidaan mukauttaa myös muiden spatiaalisten parametrien mittaamiseen soveltamalla käytettävä moodikanta kiinnostuksen kohteena olevalle parametrille. [3]

Vuonna 2023 julkaistussa työssä analysoidaan SPADE:n käyttöä kirkkaiden signaalien alueella [4]. Tutkijat osoittivat, että odotettavissa oleva signaali-kohinasuhde on paljon suurempi SPADE:llä kuin suora kuvantaminen, vaikka SPADE:ä rajoittaa crosstalk.

Tutkijat saavat täydennettyä SPADE:n teorian kokeellisella demonstraatiolla, jossa arvioidaan kahden epäkoherentin pistemäisen lähteen poikittaisetäisyyttä sekä suhteellista kirkkautta. Kokeellinen varmenne avaa mahdollisuuden SPADE:n sovelluksille myös kirkkaiden signaalien alueella, kuten kuvantunnistukseen ja astronomisiin havaintoihin aallonpituuksia pienemmällä tarkkuudella. [4]

4.2 MPLC-menetelmä

SPADE-menetelmän toistaiseksi parhaat tulokset saavutettiin vuonna 2024 julkaistussa artikkelissa [2]. Tutkijat pystyivät onnistunein lopputuloksin toteuttamaan kahden epäkoherentin ja yhtä kirkkaan lähteen välisen etäisyyden estimoinnin SPADE-menetelmällä.

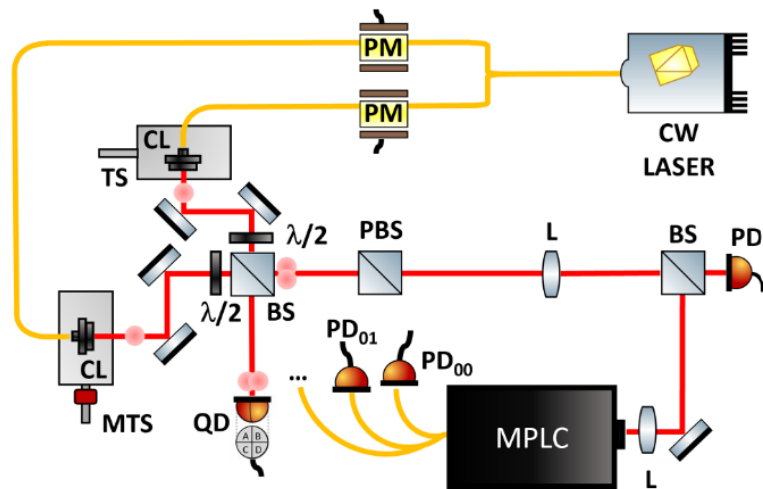
Työ suoritettiin käyttäen kuvan 8 mukaista koelaitteistoa. Menetelmällä luodaan kaksi epäkoherenttia valoaaltoa jakamalla kuitukytketyn tietoliikennelaserin (CW-laser) luoma valo kahteen polkuun. Aallot kuljetetaan sähkö-optisten modulaattoreiden läpi, jotka lisäävät valoon satunnaisia vaiheita korkeilla taajuuksilla.

Tämän jälkeen säteet yhdistetään kokoajalinssien avulla ja niiden etäisyys lasketaan kvadranttidetektoreilla QD. Tämä tehdään niin, että laite kalibroidaan, kun toinen lähde on kytkettynä pois päältä. Yksittäisen lähteen sijainnin arvioinnissa QD mahdollistaa arvion, joka on lähellä Cramér–Rao-rajaa. Siksi sitä voidaan pitää luotettavana vertailukohtana. [2]

Yhdistetty säde tuodaan lopuksi MPLC-muuntimelle (engl. multi-plane light converter), joka on Cailabs-yrityksen kaupallinen laite [18]. Sen sisäistä rakennetta ei julkisen tiedon perusteella tiedetä. Laite hajottaa valon viiteen Hermite-Gaussiseen spatiaali moodiin. Niitä merkitään: HG_{00} , HG_{01} , HG_{10} , HG_{02} ja HG_{20} . Kaikkien näiden moodien käyttö on ratkaisevaa menetelmän kestävyuden ja toistettavuuden kannalta, sillä ne antavat tietoa sekä säteen keskipisteestä että muotosovituksesta (engl. mode-matching).

Nimenomainen moodi HG_{01} sisältää kaiken tarvittavan tiedon pienten poikittaisuuntaisten siirtymien (jotka ovat paljon pienempiä kuin valon säde) arvioimiseksi. Tämän moodin intensiteetti ulostulossa mitataan myös QD:llä. Näin saatua kalibrointikäyrää käytetään parametrien estimoinnissa. Tutkimuksessa on oletettu, että säteiden keskipiste on tiedossa. Tämän tiedon avulla symmetrisoidaan laitteiston alkuperäinen kalibrointikäyrä, jotta voidaan päätellä kahden lähteen välinen etäisyys mittaamalla HG_{01} -moodin optinen teho.

Mittausta suoritettaessa säteet kohdistetaan ja keskitetään MPLC-muuntimeen, hyödyntäen viiden moodin intensiteettejä ja kvadrantti-ilmaisinta. Tämän jälkeen molempia säteitä siirretään symmetrisesti tietyn etäisyyden verran. Sitten HG_{01} -kuidun ulostulon optinen teho mitataan tietyn aikavälin kuluessa. Etäisyys arvioi-



Kuva 8. Kokeellinen asetelma MPLC-menetelmällä. Jatkuvaa aaltoa tuottava kuitulaaseri luo kaksi epäkoherenttia lähdettä, jotka jaetaan kahteen haaraan. Haaroja moduloidaan toisistaan riippumattomilla vaihemodulaattorilla PM (engl. phase modulator). Tämän jälkeen säteet kytketään vapaaseen tilaan kokoajalinssien CL (engl. collimator) avulla, jotka on kiinnitetty joko siirtopöytään TS (engl. translation stage) tai moottoroituun siirtopöytään MTS (engl. motorized translation stage). Siirtopöytiä käytetään säteiden välisen erotuksen asettamiseen. Säteen tulossa ulos kokoajalinssistä, sen halkaisija on 1,135 mm. Yhdistetty säde kytketään lopuksi MPLC:lle (engl. multi-plane light converter). Säteiden välinen erotus arvioidaan määrittämällä kummankin säteen sijainti kvadranttidetektorilla QD (engl. quadrant detector), kun toinen lähde on kytketty pois päältä. Suurten fotonivirtojen alueella normalisointiin käytetään ulkoista fotodiodia PD (engl. photodiode). [2]

daan käyttämällä "kahden lähteen" kalibrointikäyrää.

Työ suoritettiin erikseen kirkkaille sekä himmeille lähteille. Himmeillä lähteillä tutkijat osoittivat suorituskyvyn, jota on mahdotonta saavuttaa edes ihanteellisella suoralla kuvantamisella. Tällaisessa ihanteellisessa laitteistossa siis olisi äärettömän resoluution kamera, ei kohinaa eikä sitä vastaavia häviöitä. Tällaista laitteistoa ei siis ole olemassakaan. Tutkimuksessa saavutettiin $20\mu\text{m}$ tarkkuus 1mm sädekoolla, kun valitussa moodissa mitattiin vain noin 200 ftonia.

Kirkkaita optisia lähteitä tarkasteltaessa MPLC-laitteen teho on noin $650\ \mu\text{W}$, joka on noin 10^{10} -kertainen verrattuna tehoon, jota himmeillä laitteilla käytetään. MPLC käyttää 5ms integrointiaikaa, joka vastaa 10^{13} havaittua ftonia. Koska herkkyys paranee havaittujen ftonien määrän kasvaessa, voidaan odottaa herkkyydenkin parantuvan.

Näin tosiaan tapahtuu: tutkimuksessa saavutettiin suoran mittauksen herkkyys, joka on jopa viisi kertaluokkaa parempi kuin Rayleighin raja. Käytännössä tämä tarkoittaa 20nm herkkyyttä ja $1\mu\text{m}$ tarkkuutta 1mm sädekoolla. [2]

5 Yhteenveto

Kaksi lähellä toisiaan olevaa valonlähdettä, näyttäytyvät vastaanottimella yhtenä. Valo kuitenkin itsessään sisältää informaation niiden välisestä etäisyydestä, jota Diffraction ja käytetyn kuvantamisjärjestelmän optisten ominaisuuksien vuoksi ei klassisin metodein voida havaita.

SPADE-menetelmällä valo hajotetaan useisiin Hermite–Gaussisiin moodeihin. Tällä mahdollistetaan valon sisältämän informaation kerääminen. Hermite–Gaussinen moodikanta on luonnollinen ja optimaalinen valinta. Sen avulla saavutetaan kvantti Fisher-informaatio, joka on suurin klassisen Fisher-informaation määrä. Tällöin saavutetaan suurin mahdollinen tarkkuus.

MPLC-tekniikka mahdollistaa SPADE:n kokeellisen toteutuksen lineaarisella,

passiivisella optiikalla. Tekniikalla toteutetaan useiden vaihe-elementtien avulla koko SPADE-menetelmän ydin, eli unitaarinen spatiaalinen moodimuunnos. Näin SPADE:sta tekee ainutlaatuisen se, ettei se vaadi lähteiden aktiivista manipulointia, toisin kuin monet muut superresoluutiomenetelmät. Tämän vuoksi sillä on monia käyttökohteita tähtitieteessä ja muissa sovelluksissa, joissa lähteitä ei voida kontrolloida.

Nykyiset kokeelliset demonstraatiot ovat keskittyneet pääosin laboratorio-olosuhteisiin ja pieniin, kirkkaisiin kohteisiin. Ne kuitenkin osoittavat, että kvanttimekaniikka ei aseta esteitä superresoluutiolle. Tulevaisuudessa SPADE:n yhdistäminen adaptiiviseen optikkaan, suuriin teleskooppeihin ja tehokkaampiin detektoreihin voi mahdollistaa entistä tarkempia mittauksia myös tähtitieteessä. SPADE-menetelmä haastaa perinteisen käsityksen optisesta resoluutiosta. Se tarjoaa ratkaisun, kun klassiset menetelmät epäonnistuvat.

Tekoälyn käyttö tutkielmassa

Olen hyödyntänyt tutkielmassani tekoälyohjelmia ChatGPT ja Google Gemini suomentamisen tukena. En ole käyttänyt tekoälyn antamia suoria käännöksiä, vaan hyödyntänyt työkaluja lähdetekstin sisällön jäsentämiseen ja relevanttien kohtien paikantamiseen. Lisäksi olen kysynyt tekoälyltä apua selvittääkseni, miltä sivulta tai kirjan osasta tieto on löydettävissä.

Viitteet

- [1] E. Hecht, *Optics*, 5 edition. global edition ed. (Pearson Education, IncBoston, 2017).
- [2] C. Rouvière, D. Barral, A. Grateau, I. Karuseichyk, G. Sorelli, M. Walschaers ja N. Trep, *Optica* **11**, 166 (2024) [doi:10.1364/OPTICA.500039](https://doi.org/10.1364/OPTICA.500039)
url<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=optica-11-2-166>.
- [3] P. Boucher, C. Fabre, G. Labroille ja N. Trep, *Optica* **7**, 1621 (2020) [doi:10.1364/OPTICA.404746](https://doi.org/10.1364/OPTICA.404746)
url<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=optica-7-11-1621>.
- [4] L. Santamaria, D. Pallotti, M. Siciliani De Cumis, D. Dequal ja C. Lupo, *Optics Express* **31**, 33930 (2023) [doi:10.1364/OE.486617](https://doi.org/10.1364/OE.486617)
url<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=oe-31-21-33930>.
- [5] G. Vicidomini, P. Bianchini ja A. Diaspro, *Nature Methods* **15**, 173 (2018) [doi:10.1038/nmeth.4593](https://doi.org/10.1038/nmeth.4593)
url<https://www.nature.com/articles/nmeth.4593>.
- [6] M. Tsang, R. Nair ja X.-M. Lu, *Physical Review X* **6**, 031033 (2016) [doi:10.1103/PhysRevX.6.031033](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.031033)
url<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.6.031033>.
- [7] R. A. Serway, *Physics for Scientists & Engineers, with Modern Physics, Saunders golden sunburst series*, 4th ed ed. (Saunders College PubPhiladelphia, 1996).
- [8] Learning objectives, [online, viitattu 12.1.2026]. Saatavilla [www.muodossa: <https://openstax.org/books/university-physics-volume-3/pages/4-1-single-slit-diffraction>](http://www.muodossa:https://openstax.org/books/university-physics-volume-3/pages/4-1-single-slit-diffraction).
- [9] Image Formation in the Microscope, [online, viitattu 12.1.2026]. Saatavilla [www.muodossa: <https://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/print/basics/imageformation-print.html>](http://www.muodossa:https://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/print/basics/imageformation-print.html).
- [10] S. M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing. 1: Estimation theory*, 20. pr ed. (Prentice Hall PTRUpper Saddle River, NJ, 2013), num Pages: 595.
- [11] N. E. Titov, Spatial-Mode Demultiplexing for Quantum-Inspired Superresolution Experiments, 2025, arXiv:2509.17115 [physics].
- [12] B. R. Frieden, *Science from Fisher Information: A Unification* (Cambridge University PressCambridge, 2004).
- [13] R. A. Fisher, *The Transactions of the Royal Society of London, A*, 222 ed. (PUBLISHERLondon, 1922).

- [14] L. Pezze' ja A. Smerzi, Quantum theory of phase estimation, 2014, arXiv:1411.5164 [quant-ph].
- [15] R. Demkowicz-Dobrzanski, Quantum Measurement and Estimation Theory, 2021.
- [16] M. Tsang, New Journal of Physics **19**, 023054 (2017) doi:10.1088/1367-2630/aa60ee
url<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/aa60ee>.
- [17] R. Nair ja M. Tsang, (2016) doi:10.48550/ARXIV.1604.00937
url<https://arxiv.org/abs/1604.00937>.
- [18] Cailabs, [online, viitattu 8.2.2026]. Saatavilla [www-muodossa](http://www.muodossa.com) <<https://www.cailabs.com/aerospace-defense/laser-communications/technology-building-blocks/>>.