TURUN YLIOPISTO

Pääakseliongelma

Olivia Koivisto

LuK-tutkielma
Toukokuu 2025

Tarkastajat:
Doc. Jyrki Lahtonen

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

OLIVIA KOIVISTO: Pääakseliongelma
LuK-tutkielma, 18 s.
Matematiikka
Toukokuu 2025

Tutkielmassa käsitellään pääakseliongelmaa, joka on matematiikassa keskeinen menetelmä tasossa olevien toisen asteen käyrien, eli kartioleikkauksien yksinkertaistamiseen. Tässä tutkielmassa keskitytään degeneroitumattomiin kartioleikkauksiin, ellipsiin, hyperbeliin ja paraabeliin. Pääakseliongelman avulla leikkauksille voidaan määritellä geometriset ominaisuudet, kuten keskipiste ja puoliakselien suunnat.

Pääakseliongelman ratkaisemisessa hyödynnetään matriisilaskentaa, etenkin symmetristen matriisien ominaisarvoja ja -vektoreita. Tutkielmassa esitetään esimerkkejä sekä suuntaissiirretyistä että kiertyneistä kartioleikkauksista, ja näytetään kuinka menetelmää voidaan soveltaa näihin tilanteisiin.

Tutkielman tavoite on toimia opetusmateriaalina lukion pitkän matematiikan opiskelijoille.

Asiasanat: pääakseliongelma, kartioleikkaus, toisen asteen käyrä, matriisilaskenta, opetusmateriaali

Sisällys

1 Johdanto

Analyyttinen geometria tarjoaa monia tehokkaita menetelmiä käyrien ja niiden yhtälöiden tarkasteluun yhdistämällä geometriset muodot algebrallisiin laskutoimituksiin. Tässä tutkielmassa tutustutaan tarkemmin yhteen analyyttisen geometrian menetelmään, pääakseliongelmaan. Se on keskeinen työkalu, kun halutaan tarkastella kartioleikkauksien, kuten ellipsin, hyperbelin ja paraabelin yhtälöitä. Pääakseliongelman avulla niitä on mahdollista yksinkertaistaa siten, että käyrän tyyppi sekä geometriset ominaisuudet ovat helposti määritettävissä. Tutkielman viimeisessä luvussa tutustutaan myös käänteiseen ongelmaan, jossa käyrän geometriset tiedot ovat annettu mutta yhtälö puuttuu.

Tutkielmassa tarkastellaan sekä suuntaissiirrettyjä että kiertyneitä käyriä. Pääakseliongelmaa voitaisiin soveltaa kolmiulotteisiin leikkauksiin, mutta tässä tutkielmassa perehdytään ainoastaan kaksiulotteisiin tasoleikkauksiin. Pääakseliongelmaa käytettäessä keskeisiä matemaattisia työkaluja ovat matriisilaskenta, toisen asteen yhtälöt sekä vektorit. Tutkielman kannalta oleelliset työkalut esitetään lukijalle kolmannessa luvussa. Tämän jälkeen luvuissa 4 ja 5 käydään läpi esimerkkejä pääakseliongelmaa hyödyntävistä tehtävistä.

Tutkielman tarkoitus on esittää pääakseliongelma lukion matematiikkaan sopivaksi, laajentaen lukiossa pitkää matematiikkaa opiskelevien ymmärrystä lineaarialgebran sovelluksista. Jotta lukio-opiskelija ymmärtäisi tutkielman sisällön, on hänen tullut suorittaa ainakin pitkän matematiikan neljä ensimmäistä kurssia.

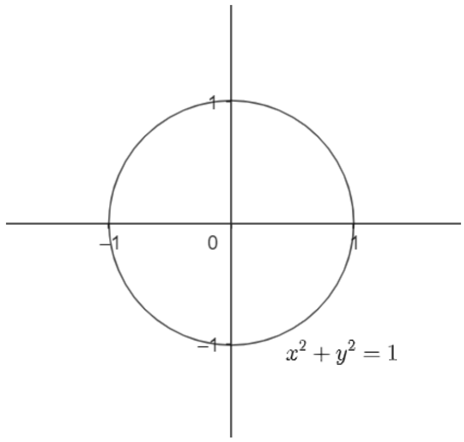
Tutkielma perustuu kolmeen lineaarialgebran teokseen Steven J. Leon *Linear Algebra with Applications* [1], Charles G. Cullen *Linear Algebra with Applications* [2] sekä John B. Fraleigh ja Raymond A. Beauregard *Linear Algebra* [3]. Teokset tarjoavat teoreettisen perustan tutkielman pääakseliongelman käsittelylle.

2 Perustietoja

Yhtälömuodossa annettu *käyrä* tarkoittaa, että mikäli on annettu esimerkiksi yhtälö

$$x^2 + y^2 = 1,$$

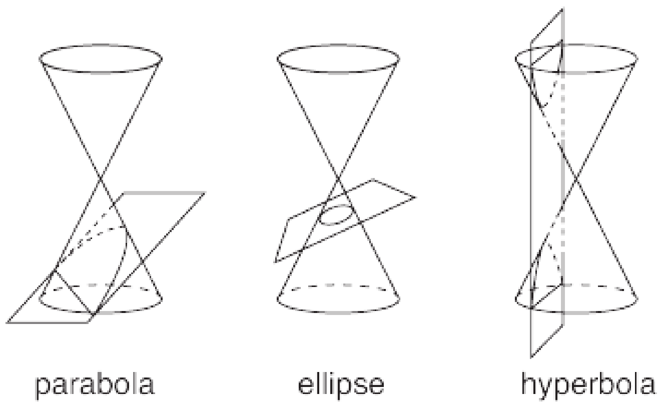
niin käyrä on niiden pisteiden (x, y) joukko, jotka toteuttavat yhtälön. Edellä esitetyn yhtälön määräämä käyrä on ympyrä, jonka keskipiste on origossa ja säde on yksi. Yhtälön $x^2 + y^2 = 1$ muodostama käyrä on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1: Origokeskeinen yksikköympyrä

2.1 Kartioleikkauksia

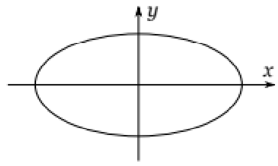
Kartioleikkaus on toisen asteen käyrä, joka saadaan, kun ympyräkartio leikataan tasolla. Tässä tutkielmassa keskitytään *degeneroitumattomiin* eli *surkastumattomiin* kartioleikkauksiin tasossa. Ne syntyvät, kun leikkaava taso ei kulje kartion huipun kautta. Tällainen käyrä on pääsääntöisesti *ellipsi*, *hyperbeli* tai *paraabeli*. Nämä leikkaukset esitetään kuvassa 2.



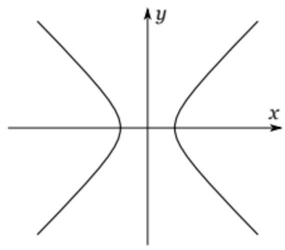
Kuva 2: Kartioleikkaukset

Jokaiselle leikkaukselle voidaan määrittää tunnettu *standardimuotoinen* yhtälö. Näissä yhtälöissä käyrän pääakselit ovat koordinaattiakselien x ja y suuntaiset, eli ne ovat suorassa koordinaatiston suhteen. Seuraavaksi esitetyissä yhtälöissä parametreille a ja b pätee $a, b > 0$:

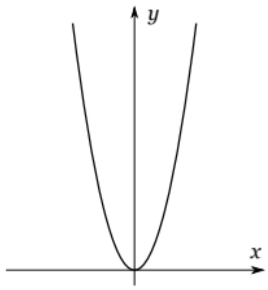
Ellipsi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Hyperbeli $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Paraabeli $y = ax^2$



Esitetyille standardimuotoisille yhtälöille voidaan määrittää yleinen kartioleikkauksen yhtälö.

Määritelmä 1. Yleinen toisen asteen yhtälö

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

missä $(a, \ldots, f \in \mathbb{R})$ ja ainakin yksi luvuista a, b tai c on nollasta eroava.

2.2 Suuntaissiirretyt kartioleikkaukset

Luvussa 2.1 *Kartioleikkauksia* käsiteltiin ellipsin, hyperbelin ja paraabelin standardimuotoisia esityksiä. Näissä yhtälöissä on oletettu, että ellipsin ja hyperbelin keskipiste sekä paraabelin huippu ovat origossa. Tutkielman myöhempiä vaiheita varten käsitellään kartioleikkauksien yhtälömuodot myös silloin, kun niiden keskipiste tai huippu on siirretty pisteeseen (h, k). Suuntaissiirrettyjen yhtälöiden muodot ovat seuraavat:

Ellipsi	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Hyperbeli	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Paraabeli	$(y-k) = a(x-h)^2.$

3 Käyrän tunnistaminen

Tässä luvussa tutustutaan tarkemmin pääakseliongelmaan, eli toisen asteen käyrien tunnistamiseen. Tavoitteena on selvittää käyrän tyyppi sekä sen geometriset ominaisuudet, kuten keskipiste, puoliakselien suunnat ja suuruudet. Näiden tietojen avulla käyrä on mahdollista piirtää hyvinkin tarkasti. Tässä luvussa tullaan esittämään menetelmät, joilla toisen asteen yhtälön analysoiminen onnistuu.

3.1 Käyrän tunnistamisen perusteet

Jotta saadaan selville käyrän tyyppi sekä sen geometriset ominaisuudet, tulee analysoida toisen asteen yhtälöä $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Tutkielman ensimmäisessä luvussa 1 *Perustietoja* käytiin läpi kartioleikkauksien standardimuotoisia esityksiä. Esimerkiksi yhtälö

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

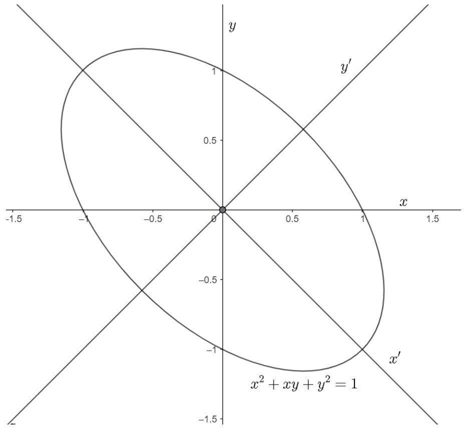
on helppo tunnistaa ellipsiksi, koska yhtälöllä on tunnistettava muoto ja siinä esiintyy ainoastaan neliötermejä x^2 ja y^2.

Määrittelimme myös kartioleikkauksien yleisen yhtälön

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Yhtälössä esiintyvä sekatermi xy hankaloittaa käyrän tunnistamista, sillä se osoittaa käyrän kiertyneen koordinaattiakselien x ja y suhteen.

Esimerkki 1. Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ kuvaa luvun 1 esittämällä tavalla origokeskeistä ympyrää. Kun lisätään tähän sekatermi xy saadaan yhtälö, joka on muotoa $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tämä puolestaan kuvaa kiertynyttä ellipsiä. Esimerkillä korostetaan, kuinka suuri vaikutus yhtälössä esiintyvällä sekatermillä on käyrän tyyppiin.



Kuva 3: Ellipsi $x^2 + xy + y^2 = 1$

3.2 Matemaattiset työkalut

Pääakseliongelmassa ensisijainen tavoite on eliminoida toisen asteen yhtälöstä sekatermi xy. Tämä muuttaa yhtälön standardimuotoiseen esitykseen, josta käyrän tyyppi ja sen geometriset ominaisuudet ovat nähtävissä. Sekatermin eliminoimisessa käytetään toisen asteen yhtälön matriisiesitystä sekä sen ominaisarvoja ja -vektoreita.

Määritelmä 2. Toisen asteen yhtälön matriisimuoto

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0.$$

Symmetrisen matriisin $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit ovat tärkeässä asemassa pääakseliongelmassa. Ominaisarvoista on pääteltävissä käyrän tyyppi. Esimerkkinä, kun molemmat ominaisarvot ovat positiivisia käyrän tyyppi on ellipsi. Jos toinen ominaisarvo on positiivinen ja toinen negatiivinen, käyrä on hyperbeli.

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälön $x^2 + xy + y^2 = 1$ ominaisarvot.

Yhtälön matriisiksi saadaan määritelmä 2 mukaisesti $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$. Tästä voidaan laskea ominaisarvot determinantin avulla.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - \tfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow (1-\lambda) = \pm\tfrac{1}{2},$$

Ominaisarvoiksi saadaan $\lambda = \frac{3}{2}$ ja $\lambda = \frac{1}{2}$. Molemmat ominaisarvot ovat positiivisia, joten yhtälön kuvaama käyrä on ellipsi.

Tutkielmassa tarkastellaan myös käyriä, joiden pääakselit eivät ole koordinaattiakselien suuntaiset. Käyrän kiertyminen voidaan päätellä ominaisvektoreista, jotka saadaan ratkaistua kullekin ominaisarvolle kaavasta

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0.$$

Kun käyrä on kiertynyt, sen eliminoimiseksi tarvitaan ortogonaalimatriisi, jolla tarvittava koordinaattimuunnos voidaan suorittaa.

Määritelmä 3. Neliömatriisia A sanotaa ortogonaaliseksi, jos matriisi on kääntyvä ja $A^{-1} = A^T$, eli:

$$AA^T = I \text{ tai } A^T A = I$$

3.3 Käyrien luokittelu

Kun tutkitaan kartioleikkauksen pääakseliongelmaa tasossa, voidaan erottaa neljä erilaista tapausta. Nämä luokitellaan sen mukaan, onko käyrä origokeskeinen eli onko sille tehty suuntaissiirtoa ja/tai onko käyrä kiertynyt.

1. **Ei suuntaissiirtynyt, ei kiertynyt**

   Yksinkertaisin tilanne, jossa käyrä on origokeskeinen ja sen pääakselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Toisen asteen yhtälössä ei ole sekatermiä bxy eikä ensimmäisen asteen termejä dx ja ey.

2. **Suuntaissiirtynyt, ei kiertynyt**

   Toisessa tapauksessa käyrän pääakselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, mutta keskipiste on siirtynyt pisteeseen (h, k). Yhtälössä ei esiinny $xy-$sekatermiä, mutta siinä esiintyy ensimmäisen asteen termejä.

3. **Ei suuntaissiirtynyt, kiertynyt**

   Kolmannessa tapauksessa käyrä on origokeskeinen, mutta sen pääakselit eivät ole koordinaattiakselien suuntaitse. Käyrä on kiertynyt, jolloin sen yhtälössä esiintyy $xy-$termi.

4. **Suuntaissiirtynyt, kiertynyt**

   Neljännessä ja haastavimmassa tapauksessa käyrä on sekä suuntaissiirrtynyt että kiertynyt. Tällaisen käyrän yhtälössä esiintyy ensimmäisen asteen termit ja sekatermi xy.

Seuraavassa luvussa 4 käsitellään tapauksia tarkemmin sekä esitetään vaiheittain menetelmiä kunkin tilanteen analysoimiseksi.

4 Tilanteiden tarkastelu

Tässä luvussa käydään tarkemmin läpi eri tilanteet, ja niille ominaiset ratkaisumenetelmät. Luvussa ei kuitenkaan tarkastella tilannetta, jossa käyrä ei ole suuntaissiirtynyt eikä kiertynyt. Tällainen tilanne ei ole oleellinen tarkastelun kannalta, sillä siinä yhtälölle ei tarvitse tehdä muunnoksia sen tarkastelun mahdollistamiseksi. Siirrytään suoraa tarkastelemaan tilannetta, jossa käyrä on suuntaissiirtynyt, mutta ei kiertynyt.

4.1 Suuntaissiirtynyt, ei kiertynyt

Yksinkertaisin tilanne on, kun kartioleikkauksen yleisessä yhtälössä ei esiinny ollenkaan $xy-$termiä. Tällöin voidaan päätellä, että käyrän pääakselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Annettu yhtälö voidaan täydentää neliöksi käyrän tarkempaa analysointia varten.

Esimerkki 3. Mitä käyrää yhtälö $3x^2 + y^2 - 6x + 4y = -1$ kuvaa?

Täydennetään yhtälö neliöksi

$$
\begin{aligned}
&3(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = -1 \\
&3(x^2 - 2x + 1) + y^2 + 4y + 4 = -1 + 3 \cdot 1 + 4 \\
&3(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 6.
\end{aligned}
$$

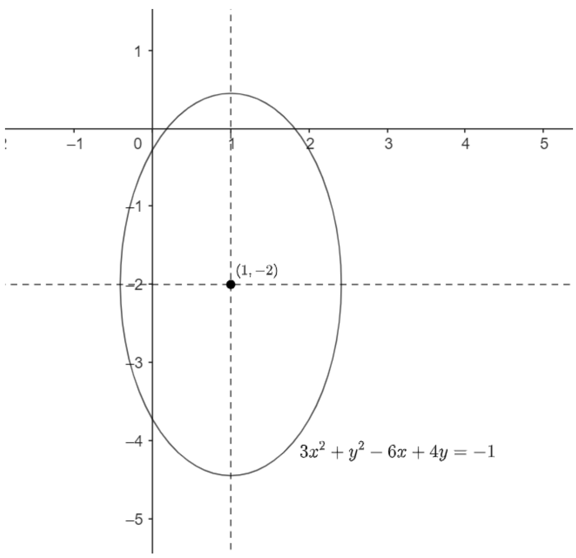
Jaetaan yhtälön molemmat puolet luvulla 6

$$\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+2)^2}{6} = 1$$

Olkoon $x' = x - 1$ ja $y' = y + 2$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$$

Kyseessä on ellipsi, jonka keskipiste on pisteessä $(x_0, y_0) = (1, -2)$. Ellipsin puoliakselien pituudet ovat $a = \sqrt{2}$ x-akselin suuntaan sekä $b = \sqrt{6}$ y-akselin suuntaan.



Kuva 4: Ellipsi $3x^2 + y^2 - 6x + 4y = -1$

4.2 Ei suuntaissiirtynyt, kiertynyt

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, jossa käyrä on origokeskeinen, mutta sen pääakselit eivät ole koordinaattiakselien suuntaiset. Tällaisen käyrän voi tunnistaa yhtälössä esiintyvästä sekatermistä xy, ilman ensimmäisen asteen termejä.

Tässä muodossa esiintyvän yhtälön analysoinnissa voidaan hyödyntää pääakseliprobleeman menetelmiä, eli symmetrisen matriisin diagonalisaatiota ortogonaalimuunnoksen avulla.

Ratkaistaessa yhtälöä etsitään ensin symmetrinen matriisi A. Tämä vaihe on yksinkertainen, sillä matriisi kartioleikkausten toisen asteen yleiselle yhtälölle (1) määritetystä matriisimuodosta (2). Tämän jälkeen matriisille A määritellään ominaisarvot ja ominaisvektorit, jotka määrittävät käyrän muodon sekä pääakselien suunnat.

Käydään havainnollistamista varten läpi esimerkkitehtävä tilanteesta.

Esimerkki 4. Tunnista yhtälön $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 16$ kuvaama käyrä.

Huomataan, että yhtälössä esiintyy $xy-$termi, tämä viittaa siihen, että käyrä ei ole suorassa koordinaattiakselien suuntaan vaan se on kiertynyt. Yhtälössä ei ole ensimmäisen asteen termejä, joten käyrä on origokeskeinen.

Etsitään symmetrinen matriisi A toisen asteen yhtälön matriisimuodon avulla.

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ eli } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ratkaistaan A:n ominaisarvot karakterisesta yhtälöstä

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

Matriisin A ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 2$ ja $\lambda_2 = 4$.

Koska saadut ominaisarvot ovat molemmat positiivisia, käyrän muoto on ellipsi.

Ominaisarvot kertovat käyrän muodon, mutta ominaisvektorit kertovat uusien pääakselien suunnat. Ratkaistaan ensin ominaisvektori, kun $\lambda_1 = 2$. Laskemisessa hyödynnetään ehtoa $(A - \lambda I_n)u = 0$, jolloin saadaan $(2I - A)u_1 = 0$. Lasketaan

$$2I - A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & 0-1 \\ 0-1 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

jolloin

$$(2I - A)u_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Saadaan $-x-y=0$, eli $x=-y$. Ominaisvektori on siis $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Voimme vielä tarkistaa tämän

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nähdään, että saatu ominaisvektori toteuttaa yhtälön.

Kun $\lambda_1 = 2$ ominaisvektori on siis $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Ratkaistaan seuraavaksi u_2, kun $\lambda_2 = 4$:

$$4I - A = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 0-1 \\ 0-1 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

jolloin

$$(4I - A)u_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nähdään $x - y = 0$, eli $x = y$. Ominaisvektori u_2 saadaan siis $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tarkistetaan tämä

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yhtälö toteutuu, joten kun $\lambda_2 = 4$ niin ominaisvektori $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matriisin A ominaisvektoreiksi saadaan $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ja $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tehdään ominaisvektoreista ortogonaalinen matriisi P. Tätä varten tulee normalisoida vektorit, eli tehdä niistä pituudeltaan 1.

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, vektorin pituus $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, normalisoitu vektori $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, vektorin pituus $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, normalisoitu vektori $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Kiertomatriisi P:ksi saadaan

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että uudet koodrinaatit (x', y') kuvautuvat vanhoista koordinaateista muunnoksella $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, koska P on ortogonaali matriisi.

Alkuperäinen yhtälö $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 16$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left(P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right)^T A \left(P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right) = 16$$

.

Matriisilaskennan mukaisesti vektorien transpoosi toimii seuraavasti

$$\left(P \begin{bmatrix} x' \; y' \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} P^T.$$

Yhtälö saadaan sievennettyä muotoon

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} P^T A P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 16$$

Lasketaan $P^T AP$:

$$P^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-1}{\sqrt{2}} & \frac{1+3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3+1}{\sqrt{2}} & \frac{1-3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$P^T AP = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\cdot1-4\cdot1}{2} & \frac{2\cdot1+4\cdot1}{2} \\ \frac{4\cdot1-2\cdot1}{2} & \frac{4\cdot1+(-2)\cdot1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Huomataan, että

$$P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lopulliseksi yhtälöksi saadaan:

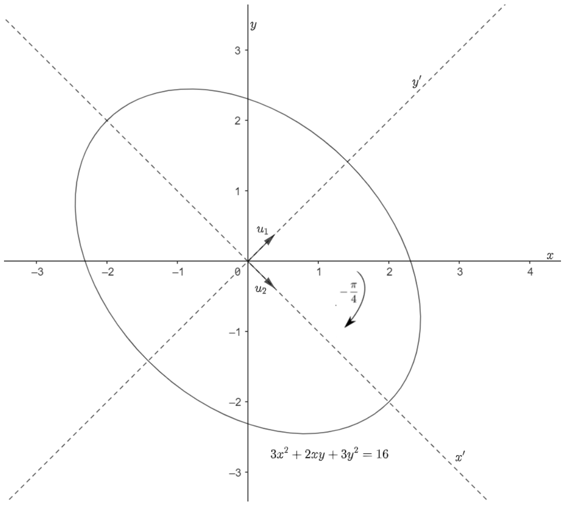
$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 16,$$

joka saadaan sievennettyä muotoon $2x'^2 + 4y'^2 = 16$.

Jaetaan molemmat puolet 16:lla, jolloin saadaan ellipsin standardimuoto:

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Alkuperäinen yhtälö $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 16$ kuvaa origokeskeistä ellipsiä, joka kiertomatriisin mukaisesti on kiertynyt 45 astetta. Ellipsin puoliakselit ovat $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ sekä $b = \sqrt{4} = 2$.



Kuva 5: Ellipsi $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 16$

Käydään läpi vielä toinen esimerkki hieman erilaisesta tilanteesta.

Esimerkki 5. Tunnista yhtälön $xy = -4$ kuvaama käyrä.

Huomataan alkuun, että yhtälössä esiintyy ainoastaan sekatermi xy. Sen lisäksi siinä ei kuitenkaan esiinny ensimmäisen, eikä toisen asteen termejä. Tämä viittaa siihen, että käyrä on kiertynyt, mutta ei suuntaissiirtynyt. Koska yhtälössä ei ole toisen asteen termejä, toisen asteen yhtälön matriisimuodoksi saadaan:

$$2xy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -8$$

Tässä yhtälön molemmat puolet on kerrottu kahdella, jotta symmetriseen matriisiin A saadaan kokonaisluvut. Tehtävän voisi ratkaista tekemättä tätä vaihetta, mutta tässä se on tehty selvyyden vuoksi.

Symmetriseksi matriisiksi saadaan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Aikaisemman esimerkin tavoin lasketaan ominaisarvot, jotka tässä tehtävässä ovat $\lambda = \pm 1$. Ominaisarvot ovat erimerkkiset, joten käyrän tyyppi on siis hyperbeli.

Ominaisarvoista voidaan laskea ominaisvektroit:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ja } u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

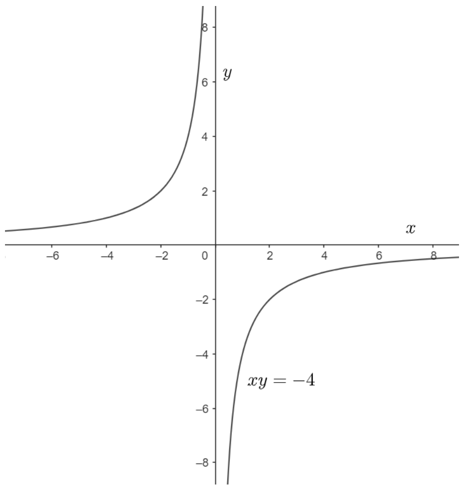
Normalisoidaan vektorit ja muodostetaan kiertomatriisi P samalla tavalla, kuin aikaisemmassa esimerkissä.

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan sitten $P^TAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, jolloin yhtälö sieventyy lopulta hyperbelin standardimuotoon

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -8 \Rightarrow x'^2 - y'^2 = -8 \Rightarrow \frac{y'^2}{8} - \frac{x'^2}{8} = 1.$$

Yhtälön $xy = -4$ tyyppi on siis hyperbeli ja se on kiertynyt 45 astetta. Esimerkillä haluttiin havainnollistaa, että samat pääakseliongelman menetelmät toimivat myös muille surkastumattomille kartioleikkauksille.



Kuva 6: Hyperbeli $xy = -4$

4.3 Suuntaissiirtynyt, kiertynyt

Tässä kappaleessa tarkastellaan neljästä aikaisemmin esitetystä tilanteesta haastavimman, jossa kartioleikkaus on sekä siirtynyt pois origostra, että kiertynyt koordinaatistossa. Tällaisessa tilanteessa käyrän yhtälössä esiintyy $xy-$termi, joka viittaa kiertoon, sekä ensimmäisen asteen termit x ja y, jotka viittaavat siirtymään.

Edellisessä kappaleessa *Ei siirtynyt, kiertynyt* tuli huomioida ainoastaan käyrän kiertyminen, mutta nyt joudutaan ottamaan huomioon myös sen siirtyminen.

Tavoitteena on edellisen kappaleen tavoin muuntaa toisen asteen yhtälö standardimuotoiseen yhtälöön, jolloin käyrän tyyppi ja sen ominaisuudet ovat helposti tunnistettavissa. Prosessissa on kaksi vaihetta: kierron eliminoiminen ja origoon siirtäminen.

Kierron eliminoiminen: Poistetaan $xy-$termi kiertämällä koordinaatistoa sopivalla kulmalla. Tämä tehdään edellisen tehtävän kaltaisesti toisen asteen termien matriisin ominaisarvojen ja -vektoreiden avulla.

Siirron eliminointi: Sekatermin eliminoinnin jälkeen täydennetään neliöt jäljelle jäävien ensimmäisen asteen termien osalta, ja siirretään käyrä koordinaatiston uuteen keskipisteeseen.

Käydään läpi konkreettinen esimerkki, jonka avulla havainnollistetaan työvaiheita.

Esimerkki 6. Tunnista yhtälön $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8\sqrt{2}y - 4 = 0$ kuvaama käyrä.
Kirjoitetaan yhtälön toisen asteen termit matriisimuodossa.

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matriisi $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ on symmetrinen ja kuvaa käyrän kiertoa.
Lasketaan matriisin A ominaisarvot karakterisesta yhtälöstä

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

Matriisin A ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = 2$ ja $\lambda_2 = 4$. Tästä nähdään heti, että käyrä on ellipsi, sillä molemmat ominaisarvot ovat positiivisia.
Ratkaistaan ominaisvektorit ja muodostetaan kiertomatriisi P.

Kun $\lambda_1 = 2$:

$$(2I - A)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Kun $\lambda_2 = 4$:

$$(4I - A)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalisoidaan vektorit ja muodostetaan orgotonaalinen kiertomatriisi P.

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kiertomatriisi P vastaa 45 asteen kiertoa vastapäivään.
Olkoon $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, jolloin alkuperäinen yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} P^T A P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8\sqrt{2} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 4 = 0.$$

Tiedetään, että

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

jolloin sekatermi eliminoituu ja lineaaritermien kertoimet muuttuvat muotoon

$$\begin{bmatrix}0 & 8\sqrt{2}\end{bmatrix} P = \begin{bmatrix}0 & 8\sqrt{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8 & 8\end{bmatrix}$$

Alkuperäinen yhtälö sieventyy muotoon $2(x')^2 - 8x' + 4(y')^2 + 8y' - 4 = 0$.

Tässä vaiheessa laskua olemme eliminoineet sekatermin ja jäljellä on vielä neliöön täydentäminen.

$$2(x')^2 - 8x' + 4(y')^2 + 8y' - 4 = 0$$
$$2(x')^2 - 8x' + 4(y')^2 + 8y' = 4$$

$$x'\text{−termit: } 2(x'^2 - 4x') = 2[(x' - 2)^2 - 4] = 2(x' - 2)^2 - 8$$
$$y'\text{−termit: } 4(y'^2 + 2y') = 4[(y' + 1)^2 - 1] = 4(y' + 1)^2 - 4$$

Sijoitetaan saadut x' ja y' termit takaisin yhtälöön

$$2(x' - 2)^2 - 8 + 4(y' + 1)^2 - 4 = 4$$
$$2(x' - 2)^2 + 4(y' + 1)^2 - 12 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2(x' - 2)^2 + 4(y' + 1)^2 = 16$$

Kun molemmat puolet jaetaan 16:lla, saadaan lopulliseksi muodoksi:

$$\frac{(x' - 2)^2}{8} + \frac{(y' + 1)^2}{4} = 1$$

Olkoon $x'' = x' - 2$ ja $y'' = y' + 1$, jolloin yhtälö sievenee muotoon

$$\frac{(x'')}{8} + \frac{(y'')}{4} = 1$$

Yhtälö $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8\sqrt{2}y - 4 = 0$ on ellipsi, joka on siirtynyt ja kiertynyt alkuperäisessä koordinaatistossa. Yhtälön $x'y'$ standardimuoto on

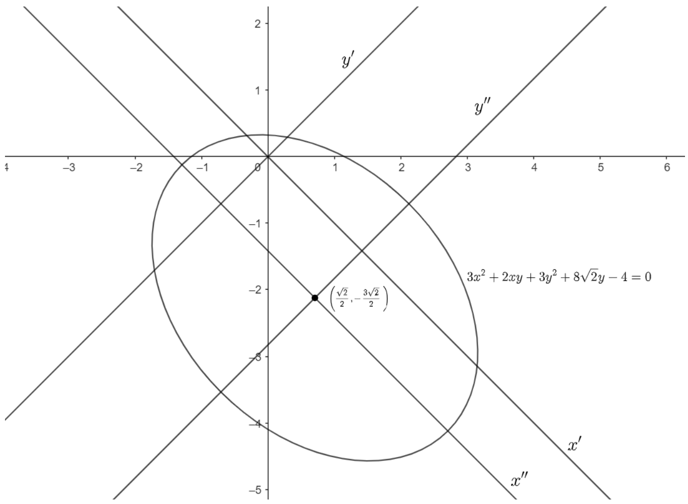
$$\frac{(x' - 2)^2}{8} + \frac{(y' + 1)^2}{4} = 1,$$

jossa keskipiste on pisteessä $(2, -1)$ $x'y'$-koordinaatistossa.

Jotta saadaan alkuperäisen tehtävänannon mukaisen ellipsin keskipiste, tulee tämä siirtää takaisin alkuperäiseen xy-koordinaatistoon kiertomatriisin $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ avulla. Tällöin xy-koordinaatistossa keskipiste sijaitsee kohdassa

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \approx (0.707, -2.121).$$

Jos keskipiste oltaisi määritetty pisteeseen $(2, -1)$ alkuperäisessä koordinaatistossa, se olisi virheellinen, sillä se perustuisi $x'y'$-koordinaatiston keskipisteen suoraan soveltamiseen xy-koordinaatistoon ilman kiertoa.



Kuva 7: Ellipsi $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8\sqrt{2}y - 4 = 0$

5 Käänteinen tilanne

Viimeisessä luvussa käydään läpi vielä esimerkki tilanteesta, jossa käyrän geometriset tiedot ovat annettu, mutta yhtälö on tuntematon.

Esimerkki 7. Määritä ellipsin yhtälö annettujen ominaisuuksien perusteella.

Olkoon ellipsin keskipiste $(x_0, y_0) = (2, 3)$, ja sen puoliakselit pituudeltaan 3 ja 5. Puoliakseleiden suunnat ovat $\mathbf{u_1} = (2, -1)$ ja $\mathbf{u_2} = (1, 2)$. Normalisoidaan ensin annetut suuntavektorit yksikkövektoreiksi:

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Tarkistetaan vektoreiden sisätulolla, että vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vasten. Mikäli vektorit ovat kohtisuorassa, niiden sisätuloksi saadaan 0. Vektoreiden tulee olla kohtisuorassa toisiaan vasten, jotta ne voivat olla ellipsin puoliakselit.

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2-2}{5} = 0$$

Ellipsin piste (x, y) voidaan kirjoittaa pisteen (x_0, y_0) ja yksikkövektoreiden avulla seuraavasti: $(x, y) = (2, 3) + x'\mathbf{v_1} + y'\mathbf{v_2}$.

Tässä x' ja y' ovat uudet koordinaatit, jotka liittyvät puoliakseleihin. Uusi piste (x, y) on ellipsissä, jos se toteuttaa ellipsin perusyhtälön, jossa puoliakselien pituudet ovat 3 ja 5.

$$\frac{x'^2}{3^2} + \frac{y'^2}{5^2} = 1 \text{ eli } \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{25} = 1.$$

Lasketaan x' ja y' sisätulojen avulla seuraavasti: $(x - 2, y - 3) = x'\mathbf{v_1} + y'\mathbf{v_2}$. Ratkaistaan ensin x':

$$\begin{aligned}
&(x-2, y-3) \cdot \mathbf{v_1} = (x'\mathbf{v_1} + y'\mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{v_1} \\
&(x-2, y-3) \cdot \mathbf{v_1} = x' \\
&(x-2) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + (y-3) \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} = x' \\
&\frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}} = x' \\
&\sqrt{5}x' = 2x - y - 1
\end{aligned}$$

Ratkaistaan samalla tavalla y':

$$\begin{aligned}
&(x-2, y-3) \cdot \mathbf{v_2} = (x'\mathbf{v_1} + y'\mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{v_2} \\
&(x-2, y-3) \cdot \mathbf{v_2} = y' \\
&(x-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + (y-3) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = y' \\
&\frac{x + 2y - 8}{\sqrt{5}} = y' \\
&\sqrt{5}y' = x + 2y - 8
\end{aligned}$$

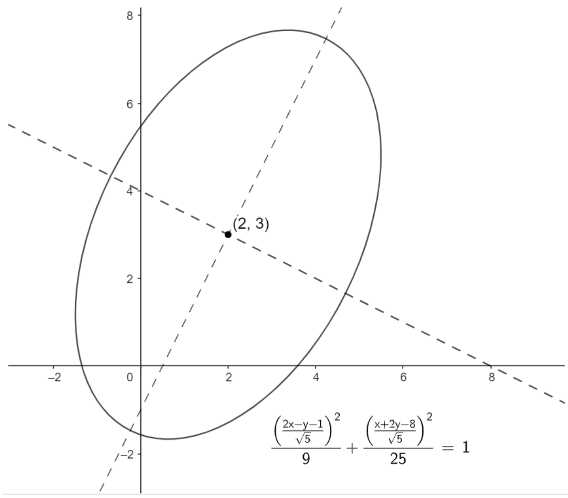
Sijoitetaan saadut x' ja y' ellipsin yhtälöön $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{25} = 1$:

$$\frac{(\frac{2x-y-1}{\sqrt{5}})^2}{9} + \frac{(\frac{x+2y-8}{\sqrt{5}})^2}{25} = 1$$

Kun tämä lasketaan auki, saadaan ellipsin lopulliseksi yhtälöksi:

$$\frac{(2x - y - 1)^2}{45} + \frac{(x + 2y - 8)^2}{125} = 1$$

Jos tämä halutaan vielä muuttaa toisen asteen yleiseen muotoon, saadaan ellipsin yhtälöksi $109x^2 - 64xy + 61y^2 - 244x - 238y - 524 = 0$.



Kuva 8: Ellipsi $\frac{(2x-y-1)^2}{45} + \frac{(x+2y-8)^2}{125} = 1$

6 Yhteenveto

Tutkielmassa on käsitelty surkastumattomien kartioleikkauksien pääakseliongelmaa tasossa. Tutkielman esimerkeissä on hyödynnetty ainoastaan ellipsejä ja hyperbelejä, mutta käytetyt menetelmät soveltuvat kaikille surkastumattomille kartioleikkauksille, ellipsille, hyperbelille ja paraabelille. Näille esitettiin yleinen toisen asteen yhtälö $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ sekä sen matriisiesitys
$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$, joita hyödynnettiin laskemisessa.

Näiden matemaattisten menetelmien lisäksi tehtävissä on hyödynnetty matriisiesityksen ominaisarvoja sekä -vektoreita. Pääakseliongelman lisäksi tutkielman viimeisessä luvussa käsiteltiin käänteistä ongelmaa, jossa geometriset ominaisuudet olivat tiedossa, mutta yhtälö piti muodostaa itse.

Tutkielman ja aineistojen pohjalta voidaan nähdä, että pääakseliongelman mukaan symmetrisen matriisin ominaisarvot ja -vektorit mahdollistavat koordinaatiston muunnoksen. Näiden menetelmien avulla toisen asteen yhtälö saadaan diagonaalimuotoon, jolloin ristitermit eliminoituvat. Tämä on hyvin keskeistä silloin, kun halutaa tunnistaa kartioleikkauksen tyyppi sekä niiden geometrisia ominaisuuksia, kuten keskipiste tai puoliakselien pituudet.

Tutkielmassa käytiin läpi esimerkkejä kiertyneistä ja/tai suuntaissiirtyneistä kartioleikkauksista soveltaen menetelmiä. Tutkimatta jäi tilanne, jossa käyrä ei ole kiertynyt eikä suuntaissiirtynyt, sillä sen käsitteleminen ei ollut oleellista pääakseliongelman kannalta.

Tutkielman päätavoitte on toimia oppimateriaalina lukion erikoiskursseille. Saaduilla tuloksilla ja menetelmillä halutaan korostaa sitä, että matriisilaskenta ja analyyttinen geometria tarjoavat jo lukiossa tehokkaita menetelmiä monimutkaistenkin käyrien tulkitsemiseen.

Viitteet

[1] Leon, Steven J. *Linear Algebra with Applications*, 9. ed., Pearson, 2015.

[2] Cullen, Charles G. *Linear Algebra with Applications.* 2. ed., Addison-Wesley, 1997.

[3] Fraleigh, John B., & Beauregard, Raymond A. *Linear Algebra.* Addison-Wesley, 1987.