LUOKANOPETTAJAOPISKELIJOIDEN GEOMETRISISTA MÄÄRITELMISTÄ

Tomi Kärki

Turun yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, Rauman yksikkö

Tässä tutkimuksessa analysoidaan luokanopettajaksi opiskelevien kirjoittamia taso- ja avaruusgeometrian käsitteiden määritelmiä ja pohditaan niiden yhteyttä opiskelijoiden geometriseen ajatteluun. Luokanopettajaopiskelijoiden monialaisten opintojen matematiikan opintojakson määritelmätestin vastaukset (N=70) luokiteltiin aineistolähtöisen sisällönanalyysin pohjalta. Määritelmät vaihtelivat triviaaleista kuvailuista eksakteihin matemaattisiin määritelmiin. Eroa formaaleihin määritelmiin esiintyi niin terminologian käytössä kuin yläkäsitteiden ja tarkentavien ehtojen muodostamisessa. Määritelmistä löydettiin samankaltaisuutta aiemmissa tutkimuksissa todettuihin peruskoulun oppilaiden ja opettajaksi opiskelevien muodostamiin määritelmiin.

JOHDANTO

Suomessa 2010-luvulla toteutettujen koulusaavutustutkimusten valossa suomalaisten oppilaiden geometrian osaaminen on algebran ohella muita sisältöalueita heikompaa. Vuoden 2012 PISA-tutkimuksessa (Programme for International Student Assessment) *tila ja muoto* oli suomalaisten selvästi heikoimmin osaama matematiikan osa-alue. Siinä heikkojen suoritusten osuus oli muita sisältöalueita suurempi ja erinomaisten suorittajien osuus pienin (Kupari, Välijärvi, Andersson, Arffman, Nissinen, Puhakka, & Vettanranta, 2013). Samoin TIMSS 2011 -tutkimuksen (Trends in International Mathematics and Science Study) mukaan geometria ja algebra olivat suomalaisoppilaiden heikoimmat alueet, missä tehtävien osaaminen oli lähellä kansainvälistä keskiarvoa (Kupari, Vettenranta, & Nissinen, 2012).

Kansainvälisestikin tarkasteltuna oppilaiden geometrisen osaamisen on todettu olevan alhaisella tasolla ja syyksi tilanteeseen on esitetty geometrian kouluopetuksessa saaman heikon aseman lisäksi sekä geometrian didaktisten käytänteiden uudistumattomuutta että opettajien oman geometrisen tietämyksen puutteellisuutta (Steele, 2013). Tulevien opettajien käsitys geometriasta on Browningin ja kollegoiden (2014) metatutkimuksessa todettu varsin rajalliseksi. He näkevät opettajien matemaattisen sisältötiedon kriittisenä tekijänä oppilaiden geometrisen ymmärryksen kehittymisessä ja painottavat opettajankouluttajien vastuuta tulevien opettajien tietoperustan luomisessa.

Geometrian asema osana koulumatematiikkaa on Suomessa säilynyt opetussuunnitelmien perusteella melko samanlaisena 2000-luvulla. Ilman kattavaa tutkimusta on vaikea arvioida, miten luokkien didaktiset käytännöt ovat tuona aikana muuttuneet, mutta ainakin tietotekniikka on avannut monia mahdollisuuksia opettaa geometriaa uudella tavalla (Battista, 2002; Jackiw, 2010; Hall, 2013; Joglar Prieto, Sordo Juanena, & Star, 2014). Syitä suomalaisten heikkoon geometrian osaamiseen tulisikin tutkia mm. koulujen geometrian opetusta ja työtapoja sekä oppimateriaalien laatua analysoimalla. Tämän tutkimuksen tutkimuskohteena on alakoulun opettajien geometrinen taitotieto. Tutkimuksessa rajoitutaan tarkastelemaan luokanopettaja-opiskelijoiden kirjoittamia geometrisia määritelmiä ja pohditaan niiden antamia viitteitä geometrisen käsitetiedon tasosta.

GEOMETRISEN AJATTELUN KEHITTYMINEN

Matemaattinen tietämys voidaan jakaa dikotomisesti konseptuaaliseen eli käsitetietoon ja proseduraaliseen eli menetelmätietoon (Hiebert & Lefevre, 1986). Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon luonnetta ja roolia matematiikan oppimisessa on tutkittu paljon ja näiden tietotyyppien yhteydestä matemaattisen tiedon laatuun on esitetty erilaisia näkemyksiä. Tutkijoiden erilaisista tietotyyppien määrittelyistä huolimatta mielekkään matemaattisen tiedon nähdään koostuvan monimutkaisesti yhteenkietoutuneesta vastavuoroisessa suhteessa kehittyvästä käsite- ja menetelmätiedosta. (Baroody, Feil, & Johnson, 2007; Star & Stylianides, 2013; Rittle-Johnson & Schneider, 2015.) Geometrisen tiedon osalta Silfverberg kuvaa oppilaan käsitetiedon koostuvan esimerkiksi siitä, mitä oppilas tarkoittaa suorakulmiolla, suunnikkaalla tai suorakulmaisella särmiöllä, minkälaisia ominaisuuksia näillä käsitteillä hänen mielestään on ja miten käsitteet linkittyvät toisiinsa. Geometrinen menetelmätieto taas koostuu geometristen objektien merkintätapojen lisäksi algoritmisista toimintasäännöistä kuten pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskutavoista sekä kuvioiden ja kappaleiden piirtämiseen liittyvistä sopimuksista. (Silfverberg, 1999.)

Hyödyllisen viitekehyksen geometrisen ajattelun kehittymisen tarkastelulle tarjoaa ns. van Hielen teoria (Browning ym., 2014). Teoria perustuu hollantilaisten Pierre van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin 1950-luvulla alkaneisiin tutkimuksiin (Fuys, Geddes, & Tischler, 1984), ja sen validoinnista ja merkityksestä geometrian opetukselle on tehty useita tutkimuksia (Ma, 2015). Teoria sisältää hypoteesin oppilaan geometrisen ajattelun kehittymisestä viiden tason kautta. Kehitystasojen yleissisältö on laajasti hyväksytty, mutta etenkin tasojen tiukasta erillisyydestä ja hierarkiasta on esitetty väljempiä tulkintoja. Oppilaiden geometrisessa ajattelussa näyttää tapahtuvan edistystä usean tason kohdalla samanaikaisesti, kuitenkin alemman van Hielen tason piirteiden ollessa pääsääntöisesti edellä korkeampien tasojen piirteiden kehitystä. (Silfverberg, 1999; Unal, Jakubowski, & Corey, 2009.) Erityisesti on pohdittu käsitteiden välisen luokkainkluusion ymmärtämisen ja määrittelytaidon kehittymisen sijoittumista tasojen kuvauksiin (mm. Silfverberg, 1999; Silfverberg & Matsuo, 2008; de Villiers, 2010). Seuraava van Hielen tasojen ominaisuuksien lyhyt kuvailu perustuu alkuperäislähteisiin (Fuys ym., 1984) sekä Silfverbergin (1999) ja Van de Wallen, Karpin ja Bay-Williamsin (2009) esittämään tulkintaan:

Visualisoinnin tasolla (vH1) ajattelu kohdistuu yksittäisiin kuvioihin, joiden tunnistus ja luokittelu perustuu visuaalisen ulkomuodon samankaltaisuuteen.

Ominaisuuksien analysoinnin tasolla (vH2) kuviot nähdään ominaisuuksiensa kantajina. Kuvioluokkaan kuuluminen perustuu ominaisuuksien analysointiin eikä pelkästään visuaaliseen samankaltaisuuteen, mutta ominaisuuksien keskinäisiin riippuvuussuhteisiin ei kiinnitetä huomiota. Kuvioita määritellessään tälle tasolle kuuluvat oppilaat todennäköisesti luettelevat kaikki kuviolle tuntemansa ominaisuudet.

Ominaisuuksien järjestämisen eli epäformaalin päättelyn tasolla (vH3) ajattelun kohteena ovat kuvioiden ominaisuudet, jotka järjestäytyvät loogisiksi rakenteiksi. Oppilas ymmärtää, että jotkin ominaisuudet ovat seurausta toisista ominaisuuksista, ja hän osaa tehdä lyhyitä deduktiivisia päätelmiä. Kuvio tunnistetaan geometrisen käsitteen alaan kuuluvaksi käsitteen määritelmän perusteella. Määritelmiä osataan muotoilla ilmaisten kuvioiden riittävät ja välttämättömät ominaisuudet ja näiden ominaisuuksien avulla osataan muodostaa geometrisista käsitteistä käsitehierarkioita.

Formaalin päättelyn tasolla (vH4) ymmärretään deduktiivisen päättelyn idea ja hallitaan deduktiivisen geometrian ajattelutapa.

Aksioomasysteemin ymmärtämisen tasolla (vH5) pystytään hallitsemaan ja vertailemaan eri geometrioita aksiomaattisina järjestelminä.

MÄÄRITELMÄT OSANA GEOMETRISTA KÄSITETIETOA

Silfverbergin (1999) tutkimuksen mukaan määrittelytaidolla ja van Hielen tasoilla on tilastollisesti erittäin merkitsevä yhteys. Silfverberg havaitsi, että ylemmillä tasoilla olevat oppilaat kykenivät alempien tasojen oppilaita paremmin määrittelemään geometrisia kuvioita ja tulkitsemaan käsitteiden välisiä suhteita matematiikan standarditulkinnan mukaisesti. Tietorakenteiden eheytyminen näkyi erityisesti kolmannelle tasolle siirryttäessä, mutta tason vH3 yleisten tulkintojen vastaisesti ei selvää muutosta käsitteiden välisten suhteiden ja kuvioiden määrittelemisen osaamisessa voitu havaita.

Fischbein (1993) kutsuu geometrisia objekteja *figuraalisiksi käsitteiksi* (figural concepts) korostaakseen niiden kaksoisluonnetta. Geometristen kuvioiden ja kappaleiden luonteessa on samanaikaisesti läsnä sekä objektin konseptuaalinen eli käsitteellinen komponentti että figuraalinen eli kuvallinen komponentti. Geometrinen objekti on abstrakti idea, jonkin aksioomasysteemin mukaiseen määritelmään perustuva olio, jota ei ole olemassa reaalimaailmassa eikä siihen voida liittää todellisuudessa aistittavia ominaisuuksia. Geometristen kuvioiden piirrokset ja kappaleiden konkreettiset mallit ovat vain matemaattisten käsitteiden aineellisia malleja. Toisaalta geometriseen objektiin liittyy aina visuaalinen kuva, mentaalinen representaatio tilasta tai muodosta, joka on erottamattomasti läsnä geometrisessä ajattelussa ja joka Fischbeinin mukaan tarvitaan geometrian tieteenalan luovaan kehittymisprosessiin. Figuraalinen käsite -termi kuvastaa loogisen ja figuraalisen näkökulman ideaalista mentaalista yhteensulautumista, joka Fischbeinin mukaan ei tapahdu luonnollisesti itsestään. Monesti oppilaiden ajattelussa kuvallinen ja käsitteellinen komponentti ovat ristiriidassa keskenään tai kuvallinen komponentti hallitsee geometrista päättelyä. Oppilaiden tulisikin olla tietoisia määritelmistä ja niiden roolista geometrisessä ajattelussa. Geometriset tehtävät tulisi suorittaa kuvan antaman informaation sijaan objektien määritelmiin perustuen. (Fischbein 1993.) Malatyn (1994) antaman esimerkin mukaan ideaalisen geometrisen käsitteen ja sen kuvallisen esityksen eroa voidaan opettaa pienillekin koululaisille. Fischbeinin (1999) näkemyksen mukaan yksi geometrian didaktiikan päätehtävistä on luoda sellaisia oppimistilanteita, joissa systemaattisesti vaaditaan käsitteellisen ja kuvallisen komponentin yhteensovittamista. Silfverberg (1999) näkee tässä yhteensovittamisessa keskeiseksi tekijäksi *visuaalisen varioinnin* kyvyn eli oppilaan kyvyn mielikuvatasolla tuottaa geometrisista käsitteistä tarkoitushakuisesti erityyppisiä esimerkkitapauksia.

Tietämys matemaattisista määritelmistä ja käsitys määrittelemisestä osana matemaattista toimintaa vaikuttaa opettajan opetukseen, didaktisiin päätöksiin ja tapaan, jolla he käsittelevät matemaattista sisältöä (Leikin & Zazkis, 2010). Opetukseen vaikuttaa siis opettajan kokonaisymmärrys käsitteestä eli *käsitekuva*. Tallin ja Vinnerin (1981) mukaan käsitekuvalla (concept image) tarkoitetaan sitä käsitteeseen liittyvää kognitiivisen järjestelmän täyttä kokonaisuutta, joka sisältää kaikki mentaaliset kuvat, käsitteeseen liitetyt ominaisuudet ja prosessit. Käsitekuva rakentuu ja muuttuu erilaisten kokemusten ja ärsykkeiden myötä. Se voi sisältää ristiriitaisia komponentteja ja siitä voi eri tilanteissa aktivoitua erilaisia osia. Henkilökohtainen käsitteen määritelmä (personal concept definition) tarkoittaa sanamuotoa, jota yksilö käyttää oman aktivoidun käsitekuvansa selittämiseen. Formaali käsitteen määritelmä (formal concept definition) on sanallinen esitysmuoto, joka on matemaattisen yhteisön laajalti hyväksymä. (Tall & Vinner, 1981.)

Leikin ja Zazkis (2010) esittivät Winicki-Landmanin ja Leikinin artikkeliin (2000) perustuen seuraavat tunnettujen matemaatikkojen hyväksymät periaatteet formaalille matemaattiselle määritelmälle: 1) Määritelmä antaa nimen uudelle käsitteelle ja nimi esiintyy määritelmässä vain kerran. 2) Määritelmä esittää käsitteelle välttämättömät ja riittävät ehdot. 3) Uuden käsitteen määrittelemiseksi voidaan käyttää vain aiemmin määriteltyjä käsitteitä tai ns. määrittelemättömiä peruskäsitteitä. 4) Määritelmässä esitettyjen ehtojen joukko pyritään muodostamaa usein minimaaliseksi eli ei esitetä ehtoja, jotka loogisesti seuraavat muista ehdoista. 5) Määritelmäksi voidaan valita mikä tahansa ekvivalenteista muotoiluista. Matematiikan opetuksessa tulee huomioida määritelmän matemaattisen oikeellisuuden lisäksi sen didaktinen soveltuvuus (Winicky-Landman & Leikin, 2000). Konstruktivistiseen näkemykseen pohjautuen määritelmän tulee perustua oppilaan aiemmin tuntemiin käsitteisiin ja sen tulee ottaa huomioon oppilaan senhetkinen kehitystaso. Käytetyn määritelmän tulisi mahdollisimman hyvin sopia yhteen oppijan intuition kanssa ja myös esteettiset näkökohdat, kuten ilmaisun selkeys ja eleganttius, tulisi ottaa huomioon.

Opettajien ja opettajaksi opiskelevien kyky ymmärtää geometrisia käsitteitä, muodostaa määritelmiä sekä kyky ymmärtää määritelmän merkitys matematiikassa ja määritteleminen matemaattisena prosessina on useissa tutkimuksissa todettu puutteelliseksi (mm. Linchevsky, Vinner & Karsenty, 1992; Cunningham & Roberts, 2010; Leikin & Zazkis, 2010; Duatepe-Paksu, İymen & Pakmak, 2012; Marchis, 2012; Silfverberg & Joutsenlahti, 2014). Marchis (2012) löysi opettajaksi opiskelevien kirjoittamista määritelmistä monia edellä mainituista formaalin matemaattisen määritelmän periaatteista poikkeavia piirteitä: 1) Opiskelijan kirjoittama määritelmä saattoi olla käsitteelle täysin väärä esimerkiksi siten, että ylä- ja alakäsitteet olivat vaihtaneet paikkaa. 2) Määritelmää ei esitetty määritelmän muodossa vaan listana määritelmään liittyviä ominaisuuksia. 3) Määritelmä ei sisältänyt välttämättömiä ja riittäviä ehtoja. 4) Määritelmä ei ollut minimaalinen. Vastaavankaltaisesti Silfverberg ja Matsuo (2008) luokittelivat peruskoulun oppilaiden antamat geometriset määritelmät naivien kuvausten lisäksi ehtojen oikeellisuuden, riittävyyden, minimaalisuuden ja oikean yläkäsitteen käyttämisen mukaan.

TUTKIMUSMENETELMÄ

Tämän tutkimuksen kohteena ovat luokanopettajaksi opiskelevien kirjoittamat geometristen käsitteiden määritelmät peruskoulussa opetettavien aineiden ja aihekokonaisuuksien monialaisten opintojen matematiikan opintojakson määritelmätestissä. Alkeisgeometrian määritelmät oli esitetty opintojakson monisteessa kolmeen taulukkoon jaoteltuna (geometriset peruskäsitteet 13 kpl, tasokuviot 22 kpl, avaruuskappaleet 12 kpl). Määritelmiä oli käsitelty opintojakson yhdellä luennolla sekä kahdella pienryhmäkerralla sekä tehtävissä, joihin kuului mm. käsitehierarkioiden piirtämistä puumallia käyttäen.

Määritelmätesti kesti noin 15–20 minuuttia ja sen aikana kukin opiskelija kirjoitti määritelmät kahdeksalle geometriselle käsitteelle. Määritelmät kysyttiin yksi kerrallaan kirjoittamalla ko. käsitteen nimi taululle. Opiskelijalla oli oikeus testin aikana palata aiemmin kirjoittamiinsa määritelmiin. Kysytyt käsitteet olivat kysymisjärjestyksessä *jana, kulma, monikulmio, suunnikas, suorakulmio, pallo, monitahokas* ja *kuutio*. Näiden käsitteiden luentomonisteessa esiintyneet määritelmät on esitetty Taulukossa 1. Testin jälkeen opiskelijoiden ehdottamista määritelmistä keskusteltiin ja he saivat pisteyttää toistensa vastauksia. Testiin osallistui yhteensä 70 opiskelijaa.

Taulukko 1. Geometristen objektien määritelmät luentomonisteessa

objektin nimi	määritelmä
jana	suoran osa, jolla on sekä alku- että loppupiste
kulma	kahden samasta pisteestä lähtevän puolisuoran väliin jäävä tason osa
monikulmio	suljetun itseään leikkaamattoman murtoviivan rajaama tason osa
suunnikas	nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat (pareittain) yhdensuuntaiset
suorakulmio	nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria
pallo	avaruuskappale, jonka rajoittava pinta muodostuu niistä kolmiulotteisen avaruuden pisteistä, jotka ovat yhtä etäällä annetusta keskipisteestä
monitahokas	avaruuskappale, joka on yksinomaan monikulmioiden rajoittama
kuutio	suorakulmainen särmiö, jonka tahkot ovat yhteneviä neliöitä

Tutkimusta varten opiskelijoiden vastaukset kirjattiin sähköiseen taulukkoon ja anonymisoitiin. Määritelmiä kirjattiin yhteensä 543. Tyhjiä vastauksia löytyi 3 kulman, 2 monikulmion, 2 suunnikkaan, 8 monitahokkaan ja 2 kuution kohdalla. Saadusta aineistosta etsittiin sisällönanalyysin keinoin vastausta tutkimuskysymykseen: *Millaisia määritelmiä luokanopettajaksi opiskelevat antavat taso- ja avaruusgeometrian käsitteille?*

TUTKIMUSTULOKSET

Aineistolähtöisen sisällönanalyysin mukaisesti kunkin geometrisen objektin erilaiset määritelmät ryhmiteltiin ja yhdistettiin luokiksi, joita kaikilla muilla kappaleille kertyi 7-16, mutta kuution kohdalla analyysissä syntyi aluksi jopa 29 luokkaa, koska riittämättömiä ehtoja tunnistettiin 14 erilaista tyyppiä. Aineiston abstrahoinnissa päädyttiin luokkia yhdistelemällä lopulta kuvaamaan aineistossa esiintyviä formaaleista määritelmistä poikkeavia määritelmätyyppejä yhdeksän kategorian avulla: **Y** yläkäsitteeseen liittyvät puutteet, **T** terminologiset virheet, **RE** riittämättömät ehdot, **TE** liian tiukat ehdot, **YL** ylimääräiset tiedot, listamääritelmät, **O** objektin osien luettelu, **N** naiivi kuvailu, **V** virheellinen tulkinta, **A** absurdi määritelmä. Vaikka tutkimuksen tarkoituksena ei ollut kvantitatiivisesti määrittää opiskelijoiden määrittelytaitoa, voidaan kuitenkin todeta, että sellaisia minimaalisia tai ei-minimaalisia määritelmiä, jotka liittivät käsitteen alaan kuuluvaksi tarkalleen käsitteen standarditulkintojen mukaiset tapaukset, hyväksyttiin noin 37 prosenttia. Tällaisia määritelmiä annettiin suorakulmiolle 50, suunnikkaalle 35, pallolle 32, janalle ja kuutiolle 24, kulmalle 16, monikulmiolle 10 ja monitahokkaalle 10.

Janan kohdalla terminologiset ongelmat (**T**) johtuivat yleisesti termin *suora* käyttämisestä kuvaamaan äärellisen mittaista suoraa viivaa. Yläkäsitteen puuttuminen (**Y**) näkyi esimerkiksi ilmaisuna ”Janalla on alku ja loppupiste”. Tyypillinen riittämätön ehto (**RE**) oli viivan suoruusominaisuuden puuttuminen käsitteen määritelmästä. Yksi vastaaja oli tulkinnut käsitteen selvästi väärin (**V**) määritellessään janan ”päättymättömäksi suoraksi linjaksi”.

Kulman kohdalla määritelmissä (**RE**) viitattiin puolisuorien väliseen alueeseen mainitsematta, että puolisuorilla on yhteinen alkupiste. Terminologisesti (**T**) ongelmallista oli, että puolisuorien väliin jäävän alueen tai tason osan sijaan puhuttiin koko tasosta ja puolisuorat oli joissain määritelmissä korvattu murtoviivalla. Opiskelijoiden määritelmissä havaittiin yhdenmukaisesti Silfverbergin ja Joutsenlahden (2014) tutkimuksen kanssa epästandardi tulkinta (**V**) siitä, että kulmaan kuuluu ainoastaan kulman kärkipiste ja sen lähiympäristö. Tällainen ilmaus oli esimerkiksi ”se kohta, jossa kaksi puolisuoran pistettä kohtaa”. Absurdiksi muotoiluksi luokiteltiin mm. ”kahden kohtisuoraan leikkaavan suoran muodostava kohta, joka on alle 90°”, jossa myös kohtisuoruuden ja kulman asteluvun yhteys jäi epämääräiseksi.

Monikulmion määritelmissä oli yleistä mainita, minkä nimisiä osia se sisältää (**O**). Riittämättömien ehtojen (**RE**) kategoriassa yleisin määritelmä oli sellainen, jossa murtoviivaa ei mainittu itseään leikkaamattomaksi. Muutama jätti mainitsematta murtoviivan suljetuksi. Terminologisesti (**T**) käytettiin jälleen tason osasta nimitystä *taso*, murtoviivan sijaan kirjoitettiin murtoviivoista tai suorista ja tasokuvion sijaan kappaleesta.

P49: vähintään kolmen murtoviivan muodostama kuvio

P68: suljettu itseään leikkaamaton muodostelma suorista, kuviossa on löydettävissä monta kulmaa

P61: yhtenäinen kappale, joka muodostuu yhtä monesta sivusta ja sivujen rajaamista kulmista.

Myös suunnikkaan kohdalla tasokuviota nimitettiin kappaleeksi ja yhtä pitkiä sivuja yhdenmuotoisiksi (**T**). Kategoriaan **RE** katsottiin kuuluvaksi mm. ne määritelmät, joissa yläkäsitteenä oli käytetty monikulmiota, mutta ehdoissa ei rajattu käsitettä nelikulmioihin. Osassa määritelmistä (**Y**) yläkäsite puuttui kokonaan. Kategoriaan **YL** luokiteltiin suunnikkaalle tyypilliset mutta ei minimaaliset määritelmät, joissa mainitaan kaksi tai kolme seuraavista ekvivalenteista ominaisuuksista: vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Kahdeksan opiskelijan määritelmä vastasi jotakin muuta käsitettä (**V**), esimerkiksi puolisuunnikasta tai suuntaissärmiötä. Myös suorakulmiota kysyttäessä kuuden opiskelijan määritelmä sopi johonkin toiseen geometriseen objektiin, esimerkiksi suunnikkaaseen. Suorakulmion määritelmästä löytyi terminologisten puutteiden ja yläkäsitteen puuttumisen lisäksi määritelmiä (**YL**), joissa oli ylimääräisiä ehtoja:

> P42: Suorakulmio on monikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria sekä suunnikas, jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä.

Pallon määritelmässä haastava termi (**T**) oli pinta, jonka sijaan käytettiin tasogeometriaan kuuluvia sanoja *kehä*, *kaari*, *piiri* tai jopa *taso*. Yksi vastaaja määritteli pallon sijaan ympyrän (**V**). Absurdeja (**A**) tai naiiveja kuvauksia (**N**) löytyi muutamia.

> P12: Pallo on avaruuskappale, joka on kolmessa tasossa joiden jokaisesta kaaren pisteestä on yhtä pitkä matka keskipisteeseen.

> P70: Pallo on avaruuskappale jolla on tilavuus. Siinä ei ole yhtään kulmaa ja se on muodoltaan symmetrinen ja pyöreä.

Monitahokkaan yläkäsitteeksi (**Y**) oli virheellisesti valittu mm. monikulmio, lieriö tai särmiö. Määritelmä saattoi olla vain nimestä johdettu ilmaisu (**N**) kuten "Monitahokas koostuu monista tahkoista" tai käsitteen osien (tahko, särmä, kärki) luettelo (**O**). Tässä kaksi opiskelijaa oli antanut liian tiukat ehdot vaatimalla tahkojen yhtenevyyttä. Monitahokkaalle löytyi muita käsitteitä enemmän sellaisia määrittelyjä, joiden voitiin katsoa kuvaavan ennemmin jotakin muuta käsitettä, esimerkiksi särmiötä.

Opiskelijoille varmasti hyvin tutun käsitteen, kuution, kohdalla korostui riittämättömät ehdot -kategorian (**RE**) yleisyys. Useimpiin tällaisiin määritelmiin sopi vastaesimerkiksi pirunnyrkkiä muistuttava seitsemästä samanlaisesta kuutiosta koostuva rakennelma tai suuntaissärmiö tai suorakulmainen särmiö. Terminologisesti sekoittuivat jälleen taso- ja avaruusgeometrian termit kuten *sivu* ja *särmä*.

> P9: monitahokas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja tahot samankokoiset.

> P13: avaruuskappale, joka muodostuu tasasivuisista nelikulmioista.

> P27: kuudesta nelikulmiosta koostuva kappale, jonka kaikki kulmat ovat suoria.

POHDINTA

Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin luokanopettajiksi opiskelevien geometrisille objekteille antamia määritelmiä. On syytä mainita, että tarkoituksena ei ollut mitata opiskelijoiden geometrisen käsitetiedon tasoa, eikä se tällä tutkimusasetelmalla olisi ollut edes mahdollista. Koska opiskelijoita kehotettiin opiskelemaan määritelmiä ja niitä oli käsitelty kurssin aikana, on luultavaa, että osa oppilaiden tuottamista formaaleiksi luokitelluista määritelmistä oli ulkoa opittuja. Tutkimuksen luotettavuutta tarkasteltaessa onkin huomattava, että käytetyllä tutkimusmenetelmällä saatiin tietoa opiskelijoiden senhetkisistä henkilökohtaisista käsitteiden määritelmistä, joihin määritelmätestiin valmistautumisella on ollut oma vaikutuksensa. Aineistonkeruuta voidaan pitää kattavana, sillä määritelmätestiin osallistui suurin osa yksikön monialaisten opintojen toisen vuosikurssin opiskelijoista, testissä kysyttiin useiden erilaisten geometristen objektien määritelmiä ja analysointiyksiköitä kertyi runsaasti. Analysoinnissa määritelmien kirjaaminen sähköiseen taulukkoon mahdollisti määritelmien ominaisuuksien sujuvan vertailun ja lisäsi näin tutkimuksen luotettavuutta. Tutkijatriangulaation puuttuminen heikentää luotettavuutta, mutta raportoinnissa esimerkkeinä käytetyt opiskelijoiden vastaukset antavat lukijalle mahdollisuuden tutkijan tulkintojen oikeellisuuden arviointiin. Tutkimuksen toteutuksessa tulisi suhtautua kriittisesti luentomonisteen määritelmiin, jotka eivät täyttäne tiukimpia formaaleja muotovaatimuksia. Esimerkiksi janan kohdalla olisi syytä puhua päätepisteistä vektoriin viittaavien alku- ja loppupisteen sijaan. Kulman määritelmässä selkeämpi ratkaisu olisi tarkemmin ilmaista myös puolisuorien olevan osa kulmaa. Tällöin nollakulma vastaisi tilannetta, jossa puolisuorat yhtyvät.

Opiskelijoiden kirjoittamista taso- ja avaruusgeometrian käsitteiden määritelmissä löytyi samanlaisuutta aiemmissa tutkimuksissa havaittuihin opettajaksi opiskelevien ja oppilaiden tekemiin määritelmiin (Marchis, 2012; Silfverberg & Matsuo 2008). Tässä sisällönanalyysissä korostui opiskelijoiden terminologisen osaamisen puutteet, mm. taso- ja avaruusgeometrian termien sekoittaminen keskenään. Monesti määritelmät eivät olleet määritelmän muodossa, vaan yläkäsite puuttui tai lueteltiin käsitteen osia. Tämän voisi tulkita siten, että opiskelija ei ole ymmärtänyt määrittelemisen ideaa. Toisaalta on huomioitava, että matemaattisten käsitteiden määrittelemisen opettelemiseen ei suomalaisessa koulujärjestelmässä kiinnitetä paljon huomiota (Silfverberg & Joutsenlahti, 2014), joten määritelmien kirjoittaminen on saattanut olla vaikeaa, vaikka opiskelijan käsitekuva olisikin ollut standarditulkinnan mukainen. Naiiveja kuvailuja tai väärien käsitteiden kuvailuja ilmeni verraten vähän. Aineistossa oli tyypillisesti määritelmiä, jotka eivät olleet minimaalisia vaan sisälsivät muista ominaisuuksista johdettavia ominaisuuksia. Riittämättömät ehdot -kategorian määritelmät olivat yleisiä. On mahdotonta tietää, yrittivätkö opiskelijat mielikuvatasolla koetella määritelmiensä oikeellisuutta vastaesimerkkiä etsien mutta eivät sellaista löytäneet, vai oliko kyseessä vain ulkoa opitun määritelmän väärin muistaminen. Aineistossa havaitut poikkeamat formaaleista määritelmistä voitaneen osin tulkita osoituksiksi tavoiteltua van Hielen tasoa 3 alhaisemmasta osaamisesta. Tämän tutkimus antaa viitteitä siitä, että luokanopettajaksi opiskelevien matematiikan kursseilla tulisi geometrisen käsitetiedon vahvistamisen lisäksi käsitellä määritelmän ideaa ja määrittelemistä matemaattisena toimintana sekä pyrkiä harjaannuttamaan opiskelijat matematiikan kielen mukaisten termien käyttöön. Lisäksi opettajaksi opiskelevien geometrisen käsitetiedon tasoa tulisi jatkossa tarkemmin analysoida.

LÄHTEET

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007.) An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 115–131.

Battista, M. T. (2002). Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. *Teaching Children Mathematics*, *8*(6), 333–339.

Browning, C., Edson, A. J., Kimari, P. M., & Aslan-Tutak, F. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementtejä mathematics: A focus on geometry and measurent. *The Mathematics Enthusiast, 11*(2), 333–384.

Cunningham, R. F., & Roberts, A. (2010). Reducing the mismatch of geometry concept definitions and concept images held by pre-service teachers. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal 1*, 17 s. http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/1.contentknowledge/cunningham01/article.pdf.

Duatepe-Paksu, A., İymen, E., & Pakmak, G. S. (2012). How well elementary teachers identify parallelogram? *Educational Studies, 38*(4), 415–418.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1984). English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. New York: Brooklyn College.

Hall, J. (2013). Teaching Algebra and Geometry with GeoGebra: Preparing Pre-Service Teachers for Middle Grades/Secondary Mathematics Classrooms. *Computers in the Schools, 30*(1/2), 12–29.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conseptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.), *Conseptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1–27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Jackiw, N. (2010). Linking algebra and geometry: The dynamic geometry perspective. Teoksessa Z. Usiskin, K. Andersen, & N. Zotto (toim.), *Future* *curricular trends in school algebra and geometry: Proceedings of a conference* (s. 231–241). Charlotte, NC: Information Age.

Joglar Prieto, N., Sordo Juanena, J. M., & Star, J. R. (2014). Designing Geometry 2.0 learning environments: a preliminary study with primary school students. *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology, 45*(3), 396–416.

Kupari, P., Vettenranta, J., & Nissinen, K. (2012). Oppijalähtöistä pedagogiikkaa etsimään: Kahdeksannen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen: Kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E., & Vettanranta, J. (2013). PISA12 ensituloksia. *Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2013:20*.

Leikin, R., & Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: a case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 41*(4), 451–466.

Linchevsky, L., Vinner, S., & Karsenty, R. (1992). To be or not to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. Teoksessa W. Geeslin & G. Karen (toim.) *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s. 48–55). Durham, NH: PME.

Ma, H.-L. (2015). A study of van Hiele of geometric thinking among 1st through 6th graders. *Eurasia Journal of Mathematics, Science &Technology Education, 11*(5), 1181–1196.

Malaty, G. (1994). Geometrinen ajattelu. 1, Didaktiikka. Espoo: Weilin+Göös.

Marchis, I. (2012). Preservice primary school teachers' elementary geometry knowlegde. *Acta Didactica Napocensia, 5*(2), 33–40.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of Mathematics. Teoksessa R. Cohen Kadosh, A. Dowker (toim.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (s. 1118–1134). Oxford: Oxford University Press.

Silfverberg, H. (1999). Peruskoulun oppilaan geometrinen käsitetieto. *Acta Electronica Universitatis Tamperensis 6*. Tampere: Tampereen yliopisto.

Silfverberg, H. & Joutsenlahti, J. (2014). Prospective teachers' conceptions about a plane angle and the context dependency of the conceptions. Teoksessa C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, D. Allan (toim.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 5, s. 185–192). Vancouver, Canada: PME.

Silfverberg, H. & Matsuo, N. (2008). Comparing Japanese and Finnish 6th and 8th graders' ways to apply and construct definitions. Teoksessa O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (toim.) *Proceedings of* *the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, s. 257–264). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Star, J. R. & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 13*(2), 169–181.

Steele, M. D. (2013.) Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 245–268.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Unal, H., Jakubowski, E., & Corey, D. (2009). Differences in learning geometry among high and low spatial ability pre-service mathematics teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 40*(8), 997–1012.

Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. (2009). Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally. Harlow: Pearson.

de Villiers, M. D. (2010). Some reflections on the van Hiele theory. Invited plenary presented at the 4th Congress of teachers of mathematics of the Croatian Mathematical Society, Zagreb, 30 June – 2 July 2010. http://frink.machighway.com/~dynamicm/vanhiele-reflection.pdf (Luettu 14.2.2016.)

Winicki-Landman, G., & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 1. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 17–21.