Turnausten kombinatoriikka

Pro Gradu -tutkielma
Maaliskuu 2019

Juha Kuosa

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KUOSA, JUHA: Turnausten kombinatoriikka
Pro gradu -tutkielma, 39 s.
Matematiikka
Maaliskuu 2019

Tutkielmassa käsitellään erilaisia turnauksia ja niihin liittyvää matematiikkaa kombinatoriikan näkökulmasta. Aluksi käydään läpi algebran ja kombinatoriikan aputuloksia, joista tärkeimpiä ovat kongruenssi, kombinatoriset sommitelmat sekä latinalainen neliö. Kongruenssiyhtälön avulla määritellään turnauksia matemaattisesti. Latinalaisten neliöiden avulla voidaan luoda erilaisia turnauksia. Kombinatoriset sommitelmat ovat mukana lähinnä turnausten näkökulmasta, vaikka niillä on paljon muitakin käyttökohteita. Näistä sommitelmista turnauksia koskevat erityisesti $(2n, 2, 1)$-sommitelmat, kuten seuraavassa nähdään.

Aputulosten jälkeen määritellään kiertoturnaus. Siinä $2n$ joukkuetta pelaavat vastakkain $2n - 1$ kierroksella niin, että kaikki pelaavat kaikkia vastaan täsmälleen kerran ja jokainen joukkue kerran kullakin kierroksella. Tällöin pelejä tulee yhteensä $n(2n-1)$. Tämä kiertoturnaus nimenomaan on $(2n, 2, 1)$-sommitelma. Se pystytään konstruoimaan ainakin kahdella tavalla, joista toinen on kiertomenetelmä ja toinen Kirkmanin konstruointi.

Turnauksessa optimaalisinta olisi pelata vuorotellen koti- ja vieraskentällä. Tästä johtuen joukkueille voidaan määritellä vaihdonrikko. Vaihdonrikko tarkoittaa sitä, että joukkue pelaa kaksi kertaa peräjälkeen kotikentällä tai vieraskentällä. Kaksijakoisessa turnauksessa (joukkueet pelaavat kaksi kertaa muita joukkueita vastaan) $2n$ joukkueelle vaihdonrikkojen minimimääräksi saadaan todistettua $6n - 6$.

Seuraavaksi määritellään seurausvaikutus. Se tarkoittaa, etteivät kaksi joukkuetta tai pelaajaa saa pelata peräkkäin kahta tiettyä muuta joukkuetta tai pelaajaa vastaan. Tällainen turnaus saadaan luotua latinalaisten neliöiden avulla. Kun latinaisen neliön konstruoi tietyllä tavalla, sen avulla saadaan turnaus, jossa ei ole seurausvaikutusta.

Viimeisenä asiana tutkielmassa määritellään Roomin neliö. Siinä esiintyvät peliparit $(2n - 1) \times (2n - 1)$-ruudukossa, joten mukaan tulee myös tyhjiä ruutuja.

Asiasanat: turnaus, kombinatoriikka, kongruenssi, kiertoturnaus, Roomin neliö.

Sisältö

1 Johdanto

1.1 Kombinatorisen ajattelun perusteet

Ihminen on aina osannut kombinatoriikkaa. Yksinkertainen lukumäärien laskeminen on jo itsessään kombinatoriikkaa. Kombinatoriikka liittyy myös voimakkaasti erilaisten kombinaatioiden miettimiseen, eli sen avulla voidaan luoda erilaisia hyvin toimivia järjestelmiä. Kombinatoriikassa on siis olennaista tietää, kuinka monta jäsentä joukossa on. On täysin eri asia järjestää jalkapalloturnaus jossa on 3 joukkuetta, kuin jos joukkueita on 300. Erilaisten kombinaatioiden määrä kasvaa nopeasti joukon alkioiden määrän kasvaessa.

Tutkielmassa käytetään päälähteenä Ian Andersonin kirjoittamaa kirjaa [2], jossa on käsitelty selkeästi kombinatoristen sommitelmien vaikutusta turnauksiin sekä turnauksien kombinatoriikkaa yleisesti. Kombinatorisista sommitelmista kerrotaan lisää lähteessä [4].

1.2 Turnauksista

Turnausten näkökulmasta kombinatoriikka liittyy inhimillisyyteen. Ajatellaan vaikka jalkapalloturnausta, jossa on 8 joukkuetta. Pelin kannalta on tärkeää, että jokainen joukkue saa levättyä riittävästi pelien välissä ja että joukkueet on valikoitu oikeudenmukaisesti. Ei ole esimerkiksi reilua, että huonoimmat joukkueet pelaavat keskenään alkukarsinnan ja pääsevät siten helpommin finaaliotteluihin. Tämän vuoksi turnausten järjestämisessä tarvitaan kombinatoriikkaa – järjestelyä.

Mitä enemmän ehtoja joukkueiden välisille peleille asetetaan, sitä monimutkaisempaa matematiikkaa turnausten järjestämiseen vaaditaan. Tutkielmassa tullaan käsittelemään teoriaa erilaisten turnausten näkökulmasta, joista esiintyy ainakin jalkopallo-, shakki-, tennis- ja bridgeturnaus.

2 Algebran ja kombinatoriikan aputuloksia

2.1 Kongruenssi

Tämän kappaleen käsittely liittyy lähteeseen [3]. Kongruenssi liittyy lukujen jaollisuuteen.

2.1.1 Kongruenssin määritelmä

Määritelmä 2.1 (Kongruenssi)**.** Kokonaisluvut a ja b ovat kongruentteja modulo n jos niiden erotus $a - b$ on jaollinen luvulla n. Tällöin merkitään $a \equiv b \pmod{n}$.

Esimerkki 2.2. $11 \equiv 3 \pmod{8}$, koska $11 - 3 = 8$ on jaollinen luvulla 8.

Monissa tilanteissa kaksi lukua, jotka ovat kongruentteja keskenään, voidaan ajatella yhtenä lukuna. Helpoin esimerkki arkielämästä ovat kellonajat. Kun kello näyttää päivällä 1.00, se tarkoittaa samaa kuin 13.00, koska kello on mennyt yhden kokonaisen kierroksen ympäri. Kellotaulussa siis $13 = 1$, koska $13 \equiv 1 \pmod{12}$. Tutkielmassa esiintyy useita tilanteita, jossa voidaan ajatella kellotaulun tavoin ja yhdenmukaistaa luvut jotka ovat kongruentteja keskenään. Monet yhtälöt on helpoin määritellä kongruenssin kautta. Samoin viikonpäivät noudattavat kongruenssia, koska sunnuntain jälkeen päivä muuttuu taas maanantaiksi, aivan kuten edellisellä viikolla. Kongruenssi onkin kaikkein käyttökelpoisin, kun jokin asia toistuu aina tietyn syklin välein.

2.1.2 Jäännösluokkarengas

Matematiikassa on tapana luoda lukujoukkoja, jotka noudattavat tiettyjä laskulakeja. Edellisen kappaleen kongruenssin avulla voidaan määritellä niin sanottu jäännösluokkarengas.

Määritelmä 2.3 (jäännösluokka modulo n)**.** Kokonaisluvun *a jäännösluokka* modulo n on

$$\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{n}\} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Määritelmän perusteella $\overline{a} = \overline{b}$ jos ja vain jos $a \equiv b \pmod{n}$. Tämä tarkoittaa, että jäännösluokkaan kuuluvat ne kokonaisluvut, jotka antavat saman jakojäännöksen luvulla n jaettaessa. Käytetään kaikkien jäännösluokkien joukosta modulo n merkintää $\mathbb{Z}_n$. Äskeisen perusteella saadaan pääteltyä että

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Vaihtoehtoisesti voidaan kirjoittaa $\mathbb{Z}_n = \{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}, \overline{n}\}$, koska selvästi $\overline{0} = \overline{n}$. Tässä esityksessä tämä tulkinta on useammin käytössä kuin edellinen.

Tälle lukujoukolle voidaan määritellä kaksi laskusääntöä, summa ja kertolasku. Määritellään ne kaavoilla $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ ja $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$. Havainnollistetaan näitä operaatioita seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2.4. Jos $n = 7$ niin $\overline{6} + \overline{5} = \overline{6+5} = \overline{11} = \overline{4}$ ja $\overline{6} \cdot \overline{5} = \overline{6 \cdot 5} = \overline{30} = \overline{2}$.

Huomaathan, että jäännösluokalla voi olla useita edustajia. Edellä olevassa esimerkissä 4 ja 7 ovat eri edustajat samalle jäännösluokalle. Summa ja kertolasku ovat *hyvinmääritellyt*, koska edustajan valinnasta riippumatta laskutoimitukset pysyvät samoina. Tarkastellaan tätä ominaisuutta seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2.5. Jäännösluokassa $\mathbb{Z}_7$ voidaan valita $\overline{6} = \overline{20}$, jolloin $\overline{6} + \overline{5} = \overline{20} + \overline{5} = \overline{20+5} = \overline{25} = \overline{4}$ ja $\overline{6} \cdot \overline{5} = \overline{20} \cdot \overline{5} = \overline{20 \cdot 5} = \overline{100} = \overline{2}$. Saatiin siis samat tulokset kuin edellisessä esimerkissä.

2.2 Kombinatoriset sommitelmat

Seuraavan kappaleen käsittely perustuu lähteeseen [1]. Kombinatoriikassa käytetään apukeinona matemaattisia sommitelmia, joita kutsutaan (v, k, λ)–sommitelmiksi.

Määritelmä 2.6. Matemaattinen (v, k, λ)-*sommitelma* on joukko, joka sisältää sellaisia k-alkioisia osajoukkoja v-alkioisesta joukosta, että jokainen kaksialkoinen osajoukko esiintyy täsmälleen λ kertaa näissä k-alkioisissa osajoukoissa.

Havainnollistetaan määritelmää seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2.7. Oletetaan, että on 7 eri kahvilaatua ja tietty määrä kahvikriitikoita, joista jokainen pystyy maistamaan vain kolmea eri kahvilaatua. Numeroidaan kahvilaadut numeroilla $1, 2, 3, \ldots, 7$, jolloin kahvinmaistelujärjestys voisi olla esimerkiksi taulukon 1 mukainen.

Kriitikko	Maisteltavat kahvit
1	$(1, 2, 5)$
2	$(2, 3, 6)$
3	$(3, 4, 7)$
4	$(4, 7, 1)$
5	$(5, 6, 2)$
6	$(6, 7, 3)$
7	$(7, 1, 4)$

Taulukko 1: Maisteltavien kahvien kombinaatiot

Tämä ei kuitenkaan vaikuta reilulta järjestykseltä, koska esimerkiksi kahvilaatuja 4 ja 7 maistaa peräti kolme henkilöä, mutta yksikään henkilö ei juo sekä kahvia 1 että 6. Yritetään siis tehdä järjestelmä sellaiseksi, että jokaista kahden kahvin kombinaatiota maistelee yhtä moni kriitikko. Tällöin taulukko 2 on yksi tapa järjestää maistelu. Nyt maistelu on oikeudenmukaisempi, koska jokainen kahden kahvin kombinaatio on täsmälleen yhdellä kriitikolla.

Kriitikko	Maisteltavat kahvit
1	$(1, 2, 4)$
2	$(2, 3, 5)$
3	$(3, 4, 6)$
4	$(4, 5, 7)$
5	$(5, 6, 1)$
6	$(6, 7, 2)$
7	$(7, 1, 3)$

Taulukko 2: Maisteltavien kahvien kombinaatiot

Kriitikoita oli siis 7, jokainen maisteli kolmea kahvia ja jokainen kahden kahvin kombinaatio esiintyi yhdellä kriitikolla. Tällöin tilannetta sanotaan $(7, 3, 1)$–sommitelmaksi. Turnausten näkökulmasta mielenkiintoisimpia ovat $(2n, 2, 1)$–sommitelmat, joiden olemassaolo todistetaan myöhemmin.

2.3 Latinalainen neliö

Monille tutuin latinalainen neliö on 9×9 sudokuruudukko. Siinä esiintyy jokaisella vaaka- ja pystyrivillä numerot $1, 2, 3, \ldots, 9$ tarkalleen kerran. Sudokussa vaaditaan vielä pari muuta ehtoa, mutta yleisesti latinaisessa neliössä, jonka koko on $n \times n$, esiintyy numerot $1, 2, 3, \ldots, n$ kaikilla vaaka- ja pystyriveillä. Kokoa $n \times n$ olevan latinalaisen neliön *kertaluku* on n. Latinalaisessa neliössä ei tarvitse olla välttämättä numeroita $1, 2, 3, \ldots, n$, vaan periaatteessa mitkä tahansa symbolit kelpaavat. Voidaan siis sanoa että latinalaisessa neliössä esiintyy jonkin n-alkioisen joukon kaikki alkiot täsmälleen kerran jokaisella vaaka- ja pystyrivillä.

Esimerkki 2.8. Esimerkki kertalukua 4 olevasta latinalaisesta neliöstä on

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Latinalaisen neliön alkioita merkitään symbolilla l_{ij}, jossa i tarkoittaa vaakarivin numeroa ylhäältäpäin luettuna ja j pystyrivin numeroa vasemmalta luettuna.

Esimerkki 2.9. Esimerkiksi äskeisessä latinalaisessa neliössä

$$l_{13} = 4,\ l_{31} = 4 \text{ ja } l_{21} = 2.$$

Määritellään seuraavaksi latinalaisten neliöiden ortogonaalisuus. Kahden latinalaisen neliön *yhdistelmä* on neliö, jonka alkioina ovat alkuperäisten latinalaisten vastaavissa kohdissa olevien alkioiden perusteella muodostetut järjestetyt parit.

Määritelmä 2.10. Kaksi latinalaista neliötä ovat *ortogonaaliset*, jos niiden yhdistelmä sisältää kaikki kaksialkioiset järjestetyt parit täsmälleen kerran.

Esimerkki 2.11. Latinalaisten neliöiden

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

yhdistelmä on

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (4,3) & (3,4) \\ (2,4) & (3,3) & (1,2) & (4,1) \\ (4,2) & (1,1) & (3,4) & (2,3) \\ (3,3) & (4,4) & (2,1) & (1,2) \end{bmatrix}.$$

Järjestetyt parit $(1,1)$ ja $(3,3)$ esiintyvät kahdesti yhdistelmässä, joten nämä latinalaiset neliöt eivät ole ortogonaalisia.

Esimerkki 2.12. Latinalaiset neliöt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ovat ortogonaalisia, sillä niiden yhdistelmässä

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) & (4,4) \\ (3,4) & (4,3) & (1,2) & (2,1) \\ (4,2) & (3,1) & (2,4) & (1,3) \\ (2,3) & (1,4) & (4,1) & (3,2) \end{bmatrix}$$

kaikki järjestetyt parit esiintyvät tarkalleen kerran.

Jos useamman latinalaisen neliön joukossa kaikki neliöt ovat pareittain ortogonaalisia, niin puhutaan *pareittain ortogonaalisista latinalaisista neliöistä.*

Voidaan todistaa, että ortogonaaliset latinalaiset neliöt ovat olemassa kun $n \geq 3$ ja $n \neq 6$. Seuraavan lauseen mukaan on olemassa vähintään 2 kertalukua n olevaa ortogonaalista latinalaista neliötä, kun $n \geq 3$ on pariton.

Lause 2.13. Olkoon kokonaisluku n sellainen, että $n \geq 3$ on pariton. Määritellään neliöt $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ seuraavien kaavojen avulla:

$$a_{ij} \equiv j - i + 1 \pmod{n}$$

ja

$$b_{ij} \equiv i + j - 1 \pmod{n}.$$

Nyt A ja B ovat ortogonaalisia latinalaisia neliöitä.

Todistus. Todistetaan, että A on latinalainen neliö. Todistetaan ensin, että jokaisella rivillä esiintyy eri symbolit. Jos samalla rivillä on samat numerot eli $a_{ij} = a_{ik}$, niin saadaan

$$j - i + 1 \equiv k - i + 1 \pmod{n},$$

minkä perusteella $j \equiv k \pmod{n}$ ja edelleen $j = k$. Tämä tarkoittaa, että jokaisella rivillä esiintyy kaikki symbolit tarkalleen kerran.

Vastaavasti saadaan näytettyä, että jokaisella sarakkeella kaikki alkiot esiintyvät tarkalleen kerran. Jos $a_{ij} = a_{kj}$ niin

$$j - i + 1 \equiv j - k + 1 \pmod{n}$$

minkä perusteella $-i \equiv -k \pmod{n}$ ja edelleen $i = k$. Siis jokaisessa sarakkeessa on eri symbolit ja A on latinalainen neliö.

Todistetaan seuraavaksi samalla idealla että B on latinalainen neliö. Todistetaan ensin, että jokaisella rivillä esiintyy eri symbolit. Jos samalla rivillä on samat numerot eli $b_{ij} = b_{ik}$, niin saadaan

$$i + j + 1 \equiv i + k + 1 \pmod{n},$$

minkä perusteella $j \equiv k \pmod{n}$ ja edelleen $j = k$. Tämä tarkoittaa, että jokaisella rivillä esiintyy kaikki symbolit tarkalleen kerran.

Vastaavasti jokainen sarake saadaan todistettua seuraavasti. Kun oletetaan $b_{ij} = b_{kj}$, niin saadaan

$$j - i + 1 \equiv j - k + 1 \pmod{n},$$

minkä perusteella $-i \equiv -k$ ja edelleen $i = k$. Siis jokaisessa sarakkeessa on kaikki symbolit tarkalleen kerran, joten A ja B ovat latinalaiset neliöt.

Seuraavaksi todistetaan latinalaisten neliöiden A ja B ortogonaalisuus. Oletetaan, että $a_{ij} = a_{IJ}$ ja $b_{ij} = b_{IJ}$. Tällöin $j-i+1 \equiv J-I+1$ ja $i+j-1 \equiv I+J-1$. Summaamalla yhtälöt puolittain saadaan $2j \equiv 2J \pmod{n}$ ja vähentämällä $2i \equiv 2I \pmod{n}$. Koska n on pariton, näistä yhtälöistä seuraa $j \equiv J$ ja $i \equiv I$, eli $j = J$ ja $i = I$. Tämä tarkoittaa, että A ja B ovat ortogonaaliset. $\square$

Havainnollistetaan konstruktiota seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2.14. Konstruoidaan A ja B, kun $n = 7$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Lasketaan esimerkkinä a_{34} ja b_{67}.

$$\begin{cases} a_{34} = 4 - 3 + 1 = 2 \\ b_{67} = 6 + 7 - 1 \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

Luodaan vielä äskeisten latinalaisten neliöiden yhdistelmä.

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) & (4,4) & (5,5) & (6,6) & (7,7) \\ (7,2) & (1,3) & (2,4) & (3,5) & (4,6) & (5,7) & (6,1) \\ (6,3) & (7,4) & (1,5) & (2,6) & (3,7) & (4,1) & (5,2) \\ (5,4) & (6,5) & (7,6) & (1,7) & (2,1) & (3,2) & (4,3) \\ (4,5) & (5,6) & (6,7) & (7,1) & (1,2) & (2,3) & (3,4) \\ (3,6) & (4,7) & (5,1) & (6,2) & (7,3) & (1,4) & (2,5) \\ (2,7) & (3,1) & (4,2) & (5,3) & (6,4) & (7,5) & (1,6) \end{bmatrix}$$

Selvästi jokaisessa ruudussa on erilainen jäjestetty pari, joten A ja B ovat ortogonaaliset.

3 Kiertoturnaus

3.1 Määritelmä

Ideana on järjestää turnaus, jossa jokainen joukkue pelaa jokaista muuta joukkuetta vastaan täsmälleen kerran. Jos joukkueita on esimerkiksi 8 kappaletta, jokainen joukkue pelaa 7 ottelua. Kaikkia muita paitsi itseään vastaan. Huolimattomalla laskulla pelien lukumääräksi voisi laskea $8 \cdot 7 = 56$, mutta tällä laskutavalla pelejä tulee kaksi kertaa liian paljon. Koska tässä laskutavassa lasketaan erikseen se peli, jossa joukkue 1 ja joukkue 2 pelaa keskenään, ja se peli, jossa joukkue 2 ja joukkue 1 pelaa keskenään, vaikka molemmat ovat täsmälleen sama peli. Oikeasti pelejä tulee yhteensä siis $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

Edellinen tilanne voidaan yleistää mille tahansa parilliselle määrälle joukkueita. Oletetaan, että joukkueita on $2n$. Tällöin jokainen joukkue pelaa $2n-1$ ottelua ja otteluita tulee yhteensä $\frac{2n \cdot (2n-1)}{2} = n(2n-1)$.

Tämä voidaan laskea myös toisella tavalla. Turnauksessa lasketaan kaikki kahden alkion kombinaatiot $2n$ joukkueesta, jolloin pelejä tulee

$$\binom{2n}{2} = \frac{(2n)!}{(2n-2)! \cdot 2!} = \frac{2n \cdot (2n-1)}{2} = n(2n-1).$$

Palataan vielä tilanteeseen, jossa on 8 joukkuetta. Joukkueet pelaavat yhteensä 28 ottelua, jotka voidaan jakaa seitsemälle eri kierrokselle. Jokaisella kierroksella jokainen joukkue pelaa yhden ottelun. Merkitään joukkueita numeroilla $1, 2, 3, \ldots, 8$, ja joukkueen i ja joukkueen j välistä peliä parina (i, j) tai $[i, j]$. Näillä merkinnöillä yksi kierros voisi olla esimerkiksi $(1, 2), (3, 7), (4, 6)$ ja $(5, 8)$ tai $(1, 3), (2, 8), (4, 7)$ ja $(5, 6)$. Tässä tapauksessa koko turnaus voisi olla taulukon 3 mukainen.

Selvästi pystyttiin järjestämään 8 joukkueen turnaus, jossa kaikki joukkueet kohtaavat täsmälleen kerran ja jokaisella 7 kierroksella kaikki joukkueet

Kierros	Ottelut			
1	$(1,2)$	$(3,7)$	$(4,6)$	$(5,8)$
2	$(1,3)$	$(2,8)$	$(4,7)$	$(5,6)$
3	$(1,4)$	$(2,3)$	$(5,7)$	$(6,8)$
4	$(1,5)$	$(2,4)$	$(3,8)$	$(6,7)$
5	$(1,6)$	$(2,5)$	$(3,4)$	$(7,8)$
6	$(1,7)$	$(2,6)$	$(3,5)$	$(4,8)$
7	$(1,8)$	$(2,7)$	$(3,6)$	$(4,5)$

Taulukko 3: Turnauksen pelit

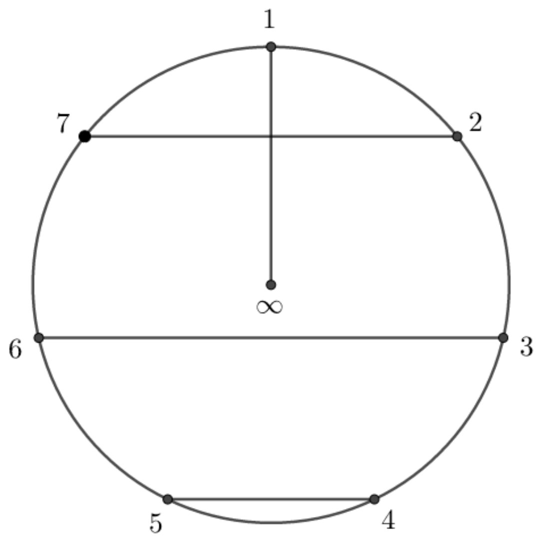
pelaavat yhden ottelun. Myöhemmin osoitetaan, että kyseinen turnaus pystytään järjestämään aina kun joukkueiden lukumäärä on parillinen. Silloin joukkueita on $2n$, pelejä $n(2n-1)$ ja kierroksia $2n-1$ kappaletta.

3.2 Yhteys sommitelmiin

Ajatellaan äskeistä turnausta sommitelmana. Kuten edellä nähtiin, jokainen pelipari esiintyi turnauksessa tarkalleen kerran. Kyseessä on siis $(8,2,1)$-sommitelma. Samalla tavalla jokainen kiertoturnaus, jossa on parillinen määrä joukkueita, voidaan ajatella $(2n,2,1)$-sommitelmana. Koska jokainen pelaa jokaista vastaan täsmälleen kerran, löytyy turnauksesta jokainen kaksialkioinen osajoukko täsmälleen kerran.

3.3 Konstruointi kiertomenetelmällä

Yksi tapa konstruoida edellinen turnaus on käyttää niin sanottua kiertomenetelmää. Vaihdetaan hieman merkintöjä. Joukkueita on edelleen 8, mutta merkitäänkin nyt joukkuetta 8 symbolilla ∞. Tällöin joukkueet ovat $\infty, 1, 2, 3, \ldots, 7$. Sijoitetaan joukkueet $1, 2, \ldots, 7$ tasaisesti ympyrän kehälle, sekä joukkue ∞ ympyrän keskipisteeseen. Seuraavaksi yhdistetään joukkueet 1 ja ∞ janalla, joka on samalla ympyrän säde. Muut joukkueet yhdistetään pareittain tätä edellistä sädettä vastaan kohtisuorilla janoilla, jolloin saadaan kuvan 1 esittämä tilanne.



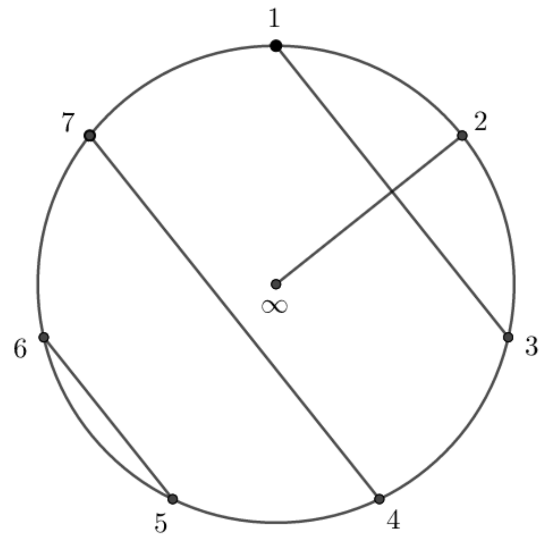
Kuva 1: Ensimmäinen kierros

Jokainen viiva tässä kuviossa tarkoittaa kahden joukkueen välistä ottelua turnauksen ensimmäisellä kierroksella. Tällöin ensimmäisellä kierroksella pelataan pelit $(\infty, 1)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$ ja $(4, 5)$. Seuraavan kierroksen pelit saadaan kun kierretään kuviota $\frac{1}{7}$–kierroksen verran myötäpäivään keskipisteen suhteen pitäen joukkueet $\infty, 1, 2, \ldots, 7$ paikallaan, jolloin saadaan kuvan 2 mukainen tilanne. Myös kierto vastapäivään kävisi yhtä hyvin. Edelleen viivat ilmoittavat kierroksen pelit, jotka ovat nyt $(\infty, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 7)$ ja $(5, 6)$. Jatkamalla tätä menettelyä, saadaan taulukon 4 mukainen turnaus.

Kierros	Ottelut			
1	$(\infty, 1)$	$(2, 7)$	$(3, 6)$	$(4, 5)$
2	$(\infty, 2)$	$(3, 1)$	$(4, 7)$	$(5, 6)$
3	$(\infty, 3)$	$(4, 2)$	$(5, 1)$	$(6, 7)$
4	$(\infty, 4)$	$(5, 3)$	$(6, 2)$	$(7, 1)$
5	$(\infty, 5)$	$(6, 4)$	$(7, 3)$	$(1, 2)$
6	$(\infty, 6)$	$(7, 5)$	$(1, 4)$	$(2, 3)$
7	$(\infty, 7)$	$(1, 6)$	$(2, 5)$	$(3, 4)$

Taulukko 4: Turnauksen pelit

Kun katsoo taulukossa 4 kolmea oikeanpuoleisinta saraketta, huomaa se-



Kuva 2: Toinen kierros

kä vasemman että oikeanpuolimmaisen joukkueen numeron kasvavan aina yhdellä kun siirrytään sarakkeessa yksi rivi alaspäin. Tässä täytyy ajatella lukuja kongruenssin avulla, missä lasketaan modulo 7. Tällöin esimerkiksi $7+1 \equiv 1 \pmod 7$. Voidaan ajatella myös jäännösluokkarengasta $\mathbb{Z}_7$, jolloin luonnollisesti $\overline{8} = \overline{1}$.

Yleisesti voidaan ajatella, että kyseessä on joukkueet $\infty, 1, 2, \ldots, 2n-1$. Näistä joukkueista asetellaan samantyyppisesti ympyrän kehälle joukkueet $1, 2, \ldots, 2n-1$ ja joukkue ∞ ympyrän keskipisteeseen. Nyt aina kierroksella i pelataan pelit $[i, \infty], [(i-1), (i+1)], [(i-2), (i+2)], [(i-3), (i+3)], \ldots,$ $[(i-(n-1)), (i+(n+1))]$, missä joukkueen numerot lasketaan modulo $2n-1$ tai jäännösluokkarenkaassa

$$\mathbb{Z}_{2n-1} = \{\overline{1}, \ldots, \overline{2n-1}\}.$$

Äskeisellä tavalla merkittynä joukkueen vastustajan numeron määrittäminen kierroksella näyttää melko hankalalta. Kuitenkin, jos laskee jokaisella kierroksella pelistä $[(i-1), (i+1)]$ alkaen aina vastakkain pelaavien joukkueiden numerot yhteen, vastaus on aina $2i \pmod{2n-1}$. Voidaan siis sanoa, että kierroksella i pelataan pelit (∞, i) ja (a, b), jossa $a+b \equiv 2i \pmod{2n-1}$.

3.4 Kirkmanin konstruointi

On olemassa toinenkin tapa konstruoida edellisen kappaleen turnaus. Kirkman huomasi tämän vuonna 1847 [2]. Merkitään edelleen joukkueiden a ja b välistä ottelua järjestettynä parina (a, b). Oletetaan nyt kuitenkin, että $a < b$. Konstruoidaan kuuden joukkueen välinen turnaus. Merkitään joukkueita numeroilla 1,2,3, ...,6. Jaetaan jokainen kierros kuuteen sarakkeeseen. Vasemmanpuoleisin sarake täytetään peleillä $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$ ja $(1, 6)$. Seuraavaksi tulee pelin $(2, 3)$ vuoro. Asetetaan se seuraavaan sarakkeeseen. Sitä ei kuitenkaan voida asettaa kahdelle ensimmäiselle riville, koska joukkue 2 pelaa jo joukkuetta 1 vastaan ensimmäisellä kierroksella ja samoin joukkue 3 toisella kierroksella. Asetetaan siis peli $(2, 3)$ kolmannelle riville pelin $(1, 4)$ viereen. Seuraavaksi asetetaan pelit $(2, 4)$ ja $(2, 5)$ ensimmäisille mahdollisille paikoille toisessa sarakkeessa. Peli $(2, 6)$ ei enää mahdu toiselle sarakkeelle, joten laitetaan se ensimmäiselle sallitulle paikalle sarakkeessa 3. Ensimmäiselle riville sitä ei voida laittaa, koska joukkue 2 pelaa jo joukkuetta 1 vastaan kyseisellä kierroksella. Siis peli $(2, 6)$ laitetaan kierrokselle 2. Edellistä menettelyä jatkamalla saadaan alla oleva taulukko. Kokonaisuudessaan saadaan siis taulukon 6 mukainen turnaus.

	sarake 1	sarake 2	sarake 3	sarake 4	sarake 5	sarake 6
kierros 1	(1,2)			(3,5)		(4,6)
kierros 2	(1,3)		(2,6)		(4,5)	
kierros 3	(1,4)	(2,3)				(5,6)
kierros 4	(1,5)	(2,4)		(3,6)		
kierros 5	(1,6)	(2,5)	(3,4)			

Taulukko 5: Turnauksen pelit

Ei ole itsestään selvää, että äskeinen konstruointi toimii aina kun joukkueiden lukumäärä on parillinen. Kuitenkin näin tapahtuu. Todistetaan tämä seuraavaksi.

Lause 3.1. Merkitään turnauksen joukkueita luvuilla $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Edellisessä konstruktiossa ottelu (i, j), missä $1 \leq i < j \leq 2n - 1$, pelataan kierroksella $i + j - 2 \pmod{2n - 1}$ ja ottelu $(i, 2n)$ pelataan kierroksella $2i - 2$.

Kierros	Ottelut		
1	$(1,2)$	$(3,5)$	$(4,6)$
2	$(1,3)$	$(2,6)$	$(4,5)$
3	$(1,4)$	$(2,3)$	$(5,6)$
4	$(1,5)$	$(2,4)$	$(3,6)$
5	$(1,6)$	$(2,5)$	$(3,4)$

Taulukko 6: Turnauksen pelit

Todistus. Konstruktiossa käydään läpi kaikki pelit (k, j), joille $1 \leqslant k < j \leqslant 2n$. Kutsutaan termillä 'vaihe k' sitä konstruktion vaihetta, jossa käydään läpi pelit (k, j), $k < j \leqslant 2n$. Edellisessä esimerkissä vaihe 1 tarkoittaisi pelejä, jotka on asetettu sarakkaaseen 1. Todistusta varten käytetään seuraavasta ominaisuudesta merkintää $P(k)$: Vaiheen k lopussa, jokainen peli $(i, 2n)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, pelataan kierroksella $2i - 2 \pmod{2n-1}$, ja kun $i < j \leqslant 2n$, jokainen peli (i, j), $i \leqslant k$ pelataan kierroksella $i+j-2 \pmod{2n-1}$. Väite todistetaan induktiolla tämän aputuloksen avulla.

Ominaisuus $P(k)$ kuulostaa hieman hankalalta, joten käydään läpi mitä esimerkiksi $P(1)$ tarkoittaisi taulukon 5 turnauksessa. Ominaisuus $P(1)$ väittää, että peli $(1, 6)$ pelataan kierroksella

$$2 \cdot 1 - 2 \equiv 0 \equiv 5 \pmod{5},$$

mikä selvästi pitää paikkansa. Tämän jälkeen peli $(1, 2)$ pelataan kierroksella $1 + 2 - 2 \equiv 1 \pmod{5}$, peli $(1, 3)$ kierroksella $1 + 3 - 2 \equiv 2 \pmod{5}$, ja niin edelleen aina peliin $(1, 5)$ asti joka pelataan kierroksella $1 + 5 - 2 \equiv 4 \pmod{5}$.

Ominaisuus $P(1)$ on siis selvästi totta, kun $n = 3$. Samalla tavalla voidaan päätellä, että $P(1)$ on totta riippumatta muuttujan n arvosta. Todistetaan seuraavaksi $P(k)$ induktiolla.

Ominaisuus $P(1)$ on voimassa, joten oletetaan seuraavaksi, että $P(k)$ pitää paikkansa ja todistetaan sen avulla $P(k + 1)$. Viimeisimpinä vaiheen k konstruktiossa on asetettu peli $(k, 2n)$ kierrokselle $2k-2 \pmod{2n-1}$. Mietitään seuraavaksi peliä $(k+1, k+2)$. Induktio-oletuksen mukaan peli $(k, k+1)$

pelataan kierroksella $k+(k+1)-2 \equiv 2k-1 \pmod{2n-1}$. Samalla päättelyllä peli $(k, k+2)$ pelataan kierroksella $k+(k+2)-2 \equiv 2k \pmod{2n-1}$.

	sarake x	$\dots$
$\vdots$		
kierros $2k-2$	$(k,2n)$	
kierros $2k-1$	$(k, k+1)$	
kierros $2k$	$(k, k+2)$	
kierros $2k+1$	$(k+1, k+2)$	
kierros $2k+2$	$(k+1, k+3)$	
$\vdots$		
kierros $k+2n-2$	$(k+1, 2n-1)$	

Taulukko 7: Konstruktion vaihe k

Näytetään seuraavaksi, että peli $(k+1, k+2)$ voidaan asettaa kierrokselle $2k+1$. Kierrokselle $2k+1$ ei ole vielä asetettu ottelua $(i, k+1)$, missä $i < k+1$, sillä muutoin

$$(k+1)+i-2 \equiv k+i-1 \equiv 2k+1 \pmod{2n-1},$$

mikä edelleen voitaisiin kirjoittaa ekvivalentisti

$$i \equiv k+2 \pmod{2n-1}.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska $i < k+1$. Samalla tavalla osoitetaan, ettei peliä $(i, k+2)$, missä $i \leq k$, ole asetettu kierroksella $2k+1$, koska silloin olisi

$$(k+2)+i-2 \equiv k+i \equiv 2k+1 \pmod{2n-1},$$

eli ekvivalentisti

$$i \equiv k+1 \pmod{2n-1}.$$

Tämä on edelleen ristiriidassa oletuksen $i \leq k$ kanssa. Edellisen perusteella ottelu $(k+1, k+2)$ voidaan asettaa kierrokselle $2k+1$.

Seuraavaksi asetetaan peli $(k+1, j)$ kierrokselle $(k+1)+j-2 \equiv k+j-1 \pmod{2n-1}$ kaikilla $j = k+3, k+4, k+5, \ldots, 2n-1$. Mitkään kaksi peliä $(i, k+1)$ ja $(k+1, j)$ eivät voi tulla samalle kierrokselle, koska tällöin $i + (k+1) - 2 \equiv (k+1) + j - 2 \pmod{2n-1}$, mikä tarkoittaa $i \equiv j \pmod{2n-1}$. Tämä johtaa ristiriitaan, koska $i < k+1$ ja $j > k+1$.

Tämän perusteella siis joukkue $k+1$ ei ole pelannut aiemmin kierroksella $k+j-1$. Osoitetaan seuraavaksi vielä, että joukkue $j \geq k+2$ ei ole pelannut aiemmin kierroksella $k+j-1$. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan joukkue i pelaa joukkuetta j vastaan (peli (i, j)) kierroksella $k+j-1$, missä $i \leq k$. Silloin

$$i + j - 2 \equiv k + j - 1 \pmod{2n-1},$$

eli ekvivalentisti

$$i \equiv k + 1 \pmod{2n-1}.$$

Tämä johtaa ristiiriitaan, sillä $i \leq k$. Ottelu $(k+1, j)$ voidaan siis asettaa kierrokselle $k + j - 1 \pmod{2n-1}$.

Edellä on viimeisenä asetettu peli $(k+1, 2n-1)$ kierrokselle $(k+1)+(2n-1)-2 \equiv k-1 \pmod{2n-1}$, eli kierrokselle $k-1$. Seuraavaksi yritämme asettaa peliä $(k+1, 2n)$ kierrokselle k, mutta tällä kierroksella on jo peli $(1, k+1)$, koska $1 + (k+1) - 2 \equiv k \pmod{2n-1}$. Samalla päättelyllä kierroksilla $k+1,\ k+2,\ k+3, \ldots,\ 2k-1$ on jo pelit $(2, k+1),\ (3, k+1),\ (4, k+1), \ldots,\ (k, k+1)$.

Asetetaan siis peli $(k+1, 2n)$ kierrokselle $2k$ $(= 2(k+1) - 2)$. Joukkue $2n$ ei ole vielä pelannut kierroksella $2k$, koska muutoin jollekin pelille $(i, 2n)$ olisi voimassa yhtälö

$$2i - 2 \equiv 2k \pmod{2n-1}.$$

Tämä toteutuu ainostaan, kun

$$i \equiv k + 1 \pmod{2n-1}.$$

Ominaisuus $P(k+1)$ on siis osoitettu, ja lauseen väite seuraa induktiolla.

$\square$

Edellisen lauseen perustella Kirkmanin konstruktiossa kaikki joukkueet kohtaavat kerran ja pelaavat yhden ottelun kullakin kierroksella.

4 Vaihdonrikko

4.1 Määritelmä

Aikaisemmin merkittiin aina ensin se joukkue, jolla on pienempi numero. Esimerkiksi joukkueiden 1 ja 2 välinen ottelu merkittiin $(1, 2)$ eikä $(2, 1)$. Tästä eteenpäin sallitaan myös merkintä $(2, 1)$, joka nyt tarkoittaa sitä, että joukkue 2 pelaa kotikentällään ja joukkue 1 vieraskentällä. Vastaavasti $(1, 2)$ tarkoittaa, että joukkue 1 pelaa kotikentällään ja joukkue 2 vieraskentällä.

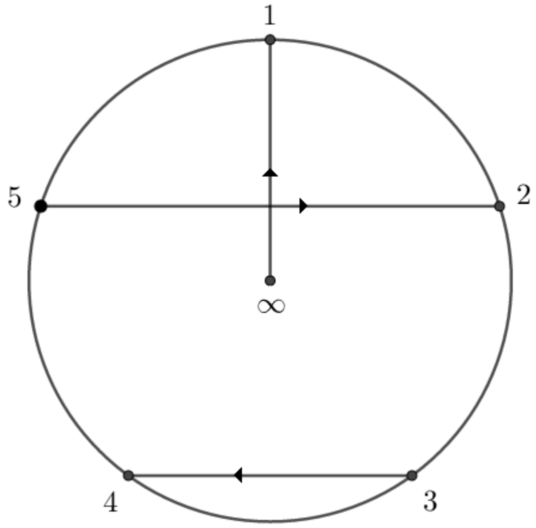
Tavoitteena on konstruoida turnaus, jossa joukkueet pelaavat vuorotellen kotikentällä ja vieraskentällä.

Määritelmä 4.1. Jos joukkue pelaa perättäin joko 2 kotiottelua tai vierasottelua, puhutaan *vaihdonrikosta.*

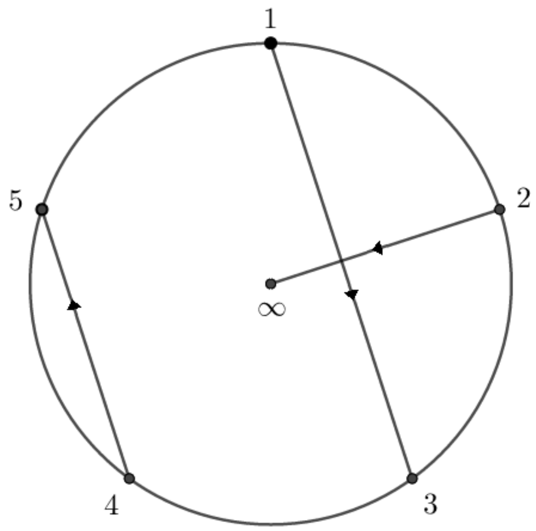
Tavoitteena on siis minimoida vaihdonrikkojen lukumäärä, jolloin turnaus pysyy oikeidenmukaisena kaikille. Konstruoidaan seuraavaksi turnaus kuudelle joukkueelle, eli $2n = 6$. Tällöin voidaan käyttää kappaleen 3.3 kiertomenetelmää. Muutetaan kuitenkin kuviota sen verran, että piirretään nuolet kaikille janoille (ks. kuva 3). Ensimmäisessä kuviossa pelin $(\infty, 1)$ janaan piirretään nuoli osoittamaan joukkuetta 1. Tämä tarkoittaa, että joukkue ∞ pelaa kotikentällään ja joukkue 1 vieraskentällä. Nuoli osoittaa siis aina kotijoukkueesta vierasjoukkueeseen päin. Seuraavaksi piirretään nuolet niin, että pelataan pelit $(5, 2)$ ja $(3, 4)$. On tärkeää, että kaikkien niiden pelien nuolien suunnat vuorottelevat, missä ei ole joukkuetta ∞, kuten näkyy kuvasta 3.

Ollaan siis saatu konstruoitua turnauksen ensimmäinen kierros. Seuraava kierros saadaan taas kääntämällä ympyrää ja janoja $\frac{1}{5}$–kierroksen verran myötäpäivään. Kaikki nuolet pysyvät samansuuntaisina lukuunottamatta nuolta, joka liittyy joukkueen ∞ peliin. Se kääntyy niin, että joukkue ∞ onkin nyt vierasjoukkue.

Saadaan siis pelit $(2, \infty)$, $(1, 3)$ ja $(4, 5)$. Kolmas kierros saadaan jatkamalla samaa menettelyä. Nyt joukkue ∞ on taas kotijoukkue, ja saadaan pelit



Kuva 3: Ensimmäinen kierros



Kuva 4: Toinen kierros

$(\infty, 3)$, $(2, 4)$ ja $(5, 1)$. Kaiken kaikkiaan saadaan siis taulukon 8 mukainen turnaus.

Tehdään seuraavaksi taulukko, josta näkee onko joukkue pelannut kotiottelun vai vierasottelun. Merkitään kotiottelua kirjaimella K ja vierasottelua kirjaimella V. Taulukossa 9 joukkueet 1 ja ∞ pelaavat selvästi vuorotellen kotiottelun ja vierasottelun, eli niille ei tule yhtään vaihdonrikkoa. Sen si-

Kierros	Ottelut		
1	$(\infty, 1)$	$(5, 2)$	$(3, 4)$
2	$(2, \infty)$	$(1, 3)$	$(4, 5)$
3	$(\infty, 3)$	$(2, 4)$	$(5, 1)$
4	$(4, \infty)$	$(3, 5)$	$(1, 2)$
5	$(\infty, 5)$	$(4, 1)$	$(2, 3)$

Taulukko 8: Turnauksen pelit

jaan joukkueille $2, 3, 4$ ja 5 tulee kaikille yksi vaihdonrikko. Joukkueet 2 ja 4 pelaavat kaksi kertaa peräkkäin kotiottelun ja joukkueet 3 ja 5 kaksi kertaa peräkkäin vierasottelun.

Joukkue	Paikkataulukko				
∞	K	V	K	V	K
1	V	K	V	K	V
2	V	K	K	V	K
3	K	V	V	K	V
4	V	K	V	K	K
5	K	V	K	V	V

Taulukko 9: Paikkataulukko

Lause 4.2. Jos $n > 1$ ja turnauksessa on $2n$ joukkuetta, niin korkeintaan kahdella joukkueella ei ole vaihdonrikkoja ja vähintään $2n-2$ joukkueella on vaihdonrikkoja.

Todistus. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan turnauksessa on kolme joukkuetta, joilla ei ole vaihdonrikkoja. Yhdellä näistä kolmesta joukkueesta paikkataulukon rivi olisi sellainen, joka alkaa kotiottelulla ja jatkuu vuorotellen vieras- ja kotiotteluna ja toisella sellainen, joka alkaa vierasottelulla ja sen jälkeen vuorottelee. Tämä puolestaan tarkoittaisi sitä, että kolmannella joukkueella, jolla ei ole vaihdonrikkoja, olisi täysin samanlainen paikkataulukko kuin jommalla kummalla kahdesta edellisestä joukkueesta. Tämä on ristiriita, koska heidän keskinäisessä pelissä täsmälleen toinen on kotijoukkue ja toinen vierasjoukkue. Tästä seuraa lauseen väite. □

4.2 Pienin mahdollinen määrä vaihdonrikkoja

Edellisessä kappaleessa todettiin, että ei ole mahdollista luoda turnausta, jossa ei ole yhtään vaihdonrikkoa. Mikä sitten on pienin mahdollinen määrä niitä? Mietitään nyt turnausta, jossa jokainen joukkue kohtaa toisen joukkueen kaksi kertaa. Ensimmäisellä kerralla toinen joukkue on kotijoukkue ja toisella kerralla päinvastoin.

Äskeisessä esimerkissä kaikki joukkueet pelasivat kerran jokaista joukkuetta vastaan. Kopioidaan äskeinen turnaus, mutta vaihdetaan jokaisen koti- ja vierasjoukkueen paikkaa päittäin, jolloin saadaan alapuolella oleva turnaus. Yhdistetään seuraavaksi turnaukset, jolloin saadaan taulukko 11. Kun taulukosta 11 tehdään paikkataulukko, saadaan taulukko 12. Kun tässä turnauksessa lasketaan kaikki vaihdonrikot yhteen, saadaan tulokseksi 12.

Kierros	Ottelut		
6	$(1, \infty)$	$(2, 5)$	$(4, 3)$
7	$(\infty, 2)$	$(3, 1)$	$(5, 4)$
8	$(3, \infty)$	$(4, 2)$	$(1, 5)$
9	$(\infty, 4)$	$(5, 3)$	$(2, 1)$
10	$(5, \infty)$	$(1, 4)$	$(3, 2)$

Taulukko 10: Turnauksen jälkimmäisen osan pelit

Seuraavassa lauseessa tarkastellaan vaihdronrikkojen vähimmäismäärää turnauksessa, jossa kaikki joukkueet kohtaavat kahdesti.

Lause 4.3. Olkoon $n > 1$. Tarkastellaan sellaista $2n$ joukkueen turnausta, jossa kaikki joukkueet kohtaavat toisensa kahdesti ja joka koostuu kahdesta puolikkaasta, joissa joukkueet kohtaavat toisensa samoilla kierroksilla, mutta kotikenttää vaihtaen. Silloin vaihdonrikkoja tulee vähintään $6n - 6$ kappaletta.

Todistus. Merkitään, että joukkueella i on x_i vaihdonrikkoa ensimmäisellä puolikkaalla turnauksesta eli äskeisessä esimerkissä ensimmäisellä viidellä kierroksella. Joukkueilla voi olla joko parillinen tai pariton määrä vaihdonrikkoja ensimmäisellä puolikkaalla. Jos vaihdonrikkoja on pariton määrä, myös

Kierros	Ottelut		
1	$(\infty, 1)$	$(5, 2)$	$(3, 4)$
2	$(2, \infty)$	$(1, 3)$	$(4, 5)$
3	$(\infty, 3)$	$(2, 4)$	$(5, 1)$
4	$(4, \infty)$	$(3, 5)$	$(1, 2)$
5	$(\infty, 5)$	$(4, 1)$	$(2, 3)$
6	$(1, \infty)$	$(2, 5)$	$(4, 3)$
7	$(\infty, 2)$	$(3, 1)$	$(5, 4)$
8	$(3, \infty)$	$(4, 2)$	$(1, 5)$
9	$(\infty, 4)$	$(5, 3)$	$(2, 1)$
10	$(5, \infty)$	$(1, 4)$	$(3, 2)$

Taulukko 11: Koko kaksiosainen turnaus

Joukkue	Paikkataulukko									
∞	K	V	K	V	K	V	K	V	K	V
1	V	K	V	K	V	K	V	K	V	K
2	V	K	K	V	K	K	V	V	K	V
3	K	V	V	K	V	V	K	K	V	K
4	V	K	V	K	K	K	V	K	V	V
5	K	V	K	V	V	V	K	V	K	K

Taulukko 12: Paikkataulukko

puolikkaiden välissä joukkueelle tulee vaihdonrikko. Merkitään niiden joukkueiden määrää kirjaimella s, joilla on pariton määrä vaihdonrikkoja. Tällöin jäljelle jäävällä $2n - s$ joukkueella on parillinen määrä vaihdonrikkoja.

Siis s joukkueelle tulee ylimääräinen vaihdonrikko ensimmäisen puolikkaan ja toisen puolikkaan välissä. Jos joukkueella on vaihdonrikko ensimmäisellä puolikkaalla, on sillä vaihdonrikko myös toisella puolikkaalla vastaavassa kohdassa. Kun tähän vielä lisätään ne vaihdonrikot jotka tulevat puolikkaan vaihdosta, saadaan vaihdonrikkojen kokonaismääräksi $2\sum_{i=1}^{2n} x_i + s$.

Tarkastellaan joukkueiden vaihdonrikkoja ensimmäisellä puolikkaalla. Korkeintaan kahdella joukkueella voi olla nolla vaihdonrikkoa. Jos otetaan huomioon kaikki ne joukkueet, joilla on parillinen määrä vaihdonrikkoja ja poistetaan niistä nämä kaksi joukkuetta, joilla voi olla nolla vaihdonrikkoa, saadaan määräksi $2n - s - 2$. Näillä joukkueilla on siis yhteensä vähintään $2(2n - s - 2)$ vaihdonrikkoa. Kun tähän vielä lisätään parittomat vaihdonrikot, saadaan kokonaismääräksi $s + 2(2n - s - 2)$. Jos $s \geqslant 2n - 2$, vaihdonrikkojen minimimäärä kaikilla joukkueilla yhteensä ensimmäisellä puolikkaalla on s.

Kaikenkaikkiaan siis ensimmäisellä puolikkaalla

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i \geqslant \begin{cases} s + 2(2n - s - 2) & \text{kun } s < 2n - 2 \\ s & \text{kun } s \geqslant 2n - 2. \end{cases} \tag{1}$$

Yhteensä vaihdonrikkoja tulee siis

$$2\sum_{i=1}^{2n} x_i + s \geqslant \begin{cases} 2(s + 2(2n - s - 2)) + s = 8n - 8 - s & \text{kun } s \leqslant 2n - 2 \\ 2s + s = 3s & \text{kun } s \geqslant 2n - 2. \end{cases} \tag{2}$$

Kummassakin tapauksessa vaihdonrikkoja tulee vähintään $6n-6$ kappaletta, koska jos $s < 2n-2$, niin $2\sum_{i=1}^{2n} x_i + s \geqslant 8n-8-s > 8n-8-(2n-2) = 6n-6$, ja jos $s \geqslant 2n - 2$, niin $2\sum_{i=1}^{2n} x_i + s \geqslant 3s \geqslant 3(2n - 2) = 6n - 6$.

Vaihdonrikkojen minimääräksi on siis saatu todistettua $6n-6$, kun tuplataan alkuperäinen kierros. □

Lauseen 4.3 alaraja voidaan myös saavuttaa yleisesti pelaamalla niin sanottu kiertoturnaus kaksinkertaisena, eli toisella kierroksella koti- ja vieraskenttää vaihtaen.

5 Seurausvaikutus

5.1 Määritelmä

Palataan kappaleen 3.3 taulukon 4 turnaukseen. Tehdään seuraavaksi taulukko, josta näkee missä järjestyksessä kukin joukkue pelaa muita joukkueita vastaan. Taulukosta 14 nähdään, että peräti viisi joukkuetta pelaa joukkuetta 1 vastaan heti oteltuaan joukkueen 6 kanssa. Tämä ei tietenkään ole optimaalinen tilanne. Jos esimerkiksi joukkue 6 on heikko, joukkueet saavat parannettua itsetuntoaan seuraavaa ottelua varten, jolloin joukkue 1 kärsii. Jos taas joukkue 6 on vahva, muut joukkueet lannistuvat eivätkä pelaa niin hyvin joukkuetta 1 vastaan. Kutsutaan tätä tilannetta termillä *seurausvaikutus*.

Kierros	Ottelut			
1	$(\infty, 1)$	$(2, 7)$	$(3, 6)$	$(4, 5)$
2	$(\infty, 2)$	$(3, 1)$	$(4, 7)$	$(5, 6)$
3	$(\infty, 3)$	$(4, 2)$	$(5, 1)$	$(6, 7)$
4	$(\infty, 4)$	$(5, 3)$	$(6, 2)$	$(7, 1)$
5	$(\infty, 5)$	$(6, 4)$	$(7, 3)$	$(1, 2)$
6	$(\infty, 6)$	$(7, 5)$	$(1, 4)$	$(2, 3)$
7	$(\infty, 7)$	$(1, 6)$	$(2, 5)$	$(3, 4)$

Taulukko 13: Turnauksen pelit

Määritelmä 5.1. Jos turnauksessa on sellaiset joukkueet x, y, z ja w, että joukkueet x ja y pelaavat joukkuetta z vastaan heti pelattuaan joukkuetta w vastaan, niin sanotaan, että turnauksessa esiintyy *seurausvaikutus*.

Pyritään organisoimaan edellinen turnaus niin, ettei seurausvaikutusta esiinny. Taulukoissa 15 ja 16 on vastaavasti esitetty turnauksen otteluparit ja joukkueiden vastustajat kierroksittain

Taulukon 15 turnauksessa ei ole joukkueita x, y, z ja w niin, että joukkueet x ja y molemmat pelaisivat joukkuetta z vastaan heti pelattuaan joukkuetta

Joukkue	vastustajat						
∞	1	2	3	4	5	6	7
1	∞	3	5	7	2	4	6
2	7	∞	4	6	1	3	5
3	6	1	∞	5	7	2	4
4	5	7	2	∞	6	1	3
5	4	6	1	3	∞	7	2
6	3	5	7	2	4	∞	1
7	2	4	6	1	3	5	∞

Taulukko 14: Vastustajat

Kierros	Ottelut			
1	$(\infty, 7)$	$(1, 5)$	$(2, 3)$	$(4, 6)$
2	$(\infty, 1)$	$(2, 6)$	$(3, 4)$	$(5, 7)$
3	$(\infty, 2)$	$(3, 7)$	$(4, 5)$	$(1, 6)$
4	$(\infty, 3)$	$(1, 4)$	$(5, 6)$	$(2, 7)$
5	$(\infty, 4)$	$(2, 5)$	$(6, 7)$	$(1, 3)$
6	$(\infty, 5)$	$(3, 6)$	$(1, 7)$	$(2, 4)$
7	$(\infty, 6)$	$(4, 7)$	$(1, 2)$	$(3, 5)$

Taulukko 15: Turnauksen pelit

Joukkue	vastustajat						
∞	7	1	2	3	4	5	6
1	5	∞	6	4	3	7	2
2	3	6	∞	7	5	4	1
3	2	4	7	∞	1	6	5
4	6	3	5	1	∞	2	7
5	1	7	4	6	2	∞	3
6	4	2	1	5	7	3	∞
7	∞	5	3	2	6	1	4

Taulukko 16: Vastustajat

w vastaan. Tällöin voidaan sanoa, ettei turnauksessa esiinny seurausvaikutusta.

Turnaus pystytään järjestämään ilman seurausvaikutusta aina, kun joukkueiden lukumäärä on jokin kakkosen potenssi eli muotoa 2^n [2]. Muille joukkueiden lukumäärille seurausvaikutuksettomia turnauksia on löydetty vain muutamia.

5.2 Kaksijakoinen turnaus

Kaksijakoisessa turnauksessa pyritäään järjestämään kahden joukkueen välinen ottelu niin, että jokainen joukkueen pelaaja kohtaa vastustajajoukkueen kaikki pelaajat kerran.

Määritelmä 5.2. Oletetaan, että kahdessa joukkueessa on kummassakin n pelaajaa. Turnausta, jossa n kierroksella joukkueiden pelaajat kohtaavat kaikki vastustajan pelaajat (ja jokaisella kierroksella jokainen pelaaja pelaa yhden pelin), kutsutaan *kaksijakoiseksi turnaukseksi.*

Olkoot T_1 ja T_2 kaksi n pelaajan joukkuetta. Merkitään joukkueen T_1 pelaajia muuttujilla $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ja joukkueen T_2 pelaajia muuttujilla $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$. Edellisten kappaleiden tavoin pelaajien x_i ja y_j välistä peliä merkitään järjestetyllä parilla (x_i, y_j).

Esimerkki 5.3. Olkoon molemmissa joukkueissa 5 pelaajaa. Tällöin turnaus voisi olla esimerkiksi taulukon 17 mukainen. Tämä turnaus on rakennettu niin, että jokaisella pystyrivillä pelaa aina sama pelaaja joukkueesta T_1 ja että jokainen joukkueen T_1 pelaaja pelaa jokaisella kierroksella yhden pelin. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisella pystyrivillä pelaavat kaikki pelaajat joukkueesta T_2. Lisäksi vaaditaan, että jokaisella kierroksella joukkueen T_2 pelaaja pelaa yhden pelin. Seuraavassa on esitetty matriisi, josta näkyy aina joukkueen T_2 pelaajan alaindeksi kussakin pelissä.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Kierros	Ottelut				
1	(x_1, y_2)	(x_2, y_4)	(x_3, y_5)	(x_4, y_3)	(x_5, y_1)
2	(x_1, y_4)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)	(x_4, y_1)	(x_5, y_5)
3	(x_1, y_1)	(x_2, y_3)	(x_3, y_2)	(x_4, y_5)	(x_5, y_4)
4	(x_1, y_3)	(x_2, y_5)	(x_3, y_1)	(x_4, y_4)	(x_5, y_2)
5	(x_1, y_5)	(x_2, y_1)	(x_3, y_4)	(x_4, y_2)	(x_5, y_3)

Taulukko 17: Turnauksen pelit

Selvästi nähdään, että saatiin latinalainen neliö. Latinalaisten neliöiden avulla voidaan siis aina luoda kaksijakoinen turnaus. Vastaavasti jokainen kaksijakoinen turnaus antaa latinalaisen neliön, kunhan pelaajat asetellaan niin, että toisessa joukkueessa sama pelaaja pelaa aina samalla pystyrivillä, kuten edellisessä esimerkissä joukkueen T_1 pelaajat.

Mietitään seuraavaksi shakkiturnausta. Shakkipelissä aloittaa aina se pelaaja, jolla on valkoiset nappulat. Aloittelijoiden pelissä aloittajalla ei ole käytännössä merkitystä pelin kannalta, mutta ammattilaispeleissä aloittajalla on selkeä etulyöntiasema. Siksi shakkiturnauksissa pitää tasapainottaa myös se kumpi pelaaja aloittaa pelin, eli kumpi pelaa valkoisilla ja kumpi mustilla. Otetaan avuksi latinalainen neliö kappaleesta 2.3, ja konstruoidaan sen avulla kaksijakoinen turnaus.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Kierros	Ottelut			
1	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_4)	(x_4, y_3)
2	(x_1, y_2)	(x_2, y_3)	(x_3, y_1)	(x_4, y_4)
3	(x_1, y_4)	(x_2, y_1)	(x_3, y_3)	(x_4, y_2)
4	(x_1, y_3)	(x_2, y_4)	(x_3, y_2)	(x_4, y_1)

Taulukko 18: Turnauksen pelit

Latinalaisen neliön numerot siis asetettiin pelaajien y_j alaindekseiksi. Otetaan käyttöön uusi merkintä. Merkintä $\underline{(x_i, y_j)}$ tarkoittaa, että x_i pelaa valkoisilla nappuloilla ja y_j mustilla ja (x_i, y_j) päinvastaista. Tällöin turnaus voisi olla esimerkiksi taulukon 19 mukainen. Pelaajat pelaavat mustilla ja valkoisilla nappuloilla yhtä monta kertaa.

Kierros	Ottelut			
1	(x_1, y_1)	$\underline{(x_2, y_2)}$	(x_3, y_4)	$\underline{(x_4, y_3)}$
2	$\underline{(x_1, y_2)}$	(x_2, y_3)	$\underline{(x_3, y_1)}$	(x_4, y_4)
3	$\underline{(x_1, y_4)}$	(x_2, y_1)	$\underline{(x_3, y_3)}$	(x_4, y_2)
4	(x_1, y_3)	$\underline{(x_2, y_4)}$	(x_3, y_2)	$\underline{(x_4, y_1)}$

Taulukko 19: Turnauksen pelit

5.3 Turnauksen konstruointi latinalaisten neliöiden avulla

Edellisessä kappaleessa todettiin, että latinaisten neliöiden avulla saadaan luotua kaksijakoinen turnaus. Nyt kysymys kuuluu miten saadaan konstruoitua latinalainen neliö. Esitetään konstruointi, kun latinaisen neliön koko on parillinen.

Oletetaan, että $n = 2m$. Olkoot latinalaisen neliön ensimmäinen vaaka ja pystyrivi

$$1, 2, 2m, 3, 2m-1, 4, 2m-2, 5, \ldots, m, m+2, m+1.$$

Määritellään muut latinalaisen neliön kohdat, missä $i > 1$ ja $j > 1$, kaavalla

$$l_{ij} \equiv l_{i1} + l_{1j} - 1 \pmod{2m}.$$

Kun $m = 4$ ja $n = 2m = 8$, saadaan alla oleva latinalainen neliö.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 3 & 7 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 6 \\ 8 & 1 & 7 & 2 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 7 & 1 & 8 \\ 6 & 7 & 5 & 8 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lasketaan esimerkkinä l_{34}:

$$l_{34} \equiv l_{31} + l_{14} - 1 \equiv 8 + 3 - 1 \equiv 10 \equiv 2 \pmod{8}.$$

Selvästi siis saatiin latinalainen neliö kun $n = 8$.

Lause 5.4. Äskeisellä konstruoinnilla saadaan latinalainen neliö.

Todistus. Näytetään ensin, että jokaisella pystyrivillä kaikki alkiot esiintyvät tarkalleen kerran. Ensimmäisellä pystyrivillä selvästi esiintyvät kaikki alkiot tarkalleen kerran, koska se määriteltiin luettelemalla kaikki alkiot. Näytetään seuraavaksi, että väite on kunnossa myös pystyrivillä $j > 1$. On siis näytettävä, että kaikki alkiot l_{ij} ja l_{kj} ovat erisuuria. Erotellaan tapaukset $i = 1$ ja $i > 1$. Tehdään vastaoletus $l_{ij} \equiv l_{kj} \pmod{2m}$.

1. Jos $i = 1$, niin saadaan yhtälö $l_{1j} \equiv l_{kj} \pmod{2m}$

$$\Rightarrow l_{1j} \equiv l_{k1} + l_{1j} - 1 \pmod{2m}$$

$$\Rightarrow l_{k1} \equiv 1 \pmod{2m}.$$

Tämä toteutuu ainoastaan kun $k = 1$.

2. Jos taas $i > 1$, niin saadaan yhtälö $l_{ij} \equiv l_{kj} \pmod{2m}$

$$\Rightarrow l_{i1} + l_{1j} - 1 \equiv l_{k1} + l_{1j} - 1 \pmod{2m}$$
$$\Rightarrow l_{i1} \equiv l_{k1} \pmod{2m} \Rightarrow l_{i1} = l_{k1}.$$

   Tämä on ristiriita, koska $l_{i1} \neq l_{k1}$.

Samalla periaatteella jokaisella vaakarivillä kaikki alkiot esiintyvät tarkalleen kerran. Ensimmäisellä vaakarivillä selvästi esiintyvät kaikki alkiot tarkalleen kerran, koska vaakarivi määriteltiin luettelemalla kaikki alkiot. Näytetään seuraavaksi, että väite on kunnossa myös vaakarivillä $i > 1$. On siis näytettävä, että kaikki alkiot l_{ij} ja l_{ik} ovat erisuuria. Erotellaan tapaukset $j = 1$ ja $j > 1$. Tehdään vastaoletus $l_{ij} \equiv l_{ik} \pmod{2m}$.

1. Jos $j = 1$, niin saadaan yhtälö $l_{i1} \equiv l_{ik} \pmod{2m}$

$$\Rightarrow l_{i1} \equiv l_{i1} + l_{1k} - 1 \pmod{2m}$$

$$\Rightarrow l_{1k} \equiv 1 \pmod{2m}.$$

   Tämä toteutuu ainoastaan kun $k = 1$.

2. Jos taas $j > 1$, niin saadaan yhtälö $l_{ij} \equiv l_{ik} \pmod{2m}$

$$\Rightarrow l_{i1} + l_{1j} - 1 \equiv l_{i1} + l_{1k} - 1 \pmod{2m}$$
$$\Rightarrow l_{1j} \equiv l_{1k} \pmod{2m} \Rightarrow l_{ij} = l_{1k}.$$

   Tämä on ristiriita, koska $l_{1j} \neq l_{1k}$.

Siis saadaan latinalainen neliö.

□

Tarkastelemalla latinalaisen neliön ensimmäistä saraketta (ja konstruktiota muutenkin) nähdään, että neliössä ei esiinny mitään järjestettyä paria (eli kahta peräkkäistä sarakkeen alkiota) kahdella eri sarakkeella. Tämä perusteella saadaan heti pääteltyä, että mitkään pelaajat x_i ja x_j eivät pelaa peräkkäisillä kierroksilla pelaajia y_h ja y_h vastaan.

Seuraavassa lauseessa näytetään, että vastaava tulos on voimassa myös toisinpäin.

Lause 5.5. Äskeisen latinalaisen neliön avulla konstruoidussa kaksijakoisessa turnauksessa ei ole olemassa pelaajia y_i ja y_j sekä x_h ja x_k niin, että y_i ja y_j pelaavat peräkkäisillä kierroksilla pelaajia x_h ja x_k vastaan.

Todistus. Konstruoidaan kaksijakoinen turnaus kuten edellisessä kappaleessa. Eli jos $l_{ij} = u$, niin x_j pelaa pelaajaa y_u vastaan kierroksella i. Esimerkiksi äskeisen latinalaisen neliön avulla saadaan taulukon 20 mukainen turnaus.

Kierros	Ottelut							
1	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_8)	(x_4, y_3)	(x_5, y_7)	(x_6, y_4)	(x_7, y_6)	(x_8, y_5)
2	(x_1, y_2)	(x_2, y_3)	(x_3, y_1)	(x_4, y_4)	(x_5, y_8)	(x_6, y_5)	(x_7, y_7)	(x_8, y_6)
3	(x_1, y_8)	(x_2, y_1)	(x_3, y_7)	(x_4, y_2)	(x_5, y_6)	(x_6, y_3)	(x_7, y_5)	(x_8, y_4)
4	(x_1, y_3)	(x_2, y_4)	(x_3, y_2)	(x_4, y_5)	(x_5, y_1)	(x_6, y_6)	(x_7, y_8)	(x_8, y_7)
5	(x_1, y_7)	(x_2, y_8)	(x_3, y_6)	(x_4, y_1)	(x_5, y_5)	(x_6, y_2)	(x_7, y_4)	(x_8, y_3)
3	(x_1, y_4)	(x_2, y_5)	(x_3, y_3)	(x_4, y_6)	(x_5, y_2)	(x_6, y_7)	(x_7, y_1)	(x_8, y_8)
4	(x_1, y_6)	(x_2, y_7)	(x_3, y_5)	(x_4, y_8)	(x_5, y_4)	(x_6, y_1)	(x_7, y_3)	(x_8, y_2)
5	(x_1, y_5)	(x_2, y_6)	(x_3, y_4)	(x_4, y_7)	(x_5, y_3)	(x_6, y_8)	(x_7, y_2)	(x_8, y_1)

Taulukko 20: Turnauksen pelit

Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellaiset indeksit i, j, k ja h, että y_i ja y_j molemmat pelaavat peräjälkeen joukkueita x_h ja x_k vastaan. Oletetaan, että x_h kohtaa pelaajaan y_i kierroksella I. Tällöin x_k kohtaa pelaajaa y_i kierroksella $I+1$. Oletetaan, että x_h kohtaa pelaajan y_j kierroksella J, jolloin x_k kohtaa pelaajan y_j kierroksella $J+1$. Tällöin $i = l_{Ih} = l_{I+1,k}$ ja $j = l_{Jh} = l_{J+1,k}$. Käyttämällä äskeisen latinalaisen neliön konstruoinnin kaavaa, saadaan

$$l_{I1} + l_{1h} - 1 \equiv l_{I+1,1} + l_{1k} - 1$$

ja

$$l_{J1} + l_{1h} - 1 \equiv l_{J+1,1} + l_{1k} - 1 \pmod{2m}.$$

Kun molemmista yhtälöistä ratkaistaan $l_{1h} - l_{1k}$, saadaan

$$l_{I+1,1} - l_{I1} \equiv l_{J+1,1} - l_{J1} \pmod{2m}. \tag{3}$$

Tutkitaan seuraavaksi erotuksia $l_{i+1,1} - l_{i,1} \pmod{2m}$. Kun nämä kaikki luetellaan, saadaan

$$1,\ 2m-2,\ 3,\ 2m-4,\ 5,\ 2m-6,\ 7, \ldots,\ 2m-3,\ 2,\ 2m-1 \pmod{2m}$$

Koska kaikki erotukset ovat erisuuria, niin kaavasta (3) seuraa, että $I = J$. Tämän perusteella edelleen $y_i = y_j$, jolloin $i = j$. Tämä tarkoittaa, etteivät mitkään kaksi pelaajaa y_i ja y_j pelaa peräkkäisillä kierroksilla pelaajia x_h ja x_k vastaan. □

Yhteenvetona saadaan siis, että turnauksessa ei ole lainkaan seurausvaikutusta.

6 Roomin neliö

Mietitään seuraavaksi bridgeturnausta. Oletetaan, että on 7 erilaista pelipöytää ja halutaan asettaa 8 joukkuetta seitsemälle kierrokselle niin, että kukin joukkue pelaa kertaalleen jokaisessa seitsemästä pelipöydästä. Tällöin turnaus voisi olla esimerkiksi taulukon 21 mukainen.

	pöytä 1	pöytä 2	pöytä 3	pöytä 4	pöytä 5	pöytä 6	pöytä 7
kierros 1	(∞,1)	—	—	(5,7)	—	(3,4)	(2,6)
kierros 2	(3,7)	(∞,2)	—	—	(1,6)	—	(4,5)
kierros 3	(5,6)	(1,4)	(∞,3)	—	—	(2,7)	—
kierros 4	—	(6,7)	(2,5)	(∞,4)	—	—	(1,3)
kierros 5	(2,4)	—	(1,7)	(3,6)	(∞,5)	—	—
kierros 6	—	(3,5)	—	(1,2)	(4,7)	(∞,6)	—
kierros 7	—	—	(4,6)	—	(2,3)	(1,5)	(∞,7)

Taulukko 21: Turnauksen pelit

Jokaisella rivillä esiintyy kertaalleen jokainen joukkue. Samoin kaikki järjestämättömät parit (i, j) tulee käytyä läpi. Yleistetään äskeisen turnauksen idea. Määritellään Roomin neliön koko sen vaakarivien määränä ja kertaluku joukkueiden lukumääränä.

Määritelmä 6.1. *Kertaluvun* $2n$ Roomin neliö on sellainen $(2n-1) \times (2n-1)$-ruudukko sisältäen $2n$ symbolia x_1, x_2, x_3, ..., x_{2n}, että

1. Jokainen ruutu on joko tyhjä tai sisältää järjestämättömän parin (x_i, x_j);
2. Jokaisella rivillä ja sarakkeella esiintyy kertaalleen symbolit x_1, ... ,x_{2n};
3. Jokainen eri $n(2n-1)$ järjestämätön pari esiintyy Roomin neliössä täsmälleen kerran.

Tällaisen Roomin neliön *koko* on $2n-1$.

Ensimmäisenä tulee mieleen kysymys, saadaanko Roomin neliö konstruoitua kaikilla muuttujan n arvoilla. Seuraavan lauseen mukaan kertalukua $2n$ oleva Roomin neliö on olemassa kaikilla kokonaisluvuilla $n \neq 2, 3$. Tässä esityksessä todistetaan vain tapaus $n = 2$.

Lause 6.2. Roomin neliö saadaan konstruoitua aina kun $n \neq 2$ ja $n \neq 3$.

Todistus. Todistetaan seuraavaksi vain, että Roomin neliötä ei ole olemassa, kun $n = 2$. Tällöin kyseessä ovat joukkueet ∞, 1, 2, 3. Näistä saadaan 6 järjestämätöntä paria $(\infty, 1)$, $(\infty, 2)$, $(\infty, 3)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ ja $(2, 3)$. Asetetaan peli $(\infty, 1)$ vasempaan ylänurkkaan. Tällä valinnalla peli $(2, 3)$ tulee laittaa kierrokselle 1, jotta ehto 2. täyttyisi. Toisaalta peli $(2, 3)$ pitää asettaa sarakkeeseen 1 samalla perustelulla. Peli $(2, 3)$ rikkoo siis ehdon 3, jonka mukaan jokainen järjestämätön pari saa esiintyä vain kerran. Samalla päättelyllä riippumatta ruudusta mihin pelin $(\infty, 1)$ asettaa, joudutaan aina peli $(2, 3)$ pelaamaan kahteen kertaan, kuten näkyy taulukosta 22. $\square$

On hankalaa konstruoida Roomin neliö tyhjästä. Kuitenkin kahden Roomin neliön avulla saadaan konstruoitua kolmas isompi Roomin neliö.

Lause 6.3. Jos on olemassa kokoa $m \times m$ ja $n \times n$ olevat Roomin neliöt, on olemassa myös kokoa $mn \times mn$ oleva Roomin neliö.

	sarake 1	sarake 2	sarake 3
kierros 1	(∞,1)	(2,3)	—
kierros 2	(2,3)	(∞,2)	(1,2)
kierros 3	—	(1,2)	$(\infty, 3)$

Taulukko 22: Turnauksen pelit

Todistus. Olkoot M ja N vastaavasti Roomin neliöt symbolein $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$ ja $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Olkoot L_1 ja L_2 kertalukua n olevat ortogonaaliset latinalaiset neliöt symbolein $\{1, 2, \ldots, n\}$. Muunnetaan M vaihtamalla sen jokainen alkio $n \times n$ ruudukkoon seuraavien ohjeiden mukaan. Lopputuloksena saadaan $mn \times mn$ taulukko.

1. Jos neliön M solu (i, j) on tyhjä, vaihdetaan sen tilalle tyhjä $n \times n$ ruudukko
2. Jos neliön M solussa (i, j) on pari $(0, k)$, laitetaan sen paikalle Roomin neliö $N + kn$, joka saadaan Roomin neliön N avulla lisäämällä jokaiseen nollasta eroavaan lukuun kn.
3. Jos neliön M solussa (i, j) on pari (u, v), missä $0 < u < v$, lisätään un jokaiseen latinalaisen neliön L_1 soluun ja vn jokaiseen latinalaisen neliön L_2 soluun. Muodostetaan näin saatujen ortogonaalisten neliöiden yhdistelmä ja korvataan solu (i, j) sillä.

Tämän jälkeen on saatu neliö R, jonka koko on $mn \times mn$ ja jossa on symbolit

$$\{0, n + 1, n + 2, n + 3, \ldots, n + mn\}.$$

Jokaisessa solussa on siis joko järjestämätön pari tai se on tyhjä. Selvästi jokaisella rivillä on täsmälleen kerran symbolit

$$\{0, n + 1, n + 2, n + 3, \ldots, n + mn\},$$

johtuen edellisen kolmen kohdan konstruoinnista. Ne käyvät läpi kaikki mahdolliset kombinaatiot. Enää pitää todistaa, että kaikki järjestämättömät parit esiintyvät täsmälleen kerran Roomin neliössä.

Lasketaan kaikki eri parit ehdosta 2. Roomin neliössä N on $n+1$ erilaista symbolia, ja symboli k voidaan valita m tavalla. Kaikkiaan pareja saadaan siis $m \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$. Kun samalla idealla lasketaan parit ehdosta 3, saadaan $\frac{1}{2}m(m-1)n^2$ paria. Kun nyt lasketaan parit yhteen, saadaan

$$m \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}m(m-1)n^2 = \frac{1}{2}(mn^2 + mn + m^2n^2 - mn^2)$$

$$= \frac{1}{2}(mn + m^2n^2) = \frac{1}{2}mn(1+mn).$$

Tämä on oikea määrä, koska jos Roomin neliö on kooltaan $w \times w$, sisältäen $w+1$ symbolia, siinä on järjestämättömiä pareja $\frac{1}{2}w(w+1)$. Tässä tapauksessa $w = mn$, eli pareja on kokoa $mn \times mn$ olevassa Roomin neliössä yhteensä

$$\frac{1}{2}mn(1+mn).$$

Pareja on siis täsmälleen se määrä mitä pitikin olla. Enää pitää todistaa, että jokainen pari on erilainen.

Olkoon $P(i,j)$ se Roomin neliön R osaneliö, joka on saatu konstruoitua solusta (i,j) Roomin neliöstä M. Kaikki parit osaneliössä $P(i,j)$ ovat joko Roomin neliön pareja tai kombinaatioita kahdesta ortogonaalisesta latinalaisesta neliöstä. Tämän vuoksi kaikki parit osaneliössä $P(i,j)$ ovat erilaisia. Vielä jää näyettäväksi, että kahdessa eri osaneliössä $P(i,j)$ ja $P(h,k)$ olevat parit ovat erilaisia. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan on olemassa sellaiset (i,j) ja (h,k), että $(i,j) \neq (h,k)$ ja osaneliöllä $P(i,j)$ ja osaneliöllä $P(h,k)$ on yhteisiä pareja. Tämä tarkoittaa sitä, että jos sekä $P(i,j)$ että $P(h,k)$ sisältävät parin $(un+l_1, vn+l_2)$, niin latinalaisista neliöistä L_1 ja L_2 muodostetulla yhdistelmällä on oltava (l_1, l_2) kahdessa eri kohdassa, mikä on vastoin ortogonaalisuuden ehtoa. Eli siis kaikki parit osaneliössä $P(i,j)$ ovat erilaisia. □

Esimerkki 6.4. Taulukossa 21 on 7×7 kokoinen Roomin neliö. Äskeisen todistuksen avulla voidaan päätellä 49×49 kokoisen Roomin neliön olemassaolo, koska $7 \times 7 = 49$.

Konstruoidaan tästä 49×49 Roomin neliöstä vasen ylänurkka, eli 14×14-ruudukko. Tämä saadaan konstruoitua taulukon 21 Roomin neliön avulla käyttämällä siinä vasemman yläkulman 2×2-ruudukkoa ja käyttämällä äskeistä konstruointia. Vaihdetaan merkintöjä niin, että $\infty = 0$. Nyt siis Roomin neliö muuttuu seuraavaksi Roomin neliöksi.

	pöytä 1	pöytä 2	pöytä 3	pöytä 4	pöytä 5	pöytä 6	pöytä 7
kierros 1	(0,1)	—	—	(5,7)	—	(3,4)	(2,6)
kierros 2	(3,7)	(0,2)	—	—	(1,6)	—	(4,5)
kierros 3	(5,6)	(1,4)	(0,3)	—	—	(2,7)	—
kierros 4	—	(6,7)	(2,5)	(0,4)	—	—	(1,3)
kierros 5	(2,4)	—	(1,7)	(3,6)	(0,5)	—	—
kierros 6	—	(3,5)	—	(1,2)	(4,7)	(0,6)	—
kierros 7	—	—	(4,6)	—	(2,3)	(1,5)	(0,7)

Taulukko 23: Konstruoinnin pelit

Konstruoinnissa siis M ja N ovat taulukon 23 Roomin neliöt. Käytetään hyväksi seuraavia kappaleen 2.3 ortogonaalisia latinalaisia neliöitä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aloitetaan konstruointi vasemmasta ylänurkasta, eli ruudusta jossa on $(0, 1)$. Tämä on muotoa $(0, k)$, joten käytetään konstruoinnin kohtaa 2. Tässä tapauksessa $nk = 7$ eli laitetaan ruudun $(0, 1)$ paikalle taulukon 24 Roomin neliö. Selvästi saatiin Roomin neliö, jossa on symbolit $0, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ ja 14.

Siirrytään seuraavaksi konstruoinnissa ruutuun $(2, 1)$, jossa on pari $(3, 7)$. Tämä täyttää konstruoinnin ehdon 3, joten lisätään $un = 21$ jokaiseen lati-

(0,8)	—	—	(12,14)	—	(10,11)	(9,13)
(10,14)	(0,9)	—	—	(8,13)	—	(11,12)
(12,13)	(8,11)	(0,10)	—	—	(9,14)	—
—	(13,14)	(9,12)	(0,11)	—	—	(8,10)
(9,11)	—	(8,14)	(10,13)	(0,12)	—	—
—	(10,12)	—	(8,9)	(11,14)	(0,13)	—
—	—	(11,13)	—	(9,10)	(8,12)	(0,14)

Taulukko 24: Konstruoinnin pelit

nalaisen neliön A soluun sekä $vn = 49$ jokaiseen latinalaisen neliön B soluun. Näin saadaan seuraavat neliöt:

$$\begin{bmatrix} 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \\ 28 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 27 & 28 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 26 & 27 & 28 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 22 & 23 & 24 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 22 & 23 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 22 \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & 50 \\ 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & 50 & 51 \\ 53 & 54 & 55 & 56 & 50 & 51 & 52 \\ 54 & 55 & 56 & 50 & 51 & 52 & 53 \\ 55 & 56 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 \\ 56 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \end{bmatrix}.$$

Näiden yhdistelmästä saadaan seuraava neliö.

(22,50)	(23,51)	(24,52)	(25,53)	(26,54)	(27,55)	(28,56)
(28,51)	(22,52)	(23,53)	(24,54)	(25,55)	(26,56)	(27,50)
(27,52)	(28,53)	(22,54)	(23,55)	(24,56)	(25,50)	(26,51)
(26,53)	(27,54)	(28,55)	(22,56)	(23,50)	(24,51)	(25,52)
(25,54)	(26,55)	(27,56)	(28,50)	(22,51)	(23,52)	(24,53)
(24,55)	(25,56)	(26,50)	(27,51)	(28,52)	(22,53)	(23,54)
(23,56)	(24,50)	(25,51)	(26,52)	(27,53)	(28,54)	(22,55)

Taulukko 25: Konstruoinnin pelit

Siirrytään seuraavaksi konstruoimaan ruudun $(2, 2)$ neliötä, jossa on pari $(0, 2)$. Tässä palataan ehtoon 2, jolloin lisätään alkuperäiseen Roomin neliöön $nk = 14$ jokaiseen nollasta eroavaan lukuun, jolloin saadaan taulukon 26 mukainen Roomin neliö. Selvästi saatiin Roomin neliö symbolein $0, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21$.

Enää puuttuu kaikkein helpoin ruutu $(1, 2)$, joka on tyhjä. Sen paikalle tulee yksinkertaisesti tyhjä 7×7 ruudukko eli taulukko 27. Kun nämä kaikki 4 ruudukkoa yhdistetään, saadaan taulukko 28. Taulukossa 28 näkyy siis vain vasen ylänurkka 49×49 Roomin neliöstä, mutta muut ruudut saataisiin jatkamalla samaa ideaa.

(0,15)	—	—	(19,21)	—	(17,18)	(16,20)
(17,21)	(0,16)	—	—	(15,20)	—	(18,19)
(19,20)	(15,18)	(0,17)	—	—	(16,21)	—
—	(20,21)	(16,19)	(0,18)	—	—	(15,17)
(16,18)	—	(15,21)	(17,20)	(0,19)	—	—
—	(17,19)	—	(15,16)	(18,21)	(0,20)	—
—	—	(18,20)	—	(16,17)	(15,19)	(0,21)

Taulukko 26: Konstruoinnin pelit

—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—

Taulukko 27: Konstruoinnin pelit

7 Yhteenveto

On saatu konstruoitua monia erilaisia turnauksia erilaisin ehdoin. Kiertoturnauksessa kaikki joukkueet pelasivat kaikkia vastaan tarkalleen kerran kullakin kierroksella. Tämä turnaustyyppi sopii ainakin silloin, kun joukkueita

(0,8)	—	—	(12,14)	—	(10,11)	(9,13)	—	—	—	—	—	—	—
(10,14)	(0,9)	—	—	(8,13)	—	(11,12)	—	—	—	—	—	—	—
(12,13)	(8,11)	(0,10)	—	—	(9,14)	—	—	—	—	—	—	—	—
—	(13,14)	(9,12)	(0,11)	—	—	(8,10)	—	—	—	—	—	—	—
(9,11)	—	(8,14)	(10,13)	(0,12)	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	(10,12)	—	(8,9)	(11,14)	(0,13)	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	(11,13)	—	(9,10)	(8,12)	(0,14)	—	—	—	—	—	—	—
(22,50)	(23,51)	(24,52)	(25,53)	(26,54)	(27,55)	(28,56)	(0,15)	—	—	(19,21)	—	(17,18)	(16,20)
(28,51)	(22,52)	(23,53)	(24,54)	(25,55)	(26,56)	(27,50)	(17,21)	(0,16)	—	—	(21,20)	—	(20,19)
(27,52)	(28,53)	(22,54)	(23,55)	(24,56)	(25,50)	(26,51)	(19,20)	(15,18)	(0,17)	—	—	(16,21)	—
(26,53)	(27,54)	(28,55)	(22,56)	(23,50)	(24,51)	(25,52)	—	(20,21)	(16,19)	(0,18)	—	—	(15,17)
(25,54)	(26,55)	(27,56)	(28,50)	(22,51)	(23,52)	(24,53)	(16,18)	—	(15,21)	(17,20)	(0,19)	—	—
(24,55)	(25,56)	(26,50)	(27,51)	(28,52)	(22,53)	(23,54)	—	(17,19)	—	(15,16)	(18,21)	(0,20)	—
(23,56)	(24,50)	(25,51)	(26,52)	(27,53)	(28,54)	(22,55)	—	—	(18,21)	—	(16,17)	(15,19)	(0,21)

Taulukko 28: Konstruoinnin pelit

ei ole kovin montaa. Kaksijakoisessa turnauksessa joukkueen pelaajat pelaavat yksilöinä toisen joukkueen pelaajia vastaan. Tämä tyyppi soveltuu siis yksilölajeihin. Roomin neliön avulla saadaan tasapainotettua erilaisten pelikenttien tai pöytien lukumäärät kullekin joukkueelle.

Matematiikkka kehittyy ihmisen mielikuvituksen mukana, samoin erilaisiin peleihin liittyvä matematiikka. Mitä enemmän turnauksiin ja peleihin halutaan ehtoja, sitä monimutkaisempaa kombinatoriikkaa niiden järjestämiseksi vaaditaan. Aina kun matematiikalta vaaditaan jotain, löydetään uusia matemaattisia rakenteita. Kiertoturnaus voitaisiin yleistää esimerkiksi niin, että jokainen joukkue kohtaa toisen joukkueen k kertaa. Bridgeturnaukseen saadaan lisää haastetta kun Roomin neliössä muutetaan järjestämättömät parit järjestetyiksi pareiksi. Lisäehtona voitaisiin vaatia, että kukin joukkue pelaa yhtä monta ottelua tietynlaisilla pelipöydillä.

Kirjallisuutta

[1] I. Anderson & I. Honkala: *A Short Course in combinatorial designs.* University of Turku, 1997

[2] I. Anderson: *Combinatorial Designs and Tournament.* Clarendon Press, Oxford, 1997.

[3] M. Koppinen: *Algebran peruskurssi 1.* Turun yliopisto, 2005.

[4] W. D. Wallis: *Combinatorial Designs*. University of Wisconsin-Milwaukee, 1997.