

Konveksit rakenteet ja ääripisteet kvanttimekaniikassa

Pro gradu -tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikan laitos
Teoreettinen fysiikka
2010
Erkka Theodor Haapasalo
Tarkastajat:
Pekka J. Lahti
Juha-Pekka Pellonpää

TURUN YLIOPISTO

Fysiikan laitos

HAAPASALO, ERKKA Konveksit rakenteet ja ääripisteet kvanttimekaniikassa

Pro gradu -tutkielma, 104 sivua

Teoreettinen fysiikka

Joulukuu 2010

Tässä tutkielmassa tarkastellaan joidenkin kvanttimekaniikan perusjoukkojen, tila-, efekti- ja etenkin suurejoukon, konveksia rakennetta ja ääripisteitä. Myös operaatio- ja instrumenttijoukkojen rakennetta käsitellään lyhyesti. Näiden konveksien rakenteiden ja niiden ääripisteiden fysikaalista merkitystä on pyritty valottamaan.

Erityisesti tutkielma keskittyy kovarianttien suureiden problematiikkaan ja kovarianssirakenteiden ääripisteiden karakterisointiin. Keskeiset tulokset liittyvät lokalisti kompaktien Abelin ryhmien määäämien kovarianssirakenteiden analyysiin ja ääripisteisiin. Tästä käsitellään esimerkkeinä kovariantteja paikka- ja vaihesuureita ja paikkaerosuureita.

Tila- ja efektijoukkojen ääripisteet on tunnettu jo pitkään, mutta äärisuureiden problematiikka on yleisellä tasolla ollut vielä viime aikoihin asti hämärän peitossa. Äärioperaatioiden ja -instrumenttien tyhjentävää karakterisointia ei vielä ole, mutta tutkielmassa esitellään joitakin erityistuloksia tästäkin aiheesta.

Sisältö

Esipuhe	1
1 Alkuhuomautuksia	3
1.1 Kvanttimekaniikan Hilbertin avaruus -formalismi	3
1.1.1 Sisätuloavaruudet, Hilbertin avaruudet ja ortonormaalikannat . . .	3
1.1.2 Hilbertin avaruuksien operaattorialgebroja	6
1.1.3 Operaattorimitat ja suureet	9
1.1.4 Yhdistetyt kvanttisysteemit	11
1.2 Yleisiä merkintöjä ja käsitteitä	12
1.3 Tilat ja efektit	16
1.4 Mittaukset ja suureet	18
2 Konveksisuus kvanttimekaniikassa	25
2.1 Konveksisuuden perusteita	25
2.2 Efekti- ja tilajoukon konvekso rakenne	27
2.3 Konveksit suurejoukot	31
2.4 Äärisuureet	35
2.5 Operaattorimittojen avaruus	44
3 Kovarianssisysteemien harmonista analyysiä	46
3.1 Lokaalisti kompaktit ryhmät	49
3.2 Toisen numeroituvuusaksiooman toteuttavat tyypin I ryhmät	53
3.3 Kovarianssi- ja imprimitiivisysteemit	56
4 Kovarianssirakenne ja Abelin ryhmä	59
4.1 Abelin ryhmän suhteen kovariantit suureet	59
4.2 Kovarianssirakenteen ääripisteet	65
4.2.1 Eriyistapauksia	70
4.2.2 Joukon $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ kovariantit äärisuureet	72
4.3 Kovariantit paikka- ja vaihesuureet	74
4.3.1 Vaihesuureet ja paikkasuureet sykklisessä avaruudessa	75
4.3.2 Paikkasuureet vapaassa avaruudessa	79
4.3.3 Liikemääräsäilyinvariantit paikkasuureet	81
4.4 Kovariantit paikkaerosuureet	84
4.4.1 Paikkaerosuureet sykklisessä avaruudessa	84
4.4.2 Paikkaerosuureet vapaassa avaruudessa	87
4.5 Vapaan hiukkasen aicasuureet	89

5	Kovariantit suureet ja mittaukset	92
5.1	Kovarianssirakenne ja yleinen tyyppin I ryhmä	92
5.2	Kompaktin ryhmän suhteen kovariantit suureet	95
5.3	Operaatioiden ja instrumenttien konvekssi rakenne	99
	Viitteet	103

Esipuhe

Tässä tutkielmassa tarkastelemme joitakin kvanttimekaniikan keskeisimpiä konvekseja rakenteita ja annamme joitakin ääripistekarakterisointeja. Erityinen painopiste on erilaisien konveksien suureperheiden rakenteen selvitys ja niiden ääripisteiden luonnehtiminen. Keskitymme lähinnä rakenteiden analyysiin, mutta joitakin fysikaalisia perusteita ja motiivointeja on pyritty antamaan. Ensimmäisessä luvussa esitellään tekstissä vastaan tulevaa matemaattista käsitteistöä, mutta lukijan olisi hyvä tuntea joitakin topologian sekä mitta- ja integrointiteorian alkeita.

Ensimmäinen luku keskittyy kvanttimekaniikan perusmuotoiluun. Ensimmäinen osio sisältää Hilbertin avaruuksien perusteoriaa ja esittelee lyhyesti kvanttimekaniikan Hilbertin avaruus-formalismiin. Seuraavaksi esitellään peruskäsitteistöä, jota tutkielmassa esiintyy. Ensimmäinen luku esittelee myös perusteita luvun alussa esitellylle Hilbertin avaruusmekaniikalle. Erityisesti tilojen, efektien ja mittausten fysikaalista taustaa on pyritty valottamaan.

Toisessa luvussa esittelemme konveksien joukkojen perusteoriaa ja sovellamme sitä tila- ja efektioperaattoreiden joukon konvekseen rakenteeseen. Käsittelemme myös joitakin konvekseja suureperheitä. Tässä luvussa karakterisoidaan myös kiinnitetylle σ -algebralle rakentuvien sekä kiinnitettyssä Hilbertin avaruudessa operoivien suureiden perheen äärisuureet. Puhumme myös Kreinin-Milmanin lauseen soveltamisesta suureisiin, joiden arvoavaruus on lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus.

Kolmannessa luvussa esittelemme tutkielman pääprobleeman: lokaalisti kompaktin tyyppin I unimodulaarisen toisen numeroituvuusaksiooman täyttävän Hausdorffin ryhmän suhteen kovarianttien suureiden ja näiden suureiden äärisuureiden karakterisoinnin. Tässä luvussa on lähinnä esitelty harmoniseen analyysiin liittyvää perustietoa. Erityisesti on käsitelty sitä, millaiset topologiset symmetriaryhmät tulevat tämän teorian puitteissa kysymykseen. Luvun lopussa esitellään suureen kovarianssin käsite ja yhdistetään kovariantit suureet Mackeyn teorian mukaisesti kanonisiin imprimitiivisysteemeihin.

Neljäs luku sisältää tutkielman oleellimmän sisällön: kaikki lokaalisti kompaktien toisen numeroituvuusaksiooman täyttävien kommutoivien Hausdorffin ryhmien suhteen kovariantit suureet ja kovariantit äärisuureet karakterisoidaan tyhjentävästi. Luvun alkuosa etenee pitkälti lähteen [1] linjoilla. Kovarianttien suureiden karakterisointi, joka on peräisin samasta lähteestä [1], saavutetaan lauseessa 4.3, ja äärisuure-ehdot antaa lopulta lause 4.4. Myös kaikkien suureiden joukon kovarianttien äärisuureiden karakterisaatio esitetään. Esimerkkeinä teorian soveltamisesta käsitellään kovariantteja vaihe- ja paikka-suureita sekä paikkaerosuureita ja aikasuureita.

Viidennessä luvussa käsitellään kovarianttien suureiden karakterisointia laajemmin yleisemmän tyyppin I ryhmän tapauksessa, kun suureiden arvoavaruus on symmetriaryh-

mä itse, ja toisaalta kompaktin ryhmän suhteen kovariantteja suureita yleisellä transitii-visella arvoavaruudella. Tarkoituksena onkin vastaisuudessa laajentaa luvun 4 tekniikka ei-kommutoiiviin ryhmiin eli saada tämän luvun tuloksille yleistys. Luvun lopussa käsitel-lään hieman operaatioiden ja instrumenttien joukkojen konveksia rakennetta ja ääripis-teitä. Tämä ongelma on vielä avoin, ja tyydymmekin vain joidenkin tunnettujen tulosten käsittelyyn.

1 Alkuhuomautuksia

1.1 Kvanttimekaniikan Hilbertin avaruus -formalismi

Esittelemme tässä osiossa lyhyesti joitakin kvanttiteorian matemaattisia perusrakenteita seurailen pääasiassa teoksia [2], [3] ja [4].

1.1.1 Sisätuloavaruudet, Hilbertin avaruudet ja ortonormaalikannat

Olkoon \mathcal{V} jokin kompleksinen vektoriavaruus ja $m : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ kuvaus, jolle pätevät ehdot

$$(i) \quad m(\varphi, \psi) = \overline{m(\psi, \varphi)},$$

$$(ii) \quad m(\varphi, \alpha\chi + \beta\psi) = \alpha m(\varphi, \chi) + \beta m(\varphi, \psi),$$

$$(iii) \quad m(\varphi, \varphi) \geq 0 \text{ ja}$$

$$(iv) \quad m(\varphi, \varphi) = 0 \text{ tarkalleen silloin, kun } \varphi = 0$$

kaikilla $\varphi, \chi, \psi \in \mathcal{V}$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tällaista kuvausta sanotaan *sisätuloksi*. Jos kuvaus $m : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ täyttää ehdot (i) ja (ii), sitä sanotaan (symmetriseksi) *seskvilineaarimuodoksi*¹, ja jos se lisäksi täyttää ehdon (iii), kutsutaan sitä *positiiviseksi* (positiivisemidefinitiksi) seskvilineaarimuodoksi. Seskvilineaarimuodolle m voidaan suoralla laskulla todeta, että kaikille $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$ pätee

$$m(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k m(\psi + i^k \varphi, \psi + i^k \varphi). \quad (1)$$

Kaavaa 1 kutsutaan polarisaatiokaavaksi, ja sen mukaan seskvilineaarimuodon m kaikki arvot määräytyvät diagonaaliarvoista $m(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in \mathcal{V}$. Jos $m : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ on positiivinen seskvilineaarimuoto, pätee ns. *Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö*

$$|m(\varphi, \psi)| \leq \sqrt{m(\varphi, \varphi)m(\psi, \psi)} \quad (2)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$.

Käyttämällä Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä 2 ja sisätuloehtoa (iv) voidaan näyttää, että kun $m : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ on sisätulo, on kuvaus $\mathcal{V} \ni \varphi \mapsto \|\varphi\| := \sqrt{m(\varphi, \varphi)}$ *normi*, jolloin kuvaus $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (\varphi, \psi) \mapsto d(\varphi, \psi) := \|\varphi - \psi\|$ on *metriikka* eli etäisyysfunktio. Sisätuloavaruudella (\mathcal{V}, m) on siis metrisen avaruuden topologia. Jono $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee metrisessä avaruudessa (\mathcal{V}, d) , kun olemassa sellainen $\varphi \in \mathcal{V}$, että jokaisella $\varepsilon > 0$ on

¹Ehdon (ii) täyttävä kuvaus m on tavallinen seskvilineaarimuoto, jos se täyttää myös ehdon $m(\alpha\varphi + \beta\chi, \psi) = \alpha m(\varphi, \psi) + \beta m(\chi, \psi)$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $\varphi, \chi, \psi \in \mathcal{V}$.

olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla $d(\varphi, \varphi_k) < \varepsilon$ kaikilla $k > n_\varepsilon$. Jonoa $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sanotaan *Cauchyn jonoksi* silloin, kun jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla $d(\varphi_k, \varphi_l) < \varepsilon$ kaikilla $k, l > m_\varepsilon$. Yksinkertainen arviointi osoittaa, että metrisen avaruuden (\mathcal{V}, d) suppenevat jonot ovat Cauchyn jonoja, mutta käänteinen tulos ei yleisesti päde. Jos myös kaikki Cauchyn jonot suppenevat, sanotaan metristä avaruutta (\mathcal{V}, d) *täydelliseksi*. Jos tällaisen täydellisen metriikan generoi jokin sisätulo m ylläesitellyllä tavalla, sanotaan sisätuloavaruutta (\mathcal{V}, m) *Hilbertin avaruudeksi*. Jos normiavaruuden \mathcal{V} normi $\|\cdot\|$ generoi täydellisen metriikan, sanotaan normiavaruutta $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ *Banachin avaruudeksi*.

Jokaisen metrisen avaruuden voi upottaa isometrisesti johonkin täydelliseen metriiseen avaruuteen siten, että alkuperäinen avaruus muodostaa täydellisen avaruuden tiheän aliavaruuden². Muotoilemme tämän tuloksen sisätuloavaruuksille.

Lause 1.1 *Olkoon (\mathcal{V}, m) sisätuloavaruus. On olemassa lineaarinen isometria $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$, missä (\mathcal{H}, \tilde{m}) on Hilbertin avaruus. Isometrisyys merkitsee sitä, että*

$$\tilde{m}(\Phi(\varphi), \Phi(\psi)) = m(\varphi, \psi)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$. Lisäksi kuva-avaruus $\Phi(\mathcal{V})$ on Hilbertin avaruuden (\mathcal{H}, \tilde{m}) tiheä aliavaruus.

Jatkossa, kun sanotaan, että sisätuloavaruus täydennetään Hilbertin avaruudeksi, tarkoitetaan nimenomaan edellisen lauseen mukaista isometristä upotusta Φ .

Kvanttiteoriassa tutkittavaan fysikaaliseen systeemiin liitetään separoituva kompleksinen Hilbertin avaruus \mathcal{H} . Separoituvuus tarkoittaa sitä, että avaruus \mathcal{H} sisältää numeroituvan tiheän osajoukon. Merkitsemme yleisesti Hilbertin avaruuteen \mathcal{H} liittyvää sisätuloa

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi | \psi \rangle_{\mathcal{H}} \in \mathbb{C}.$$

Lisäksi merkitsemme vektorin $\varphi \in \mathcal{H}$ normia

$$\sqrt{\langle \varphi | \varphi \rangle_{\mathcal{H}}} =: \|\varphi\|_{\mathcal{H}}.$$

Kun sekaannuksen vaaraa ei ole, jätämme alaindeksin \mathcal{H} pois sisätulon ja normin merkinnöistä.

Sanomme vektoreita $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ *ortogonaalisiksi*, jos $\langle \varphi | \psi \rangle = 0$; merkitsemme tätä kirjoittamalla $\varphi \perp \psi$. Lisäksi, jos $\varphi \in \mathcal{H}$ ja $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$, tarkoittaa merkintä $\varphi \perp \mathcal{M}$ sitä, että $\varphi \perp \psi$ kaikilla $\psi \in \mathcal{M}$. Lisäksi, jos $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ on aliavaruus, merkitsemme symbolilla \mathcal{M}^\perp niiden vektoreiden $\varphi \in \mathcal{H}$ muodostamaa aliavaruutta, joilla $\varphi \perp \mathcal{M}$. Voidaan osoittaa, että \mathcal{M}^\perp on suljettu aliavaruus ja $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, kun myös \mathcal{M} on suljettu, eli $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^\perp)^\perp$.

²Metrisen avaruuden (\mathcal{V}, d) aliavaruus \mathcal{M} on tiheä, jos jokaisella $\varphi \in \mathcal{V}$ ja $\varepsilon > 0$ löytyy $\psi \in \mathcal{M}$, jolla $d(\varphi, \psi) < \varepsilon$.

Sanomme joukkoa $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ *ortonormaalisysteemiksi*, jos sen alkioit ovat keskenään parittain ortogonaalisia ja normitettuja eli *ortonormaaleja*, eli

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \begin{cases} 1, & \text{kun } \alpha = \beta \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

aina, kun $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$. Seuraava lause on oleellinen Hilbertin avaruuksien rakenteen kannalta. Huomautettakoon, että jatkossa mahdollisesti ylinumeroituvat summaukset ovat summautuvien kompleksilukuperheiden summia; lukuperhe $Z \subset \mathbb{C}$ on summautuva, jos on olemassa sellainen vakio $M \geq 0$, jolla $\sum_{z \in Z_0} |z| \leq M$ aina, kun $Z_0 \subset Z$ on äärellinen joukko.

Lause 1.2 *Olkoon \mathcal{H} kompleksinen Hilbertin avaruus, jonka ei tarvitse olla separoituva. Hilbertin avaruus \mathcal{H} sisältää aina ortonormaalisysteemin \mathcal{B} , joka täyttää seuraavat keskenään ekvivalentit ehdot:*

1. Jos $\varphi \perp \mathcal{B}$, niin $\varphi = 0$.
2. $\varphi = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \langle \beta | \varphi \rangle \beta$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$; sarja suppenee sekä normin suhteen että tasaisesti.
3. $\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \langle \varphi | \beta \rangle \langle \beta | \psi \rangle$ kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$.
4. $\|\varphi\|^2 = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\langle \beta | \varphi \rangle|^2$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$.
5. *Systeemin \mathcal{B} lineaarinen verho on avaruuden \mathcal{H} tiheä aliavaruus.*

Edellisen lauseen mukaisia ortonormaalisysteemeitä kutsutaan *täydellisiksi ortonormaalisysteemeiksi* tai *ortonormaalikannoiksi*; näiden olemassaolo on yksinkertainen seuraus Zornin lemmasta (valinta-aksioomasta). Jos avaruuden \mathcal{H} ortonormaalikanta on numeroituva, eli $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots\}$, näemme helposti, että tämän kannan lineaarinen verho muodostettuna yli numeroituvan kunnan $\mathbb{Q}[i] = \{p + iq \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ on avaruuden \mathcal{H} tiheä numeroituva aliavaruus, eli \mathcal{H} on separoituva. Olettakaamme seuraavaksi, että \mathcal{H} on separoituva ja että sillä on ylinumeroituva ortonormaalikanta \mathcal{B} . Koska $\|\alpha - \beta\| = \sqrt{2}$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$, $\alpha \neq \beta$, niin avoimet pallot $B(\beta; 1/\sqrt{2})$, $\beta \in \mathcal{B}$, ovat erillisiä, ja niitä on ylinumeroituva määrä. Toisaalta jokainen näistä palloista sisältää äärettömän määrän avaruuden \mathcal{H} jonkin numeroituvan osajoukon vektoreita, mikä johtaa nopeasti ristiriitaan, eli jokaisen ortonormaalikannan on oltava numeroituva. Saamme seuraavan tuloksen:

Lause 1.3 *Hilbertin avaruus \mathcal{H} on separoituva tarkalleen silloin, kun sillä on numeroituva ortonormaalikanta.*

Jatkossa käsittelemme ainoastaan separoituvia Hilbertin avaruuksia, eli käytössämme on aina numeroituvia ortonormaalikantoja. Jos Hilbertin avaruuden \mathcal{H} ortonormaalikannassa on d kappaletta alkioita, $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$), sanomme, että \mathcal{H} on d -ulotteinen.

Eräs Hilbertin avaruuksien merkittävä ominaisuus on se, että ne ovat *itseduaalisia*, eli ne voidaan samaistaa omaan (topologiseen) duaaliinsa \mathcal{H}' ; duaalin alkiot ovat jatkuvia lineaarikuvauksia $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, ja duaali varustetaan normilla

$$\mathcal{H}' \ni f \mapsto \|f\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| \leq 1} |f(\varphi)|.$$

Aina kun $\psi \in \mathcal{H}$, voimme määrätä duaalin alkion f_ψ kaavalla

$$f_\psi(\varphi) = \langle \psi | \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{H}.$$

Näin saadaan kaikki duaalin alkiot, kuten seuraava Fréchet'n-Rieszin lause toteaa.

Lause 1.4 *Kuvaus $\mathcal{H} \ni \psi \mapsto f_\psi \in \mathcal{H}'$ on antilineaarinen isometrinen bijektio Hilbertin avaruuden \mathcal{H} ja sen duaalin \mathcal{H}' välillä.*

1.1.2 Hilbertin avaruuksien operaattorialgebroja

Hilbertin avaruuden \mathcal{H} *operaattoreilla* tarkoitamme kompleksilineaarisia kuvauksia $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$, $\varphi \mapsto A\varphi$, missä $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ on aliavaruus, jota kutsutaan operaattorin A määrittelyalueeksi. Operaattoreille voidaan määrätä yhteenlasku ja skalaarilla kertominen pisteittäin, eli kaikilla operaattoreilla A, B , kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, $\psi \in \mathcal{D}(A)$ ja kaikilla $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(A + B)\varphi = A\varphi + B\varphi, \quad (\alpha A)\psi = \alpha A\psi.$$

Voimme lisäksi varustaa operaattorien joukon tulolla, joka määritellään kuvauksien yhdistämisenä, eli kun A ja B ovat operaattoreita ja $\varphi \in \mathcal{D}(B)$, $B\varphi \in \mathcal{D}(A)$

$$(AB)\varphi = A(B\varphi).$$

Erityisen osajoukon Hilbertin avaruuden operaattorien joukossa muodostavat rajoitetut operaattorit. Operaattori $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ on *rajoitettu*, jos se on tasaisesti jatkuva määrittelyavaruudessaan $\mathcal{D}(A)$. Jatkossa oletamme yksinkertaisesti, että rajoitetulla operaattorilla A on määrittelyalueenaan \mathcal{H} , sillä voimme aina tasaisesti jatkuvuudesta johtuen olettaa, että $\mathcal{D}(A)$ on suljettu ja voimme laajentaa operaattorin A koko avaruuteen \mathcal{H} asettamalla sen nolaksi ortogonaalikomplementissa $\mathcal{D}(A)^\perp$. Voimmekin karakterisoida Hilbertin avaruuden \mathcal{H} rajoitetut operaattorit sellaisina operaattoreina $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, joilla

$$\sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|A\varphi\| < \infty.$$

Merkitsemme rajoitettujen operaattorien joukkoa $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Jos \mathcal{H} ja \mathcal{K} ovat kummatkin Hilbertin avaruuksia, määrittelemme rajoitettujen operaattoreiden joukon $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ sellaisten lineaarikuvausten $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ joukkona, joilla $\sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \|A\varphi\|_{\mathcal{K}} < \infty$. Erityisiä rajoitettuja operaattoreita ovat operaattorialgebran $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ nolla-alkio (nollaoperaattori) $O_{\mathcal{H}} = O$, jolla $O\varphi = 0$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$, ja ykkösalkio (identiteettioperaattori) $I_{\mathcal{H}} = I$, jolla $I\varphi = \varphi$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$. Kullakin tiheästi määritellyllä operaattorilla A on yksikäsitteinen adjungaatti A^* , jolla on määrittelyalue

$$\mathcal{D}(A^*) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \text{kuvaus } \mathcal{D}(A) \ni \psi \mapsto \langle \varphi | A\psi \rangle \text{ on jatkuva}\}$$

ja jolle pätee

$$\langle \varphi | A\psi \rangle = \langle A^*\varphi | \psi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A), \psi \in \mathcal{D}(A^*).$$

Rajoitetuille operaattoreille tulos seuraa suoraan Fréchet'n-Rieszin esityslauseesta 1.4, ja yleisen tiheästi määritellyn operaattorin tapauksessa tarvitaan lisäksi yksinkertainen tiheysargumentti. Kutsumme operaattoria A itseadjungoiduksi, kun $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ ja A yhtyy adjungaattiinsa tällä yhteisellä määrittelyalueella. Operaattoriin liittyy myös spektri; operaattorin A spektriä merkitsemme $\sigma(A)$. Spektri $\sigma(A)$ on niiden kompleksilukujen λ joukko, joilla operaattorilla $\lambda I - A$ ei ole rajoitettua käänteisoperaattoria; rajoitetun operaattorin spektri on kompakti joukko. Erityisesti operaattorin ominaisarvot, mikäli niitä on, ovat spektrin alkioita. Jos $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ operaattoreiden spektrit koostuvat yksistään ominaisarvoista.

Sanomme, että kuvaus $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ on *konjugaattilineaarinen* eli *antilineaarinen operaattori*, kun $A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \bar{\alpha}A\varphi + \bar{\beta}A\psi$ kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Sanomme lisäksi, että antilineaarinen operaattori A on *rajoitettu*, jos

$$\sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|A\varphi\| < \infty.$$

Konjugaattilineaarisia operaattoreita tarvitaan verraten harvoin, joten kun puhumme vain operaattoreista, tarkoitamme nimenomaan lineaarisia operaattoreita.

Rajoitettujen operaattorien joukko $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ on vektoriavaruutena Banachin avaruus, kun se varustetaan avaruuden \mathcal{H} normin indusoimalla operaattorinormilla $\|\cdot\|$,

$$\|A\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|A\varphi\|.$$

Tämä normi tekee joukosta $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ myös Banachin algebran ylläesiteltyjen laskutoimitusten suhteen. Kun tämä algebra varustetaan adjungointi-involuutiolla $A \mapsto A^*$, rajoitettujen operaattorien joukosta saadaan C^* -algebra. Gel'fandin ja Naimarkin tulokset antavat seuraavan merkittävän tuloksen rajoitetuille normaaleille eli adjungaattinsa kanssa komutoiville operaattoreille:

Lause 1.5 *Olkoon $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normaali operaattori. Merkitsemme symbolilla $C(\sigma(A))$ jatkuvien kuvausten $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ algebraa (pisteittäisten laskutoimitusten suhteen), joka on varustettu normilla $\|\cdot\|$ ja $*$ -involuutiolla,*

$$\|f\| = \sup_{z \in \sigma(A)} |f(z)|, \quad f^*(z) = \overline{f(z)},$$

joiden suhteen $C(\sigma(A))$ on C^ -algebra. Olkoon lisäksi \mathcal{A} identiteettioperaattorin sekä operaattoreiden A ja A^* virittämä kommutatiivinen C^* -algebra. Tällöin on olemassa isometrinen ja surjektiivinen $*$ -isomorfismi*

$$\mathfrak{L} : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{A},$$

jolle $\mathfrak{L}(\text{id}) = A$ ja $\mathfrak{L}(1) = I$, missä $\text{id}(z) = z$ kaikilla $z \in \sigma(A)$ ja 1 on vakiofunktio, joka saa arvon 1 koko spektrillä $\sigma(A)$.

Huomattakoon, että ylläoleva lause pätee kaikissa C^* -algebroissa, joista $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ on vain yksi. Todistus on esitetty teoksessa [5]. Merkitsemme jatkossa usein $\mathfrak{L}(f) = f(A)$.

Hilbertin avaruudelle rakentuu useita operaattorijoukkoja, joista tärkeimpiä ovat rajoitettujen operaattoreiden joukon $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ lisäksi rajoitettujen itseadjungoitujen operaattorien joukko $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$, edelliseen sisältyvä projektio-operaattorien joukko $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, jotka ovat tarkalleen kaikki joukon $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ idempotentit operaattorit. Projektiota suljetulle aliavaruudelle $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ merkitsemme $P_{\mathcal{M}}$ ja projektiota vektorin $\varphi \in \mathcal{H}$ virittämälle yksiulotteiselle aliavaruudelle $[\varphi]$ merkitsemme $P[\varphi]$. Operaattoria $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sanotaan unitaariseksi, kun $U^*U = UU^*$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että U on isometrinen surjektio. Unitarioperaattoreiden joukkoa merkitään symbolilla $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Rajoitettujen itseadjungoitujen operaattoreiden joukossa $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ voidaan muodostaa osittainen järjestys; merkitsemme operaattoreille $A, B \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ $A \leq B$, kun $\langle \varphi | A \varphi \rangle \leq \langle \varphi | B \varphi \rangle$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$. Erityisesti voidaan määritellä positiivisten operaattoreiden joukko $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})^+$, joka koostuu niistä joukon $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ operaattoreista A , jotka ovat positiivisemidefinittejä, eli $O \leq A$.

Olkoon \mathcal{H} d -ulotteinen ($d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) Hilbertin avaruus ja $\{\varphi_n\}_{n=1}^d$ sen jokin ortonormaalikanta. Operaattorin $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sanotaan olevan jälkiluokkaoperaattori, kun

$$\text{tr}[\sqrt{S^*S}] := \sum_{n=1}^d \langle \varphi_n | \sqrt{S^*S} \varphi_n \rangle_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Tässä merkinnällä \sqrt{A} , kun $O \leq A$, tarkoitetaan spektraaliteorian mukaista positiivista yksikäsitteistä operaattorin A neliöjuurioperaattoria. Jälkiluokkaoperaattorien joukkoa merkitsemme symbolilla $\mathcal{T}(\mathcal{H})$. Ylläesitelty kuvaus $\text{tr} : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ on, kuten tunnettua, riippumaton käytetystä ortonormaalikannasta. Jälkiluokkaoperaattorit ovat kompakteja,

joten niiden spektri on diskreetti, ja normaaleilla jälkiluokkaoperaattoreilla on siis diskreetti spektraalihajotelma. On huomattava, että kun $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $S \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, niin $AS, SA \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja $\text{tr}[AS] = \text{tr}[SA]$. Merkitsemme positiivisten jälkiluokkaoperaattoreiden joukkoa symbolilla $\mathcal{T}(\mathcal{H})^+$. Lisäksi merkitsemme symbolilla $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ avaruuden \mathcal{H} Hilbert-Schmidt-operaattoreiden joukkoa; nämä ovat operaattoreita $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, joilla $\text{tr}[H^*H] < \infty$. Joukko $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ on separoituva Hilbertin avaruus, kun sille valitaan sisätulo $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{HS}(\mathcal{H})}$ asettamalla kaikille $H_1, H_2 \in \mathcal{HS}(\mathcal{H})$

$$\langle H_1 | H_2 \rangle_{\mathcal{HS}(\mathcal{H})} = \text{tr}[H_1^* H_2].$$

Joukko $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ voidaan varustaa erilaisilla lokaalisti konvekseilla topologioilla³: Eräs niistä on edellämääriteltyyn operaattorinormin generoima topologia. Vahva operaattoritopologia on karkein topologia, jonka suhteen jokainen kuvauksista $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto A\varphi \in \mathcal{H}$, $\varphi \in \mathcal{H}$ on jatkuva. Heikko operaattoritopologia on puolestaan karkein topologia, jonka suhteen jokainen kuvauksista $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \langle \varphi | A\psi \rangle_{\mathcal{H}}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, on jatkuva. Jälkiluokkaoperaattoreiden joukko $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ voidaan varustaa myös jälkinormilla

$$\|S\|_{\text{tr}} = \text{tr}[\sqrt{S^*S}].$$

Normiavaruuksia $(\mathcal{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\text{tr}})$ on Banachin avaruus.

Kvanttiteoriassa systeemin tilaa kuvataan ns. tilaoperaattorilla, joka on positiivinen jäljen yksi operaattori. Tilaoperaattorien joukkoa merkitsemme symbolilla $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Jokaisella tilalla T on kompaktisuudesta johtuen hajotelma

$$T = \sum_{n=1}^d t_n P[\varphi_n], \quad t_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^d t_n = 1,$$

missä $\{\varphi_n\}_{n=1}^d$ on d -ulotteisen ($d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) avaruuden \mathcal{H} jokin ortonormaalikanta. Toinen kvanttiteorian kannalta merkittävä operaattorijoukko on efektioperaattorien joukko $\mathcal{E}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$, jonka operaattoreille E pätee $O \leq E \leq I$.

1.1.3 Operaattorimitat ja suureet

Kvanttiteoriassa operaattoriarvoiset mitat (operaattoriarvoiset σ -additiiviset joukkofunktiot) ovat tärkeitä. Seuraavassa määrittelemme joitakin tärkeimpiä operaattorimittojen alatyyppejä.

Määritelmä 1.1 *Olkkoon Ω epättyhjä joukko ja \mathcal{A} sen jokin σ -algebra. Kuvausta $M : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kutsutaan operaattorimitaksi, kun $M(\emptyset) = O$ ja M on heikosti σ -additiivinen siinä mielessä, että kun joukot B_n , $n \in \mathbb{N}$, ovat parittain alkiovieraita, niin*

$$\left\langle \varphi \left| M \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \psi \right. \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \varphi | M(B_n) \psi \rangle$$

³Lokaalikonvekssisuus määritellään seuraavassa luvussa.

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Jos operaattorimitan M kuva-avaruus sisältyy positiivisten operaattoreiden joukkoon, kutsutaan sitä positiivioperaattorimitaksi (POM). Jos lisäksi $M(\Omega) = I$ (jolloin $M(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{H})$), positiivioperaattorimittaa M kutsutaan semispektraalimitaksi tai normitetuksi positiivioperaattorimitaksi. Mitalliselle avaruudelle (Ω, \mathcal{A}) rakentuvien Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} operoivien semispektraalimittojen joukkoa merkitsemme symbolilla $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$. Jos taas operaattorimitan M arvojoukko sisältyy projektiohilaan $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, kutsutaan sitä projektioarvoiseksi mitaksi, ja jos lisäksi $M(\Omega) = I$, kutsutaan projektioarvoista mittaa M spektraalimitaksi. Kaikkien σ -algebrassa \mathcal{A} määriteltyjen spektraalimittojen $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ joukkoa merkitsemme symbolilla $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{H})$.

Voidaan osoittaa, että spektraalimitan $P \in \Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ voi karakterisoida semispektraalimitana, jolla pätee

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) \quad (3)$$

kaikilla $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$. Huomattakoon, että kun $\dim(\mathcal{H}) < d$ ja σ -algebra \mathcal{A} sisältää vähintään d kappaletta erillisiä alkioita $\{B_1, \dots, B_d\}$, täytyy päteä $P(B_k) = O$ jollakin $k = 1, \dots, d$, sillä muuten olisi olemassa d kappaletta keskenään ortogonaalisia aliavaruuksia $P(B_k)(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$, $k = 1, \dots, d$, mikä on mahdotonta; ortogonaalisuus todetaan käyttämällä kaavaa 3.

Kun lauseeseen 1.5 sovelletaan mitta- ja integrointiteoriaa, saadaan tunnettu spektraalilause (katso lähde [4]), joka yleistyy kaikille avaruuden \mathcal{H} normaaleille operaattoreille, ei vain rajoitetuille. Seuraavassa lauseessa kuten aina jatkossakin merkinnällä $\mathcal{B}(\Omega)$ tarkoitetaan topologisen avaruuden Ω suppeinta σ -algebraa, joka sisältää kaikki avaruuden Ω avoimet joukot.

Lause 1.6 (Spektraalilause) *Olkoon $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ normaali operaattori. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen spektraalimita $M^A : \mathcal{B}(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$, jolle pätee (heikossa mielessä)*

$$A = \int_{\sigma(A)} x dM^A(x),$$

eli siis kaikille $\varphi \in \mathcal{H}$ ja $\psi \in \mathcal{D}(A)$

$$\langle \varphi | A \psi \rangle = \int_{\sigma(A)} x dM_{\varphi, \psi}^A(x),$$

missä $M_{\varphi, \psi}^A : \mathcal{B}(\sigma(A)) \rightarrow \mathbb{C}$ on kompleksimitta, joka määräytyy kaavasta $M_{\varphi, \psi}^A(B) = \langle \varphi | M^A(B) \psi \rangle$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\sigma(A))$. Operaattorin A määrittelyalue voidaan antaa muodossa

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \int_{\sigma(A)} |x|^2 dM_{\varphi, \psi}^A(x) < \infty \text{ kaikilla } \varphi \in \mathcal{H} \right\}.$$

Suureita kuvataan kvanttiteoriassa semispektraalimitoilla. Suure, jonka arvojoukko on mitallinen avaruus (Ω, \mathcal{A}) , on kuvaus, joka liittää kuhunkin systeemin tilaan $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ mittaustulosten todennäköisyysjakauman (-mitan) $p_T : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. Kun suureta kuvataan semispektraalimitalla M , on systeemin tilalle $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ määräytyvä todennäköisyysmitta $p_T^M : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$,

$$\mathcal{A} \ni B \mapsto p_T^M(B) = \text{tr}[TM(B)]. \quad (4)$$

Osiassa 1.4 annamme perustelun tälle suureiden kuvaukselle ja tutkimme suureita suhteessa fysikaalisiin mittauksiin.

Merkitsemme kullekin $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{H})$ ja $k \in \mathbb{N}$

$$M[k] = \int_{\mathbb{R}} x^k dM(x)$$

aina, kun kyseinen operaattori-integraali on olemassa tiheästi määriteltynä (oleellisesti itseadjungoituna) operaattorina. Jos A on avaruuden \mathcal{H} itseadjungoitu, mahdollisesti rajoittamaton operaattori, on tyypillisesti ääretön määrä semispektraalimittoja $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{H})$, joilla $M[1] = A$. Merkitsemme näiden semispektraalimittojen joukkoa symbolilla $[A]$. Lause 1.6 kertoo, että joukko $[A]$ sisältää tarkalleen yhden spektraalimitan, jota merkitsemme kuten lauseessa 1.6 symbolilla M^A . Tälle spektraalimitalle pätee kaikilla $k \in \mathbb{N}$ [4] kaava

$$M^A[k] = A^k.$$

Tämä ehto karakterisoi joukon $[A]$ ainoan spektraalimitan. Itse asiassa spektraalimitta M^A on ainoa joukon $[A]$ alkio, jolle pätee

$$M^A[2] = A^2.$$

Muilla semispektraalimitoilla $M \in [A]$ operaattori $M[2] - A^2$ on nolasta poikkeava ja positiivinen aina, kun $M[2]$ on määritelty. Operaattoria $M[2] - A^2 =: D_M$ kutsutaan semispektraalimitaan M liittyväksi *hälyoperaattoriksi*. Voimme määrätä semispektraalimitaan (suureeseen) M liittyvän varianssin $\text{Var}(M, T)$ systeemin tilassa T lukuna $\text{tr}[TM[2]] - \text{tr}[TA]^2$. Huomaamme välittömästi, että $\text{Var}(M, T) = \text{Var}(M^A, T) + \text{tr}[TD_M]$. Joukossa $[A]$ pienin varianssi on siis spektraalimitalla M^A kaikilla tiloilla ja semispektraalimitan M varianssin eron optimaalista $\text{Var}(M^A, T)$ määrää häly D_M .

1.1.4 Yhdistetyt kvanttisysteemit

Usein kvanttisysteemejä on hyödyllistä tarkastella useamman alisysteemin yhdisteenä. Esimerkiksi, kun systeemit \mathcal{S}_1 ja \mathcal{S}_2 vuorovaikuttavat keskenään, päädymme tutkimaan yhdistettä $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$. Jos systeemien $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ Hilbertin avaruudet ovat vastaavasti \mathcal{H}_1 ja \mathcal{H}_2 , mikä Hilbertin avaruus tulisi liittää yhdisteeseen $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$? Kun systeemit $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ ovat

identifioitavissa yhdisteen $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ osina, yhdisteen Hilbertin avaruuden \mathcal{H} ja alisysteemien Hilbertin avaruuksia \mathcal{H}_1 ja \mathcal{H}_2 sitoo bilineaarikuvaus $t : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}$, jolle

- vektorijoukon $\{t(\varphi, \psi) \mid \varphi \in \mathcal{H}_1, \psi \in \mathcal{H}_2\}$ lineaarinen verho on avaruuden \mathcal{H} tiheä osajoukko ja
- $\langle t(\varphi_1, \psi_1) \mid t(\varphi_2, \psi_2) \rangle = \langle \varphi_1 \mid \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle$ kaikilla $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_1$ ja $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_2$.

Voidaan helposti osoittaa [4], että kun avaruudet $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ ovat kiinnitetyt, pari (\mathcal{H}, t) voidaan aina konstruoida, ja tämä pari on oleellisesti yksikäsitteinen, eli kun (\mathcal{H}', t') on jokin toinen yllä kuvatuun kaltainen pari, on olemassa isometrinen isomorfismi $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, jolla $\Phi \circ t = t'$. Tämän yksikäsitteisyyden takia merkitään kullekin parille (\mathcal{H}, t) yksinkertaisesti $t(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1, \psi \in \mathcal{H}_2$, ja $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Bilineaarioperaattoria \otimes kutsutaan *tensorituloksi*. Kun alisysteemien Hilbertin avaruudet ovat \mathcal{H}_1 ja \mathcal{H}_2 , on yhdisteen Hilbertin avaruus oleellisesti yksikäsitteinen tensorituloavaruus $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Kun A_1 ja A_2 ovat avaruuksien \mathcal{H}_1 ja vastaavasti \mathcal{H}_2 (tiheästi määriteltyjä) operaattoreita, määrittelemme niiden tensoritulon $A_1 \otimes A_2$ asettamalla $A_1 \otimes A_2(\varphi \otimes \psi) = A_1\varphi \otimes A_2\psi$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$ ja $\psi \in \mathcal{H}_2$. Koska joukon $\{\varphi \otimes \psi \mid \varphi \in \mathcal{H}_1, \psi \in \mathcal{H}_2\}$ lineaarinen verho on määritelmän mukaan tiheä avaruudessa $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, on operaattori $A_1 \otimes A_2$ yksikäsitteisesti määritelty. Jos $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$, tarkoitetaan operaattorista T avaruuteen \mathcal{H}_1 redusoidulla operaattorilla T_1 sitä yksikäsitteistä avaruuden \mathcal{H}_1 jälkiluokkaoperaattoria, jolle $\text{tr}[T_1 A] = \text{tr}[T(A \otimes I)]$ kaikilla $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Tällöin erityisesti $\langle \varphi \mid T_1 \psi \rangle = \text{tr}[T(|\psi\rangle\langle\varphi| \otimes I)]$ kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_1$, missä puolestaan

$$|\psi\rangle\langle\varphi| \eta = \langle\varphi|\eta\rangle\psi, \quad \eta \in \mathcal{H}_1.$$

Redusoitu operaattori avaruudessa \mathcal{H}_2 määritellään samoin. Usein merkitään myös $T_1 = \text{tr}_{\mathcal{H}_2}[T]$, $T_2 = \text{tr}_{\mathcal{H}_1}[T]$, ja operaattoreita T_1 ja T_2 kutsutaan myös operaattorin T jäljiksi yli avaruuden \mathcal{H}_2 ja vastaavasti yli avaruuden \mathcal{H}_1 . Olettakaamme yllä, että T on tilaoperaattori, joka kuvaa yhdistetyn systeemin $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ tilaa. Koska $\text{tr}[TE \otimes I] = \text{tr}[T_1 E]$ ja $\text{tr}[TI \otimes F] = \text{tr}[T_2 F]$ kaikilla $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}_1)$ ja $F \in \mathcal{E}(\mathcal{H}_2)$, on tilaoperaattoreilla T_1 ja T_2 kaikki osasysteemejä erikseen koskevat ominaisuudet: T_k on siis osasysteemin \mathcal{S}_k tila $k = 1, 2$. Tästä ei toki seuraa $T = T_1 \otimes T_2$.

1.2 Yleisiä merkintöjä ja käsitteitä

Esittelemme seuraavaksi joitakin perusmerkintöjä, joita tarvitsemme jatkossa. Jatkossa määrittelemme luonnolliset luvut joukkona $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Jos $m \in \mathbb{N}$, merkitsemme symbolilla \mathbb{N}_m joukkoa $\{1, \dots, m\}$ ja $\mathbb{N}_\infty := \mathbb{N}$.

Olkoon (X, \mathcal{A}, μ) mitta-avaruus (μ on ei-negatiivinen) ja \mathcal{E} Banachin avaruus. Merkitsemme symbolilla $L_0^p(X, \mu; \mathcal{E})$, $p \geq 1$ sellaisten funktioiden $f : X \rightarrow \mathcal{E}$ joukkoa, joilla

funktio $X \ni x \mapsto \|f(x)\|^p$ on μ -integroituva. Sanomme, että funktiot f, g ovat ekvivalentit, jos joukko $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ sisältyy johonkin joukkoon $N \in \mathcal{A}$, jolla $\mu(N) = 0$. Voimme muodostaa vastaavien ekvivalenssiluokkien joukon $L^p(X, \mu; \mathcal{E})$. Voidaan todeta, että nämä joukot ovat Banachin avaruuksia normin $\|\cdot\|_p$,

$$\|[f]\|_p := \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

suhteen. Selvästikään ylläoleva kaava ei riipu ekvivalenssiluokan $[f]$ edustajan valinnasta. Samaistammekin usein näiden avaruuksien alkiot vastaaviin funktioihin, kun ymmärrämme melkein kaikkialla yhtyvien funktioiden edustavan samaa vektoria. Merkitsemme myös $(L^p \cap L^q)(X, \mu; \mathcal{E}) := L^p(X, \mu; \mathcal{E}) \cap L^q(X, \mu; \mathcal{E})$ ja $L^p(X, \mu; \mathbb{C}) := L^p(X, \mu)$. Jos mitta μ on asiayhteydestä selvä, merkitsemme usein yksinkertaisesti $L^p(X, \mu) = L^p(X)$.

Avaruudet $L^2(X, \mu; \mathcal{M})$, missä \mathcal{M} on Hilbertin avaruus, ovat Hilbertin avaruuksia. Alkioiden $[\varphi], [\psi] \in L^2(X, \mu; \mathcal{M})$ välisen sisätulon antaa kaava

$$\langle [\varphi] | [\psi] \rangle = \int_X \langle \varphi(x) | \psi(x) \rangle_{\mathcal{M}} d\mu(x).$$

Tämäkään kaava ei riipu edustajien valinnasta, ja usein vektorit samaistetaan funktioihin, ”aaltofunktioihin”, kunhan muistetaan, että melkein kaikkialla yhtyvät funktiot edustavat samaa vektoria. Avaruus $L^2(X, \mu; \mathcal{M})$ on unitaari-ekvivalentti tensorituloavaruuden $L^2(X, \mu) \otimes \mathcal{M}$ kanssa. Erityisesti $L^2(\mathbb{R}^n) := L^2(\mathbb{R}^n, d^n \mathbf{x})$, $n \in \mathbb{N}$, ($d^n \mathbf{x}$ on Lebesguen mitta) on Hilbertin avaruus, joka koostuu neliöllisesti Lebesgue-integroituvista funktioista $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ modulo nollamittalliset muutokset. Vektoreiden $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ välinen sisätulo määritellään kaavalla

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}.$$

Olettakaamme, että (X, τ) on topologinen avaruus, joka toteuttaa toisen numeroituvuusaksiooman, eli että topologialla τ on numeroituva kanta \varkappa . Tällöin jokaisen avoimen osajoukon $U \subset X$ voi lausua numeroituvana unionina kannan \varkappa alkioista. Vastaavan Borelin σ -algebran $\mathcal{B}(X, \tau)$ generoi nyt numeroituva rengas, joka koostuu kannan \varkappa alkioiden äärellisistä unioneista; σ -algebra $\mathcal{B}(X, \tau)$ on siis *numeroituvasti generoitu*. Tästä seuraa suoraviivaisella mittateoreettisella päättelyllä, että Hilbertin avaruus $L^2(X, \mu; \mathcal{M})$ on separoituva, kun \mathcal{M} on separoituva Hilbertin avaruus ja topologinen avaruus X täyttää toisen numeroituvuusaksiooman.

Kun d -ulotteiselle ($d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) separoituvalla Hilbertin avaruudelle \mathcal{H} valitaan ortonormaalikanta $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}_d\}$, voimme muodostaa isometrisen homeomorfian avaruuksien \mathcal{H} ja \mathbb{C}^d välille, jos $d < \infty$, samaistamalla kantavektorin e_k avaruuden \mathbb{C}^d k :nnen kantavektorin kanssa kaikilla $k \in \mathbb{N}_d$. Jos taas \mathcal{H} on ääretönulotteinen, voimme samalla tavalla

samaistaa sen avaruuden

$$l^2 := \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} |f(k)|^2 < \infty \right\} = L^2(\mathbb{N}, \nu)$$

kanssa. Tässä ν on luonnollisten lukujen lukumäärämitta. Vektoreiden $f, g \in l^2$ välinen sisätulo määritellään lukuna $\langle f|g \rangle_{l^2} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{f(k)}g(k)$. Näin ollen Hilbertin avaruuksia on olemassa oleellisesti vain yksi kutakin ortonormaalikannan kardinaliteettia $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ kohden.

Seuraavaksi määrittelemme edellisten konstruktioiden yleistyksen, *suoran integraalin*. Olkoon (X, \mathcal{A}, ν) jälleen mitallinen avaruus, missä ν on reaalinen ei-negatiivinen mitta ja $(\mathcal{H}_x, \langle \cdot | \cdot \rangle_x)$ separoituva Hilbertin avaruus jokaisella $x \in X$. Olkoon lisäksi $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ joukko vektorikenttiä yli X :n, eli $e_k(x) \in \mathcal{H}_x$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $x \in X$, joilla kuvaus $X \ni x \mapsto \langle e_k(x) | e_l(x) \rangle_x$ on mitallinen kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$ ja joukon $\{e_k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ lineaarinen verho on tiheä avaruudessa \mathcal{H}_x . Tällöin joukossa X määriteltyä vektorikenttää $\varphi, \varphi(x) \in \mathcal{H}_x$ kullakin $x \in X$, sanotaan mitalliseksi, kun kuvaukset $x \mapsto \langle e_k(x) | \varphi(x) \rangle_x$ ovat mitallisia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin avaruusparvea $\{\mathcal{H}_x \mid x \in X\}$ sanotaan *mitalliseksi kentäksi Hilbertin avaruuksia yli avaruuden X* . Näiden Hilbertin avaruuksien suoralla integraalilla

$$\int_X^\oplus \mathcal{H}_x d\nu(x) \quad (5)$$

tarkoitetaan Hilbertin avaruutta, joka koostuu mitallisista kentistä φ yli avaruuden X , joille

$$\int_X \|\varphi(x)\|_x^2 d\nu(x) < \infty,$$

missä on merkitty $\|\varphi(x)\|_x^2 = \langle \varphi(x) | \varphi(x) \rangle_x$. Kahden tällaisen kentän $\varphi, \psi \in \int_X^\oplus \mathcal{H}_x d\nu(x)$ sisätulo määritellään kaavalla

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_X \langle \varphi(x) | \psi(x) \rangle_x d\nu(x).$$

Kiinnittämällä ääretönulotteisen separoituvan Hilbertin avaruuden \mathcal{M} ja valitsemalla isometrian $W_x : \mathcal{H}_x \rightarrow \mathcal{M}$ kullakin $x \in X$ voimme upottaa suoran integraalin $\int_X^\oplus \mathcal{H}_x d\nu(x)$ isometrisesti avaruuteen $L^2(X, \nu; \mathcal{M})$. Tällaisia upotuksia tarvitsemme vastaisuudessa.

Olkoon A kenttä rajoitettuja operaattoreita yli X :n, eli $A_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_x)$ kaikilla $x \in X$. Operaattorikenttää A kutsutaan mitalliseksi, jos kenttä $X \ni x \mapsto A_x \varphi(x)$ on mitallinen kaikilla mitallisilla kentillä φ . Usein merkitään

$$A = \int_X^\oplus A_x d\nu(x).$$

Tällaisia suoraintegraalioperaattoreita A kutsutaan usein avaruuden $\int_X^\oplus \mathcal{H}_x d\nu(x)$ *hajoaviksi operaattoreiksi*. Hajoava operaattori on rajoitettu tarkalleen silloin, kun

$$\|A\| = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \|A_x\|_x < \infty.$$

Tässä avaruuden \mathcal{H}_x operaattorinormia on merkitty symbolilla $\|\cdot\|_x$ kullakin $x \in X$.

Olkoon $X \neq \emptyset$ ja \mathcal{V} jokin vektoriavaruus. Kun $f : X \rightarrow \mathcal{V}$, merkitsemme $\text{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Kutsumme tätä joukkoa funktion f *tueksi* tai *kantajaksi*. Jos X on topologinen avaruus, sanomme, että funktio $f : X \rightarrow \mathcal{V}$ on *kompaktitukinen*, kun sen tuki sisältyy johonkin kompaktiin joukkoon. Jos \mathcal{V} on normiavaruus, merkitsemme kompaktitukisten ja jatkuvien funktioiden $f : X \rightarrow \mathcal{V}$ avaruutta symbolilla $C_c(X; \mathcal{V})$. Jälleen merkitsemme $C_c(X; \mathbb{C}) =: C_c(X)$. Jos X on topologinen avaruus ja \mathcal{V} on normiavaruus, sanomme funktion $f : X \rightarrow \mathcal{V}$ *häviävän äärettömydessä*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa kompakti joukko K_ε , jolla $\|f(x)\| < \varepsilon$ kaikilla $x \in X \setminus K_\varepsilon$. Merkitsemme äärettömydessä häviävien jatkuvien funktioiden $f : X \rightarrow \mathcal{V}$ joukkoa symbolilla $C_0(X; \mathcal{V})$. Jälleen $C_0(X; \mathbb{C}) =: C_0(X)$.

Tarvitsemme jatkossa myös joitakin erityisiä topologisia käsitteitä. Sanotaan, että topologisen avaruuden X osajoukko Y on *tihä*, kun jokaisen pisteen $x \in X$ jokaisesta ympäristöstä löytyy joukon Y piste. Metrisen avaruuden (X, d) tapauksessa tämä vastaa sitä, että jokaista $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $y \in Y$, jolla $d(x, y) < \varepsilon$. Topologinen avaruus X on *Hausdorffin avaruus* tai tyyppiä T_2 , jos aina, kun valitsemme pisteet $x, y \in X$, $x \neq y$, on olemassa näiden pisteiden avoimet ympäristöt $U \ni x$ ja $V \ni y$, jotka ovat erillisiä, eli $U \cap V = \emptyset$. Avaruus X on *lokaalisti kompakti*, kun sen kaikilla pisteillä on olemassa jokin kompakti ympäristö. Jokainen lokaalisti kompakti toisen numeroituvuusaksiooman täyttävä avaruus X on σ -*kompakti*, eli on olemassa kompaktit joukot $K_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, joilla $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = X$. Olkoon X on lokaalisti kompakti toisen numeroituvuusaksiooman täyttävä topologinen avaruus, jonka topologialla siis on numeroituva kanta $\mathcal{K} = \{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Olkoon $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ sellainen kokoelma kannan joukkoja, joiden sulkeuma on kompakti. Kokoelma \mathcal{F} on epätyhjä, sillä jos otamme mielivaltaisen pisteen $x \in X$, voimme valita sille kompaktin ympäristön K , joka puolestaan sisältää siis jonkin $B_k \in \mathcal{K}$. Tällöin myös $\overline{B_k} \subset K$, eli $B_k \in \mathcal{F}$. Jos olisi olemassa suljetun joukon $X \setminus (\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B) =: Y$ piste y , voimme valita sille kompaktin ympäristön L ja avoimen ympäristön $B_l \in \mathcal{K}$, $B_l \subset L$. Huomaamme nyt, että $\overline{B_l} \subset L$, jolloin $B_l \in \mathcal{F}$, mikä on mahdotonta. Siis $X = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$, jolloin tietenkin myös $X = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} \overline{B}$, missä unioni on numeroituva. Tarvitsemme tätä tulosta tuonnempana

Olkoon X topologinen avaruus ja \sim sen jokin ekvivalenssirelaatio. Kuten tunnettua ekvivalenssiluokat $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$, $x \in X$ muodostavat avaruuden X partition. Voimme muodostaa tekijäavaruuden X/\sim , jonka alkiot ovat tekijäluokkia ja jonka varustamme *tekijätopologialla*, joka on karkein topologia, jonka suhteen tekijäprojektiio $X \ni x \mapsto [x] \in X/\sim$ on jatkuva. Aina kun jatkossa käsittelemme tekijäavaruuksia, ne varustetaan automaattisesti tekijätopologialla. Topologisten ryhmien G tapauksessa kukin suljettu aliryhmä $H \leq G$ määrää ekvivalenssirelaation $g \sim h$, kun $gh^{-1} \in H$ ja vastaavaa tekijäryhmää merkitään symbolilla G/H . Tarvitsemme myös *tulotopologian* käsitettä. Olkoon joukko \mathcal{J} epätyhjä ja olkoon X_i epätyhjä topologinen avaruus kullakin $i \in \mathcal{J}$. Valinta-

aksiooman mukaan voimme aina muodostaa funktioita $f : \mathcal{J} \rightarrow \bigcup_{i \in \mathcal{J}} X_i$, joilla $f(i) \in X_i$ kullakin $i \in \mathcal{J}$. Näiden kuvausten joukkoa kutsutaan avaruuksien X_i , $i \in \mathcal{J}$, *karteesiseksi tuloksi*, jota merkitään symbolilla $\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$ ja joka tyypillisesti varustetaan karkeimmalla topologialla, jonka suhteen sijoituskuvaukset $\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i \ni f \mapsto f(i) \in X_i$, $i \in \mathcal{J}$, ovat jatkuvia. Tätä topologiaa sanotaan tulotopologiaksi. Jos tässä avaruudet X_i , $i \in \mathcal{J}$, ovat kompakteja, ns. Tihonovin lause sanoo, että karteesinen tulo on tulotopologian suhteen kompakti.

Tarvitsemme jatkossa myös normiavaruuden duaalin *heikon topologian*⁴ käsitettä. Olkoon \mathcal{E} normiavaruus yli kunnan \mathbb{K} , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ja \mathcal{E}' sen (topologinen) duaali eli \mathbb{K} -lineaarikuvausten $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ joukko, joilla

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| < \infty.$$

Duaalilla on luonnollinen täydellinen normi $\|f\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$, $f \in \mathcal{E}'$, mutta se voidaan varustaa myös heikommalla topologialla, joka on karkein topologia, jonka suhteen sijoituskuvaukset $\mathcal{E}' \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{K}$, $x \in \mathcal{E}$, ovat jatkuvia; selvästikin tämä heikko topologia on normitopologiaa karkeampi. Tulemme huomaamaan, että nämä heikot topologiat ovat esimerkkejä ns. *lokaalisti konvekseista topologioista*, jotka määritellään seuraavassa luvussa. Tihonovin lauseesta seuraa helposti, että normiavaruuden \mathcal{E} duaalin \mathcal{E}' luonnollisen normin mukainen yksikköpallo $\{f \in \mathcal{E}' \mid \|f\| \leq 1\}$ on heikon topologian suhteen kompakti; tätä tulosta kutsutaan Banachin-Alaogĭlun tai Alaogĭlun-Bourbakin lauseeksi. Todistus on oleellisesti sama, kuin lauseen 2.7.

1.3 Tilat ja efektit

Olkoon \mathcal{S} fysikaalinen systeemi, jota pyrimme kuvaamaan. Systeemin tilaa kuvataan preparointimenetelmillä tai -instrumenteilla, todellisilla, fysikaalisilla menetelmillä tai laitteilla, joilla systeemi on valmistettu. Kutsumme näitä fysikaalisen tilan eri käytännön realisaatioita *preparoinneiksi*. Toisaalta systeemille voi tehdä yksinkertaisia mittauksia; systeemin \mathcal{S} annetaan vuorovaikuttaa jonkin muun systeemin kanssa (mittalaite), ja mahdollisesti tapahtuvat muutokset systeemissä rekisteröidään. Yksinkertaisimmillaan tällainen mittaus on sellainen, että vain yhdenlainen muutos on mahdollinen tai sitten muutoksia systeemissä ei tapahdu lainkaan. Tällaisia mahdollisimman yksinkertaisia mittauksia kutsutaan *rekisteröinneiksi*.

Kuvitelkaamme, että meillä on käytettävissä mielivaltaisen monta identtisesti menetelmällä p preparoitua systeemiä, joista n kappaleelle suoritamme rekisteröintiproseduurin e . Olettakaamme, että saamme tuloksen $+$, siis rekisteröinnin mittaama muutos tapahtuu, n_+ kappaleessa systeemejä, jolloin vastakkainen tulos $-$, muutosta systeemissä

⁴Tästä topologiasta käytetään myös nimiä w-*topologia ja heikko-*topologia.

ei tapahdu, $n_- := n - n_+$ kappaleessa systeemejä. Tehkäämme ”ergodinen” oletus, että suhteellinen frekvenssi n_+/n (vastaavasti n_-/n) suppenee luvun n kasvaessa kohti lukua $(p|e) \in [0, 1]$ (vastaavasti lukua $1 - (p|e)$ kohti). Lukua $(p|e)$ sanotaan todennäköisyydeksi, jolla preparoinnilla p valmistetussa systeemissä tapahtuu rekisteröinnin e mittaama muutos.

Voimme määrätä systeemin \mathcal{S} preparoinneille ekvivalenssirelaation: sanomme, että preparoinnit p_1 , ja p_2 ovat ekvivalentit, jos kaikki niille suoritettut yksinkertaiset rekisteröinnit tuottavat samat todennäköisyydet, eli

$$(p_1|e) = (p_2|e)$$

kaikilla rekisteröinneillä e . Samaten määräämme rekisteröinneille ekvivalenssirelaation määräämällä rekisteröinnit e_1 , ja e_2 ekvivalenteiksi, kun

$$(p|e_1) = (p|e_2)$$

kaikilla preparoinneilla p . Sanomme preparointien ekvivalenssiluokkia *tiloiksi*; kyseessä ovat siis oleellisesti fysikaalisilta ominaisuuksiltaan yhtenevien systeemin valmistusmenetelmien joukkojen parvi. Rekisteröintien ekvivalenssiluokkia kutsumme *efekteiksi*. Tilajoukkoa merkitsemme symbolilla \mathfrak{S} . Efektit edustavat fysikaalisen systeemin \mathcal{S} mitattavissa olevia perusominaisuuksia; tarkemmin sanoen näiden ominaisuuksien mittausten keskenään ekvivalentteja realisaatioita. Efektijoukkoa merkitsemme symbolilla \mathfrak{E} . Kun $p \in T \in \mathfrak{S}$ ja $e \in E \in \mathfrak{E}$, merkitsemme

$$(T|E) := (p|e).$$

Selvästikin luku $(T|E)$ on hyvin määritelty. Luku $(T|E)$ merkitsee todennäköisyyttä, että tilassa T systeemillä \mathcal{S} on efektin E ilmaisema tai mittaama ominaisuus. Huomaamme helposti, että kaksi tilaa T_1 , T_2 ovat samat, tarkalleen silloin, kun $(T_1|E) = (T_2|E)$ kaikilla $E \in \mathfrak{E}$. Toisaalta E_1 , $E_2 \in \mathfrak{E}$ ovat samat tarkalleen silloin, kun $(T|E_1) = (T|E_2)$ kaikilla $T \in \mathfrak{S}$.

Kvanttimekaanikan Hilbertin avaruus -muotoilussa tilajoukkoa kuvaa tilaoperaattoreiden joukko $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja efektijoukko on efektioperaattoreiden joukko $\mathcal{E}(\mathcal{H})$, kun systeemiä \mathcal{S} kuvaa Hilbertin avaruus \mathcal{H} . Kun $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ määrätään nyt $(T|E) = \text{tr}[TE]$. Tämä muotoilu Hilbertin avaruudessa on perusteltavissa tietyillä preparointeja ja rekisteröintejä koskevilla fysikaalisesti motivoituilla aksioomilla. Erityisesti kvanttilogiikka tarkastelee erästä efektijoukon \mathfrak{E} osajoukkoa, *propositiojoukkoa* \mathfrak{L} , jolta vaaditaan tiettyjä hilateoreettisia ominaisuuksia. Systeemin tilat puolestaan määritellään propositiohilan \mathfrak{L} todennäköisyyssmittoina. Näistä lähtökohdista voidaan konstruoida teosta [6] seuraten kvanttimekaniikalle seuraavanlainen muotoilu: Propositiohila voidaan mieltää jonkin involutiivisen kunnan \mathbb{K} yli muodostetun vektoriarvuuden \mathcal{V} ”suljettujen” aliavaruuksien hilana. Aliavaruuden sulkeuman määrää eräs seskvilineaarimuoto $m : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}$.

Tietyillä lisävaatimuksilla voidaan kunta \mathbb{K} valita joksikin kunnista \mathbb{R} , \mathbb{C} tai \mathbb{F} (reaalisten kvaternionien kunta). Tällöin \mathcal{V} on vastaava reaalinen, kompleksinen tai kvaternioninen Hilbertin avaruus. Tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kun systeemiä kuvaa kompleksinen Hilbertin avaruus \mathcal{H} , tilat ovat proposition $\mathfrak{L} = \mathcal{P}(\mathcal{H})$ mittoja $\alpha : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$, joilla $\alpha(O) = 0$, $\alpha(I) = 1$ ja $\alpha(\sum_{k \in \mathbb{N}} P_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(P_k)$, kun projektiot P_k , $k \in \mathbb{N}$, ovat keskenään ortogonaalisia, eli $P_k P_l = O$ aina, kun $k \neq l$. Selvästikin kukin $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ määrittelee tällaisen mitan α , kun asetamme $\alpha(P) = \text{tr}[TP]$ kaikille $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Gleasonin lause toteaa, että useimmissa tapauksissa muunlaisia projektiohilan mittoja ei olekaan [7].

Lause 1.7 (Gleason) *Jokaista todennäköisyysmittaa $\alpha : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$ kohti on olemassa yksikäsitteinen jäljen 1 positiivinen operaattori $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, jolla $\alpha(P) = \text{tr}[TP]$ aina, kun $\dim(\mathcal{H}) \geq 3$.*

Näin päädyimme tämän luvun alussa esiteltyyn kvanttimekaniikan Hilbertin avaruus -muotoiluun.

1.4 Mittaukset ja suureet

Kvanttiteoriassa suure M määrää kullekin tilalle $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ todennäköisyysmitan p_T^M yli suureeseen liittyvän arvoavaruuden (mitallisen avaruuden) (Ω, \mathcal{A}) , joka mielletään sureen mittaustulosten todennäköisyysjakaumana, kun systeemi on tilassa T .⁵ Suureeseen M liittyvän todennäköisyysmitta-arvoisen kuvauksen $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto p_T^M$ vaaditaan olevan affiini, eli kun $T_1, T_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja $t \in [0, 1]$, niin $p_{tT_1 + (1-t)T_2}^M = tp_{T_1}^M + (1-t)p_{T_2}^M$. Kun laajennamme suureeseen M liittyvät affinit kuvaukset $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto p_T^M(B)$ kullakin $B \in \mathcal{A}$ koko jälkiluokkaoperaattorien joukkoon $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, näemme, että suureen voi mieltää funktionaaliarvoisena kuvauksena $\mathcal{A} \ni B \mapsto f_B \in \mathcal{T}(\mathcal{H})'$, missä $\mathcal{T}(\mathcal{H})'$ on Banachin avaruuden $(\mathcal{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\text{tr}})$ (topologinen) duaali, jolloin suureen todennäköisyysjakauman tilassa T antaa $p_T^M(B) = f_B(T)$. Olemme edellisessä osiossa jo määritelleet suureet semispektraalimittoina, jolloin kaavan 4 kautta määräytyy affiini todennäköisyysmitta-arvoinen kuvaus $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto p_T^M$.

Toisaalta kaikki affinit mitallisen avaruuden (Ω, \mathcal{A}) todennäköisyysmitta-arvoiset kuvaukset $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto p_T$ saadaan jostain semispektraalimitasta $M : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{H})$ asettamalla $p_T(B) = \text{tr}[TM(B)]$ kaikilla $B \in \mathcal{A}$. Tämän nähdäksemme esittelemme duaalia $\mathcal{T}(\mathcal{H})'$ koskevan tuloksen [3], [8].

⁵Luku $p_T^M(B)$ tulkitaan todennäköisyydeksi, jolla suureen mittaus tuottaa tuloksen joukosta $B \in \mathcal{A}$, kun tutkittava systeemi on tilassa T . Toisin sanoen, jos suoritamme saman suureen M mittauksen n kappaleelle identtisiä systeemejä, joista kukin on tilassa T , ja tulos on joukossa $B \in \mathcal{A}$ niistä n_B kappaleessa, tarkoitetaan luvulla $p_T^M(B)$ suhdelukujen n_B/n asymptootista rajaa, kun toistolukua n kasvatetaan.

Lause 1.8 *Olkoon $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Tällöin, kun määritellään $f_A : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$,*

$$f_A(T) = \text{tr}[TA],$$

on voimassa $f_A \in \mathcal{T}(\mathcal{H})'$ ja $\|f_A\| = \|A\|$. Toisaalta, kun $f \in \mathcal{T}(\mathcal{H})'$, pätee $f = f_A$ jollain $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Duaali $\mathcal{T}(\mathcal{H})'$ on homeomorfinen Banachin avaruudelle $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$, missä $\|\cdot\|$ on tavallinen rajoitettujen operaattoreiden operaattorinormi.

Olkoon affini kuvaus $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto p_T$ kuten yllä, ja määritellämmekään kullakin $B \in \mathcal{A}$ affini kuvaus $f_B : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$, $f_B(T) = p_T(B)$ kaikilla $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, jonka laajennamme duaalin $\mathcal{T}(\mathcal{H})'$ alkioksi, jota merkitsemme samalla symbolilla. Edellisen lauseen nojalla kullakin $B \in \mathcal{A}$ on olemassa rajoitettu operaattori $M(B)$, jolla $p_T(B) = f_B(T) = \text{tr}[TM(B)]$ kaikilla $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Vaatimalla lisäksi, että p_T on mitallisen avaruuden (Ω, \mathcal{A}) todennäköisyysmitta kaikilla $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, saadaan suoraviivaisesti seuraava tulos, joka oleellisesti toteaa, että kaikki mitalliselle avaruudelle (Ω, \mathcal{A}) rakentuvat suureet, eli affiinit avaruuden (Ω, \mathcal{A}) todennäköisyysmitta-arvoiset kuvaukset $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto p_T$, saadaan jostakin semispektraalimitasta $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$.

Lause 1.9 *Olkoon affini kuvaus $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto p_T$ sellainen, että p_T on mitallisen avaruuden (Ω, \mathcal{A}) todennäköisyysmitta kullakin $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. On olemassa yksikäsitteinen semispektraalimita $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$, jolla*

$$p_T(B) = \text{tr}[TM(B)]$$

kaikilla $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja $B \in \mathcal{A}$.

Mikä sitten on suureiden, eli semispektraalimittojen, ja itse mittausten välinen yhteys? Olemme jo esitelleet mitat p_T^M kullakin $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ suureen M mittauksessa saatavina mitaustulosjakaumina, joten on oleellista kuvata itse mittaustapahtuma kvanttimekaanisesti. Kvanttimekaniikan mittausteoriassa suure määräytyy siihen liittyvän mittausjärjestelyn kautta; tämä yhteys suureen ja mittausten välillä johtaa jälleen siihen, että voimme mieltää suureet semispektraalimittoina, jollaisina olemme ne jo yllä määritelleet. Tällöin kaava 4 antaa suureeseen liittyvät mittaustulostodennäköisyydet kullekin systeemin tilalle.

Tutkikaamme fysikaalista systeemiä \mathcal{S} , jota kuvaa d -ulotteinen ($d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) Hilbertin avaruus \mathcal{H} . Pyrimme mittaamaan systeemin jotain ominaisuutta (suuretta) M , johon liittyy mitallinen arvoavaruus (Ω, \mathcal{A}) . Aina kun suoritamme systeemin mittauksen systeemi kytketään johonkin mittalaitteeseen \mathcal{M} , johon liittyvää Hilbertin avaruutta merkitsemme symbolilla \mathcal{K} . Olettakaamme, että mittalaite on preparoitu tilaan $T_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$. Systeemin ja mittalaitteen yhdistettä $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ kuvataan Hilbertin avaruudella $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Jos tutkittava systeemi on mittaushetkellä tilassa $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, on yhdistetty systeemi tällöin

tilassa $T \otimes T_0$. Mittauksen kannalta oleellinen tieto siirretään seuraavaksi systeemistä \mathcal{S} mittalaitteeseen. Tämä tapahtuu siten, että systeemi \mathcal{S} ja mittalaite \mathcal{M} fysikaalisesti vuorovaikuttavat keskenään. Yksinkertaisuuden vuoksi oletamme, että vuorovaikutusta kuvaa unitaarioperaattori $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, jolloin vuorovaikutus muuntaa yhdistetyn systeemin tilaan $U(T \otimes T_0)U^*$.

Oletamme, että mittalaitteella on jokin suoraan mitattava ominaisuus, osoitinsuure P , jonka voi suoraan lukea esimerkiksi viisarilta tai mitta-asteikolta.⁶ Oletamme, että osoitinsuureen P arvoavaruus on mitallinen avaruus (Ω, \mathcal{A}) , joka on siis itse mittauksen arvoavaruus. Oletamme, että osoitinsuure voidaan mieltää semispektraalimitana $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{K})$ ja että siihen liittyvät todennäköisyydet saadaan kaavan 4 mukaisesti. Määrittelemme mittauksen nelikkönä $\mathfrak{M} = (\mathcal{K}, T_0, U, P)$, joka sisältää mittalaitteeseen liittyvän Hilbertin avaruuden \mathcal{K} , mittalaitteen alkutilan T_0 , mittausvuorovaikutuksen U ja osoitinsuureen P . Mittauksen tuottama mittaustulosten todennäköisyysjakauma (-mitta) systeemin tilassa T on muotoa

$$p_T^{\mathfrak{M}}(B) = \text{tr}[U(T \otimes T_0)U^*(I \otimes P(B))], \quad B \in \mathcal{A}. \quad (6)$$

Mittaus $\mathfrak{M} = (\mathcal{K}, T_0, U, P)$ määrää kullekin $B \in \mathcal{A}$ systeemin alkutilan muunnoksen $\mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}} : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$,

$$\mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}}(T) = \text{tr}_{\mathcal{K}}[U(T \otimes T_0)U^*(I \otimes P(B))]. \quad (7)$$

Nämä kuvaukset ovat affineja ja ne voidaan laajentaa koko jälkiluokkaoperaattorien joukon $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ lineaarikuvauksiksi. Merkitsemme tätä laajennusta samalla symbolilla $\mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}}$. Operaattorin $\mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}}(T)$ voi tulkita normittamattomaksi systeemin \mathcal{S} lopputilaksi sillä ehdolla, että mittauksen \mathfrak{M} jälkeen osoittimelta luetaan tulos joukosta B . Nämä kuvaukset $\mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}}$, $B \in \mathcal{A}$, ovat esimerkkejä niinsanotuista *operaatioista*.

Määritelmä 1.2 *Lineaarikuvausta $\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$, jolla $\Phi(T) \geq 0$ kaikilla positiivisilla $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja*

$$0 \leq \text{tr}[\Phi(T)] \leq 1$$

kaikilla $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, kutsutaan Schrödinger-operaatioksi tai S-operaatioksi.

Kun Φ on S-operaatio, voidaan sille lauseen 1.8 mielessä määritellä adjungaatti (transpoosi) $\Phi^* : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kaavalla

$$\text{tr}[T\Phi^*(A)] = \text{tr}[\Phi(T)A]$$

⁶Eräs ilmeinen osoitinsuureta koskeva ongelma nousee kuitenkin esiin: jotta mittaustulos voidaan lukea osoittimelta, olisi osoitinsuureen oltava mittalaitteen lopputilan $\text{tr}_{\mathcal{K}}[U(T \otimes T_0)U^*]$ objektiivinen suure kaikilla $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Tämä tuottaa ongelmia tavanomaisen Hilbertin avaruus-formalismien näkökulmasta, ja onkin ehdotettu, että osa mittauslaitteen toiminnasta kuten signaalinvahventamisesta olisi selitettävä klassisesti. Tätä problematiikkaa on käsitelty tarkemmin lähteessä [9].

kaikilla $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Selvästi Φ^* on lineaarinen ja se on positiivinen, eli $\Phi^*(A) \geq O$, kun $A \geq O$. Sanomme, että positiivinen lineaarikuvaus $\Psi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on *normaali*, kun kaikilla nousevilla, ylhäältä rajoitetuilla jonoilla $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ (siis on olemassa $B \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$, jolla $A_n \leq B$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja $A_n \geq A_m$, kun $n \geq m$) on voimassa $\sup_{n \in \mathbb{N}} \Psi(A_n) = \Psi(A)$, kun $\sup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$. Tässä $A \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ on operaattori, jolle pätee $A \geq A_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja jos $A' \geq A_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on oltava $A' \geq A$. Kun Φ on S-operaatio, on sen adjungaatti Φ^* esimerkki ns. *Heisenberg-operaatioista*.

Määritelmä 1.3 *Normaalia, positiivista lineaarikuvausta $\Psi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sanotaan Heisenberg-operaatioksi tai H-operaatioksi, jos*

$$O \leq \Psi(I) \leq I$$

Kaikki H-operaatiot saadaan ilmaistua S-operaatioiden adjungaatteina [2], [3]:

Lause 1.10 *Olkoon Φ S-operaatio. Tällöin Φ^* on H-operaatio. Jos taas Ψ on H-operaatio, on olemassa S-operaatio Φ , jolla $\Psi = \Phi^*$. Tämä vastaavuus S- ja H-operaatioiden välillä on bijektiivinen.*

Tämän vastaavuuden takia puhutaankin yleensä vain operaatioista, joilla on Schrödingerin ja Heisenbergin esitykset. Tarvitsemme vielä lineaarikuvausten $\Psi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ täyspositiivisuuden käsitettä.

Määritelmä 1.4 *Olkoon $\Psi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ lineaarikuvaus ja määritelkäämme kullakin $n \in \mathbb{N}$ lineaarikuvaus $\Psi_n : \mathcal{M}_n(\mathcal{L}(\mathcal{H})) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ (tässä $\mathcal{M}_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ on matriisialgebra yli operaattorialgebran $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) asettamalla kaikille $(A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$*

$$\Psi_n((A_{i,j})_{i,j=1}^n) = (\Psi(A_{i,j}))_{i,j=1}^n.$$

Sanotaan, että lineaarikuvaus $\Psi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on n-positiivinen, jos $\Psi_n(\mathfrak{S}^ \mathfrak{S}) \geq O$ (matriisimielessä) kaikilla $\mathfrak{S} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Lisäksi Ψ on täyspositiivinen, jos se on n-positiivinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

Jatkossa sanomme, että S-operaatio Φ on täyspositiivinen silloin, kun sen adjungaatti Φ^* on täyspositiivinen. S-operaatioiden täyspositiivisuuden voi karakterisoida Stinespringin dilaatiolauseesta seuraavalla *Kraussin hajotelmalla* [2], [3], [10]:

Lause 1.11 *S-operaatio Φ on täyspositiivinen tarkalleen silloin, kun on olemassa numeroituva operaattoriparvi $\{A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid i \in I\}$, jolla*

$$\Phi(T) = \sum_{i \in I} A_i T A_i^*, \quad T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}), \quad (8)$$

missä sarja suppenee jälkinormin suhteen. Kaavan 8 mukaista hajotelmaa kutsutaan usein täyspositiivisen operaation Φ Kraussin hajotelmaksi.

Kuten olemme edellä havainneet, mittaus \mathfrak{M} liittyy kuhunkin $B \in \mathcal{A}$ operaation $\mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}}$. Huomaamme, että tällainen operaatioarvoinen kuvaus (mitta) $B \mapsto \mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}}$ on esimerkki ns. *instrumentista*.

Määritelmä 1.5 *Olkoon (Ω, \mathcal{A}) mitallinen avaruus. S -operaatioarvoinen kuvaus $\mathcal{A} \ni B \mapsto \mathcal{J}_B$ on Schrödinger-instrumentti eli S -instrumentti, jos*

- $\text{tr}[\mathcal{J}_\Omega(T)] = \text{tr}[T]$ kaikilla $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$,
- $\mathcal{J}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_{B_n}(T)$ kaikilla erillisillä jonoilla $\{B_n \in \mathcal{A} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ja $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, missä sarja suppenee jälkinormin suhteen.

Jos $B \mapsto \mathcal{J}_B$ on S -instrumentti, kutsutaan kuvausta $B \mapsto \mathcal{J}_B^*$ vastaavaksi Heisenberg-instrumentiksi eli H -instrumentiksi. Lisäksi S -instrumentti on täyspositiivinen, jos \mathcal{J}_B^* on täyspositiivinen kaikilla $B \in \mathcal{A}$.

Huomaamme, että mittausjärjestely \mathfrak{M} synnyttää ylläesitellyllä tavalla instrumentin $\mathcal{A} \ni B \mapsto \mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}}$, jonka voi siis mieltää joko S - tai H -instrumenttina. On huomattava, että sama instrumentti saadaan useista eri mittauksista.. Suoralla laskulla huomamme, että mittauksien instrumenttien arvoilla (operaatioilla) $\mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}}$ on ominaisuus 8 kaikilla $B \in \mathcal{A}$, eli mittauksien instrumentit ovat täyspositiivisiä.

Mittaus $\mathfrak{M} = (\mathcal{K}, T_0, U, P)$ määrittelee semispektraalimitan M kun kaikille $B \in \mathcal{A}$ asetetaan

$$M(B) = \mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}*}(I).$$

Saamme kaavan 6 mukaiseksi systeemin \mathcal{S} tilaan $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ liittyväksi todennäköisyysmittaksi

$$p_T^{\mathfrak{M}}(B) = \text{tr}[TM(B)] = p_T^M(B), \quad B \in \mathcal{A},$$

eli mittaus \mathfrak{M} tuottaa tämän nimenomaisen suureen M mittaustulosjakaumat. Seuraavaksi toteamme, että jokainen semispektraalimita $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ voidaan realisoida ylläesitellyllä tavalla jollain mittausjärjestelyllä \mathfrak{M} . Olkoon $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ semispektraalimita, $\{B_n \in \mathcal{A} \mid n \in \mathbb{N}\}$ jokin mittaustulosavaruuksien Ω erillisistä mitallisista joukoista koostuva partitio ja $\{T_n \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ jono jäljen 1 positiivisia operaattoreita. Määritelmämme kullakin $B \in \mathcal{A}$ ja $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$

$$\mathcal{J}_B(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{tr}[TM(B_n \cap B)]T_n,$$

jolloin huomaamme, että kuvaus $B \mapsto \mathcal{J}_B$ on instrumentti ja siihen liittyvä suure on $B \mapsto \mathcal{J}_B^*(I) = M(B)$. Olkoon $\{\varphi_k \in \mathcal{H}\}_{k=1}^d$ ortonormaalikanta. Määrittelemällä kaikille

$k \in \mathbb{N}$, $l, m \in \mathbb{N}_d$ ja $B \in \mathcal{A}$ operaattori $A_{k,l,m}^{(B)} = \sqrt{T_k}|\varphi_l\rangle\langle\varphi_m|\sqrt{M(B_k \cap B)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, huomaamme, että voimme kirjoittaa

$$\mathcal{J}_B(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l, m \in \mathbb{N}_d} A_{k,l,m}^{(B)} T A_{k,l,m}^{(B)*}.$$

Jokainen semispektraalimitta $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ saadaan siis jostain täyspositiivisesta instrumentista $B \mapsto \mathcal{J}_B$, eli $M(B) = \mathcal{J}_B^*(I)$ kaikilla $B \in \mathcal{A}$.

Seuraava lause toteaa, että jokainen semispektraalimitta saadaan jostain mittausjärjestelystä [9], [11].

Lause 1.12 *Jokaisen täyspositiivisen instrumentin $\mathcal{A} \ni B \mapsto \mathcal{J}_B$ voi realisoida jollakin mittauksella $\mathfrak{M} = (\mathcal{K}, T_0, U, P)$, eli $\mathcal{J}_B = \mathcal{J}_B^{\mathfrak{M}}$ kaikilla $B \in \mathcal{A}$. Mittalaitteen alkutilaksi T_0 voidaan aina valita yksiulotteinen projektio, eli $T_0 = P[\varphi_0]$ jollain $\varphi_0 \in \mathcal{K}$, ja osoitinsuureksi P voidaan aina valita spektraalimitta. Toisaalta, kuten yllä on näytetty, jokainen semispektraalimitta saadaan jostain täyspositiivisesta instrumentista. Jokaisen semispektraalimitan $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ voi siis realisoida jollain mittausjärjestelyllä $\mathfrak{M} = (\mathcal{K}, T_0, U, P)$, eli*

$$\mathrm{tr}[TM(B)] = \mathrm{tr}\left[U(T \otimes T_0)U^*(I \otimes P(B))\right]$$

kaikilla $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja $B \in \mathcal{A}$. Voimme jälleen yllä valita $T_0 = P[\varphi_0]$, jollain $\varphi_0 \in \mathcal{K}$, ja $P \in \Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{K})$.

Ylläoleva lause sanoo käytännössä, että jokaisen kvanttimekaanisen suureen voi mitata jollain mittausjärjestelyllä. Lause 1.12 on erityinen muotoilu ns. Naimarkin dilaatiolauseelle, jonka esittelemme osiossa 2.4 lauseena 2.4.

Huomattakoon, että mittausdilaation $\mathfrak{M} = (\mathcal{K}, T_0, U, P)$ voi määritellä yleisemminkin. Mittausvuorovaikutuksen ei tarvitse olla unitaarista muotoa

$$T \otimes T_0 \mapsto U(T \otimes T_0)U^*,$$

vaan se voi olla yleisempikin; riittää olettaa, että mittauksessa \mathfrak{M} alkutila muuttuu yleisemmin $T \otimes T_0 \mapsto \Phi(T \otimes T_0) \in \mathcal{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, missä Φ on joukon $\mathcal{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ jäljen säilyttävä S-operaatio. On realistista olettaa, että mitattavan systeemin \mathcal{S} ja mittauslaitteen \mathcal{M} lisäksi on tarkasteltava laajempaa ympäristöä \mathcal{E} , jonka kanssa yhdistetty systeemi $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ vuorovaikuttaa. Tällöin operaatio Φ voi edustaa osasysteemin $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ reduoitua dynamiikkaa. Toisinaan on myös hyödyllistä sallia, että osoitinsuureen arvoavaruus $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ ei ole sama, kuin mitattavan suureen arvoavaruus (Ω, \mathcal{A}) . Oletamme vain, että on olemassa mitallinen funktio, ns. *osoitinfunktio*, $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$. Yleisemmin mittausjärjestelyllä $\mathfrak{M} = (\mathcal{K}, T_0, \Phi, P, f)$, missä $\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ on jäljen säilyttävä operaatio ja

osoitinsuure P ja -funktio f ovat kuten edellä, mitattavalle suurelle $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ pätee siis

$$p_T^M(B) = \text{tr} \left[\Phi(T \otimes T_0) I \otimes P(f^{-1}(B)) \right]$$

kaikilla $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja $B \in \mathcal{A}$.

Esittelemme osion lopuksi erään luokan mittauksia, ns. *standardimallin mittaukset*. Olettakaamme, että systeemiä \mathcal{S} kuvaa Hilbertin avaruus \mathcal{H} ja A_1 on itseadjungoitu operaattori avaruudessa \mathcal{H} sekä mittalaitetta \mathcal{M} kuvaa avaruus \mathcal{K} ja A_2 on itseadjungoitu operaattori avaruudessa \mathcal{K} . Olkoon operaattoriin A liittyvä spektraalimitta $P_1 \in \Sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{H})$ ja operaattoriin A_2 liittyvä spektraalimitta $P_2 \in \Sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{K})$. Seuraavaksi konstruoinme suureen P_1 ns. *standardimittauksen*, joskaan mitatuksi ei varsinaisesti tule suure P_1 .

Olkoon mittausvuorovaikutus unitaarinen, ja olettakaamme, että sen välittää operaattori

$$U = e^{i\lambda A_1 \otimes A_2} = \int_{\mathbb{R}} dP_1(x) \otimes e^{i\lambda x A_2},$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$ on jokin kytkentäparametri. Olettakaamme lisäksi, että mittalaite on puhtaassa tilassa ψ , ja osoitinsuureena on $P \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{K})$, jonka ei tarvitse olla spektraalimitta. Suora lasku näyttää, että kun osoitinfunktiona käytetään kuvausta $\mathbb{R} \ni x \mapsto x/\lambda$, mitatuksi tulee nyt suure

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto M(B) = \int_{\mathbb{R}} p_{\psi_{\lambda x}}^P(\lambda B) dP_1(x),$$

missä on merkitty jo tutulla tavalla $p_{\psi}^P(B) = \langle \psi | P(B) \psi \rangle$ kaikilla $\psi \in \mathcal{K}$ ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja lisäksi $\psi_{\lambda x} := e^{i\lambda x A_2} \psi$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 1.1 Erityisen kiinnostava ylläesitelty malli on silloin, kun on voimassa kovarianssiehto

$$e^{-i\lambda x A_2} P(\lambda B) e^{i\lambda x A_2} = P(\lambda(B - x)) \quad (9)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tästä on esimerkkinä Hilbertin avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ paikan standardimittaukset. Olkoon yllä $A = Q$, joka operoi tiheästi asettamalla

$$(Q\varphi)(x) := x\varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

jolloin P_1 on *kanoninen paikkasuure* $M_{\mathcal{X}}$,

$$M_{\mathcal{X}}(B)\varphi = \chi_B \varphi$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Oletamme, että myös mittalaitetta kuvaa Hilbertin avaruus $L^2(\mathbb{R})$, ja operaattoriksi A_2 asetamme ”liikemääräoperaattorin” P_0 , joka operoi tiheästi kuten differentiaalioperaattori

$$P_0\varphi := -i\varphi', \quad (11)$$

jolloin $P_2 = \hat{M}_\varkappa$, $\hat{M}_\varkappa(B) = \mathfrak{F}^* M_\varkappa(B) \mathfrak{F}$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, missä *Fourier-Plancherel-operaattori* \mathfrak{F} ja sen adjungaatti on määritelty kaikille $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$

$$(\mathfrak{F}\varphi)(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \varphi(x) dx \quad (12)$$

$$(\mathfrak{F}^*\varphi)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} \varphi(p) dp. \quad (13)$$

Osoitinsuureksi valitsemme kanonisen paikkasuureen M_\varkappa , jolloin kovarianssiehto 9 on voimassa. Tällä mittausjärjestelyllä tulee mitatuksi eräänlainen sumennettu paikkasuure $M_p \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$,

$$M_p(B) := (\chi_B * p)(M_\varkappa) = \int_{\mathbb{R}} (\chi_B * p)(x) dM_\varkappa(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_B p(x-y) dy dM_\varkappa(x) \quad (14)$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, missä p on todennäköisyystiheys $\mathbb{R} \ni x \mapsto p(x) = \lambda |\psi(-\lambda x)|^2$.

2 Konveksisuus kvanttimekaniikassa

Tässä luvussa esittelemme lyhyesti konveksisuuden käsitteen ja tutkimme, miten konveksisuus ilmenee kvanttimekaniikassa. Johdamme myös joitakin kvanttiteorian konvekseihin rakenteisiin liittyviä perustuloksia ja esittelemme joitakin näiden tulosten fysikaalisia merkityksiä.

2.1 Konveksisuuden perusteita

Reaalisen tai kompleksisen vektoriavaruuden \mathcal{V} osajoukkoa K kutsutaan *konveksiksi*, jos

$$tx + (1-t)y \in K$$

kaikilla $x, y \in K$ ja $t \in [0, 1]$. Huomaamme välittömästi, että muun muassa edellisessä osiossa esitellyt joukot $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ ovat konvekseja. Semispektraalimittojen joukko $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ on niinkään konvekseksi. Myös Schrödinger/Heisenberg-operaatiot ja -instrumentit muodostavat konveksin joukon. Sanomme, että konveksin joukon K osajoukko F on *ekstreemi* tai *tahko*, jos se on sekä konveksikombinaatioiden että konveksihajotelmien suhteen suljettu. Ensimmäinen ehto merkitsee sitä, että F on itsekin konvekseksi joukko ja jälkimmäinen ehto sitä, että jos $x = ty + (1-t)z \in F$ joillakin $y, z \in K$ ja $0 \leq t \leq 1$, niin myös $y, z \in F$. Konveksin joukon *ääripisteet* eli *ekstremaalit* ovat ne joukon K alkio x , joille

$$x = ty + (1-t)z, \quad t \in (0, 1), \quad y, z \in K$$

vain jos $x = y = z$. Merkitsemme joukon K ääripisteiden joukkoa symbolilla $\text{Ext}(K)$. Selvästikin yksiöt $\{x\}$, $x \in \text{Ext}(K)$, ovat joukon K ekstremaalaisia osajoukkoja. Sanomme

lisäksi, että joukon $B \subset \mathcal{V}$ *konvekssi verho* $\text{con}(B)$ on joukon B sisältävien konveksien joukkojen leikkaus. Kun joukot K ja L ovat konvekseja, sanomme kuvausta $f : K \rightarrow L$ *affiiniksi*, kun $f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$ kaikilla $x, y \in K$ ja $0 \leq t \leq 1$. Joissakin tilanteissa vektoriavaruuden \mathcal{V} konvekssi osajoukko K määräytyy tarkalleen ääripisteistään. Seuraavaksi esittelemme tähän problematiikkaan liittyviä tuloksia.

Kreinin-Milmanin lause toteaa, että lokaalisti konveksien topologisten vektoriavaruuksien kompaktit konveksit osajoukot voidaan lausua ääripisteidensä konveksin verhon sulkeumana. Kun vektoriavaruus \mathcal{V} yli kunnan \mathbb{K} , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on varustettu topologialla, jonka suhteen kuvaukset $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathcal{V}$ ja $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in \mathcal{V}$ ovat jatkuvia (lähtöjoukoissa kanoniset tulotopologiat), sanotaan avaruutta \mathcal{V} *topologiseksi vektoriavaruudeksi* (TVA). Jos lisäksi topologisen vektoriavaruuden \mathcal{V} origolla on konvekseista joukoista koostuva ympäristökanta, kutsutaan avaruutta \mathcal{V} lokaalisti konveksiksi topologiseksi vektoriavaruudeksi (LKA). Jos \mathcal{V} on vektoriavaruus ja kuvaus $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ on sellainen, että

(a) $p(x) \geq 0$,

(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ja

(c) $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$

kaikilla $x, y \in \mathcal{V}$ ja $\alpha \in \mathbb{C}$, sanotaan, että p on *seminormi*; p on siis positiividefiniittisyyttä vaille normi. Jos vektoriavaruudessa \mathcal{V} on määritelty perhe \mathcal{P} seminormeja, voimme varustaa avaruuden \mathcal{V} topologialla $\tau(\mathcal{P})$, joka on karkein topologia, jonka suhteen jokainen seminormi $p \in \mathcal{P}$ on jatkuva. Topologinen avaruus $(\mathcal{V}, \tau(\mathcal{P}))$ on LKA. Toisaalta, jos (\mathcal{V}, τ) on LKA, on olemassa perhe \mathcal{P} avaruudessa \mathcal{V} määriteltyjä seminormeja, jolla $\tau = \tau(\mathcal{P})$. Kun \mathcal{V} on LKA, takaa Hahnin-Banachin lause sen, että topologinen duaali \mathcal{V}' erottaa avaruuden \mathcal{V} pisteet, eli aina, kun $x, y \in \mathcal{V}$, on olemassa $f \in \mathcal{V}'$, jolla $f(x) \neq f(y)$. Voimme tässä valita funktion f myös reaaliarvoiseksi ja reaalilineaariseksi. Seuraava lause on varsin suora seuraus Hahnin-Banachin lauseesta ja Zornin lemmasta (valinta-aksioomasta).

Lause 2.1 (Krein-Milman) *Olkoon \mathcal{V} LKA ja $K \subset \mathcal{V}$ konvekssi ja kompakti. Ääripistejoukko $\text{Ext}(K)$ on epätyhjä. Lisäksi joukko K yhtyy ääripistejoukkonsa konveksin verhon $\text{con}(\text{Ext}(K))$ sulkeumaan.*

Tämä tulos takaa usein sen, että lokaalisti konveksien vektoriavaruuksien konveksien ja kompaktien osajoukkojen K alkioita voidaan arvioida jossain mielessä ääripistejoukon $\text{Ext}(K)$ alkiodien konveksikehitelminä. Haluttu lokaalisti konvekssi topologia osoittautuu usein jonkinlaiseksi pisteittäisen konvergenssin topologiaksi, kuten tulemme seuraavissa osioissa näkemään.

2.2 Efekti- ja tilajoukon konvekssi rakenne

Olkoon \mathcal{S} fysikaalinen systeemi, jota kuvaamme Hilbertin avaruudella \mathcal{H} . Tilajoukko $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja efektijoukko $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ ovat konvekseja. Tässä luvussa karakterisoimme näiden operaattorijoukkojen ääripisteet. Seuraava lause on peräisin lähteistä [3] (Lemma 2.3) ja [12] (Th. 6.6.).

Lause 2.2 *Efektiooperaattorien joukon $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ ääripistejoukko on projektiojoukko $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, ts.*

$$\text{Ext}(\mathcal{E}(\mathcal{H})) = \mathcal{P}(\mathcal{H}).$$

Todistus: Olettakaamme, että $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, $E_1, E_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ sekä $t \in (0, 1)$ ja

$$P = tE_1 + (1 - t)E_2. \quad (15)$$

Merkitään $\mathcal{M} := P(\mathcal{H})$, jolloin siis $P = P_{\mathcal{M}}$. Koska operaattorit E_1 ja E_2 ovat efekteinä positiivisia, huomaamme välittömästi, että $\langle \varphi | E_1 \varphi \rangle = \langle \varphi | E_2 \varphi \rangle = 0$ kaikilla aliavaruuden \mathcal{M} ortogonaalikomplementin \mathcal{M}^\perp alkiolla φ . Tällöin siis saadaan $\sqrt{E_1} \varphi = \sqrt{E_2} \varphi = 0$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{M}^\perp$, mistä seuraa, että $E_1 \varphi = E_2 \varphi = 0$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{M}^\perp$. Toisaalta yhtälön 15 voi myös kirjoittaa muodossa

$$P^\perp := I - P = t\tilde{E}_1 + (1 - t)\tilde{E}_2,$$

missä $\tilde{E}_1 := I - E_1$, $\tilde{E}_2 := I - E_2$ ovat efektejä. Lisäksi $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ ja $P^\perp(\mathcal{H}) = \mathcal{M}^\perp$. Samoin kuin edellä saadaan nytkin $\tilde{E}_1 \psi = \tilde{E}_2 \psi = 0$ kaikilla $\psi \in \mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$, eli $E_1 \psi = E_2 \psi = \psi$ kaikilla $\psi \in \mathcal{M}$. Koska $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, täytyy olla $E_1 = E_2 = P$. Näinollen $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \subset \text{Ext}(\mathcal{E}(\mathcal{H}))$.

Olkoon sitten $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ ja $E \notin \mathcal{P}(\mathcal{H})$, jolloin siis operaattorin E spektristä $\sigma(E)$ löytyy luku $\lambda \in (0, 1)$. Tällöin voidaan valita jatkuva funktio⁷ $f : \sigma(E) \rightarrow \mathbb{R}$, jolle

$$0 \leq x \pm f(x) \leq 1, \quad f(\lambda) \neq 0 \quad \forall x \in \sigma(E).$$

Operaattorit $E \pm f(E)$ ovat efektejä ja poikkeavat operaattorista E . Voimme siis kirjoittaa operaattorin E konveksikombinaationa efekteistä:

$$E = \frac{1}{2}(E + f(E)) + \frac{1}{2}(E - f(E)).$$

Ääripisteiden joukko on näinollen tarkalleen projektioiden joukko. \square

⁷Voisimme tyytyä myös siihen, että $f : \sigma(E) \rightarrow \mathbb{R}$ on Borel-mitallinen eli mitallinen σ -algebran $\mathcal{B}(\sigma(E))$ suhteen.

Kahden efektin $E_1, E_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ konveksikombinaatio $tE_1 + (1-t)E_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$, $0 < t < 1$ on efekti, jonka edustaman ominaisuuden mittausta voidaan suorittaa yhdistelemällä efekteihin E_1 ja E_2 liittyviä mittauksia esimerkiksi suorittamalla efektiin E_1 liittyvää rekisteröintimenetelmää osuus t mittaustajasta ja käyttämällä lopun mittaustajasta efektiin E_2 liittyvää menetelmää. Toinen tapa realisoida efekti $tE_1 + (1-t)E_2$ on käyttää mittalaitetta, joka suorittaa efekteihin E_1 ja E_2 liittyviä rekisteröintejä satunnaisesti painokerroksilla t ja vastaavasti $1-t$. Ne efektit, joiden ilmaisemia systeemin ominaisuuksia ei voi mitata yhdistelemällä toisistaan eroavien fysikaalisten ominaisuuksien mittauksia ovat ylläolevan lauseen mukaan tarkalleen projektio-operaattorit. Projektioilla on muitakin optimaalisuusominaisuuksia muihin efekteihin nähden, joita selvitämme seuraavaksi.

Olkoon $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Merkitsemme tällöin

$$\mathcal{E}_0(\mathcal{D}) := \{E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) \mid \text{tr}[TE] = 0 \text{ kaikilla } T \in \mathcal{D}\}.$$

Ludwigin teorian mukaan [12] jokaisella $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$ joukolla $\mathcal{E}_0(\mathcal{D})$ on operaattorien osittaisen järjestyksen suhteen maksimaalinen alkio, ts. alkio $P \in \mathcal{E}_0(\mathcal{D})$, jolla $F \leq P$ kaikilla $F \in \mathcal{E}_0(\mathcal{D})$. Näitä efektejä kutsutaan *päätösefekteiksi*, ja niiden joukkoa merkitsemme symbolilla \mathcal{P} . Joukon $\mathcal{E}_0(\mathcal{D})$ määräämä päätösefekti on siis joukon $\mathcal{E}_0(\mathcal{D})$ ”herkin efekti” siinä mielessä, että $\text{tr}[TP] \geq \text{tr}[TF]$ kaikilla $F \in \mathcal{E}_0(\mathcal{D})$, eli päätösefekti P mittaa muita joukon $\mathcal{E}_0(\mathcal{D})$ efektejä herkemmin systeemin muutoksia. Toisaalta niiden $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ joukko, joilla $\text{tr}[TE] = 0$ kaikilla $E \in \mathcal{E}_0(\mathcal{D})$, on tilajoukon $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ suljettu ekstremaalinen joukko eli tahko, joka sisältää joukon \mathcal{D} . Tilajoukon suljettujen tahkojen joukolla on osittainen järjestys, joukkojen sisältymisrelaatio. Edelleen lähteen [12] (Th. 6.2, Th. 6.6.) mukaan päätösefektien ja tilajoukon suljettujen tahkojen välillä on järjestyksen säilyttävä isomorfismi. Päätösefektien joukko \mathcal{P} on tarkalleen projektio-operaattoreiden joukko $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, eli projektiot ovat edelläkuvatussa mielessä herkimpiä efektejä. Lauseen 2.2 tulos heijastelee tätä projektioiden optimaalisuutta systeemin ominaisuuksia tarkimmin mitaavina efekteinä.

Huomaamme yksinkertaisella tarkastelulla, että efektijoukko $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ sisältyy operaattorinormin määräämään yksikköpalloon $\{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \|A\| \leq 1\}$, joka on kompakti heikon operaattoritopologian suhteen; tämä on suora seuraus Tihonovin ja Banachin-Alaogĭun lauseista, ja todistus on oleellisesti sama kuin tuonnempana lauseen 2.7 todistus. Huomaamme myös, että

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{H}} \{E \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \langle \varphi | E \varphi \rangle \geq 0\} \cap \bigcap_{\psi \in \mathcal{H}} \{F \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \langle \psi | F \psi \rangle \leq \|\psi\|^2\}.$$

Koska sijoituskuvaukset $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \langle \varphi | A \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{H}$, ovat jatkuvia heikon operaattoritopologian suhteen, huomaamme, että $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu. Koska efektijoukko sisältyy normin mukaiseen yksikköpalloon, joka on heikosti kompakti,

on myös efektien joukko heikosti kompakti. Voimme nyt soveltaa lausetta 2.1, sillä heikko operaattoritopologia on tunnetusti lokaalisti konvekksi ja sen generoivat seminormit $p_{\varphi,\psi}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, joilla $p_{\varphi,\psi}(A) = |\langle \varphi | A \psi \rangle|$ kaikilla $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Effektijoukko yhtyy siis projektioiden joukon konveksin verhon sulkeumaan. Tämä merkitsee sitä, että kutakin $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ ja $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa ei negatiivisten lukujen jono $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, jolla $\sum_{k \in \mathbb{N}} t_k = 1$, ja jono projektioita $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$, joilla

$$\left| \langle \varphi | E \psi \rangle - \sum_{k \in \mathbb{N}} t_k \langle \varphi | P_k \psi \rangle \right| < \varepsilon$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$.

Lause 2.2 voidaan rajoittaa tilajoukkoon korvaamalla efektijoukko $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ tilajoukolla $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{H})$; huomaamme välittömästi, että ylläolevan todistuksen alkupuoli on validi tässäkin tapauksessa, eli yksiulotteiset projektiot ovat tilajoukon ääripisteitä. Toisaalta, koska jokainen tilaoperaattori T voidaan esittää konveksina hajotelmana $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_n P[\varphi_n]$, $t_n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n = 1$, ei muita ääripisteitä olekaan. Saamme seurauksen:

Seuraus 2.1 $\text{Ext}(\mathcal{S}(\mathcal{H})) = \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{P[\varphi] \mid \varphi \in \mathcal{H}\}$, eli tilajoukon ääripistejoukko on tarkalleen yksiulotteisten projektioiden joukko.

Tilajoukon ääripisteet, puhtaat tilat, voidaan siis samaistaa yksiulotteisten aliavaruuksien $[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{H}$, kanssa, jotka voidaan samaistaa ”vektorisäteiden” $\{c\varphi \mid c \in \mathbb{C}, |c| = 1\}$, $\|\varphi\| = 1$, kanssa; näitä säteiden alkioita kutsutaan usein tilavektoreiksi ja saman säteen tilavektorit edustavat samaa puhdasta tilaa. Tilajoukko $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ on selvästi operaattorijoukon $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ heikon operaattoritopologian suhteen kompakti osajoukko, jolloin lause 2.1 pätee. Näemme tämän toisaalta suoraankin, sillä voimme antaa kunkin tilan konveksikombinaationa tai -kehitemänä puhtaista elementeistä.

Tilaoperaattoreita, jotka eivät ole yksiulotteisia projektioita, kutsutaan usein sekoitetuiksi tiloiksi. Sekoitettuja tiloja saadaan yhdistelemällä preparointeja esimerkiksi käyttämällä preparointiin laitetta, jossa esiintyy hajontaa eri preparointiproseduurien välillä. Preparointilaitte voi esimerkiksi tuottaa puhtaan tilan $P[\varphi_k]$ todennäköisyydellä $t_k \in [0, 1]$ kullakin $k \in \mathbb{N}$. Tällainen preparointi edustaa tilaa $T = \sum_{k \in \mathbb{N}} t_k P[\varphi_k]$, joka on sekoitettu tarkalleen silloin, kun joillakin $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$, vektoreiden φ_k ja φ_l määräämät vektorisäteet ovat erisuuret ja $t_k, t_l \neq 0$. Systemi voi päätyä sekoitettuun tilaan myös vuorovaikuttamalla toisen systeemin kanssa. Tyypillisesti tutkittava systemi \mathcal{S} , jota kuvaa Hilbertin avaruus \mathcal{H} , vuorovaikuttaa ympäristönsä \mathcal{E} kanssa. Kun liitämme ympäristöön \mathcal{E} Hilbertin avaruuden \mathcal{K} , kuvataan yhdistettyä systemiä $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ Hilbertin avaruudella $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Jos pidämme systemiä $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ eristettynä, voidaan sen dynamiikkaa

usein kuvata unitaarievoluutiona (vahvasti jatkuvana additiivisen reaalisuoran esityksenä) $\mathbb{R} \ni t \mapsto U(t) \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. Olettakaamme, että systeemi \mathcal{S} on aluksi puhtaassa vektoritilassa φ , ympäristö vektoritilassa ψ ja koko systeemi puhtaassa alkutilassa $\varphi \otimes \psi$. Ajassa $t > 0$ tämä tila kehittyy uudeksi puhtaaksi tilaksi $U(t)\varphi \otimes \psi$. Osasysteemien redusoidut tilat $\text{tr}_{\mathcal{K}}[P[U(t)\varphi \otimes \psi]]$ ja $\text{tr}_{\mathcal{H}}[P[U(t)\varphi \otimes \psi]]$ eivät kuitenkaan tyypillisesti ole puhtaita.

Kun systeemi on sekoitetussa tilassa $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_n P[\varphi_n]$, voisi systeemin kuvitella olevan todellisuudessa jossakin puhtaista komponenttitiloistaan $P[\varphi_n]$, $n \in \mathbb{N}$, jolloin painokerroin t_n , $n \in \mathbb{N}$, kuvaisi todennäköisyyttä, jolla systeemi on tilassa $P[\varphi_n]$. Tämä tulkinta on kuitenkin ongelmallinen, koska tällainen tilaoperaattorin $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ hajotelma ei ole yksikäsitteinen. Itseasiassa kullakin tilalla on äärettömän monta tällaista hajotelmaa [6] (osio 2.2.3), [13]. Tällainen tulkinta on ongelmallinen myös silloin, kun tilan epäpuhtaus on tulosta yllä kuvatun kaltaisesta kietoutumisesta toiseen systeemiin.

On merkillepantavaa, että ei ole olemassa yhtäkään sellaista suuretta $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$, joka olisi klassisessa mielessä objektiivinen kaikilla puhtailla tiloilla $P[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{H}$, eli $\langle \varphi | M(B) \varphi \rangle \in \{0, 1\}$. Tämä seikka erottaa kvanttiteorian klassisista statistisistä teorioista: Klassisten teorioiden tilajoukko rakentuu suoraan faasiavaruudelle Ω , joka on useimmiten muotoa \mathbb{R}^{2n} jollakin $n \in \mathbb{N}$, jolloin tilat ovat todennäköisyyksimittoja mitallisessa avaruudessa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Tämän tilajoukon ääripisteitä ovat pistemitat $\delta_\omega : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \{0, 1\}$, $\omega \in \Omega$, jolle kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\delta_\omega(B) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \omega \in B, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin kaikilla dynaamisilla suureilla eli mitallisilla funktioilla $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on määrätty arvo puhtaissa klassisissa tiloissa.⁸ Puhtailla kvanttituloilla tätä ominaisuutta ei ole; paikka- ja liikemääräjakaumat eivät riitä määräämään kvanttitilaa, ei puhtaita eikä sekoitettuja, eikä kvanttitilaa voi esittää konveksikombinaationa tai -kehitemänä klassisista deterministisistä tiloista, joissa dynaamisilla perussuureilla olisi määrätty objektiivinen arvo. Tämä tekee kvanttiteoriasta aidosti statistisen teorian, jota ei voi redusoida klassiseksi statistiseksi teoriaksi, jossa todennäköisyydet kuvaavat epätäydellistä tietoa.

Systeemin tilan puhtautta voi testata monin tavoin, esimerkiksi von Neumannin entropian $S : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, \infty)$ avulla, joka tilalla T saa arvon

$$S(T) = -\text{tr}[T \ln T] = -\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n \ln t_n,$$

kun tilalla T on hajotelma $T = \sum_{k \in \mathbb{N}} t_k P[\varphi_k]$ joillakin ei-negatiivisilla luvuilla t_k , $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k \in \mathbb{N}} t_k = 1$, ja joillakin vektoreilla φ_k , joille $\varphi_k \perp \varphi_l$ aina, kun $k \neq l$ ja $t_k, t_l >$

⁸Todennäköisyys sille, että klassiselle suurelle $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mitataan arvo joukosta $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ systeemin ollessa tilassa p (joka siis on todennäköisyyksimitto) on luku $p(f^{-1}(B))$.

0. Huomaamme välittömästi, että $S(T) = 0$ tarkalleen silloin, kun T on puhdas tila, eli yksiulotteinen projektio. Puhtaat tilat voidaan karakterisoida myös idempotentteina tilaoperaattoreina, eli $T^2 = T$, $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, vain, kun T on puhdas. Huomaamme myös, että tila $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ on epäpuhdas tarkalleen silloin, kun $\text{tr}[T^2] < 1$.

2.3 Konveksit suurejoukot

Olkoon (Ω, \mathcal{A}) mitallinen avaruus ja \mathcal{H} Hilbertin avaruus. Arvoavaruudelle (Ω, \mathcal{A}) rakentuvien suureiden (semispektraalimittojen) joukko $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ on konvekksi määrittelemällä suureiden $M_1, M_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ konveksikombinaatio $tM_1 + (1-t)M_2$, $t \in [1, 0]$, asettamalla kaikille $B \in \mathcal{A}$

$$(tM_1 + (1-t)M_2)(B) = tM_1(B) + (1-t)M_2(B). \quad (16)$$

Uusia suureita saadaan näin konveksikombinaatioina muista suureista. Suureita, joita ei saada tällaisina epätriviaaleina kombinaatioina, kutsutaan *äärisuureiksi*. Lause 2.2 antaa seuraavan tuloksen σ -algebrassa \mathcal{A} määriteltyjen suureiden joukolle $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$:

Seuraus 2.2 *Spektraalimitat $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ ovat joukon $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ ääripisteitä.*

Karakterisoimme suurejoukkojen $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ kaikki ääripisteet seuraavassa osiossa. Tulemme huomaamaan, että spektraalimitat eivät tyypillisesti ole ainoita äärisuureita.

Kaavan 16 mukaiseen kombinaatioon päädytään useilla tavoilla: Tulemme mitanneeksi kyseisen suureen määrittämällä ensin suureiden M_1 ja M_2 arvojakaumat $p_T^{M_1}$ ja $p_T^{M_2}$, $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, ja ottamalla näistä statistisen kombinaation $tp_T^{M_1} + (1-t)p_T^{M_2} = p_T^{tM_1 + (1-t)M_2}$. Päädyimme kombinaatioon 16 myös esimerkiksi suorittamalla suureeseen M_1 liittyvää mittauseduuria osuuden t kokonaismittausajasta ja lopun ajan mittaamalla suuretta M_2 . Voimme yhdistellä suureita myös yhdistelemällä niihin liittyviä mittauseduuria. Olkoon suureeseen M_1 liittyvä mittauseduuria $(\mathcal{K}, T_0, \Phi_1, P)$ (osoitinsuureella on myös arvoavaruus Ω) ja suureeseen M_2 liittyvä mittauseduuria puolestaan $(\mathcal{K}, T_0, \Phi_2, P)$. Kaavan 16 suure tulee mitattua esimerkiksi mittauseduurijärjestelyllä $(\mathcal{K}, T_0, t\Phi_1 + (1-t)\Phi_2, P)$, jossa yhdistellään mittauseduuriä Φ_1 ja Φ_2 . Voisimme yhdistellä toki myös mittalaitteiden alkutiloja tai osoitinsuureita. On kuitenkin huomattava, että näin ei-triviaalina kombinaationa saadun suureen hajotelma puhtaisiin komponentteihin tai ilmaiseminen kehitelmänä puhtaista elementeistä ei ole yksikäsitteinen kuten ei tiloillakaan; kaavan 16 mukaisen suureen voi aina ilmaista toisenlaisena kehitelmänä, jossa eivät suureet M_1 ja M_2 esiinny. Seuraavaksi tutkimme joitakin erityisiä konvekseja suureperheitä ja niiden ääripisteitä. Erityisesti tutkimme sitä, milloin $\text{Ext}(\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})) = \Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{H})$.

Esimerkki 2.1 Tutkikaamme kaksiarvoisen suureen tapausta. Voimme vapaasti valita $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Olettakaamme, että \mathcal{H} on mielivaltainen kompleksinen separoituva

Hilbertin avaruus. Voimme määrittellä suureen $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ yksikäsitteisesti valitsemalla jonkin $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ ja asettamalla $M(\{0\}) = E$, jolloin $M(\emptyset) = O$, $M(\{1\}) = I - E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ ja $M(\Omega) = M(\{0\}) + M(\{1\}) = I$. Olettakaamme nyt, että $M \notin \Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{H})$, jolloin voimme rajatta olettaa, että $M(\{0\}) := E \notin \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Tällöin lauseen 2.2 mukaan on olemassa operaattorit $E_1, E_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$, $E_1 \neq E \neq E_2$, joilla $E = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$. Voimme jälleen määrittellä uudet operaattorimitat $M_1, M_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ asettamalla $M_k(\{0\}) = E_k$, $k = 1, 2$. Huomaamme nyt välittömästi, että $M_1 \neq M \neq M_2$ ja $M = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$. Siis $M \notin \text{Ext}(\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H}))$, mistä edelleen päättelemme, että tässä tapauksessa $\text{Ext}(\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})) = \Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{H})$.

Esimerkki 2.2 Olkoon $\Omega = \{0, 1, 2\}$, $n \in \mathbb{N}$, ja \mathcal{A} joukon Ω kaikkien osajoukkojen perhe 2^Ω . Olettakaamme lisäksi, että tutkimamme Hilbertin avaruus on kaksiulotteinen, eli $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2$. Määritelläkäämme nyt yksikkövektorit $\mathbf{u}_k \in \mathbb{C}^2$, $k = 0, 1, 2$, kaavalla

$$\mathbf{u}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{\omega_3^k} \\ \omega_3^k \end{pmatrix}$$

ja projektiot P_k , $k = 0, 1, 2$,

$$P_k = P[\mathbf{u}_k] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \overline{\omega_3^k} \\ \omega_3^k & 1 \end{pmatrix},$$

missä luvut $\omega_k \in \mathbb{C}$ ovat ykkösen kolmannet juuret $\omega_3^k = e^{2ik\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$, joille pätee

$$\omega_3^0 + \omega_3^1 + \omega_3^2 = 0.$$

Määrittelemme nyt kolme arvoisen suureen $M \in \mathcal{O}(2^\Omega, \mathbb{C}^2)$ asettamalla kullekin $k = 0, 1, 2$

$$M_k := M(\{k\}) = \frac{2}{3}P_k.$$

Selvästikään M ei ole spektraalimita. Olettakaamme nyt, että $M = t^+M^+ + t^-M^-$ joillakin $t^+, t^- \in (0, 1)$, $t^+ + t^- = 1$, ja $M^\pm \in \mathcal{O}(2^\Omega, \mathbb{C}^2)$. Toteamme tästä helposti, että $M_k^\pm := M^\pm(\{k\}) \leq (1/t^\pm)M_k$ eli $M_k^\pm = p_k^\pm P_k$ joillakin $p_k^\pm \geq 0$ kullakin $k = 0, 1, 2$. Nyt ehdot $\sum_{k=0}^2 M^\pm(\{k\}) = I$ ja projektioiden P_k määritelmä johtavat vaatimaan

$$\sum_{k=0}^2 p_k^\pm \omega_k = 0, \quad \sum_{k=0}^2 p_k^\pm = 2.$$

Ensimmäinen vaatimus johtaa siihen, että $p_0^\pm = p_1^\pm = p_2^\pm$, jolloin siis $p_k^\pm = 2/3$ kaikilla $k = 0, 1, 2$. Näinollen $M^\pm = M$ ja M on äärisuure olematta kuitenkaan spektraalimita.

Olkoon systeemin Hilbertin avaruus \mathcal{H} vähintään kaksiulotteinen, ja olettaamme, että mitallinen avaruus (Ω, \mathcal{A}) on sellainen, että $\Omega_0 \subset \Omega$ ja $2^{\Omega_0} \subset \mathcal{A}$, kun merkitään $\Omega_0 := \{0, 1, 2\}$. Voimme jälleen muodostaa suureen $\tilde{M} \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$, joka on äärisuure olematta kuitenkaan spektraalimitta. Ilmaiseimme ensin avaruuden \mathcal{H} suorana summana $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \oplus \mathcal{K}$, missä \mathcal{K} on kaksiulotteisen aliavaruuden \mathbb{C}^2 ortogonaalikomplementti koko avaruudessa \mathcal{H} . Merkitsemme symbolilla $P_{\mathcal{K}}$ ortogonaaliprojektiota aliavaruudelle \mathcal{K} . Olkoon M edellisessä esimerkissä esiteltyyn kaltainen kolmiarvoinen suure avaruudessa \mathbb{C}^2 , ja määritellään diskreetti suure $\tilde{M} \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ asettamalla

$$\tilde{M}(\{j\}) = M_j \oplus O, \quad j = 0, 1, \quad \tilde{M}(\{2\}) = M_2 \oplus P_{\mathcal{K}}, \quad \tilde{M}(\Omega \setminus \Omega_0) = O.$$

Suure \tilde{M} ei selvästikään ole spektraalimitta, mutta se on kuitenkin äärisuure. Huomaamme siis, että aina, kun σ -algebra \mathcal{A} sisältää kolmen alkion potenssijoukon 2^{Ω_0} , ja $\dim(\mathcal{H}) \geq 2$, pätee $\text{Ext}(\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})) \neq \Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{H})$. Muotoilemme tämän tuloksen lauseeksi.

Lause 2.3 *Jos $\Omega = \{0, 1\}$ ja $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, ovat suurejoukon $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ ääripisteet tarkalleen spektraalimitat $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ avaruudesta \mathcal{H} riippumatta. Jos taas σ -algebra \mathcal{A} sisältää vähintään kolme eri minimaalista alkiota B_k , $k = 0, 1, 2$, eli millään $k = 0, 1, 2$ ei ole sellaista $B'_k \in \mathcal{A}$, jolla $B'_k \neq B_k$ ja $B'_k \subset B_k$ (esimerkiksi joukot B_k ovat yksiöitä), löytyy aina äärisuure $M \in \text{Ext}(\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H}))$, joka ei ole spektraalimitta.*

Olettaamme nyt, että systeemiin liittyvä Hilbertin avaruus \mathcal{H} on \mathbb{C}^2 . Voimme karakterisoida kaikki efektioperaattorit $E \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^2)$ pareilla $(a, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, joilla $\|\mathbf{u}\| \leq a \leq 2 - \|\mathbf{u}\|$, kaavalla

$$E = \frac{1}{2}(aI + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (17)$$

missä I on 2×2 -identiteettimatriisi ja $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} := u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + u_3\sigma_3$, missä on merkitty $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ja Paulin spinmatriisit ovat

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tilaoperaattorit (joita usein varsinkin äärellisulotteisissa tapauksissa kutsutaan myös *tihyematriiseiksi*) saadaan kaavasta 17 asettamalla $a = 1$, jolloin $\|\mathbf{u}\| \leq 1$. Puhtaat tilat saadaan näistä ehdolla $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Esimerkki 2.3 Tutkimme seuraavaksi erityisiä kaksiarvoisia suureita, spin-1/2-objektin spinsuureita. Olkoon mitallinen avaruus (Ω, \mathcal{A}) kuten osion alussa ja valitaan spinin mitaussuunta $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{v}\| = 1$. Yleisin muoto suuntaan \mathbf{v} mitatulle spinsuurelle $E^{\mathbf{v}}$ saadaan asettamalla $E^{\mathbf{v}}(\{1\}) =: E_+^{\mathbf{v}} = E$, missä E on kuten kaavassa 17, $\mathbf{u} \uparrow \mathbf{v}$, ja siis $E^{\mathbf{v}}(\{-1\}) =: E_-^{\mathbf{v}} = I - E$. Vaadimme lisäksi, että kääntämällä mittaussuuntaa kulman

π verran saadaan sama suure vastakkaiselle spinille, eli $E_{\pm}^{-\mathbf{v}} = E_{\mp}^{\mathbf{v}}$.⁹ Tämä lisävaatimus antaa suoraviivaisesti spinsuurelle muodon [2]

$$E_{\pm}^{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(I \pm \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (18)$$

missä $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$ ja $\|\mathbf{u}\| \leq 1$. Spektraalimitat karakterisoi taas ehto $\|\mathbf{u}\| = 1$, eli $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Jos spinsuure $E^{\mathbf{v}}$ on ylläolevaa muotoa ja oletamme, ettei se ole spektraalimitta, vaan $\|\mathbf{u}\| < 1$, voimme esittää sen epätriviaalina konveksikombinaationa $E^{\mathbf{v}} = \|\mathbf{u}\|\tilde{E}^{\mathbf{v}} + (1 - \|\mathbf{u}\|)\hat{E}^{\mathbf{v}}$ samanmuotoisista spinsuureista $\tilde{E}^{\mathbf{v}}$ ja $\hat{E}^{\mathbf{v}}$,

$$\tilde{E}_{\pm}^{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(I \pm \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad \hat{E}_{\pm}^{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}I.$$

Spinsuureiden joukon äärisuureet ovat siis tarkalleen ne spinsuureet, jotka ovat spektraalimittoja, ts. ne kaavan 18 mukaiset kaksiarvoiset suureet, joilla $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Olkoon tutkittavan systeemin Hilbertin avaruus $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Määritelmämme ryhmän \mathbb{R}^n esitykset¹⁰ U ja V avaruudessa $L^2(\mathbb{R}^n)$ asettamalla

$$(U(\mathbf{q})\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{q}), \quad (V(\mathbf{p})\varphi)(\mathbf{x}) = e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{x})}\varphi(\mathbf{x}) \quad (19)$$

kaikille $\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ja $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Yllä on merkitty $(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n p_k x_k$, kun $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Määrittelemme kuten kaavoissa 10 ja 11 kuhunkin komponenttiin $k = 1, \dots, n$ liittyvät paikka- ja liikemääräoperaattorit Q_k ja P_k tiheästi asettamalla $Q_k\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_k\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ja $P_k\varphi = -i\partial_k\varphi$ kaikilla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja kertaalleen derivoituvilla $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Voidaan osoittaa, että näin määritellyt operaattorit Q_k ja P_k , $k = 1, \dots, n$, voidaan laajentaa itseadjungoiduiksi operaattoreiksi. Esitystä U sanotaan paikkasiirroksi ja vastaavasti esitystä V liikemääräsäykseksi, sillä ne vastaavat Galilei-invariantin objektin paikan ja liikemäärän siirtoja. Määrittelemällä operaattorivektorit $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ ja $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ voimme kirjoittaa

$$U(\mathbf{q}) = e^{-i(\mathbf{q}, \mathbf{P})}, \quad V(\mathbf{p}) = e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{Q})}$$

kaikilla $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Liikemäärä siis generoi paikkasiirrot ja paikka generoi liikemääräsäykset.

Esimerkki 2.4 Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritelmämme ryhmän \mathbb{R}^{2n} Weylin faasiavaruusesitys W , $W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = e^{-i(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + i(\mathbf{p}, \mathbf{Q})} = e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{q})/2}U(\mathbf{q})V(\mathbf{p})$ kaikilla $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Weylin esitys

⁹Lisäksi symmetriasyistä on luonnollista vaatia, että rotaatioryhmän $\text{SO}(3)$ ykköskomponentin $\text{SO}(3)_0$ kaksiulotteiselle redusoitumattomalle projektiiviselle esitykselle $D^{1/2}$ ja spinsuurelle pätee spinin orientaation suhteen kovarianssiehto $D^{1/2}(R)E_{\pm}^{\mathbf{v}}D^{1/2}(R)^* = E_{\pm}^{R^{-1}\mathbf{v}}$ kaikilla $R \in \text{SO}(3)_0$. Tämä johtaa vaatimaan, että riippumatta orientaatiosta \mathbf{v} spinsuureilla $E^{\mathbf{v}}$ on samat parametrit a ja $\|\mathbf{u}\|$.

¹⁰Käsittelemme esitysteoriaa tarkemmin seuraavassa luvussa.

vastaa faasiavaruuden siirtoja. Esitys W ei ole kuitenkaan tavallinen unitaariesitys vaan *projektiivinen*, sillä tavallisen ryhmähomomorfaehdon sijaan pätee

$$W(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)W(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) = e^{\frac{i}{2}((\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2) - (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2))} W(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$$

kaikilla $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^n$. Olkoon suure $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n}), L^2(\mathbb{R}^n))$ kovariantti Weylin esityksen suhteen, eli

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{p})M(B)W(\mathbf{q}, \mathbf{p})^* = M(B + (\mathbf{q}, \mathbf{p})) \quad (20)$$

kaikilla $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$. Tämä merkitsee sitä, että M on kovariantti faasiavaruuden siirroissa. Kutsumme tällaisia suureita M *kovarianteiksi faasiavaruussuureiksi*.

Voidaan osoittaa [14], että $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n}), L^2(\mathbb{R}^n))$ on kovariantti faasiavaruussuure tarkalleen silloin, kun on olemassa positiivinen jäljen 1 operaattori S (siis $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$), joskin operaattoria S ei pidä ajatella fyysikaalisena tilana), jolle pätee heikosti

$$M(B) = M^S(B) = (2\pi)^{-n} \int_B W(\mathbf{q}, \mathbf{p})S W(\mathbf{q}, \mathbf{p})^* d^n \mathbf{q} d^n \mathbf{p} \quad (21)$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$. Havaitsemme helposti, että kaava 21 määrittelee affiinin bijektion kovarianttien faasiavaruussuureiden joukon ja operaattorijoukon $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ välille, joten faasiavaruussuureiden joukon ääripisteet ovat tarkalleen ne suureet M^S , joilla S on yksiulotteinen projektio. Voidaan myös helposti osoittaa, ettei mikään kovariantti faasiavaruussuure ole spektraalimitta. Kovarianttia faasiavaruussuuretta voi ajatella eräänlaisena faasiavaruuden lokalisointisuureena eli jonkinlaisena paikan ja liikemäärän yhteismittauksena. Itseasiassa faasiavaruussuureen M^S marginaalisuureet $M_1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \ni B \mapsto M(B \times \mathbb{R}^n)$ ja $M_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \ni B \mapsto M(\mathbb{R}^n \times B)$ ovat muotoa

$$M_j(B) = \int_B \int_{\mathbb{R}^n} p_j(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dM_j(\mathbf{y}), \quad j = 1, 2,$$

missä $M_1 = M_{\mathcal{X}}$ on kanoninen paikkasuure, jolla $M_{\mathcal{X}}(B)\varphi = \chi_B \varphi$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ja $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ja $M_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \ni B \mapsto \mathfrak{F}^* M_{\mathcal{X}}(B)\mathfrak{F}$. Lisäksi $p_1(\mathbf{q}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k |\varphi_k(-\mathbf{q})|$ ja $p_2(\mathbf{p}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k |(\mathfrak{F}\varphi_k)(-\mathbf{p})|$ kaikilla $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, kun generoiva operaattori S voidaan ilmaista hajotelmana $S = \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k P[\varphi_k]$, missä yksikkövektorit $\varphi_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, ovat keskenään ortogonaaliset ja $s_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, ja $\sum_{k \in \mathbb{N}} s_k = 1$. Marginaalisuureet ovat siis eräänlaisia sumennettuja paikka- ja liikemääräsuureita.

2.4 Äärisuureet

Tässä osiossa karakterisoimme äärisuureet koko suurejoukossa $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$, missä (Ω, \mathcal{A}) on mitallinen avaruus ja \mathcal{H} on kiinnitetty Hilbertin avaruus. Jos $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ on äärisuure,

eli ei ole olemassa eri suureita $M_1, M_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ ja $t \in (0, 1)$, joilla $M = tM_1 + (1-t)M_2$, on suure M optimaalinen siinä mielessä, että sen mittausta ei voi suorittaa yhdistelemällä oleellisesti eri suureiden mittauksia jollakin edellisessä osiossa kuvatussa mielessä. Äärisuureen mittaukseen ei siis liity redundanssia, joka syntyy erilaisten mittausten menetelmien päällekkäisyydestä.

Olkoon \mathcal{H} separoituva, d -ulotteinen avaruus, $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, jolle valitsemme jonkin ortonormaalikannan $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}_d\}$. Merkitsemme symbolilla \mathcal{V} avaruuden \mathcal{H} tiheää aliavaruutta, joka koostuu näiden kantavektoreiden äärellisistä lineaarikombinaatioista. Huomattakoon, että jos $d < \infty$, niin $\mathcal{H} = \mathcal{V}$, mutta ääretönulotteisessa tapauksessa \mathcal{V} on aito aliavaruus. Olkoon lisäksi \mathcal{V}^\times muodollisten sarjojen $\sum_{k \in \mathbb{N}_d} a^k e_k$, $a^k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_d$, avaruus, joka on avaruuden \mathcal{V} (algebraallinen) antiduaali. Merkitsemme tällöin

$$\langle a \mid \varphi \rangle := \sum_{k=1}^d \overline{a^k} \langle e_k \mid \varphi \rangle, \quad a = \sum_{k=1}^d a^k e_k \in \mathcal{V}^\times.$$

Merkitsemme lisäksi vektoreiden e_k , $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}_d$, virittämää Hilbertin avaruutta symbolilla \mathcal{H}_n .

Olkoon $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$, ja olkoon lisäksi $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ sellainen σ -äärellinen mitta, jonka suhteen jokainen kompleksimittainen $\mathcal{A} \ni B \mapsto \langle \varphi \mid M(B) \psi \rangle$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, on absoluuttisesti jatkuva. Tällaisia mittoja on, ja eräs sellainen voidaan realisoida todennäköisyysmittana kiinnittämällä lukujono $\{t_k \mid k \in \mathbb{N}_d\}$, jolla $t_k \in (0, 1]$, kun $k \in \mathbb{N}_d$ ja jolla $\sum_{k \in \mathbb{N}_d} t_k = 1$. Voimme määrätä yllä kuvatusun kaltaisen mitan asettamalla kullakin $B \in \mathcal{A}$

$$\mu(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}_d} t_k \langle e_k \mid M(B) e_k \rangle.$$

Voimme nyt käyttämällä Radonin-Nikodýmin lausetta todeta, että kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ on olemassa mitallinen funktio $m_{\varphi, \psi} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, jolla

$$\langle \varphi \mid M(B) \psi \rangle = \int_B m_{\varphi, \psi}(x) d\mu(x)$$

kaikilla $B \in \mathcal{A}$, kunhan μ on σ -äärellinen mitta, jonka suhteen mitat $B \mapsto \langle \varphi \mid M(B) \psi \rangle$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, ovat absoluuttisesti jatkuvia. Nämä vaatimukset täyttyvät automaattisesti siinä tapauksessa, kun μ on yllä kuvatusun kaltainen todennäköisyysmitta.

Esittelemme nyt suureen M *minimaalisen Naimarkin laajennuksen*.

Lause 2.4 *Olkoon $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$. Seuraavat ehdot pätevät.*

- *On olemassa Hilbertin avaruus \mathcal{K} , spektraalimitta $P \in \Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{K})$ ja isometria $\mathcal{J} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, joilla*

$$\mathcal{J}M(B) = P(B)\mathcal{J}$$

kaikilla $B \in \mathcal{A}$ ja joukon $\{P(B)\mathcal{J}\varphi \mid B \in \mathcal{A}, \varphi \in \mathcal{H}\}$ lineaarinen verho on avaruuden \mathcal{K} tiheä aliavaruus.

- *Muodostakoot Hilbertin avaruus \mathcal{K}' , spektraalimitta $P' \in \Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{K})$ ja isometria $\mathcal{J}' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}'$ jonkin toisen yllä kuvatun kaltaisen kolmikon. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen unitaarikuvaus $U : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$, jolla $\mathcal{J}' = U\mathcal{J}$ ja $UP(B) = P'(B)U$ kaikilla $B \in \mathcal{A}$.*

Seuraavaksi muodostamme minimaalisen Naimarkin laajennuksen suurelle M pisteittäisessä muodossa yllä kuvatunkaltaisen mitan μ ja tiheysfunktioiden $m_{\varphi, \psi}$ avulla.

Sanomme, että kuvaus $\Omega \ni x \mapsto m^x$ on *mitallinen perhe (positiivisia) seskvilineaarimuotoja*, kun $m^x : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ on (positiivinen) seskvilineaarimuoto kaikilla $x \in \Omega$ ja kuvaukset $x \mapsto m^x(\varphi, \psi)$ ovat \mathcal{A} -mitallisia kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$. Seuraavan tuloksen voi todistaa oleellisesti käyttämällä Gramin-Schmidtin ortonormalisointimenetelmää, jossa tosin on tarkkailtava syntyvien kuvausten mitallisuutta. Emme todista lausetta tässä, mutta todistus on esitetty lähteessä [15] (lemma 4.4.).

Lemma 2.1 *Olkkoon $x \mapsto m^x$ mitallinen perhe positiivisia seskvilineaarimuotoja. On olemassa \mathcal{A} -mitalliset kuvaukset $n : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ ja $g_k : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, siten, että kaikilla $x \in \Omega$*

- $m^x(g_k(x), g_l(x)) = \delta_{k,l} \chi_{\{y \in \Omega \mid k < n(y)\}}(x)$ kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$,
- $m^x(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{n(x)} m^x(\varphi, g_k(x)) m^x(g_k(x), \psi)$ kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$, ja vain äärellisen moni summan termeistä poikkeaa nolasta ja
- kuvaukset $x \mapsto m^x(g_k(x), \varphi)$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{V}$, ovat mitallisia.

Lähteessä [15] (lemma 4.1.) on näytetty, että voimme valita suureeseen M liittyvät tiheysfunktiot $m_{\varphi, \psi}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$, mitan μ suhteen niin, että kuvaus $x \mapsto m_{\cdot, \cdot}(x)$ on mitallinen perhe positiivisia seskvilineaarimuotoja, joten voimme soveltaa yllä olevaa lemmaa suureeseen M , johon liitämme kuvaukset $n : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ ja $g_k : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$. Nyt kuvaukset $\mathcal{V} \ni \varphi \mapsto m_{g_k(x), \varphi}(x)$ ovat avaruuden \mathcal{V} lineaarifunktionaaleja kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $x \in \Omega$, joten on olemassa $a_k(x) \in \mathcal{V}^\times$, jotka vastaavat näitä funktionaaleja. Saamme näin heikosti mitalliset kuvaukset $a_k : \Omega \rightarrow \mathcal{V}^\times$; kuvaukset $x \mapsto \langle a_k(x) | \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{V}$, ovat siis \mathcal{A} -mitallisia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Saamme nyt edellisen lemmän seurauksena tulokseksi, että kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$ ja $B \in \mathcal{A}$ voimme kirjoittaa

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \int_B \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle \varphi | a_k(x) \rangle \langle a_k(x) | \psi \rangle d\mu(x).$$

Määritellämme suoraintegraaliavaruus

$$\mathcal{K}_0 := \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{H}_{n(x)} d\mu(x) \tag{22}$$

ja sen vektorit ψ_k , $k \in \mathbb{N}_d$,

$$\psi_k(x) = \sum_{l=1}^{n(x)} \langle a_l(x) | e_k \rangle e_l, \quad x \in \Omega.$$

Voimme nyt laskea kaikilla $k, l \in \mathbb{N}_d$

$$\begin{aligned} \langle \psi_k | \psi_l \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{m,n=1}^{n(x)} \langle e_k | a_m(x) \rangle \langle a_n(x) | e_l \rangle \langle e_m | e_n \rangle d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{n(x)} \langle e_k | a_m(x) \rangle \langle a_m(x) | e_l \rangle d\mu(x) = \langle e_k | M(\Omega) e_l \rangle = \delta_{k,l}, \end{aligned}$$

eli vektorit ψ_k , $k \in \mathbb{N}_d$, muodostavat avaruuden \mathcal{K}_0 ortonormaalijärjestelmän. Määritellään lisäksi operaattorit $\mathcal{J}_0 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{K}_0$ ja $\mathcal{J}_0(x) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}_{n(x)}$, $x \in \Omega$, asettamalla

$$\mathcal{J}_0 = \sum_{k=1}^d |\psi_k\rangle \langle e_k|, \quad \mathcal{J}_0(x) = \sum_{k=1}^d |\psi_k(x)\rangle \langle e_k|, \quad (23)$$

jolloin $(\mathcal{J}_0\varphi)(x) = \mathcal{J}_0(x)\varphi$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{V}$ ja $x \in \Omega$. Lisäksi kaikille $B \in \mathcal{A}$ ja $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$ pätee

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \int_B \langle \mathcal{J}_0(x)\varphi | \mathcal{J}_0(x)\psi \rangle d\mu(x).$$

Lähteessä [15] (theorem 5.1.) on osoitettu, että vektoreiden $\chi_B \mathcal{J}_0\varphi$, $B \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \mathcal{V}$, lineaarinen verho on avaruuden \mathcal{K}_0 tiheä aliavaruus. Tämän aliavaruuden virittävät myös vektorit $\chi_B \psi_k$, $k \in \mathbb{N}_d$, sillä $\mathcal{J}_0 e_k = \psi_k$. Kun lisäksi määräämme spektraalimitan $P_0 \in \Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{K}_0)$, $P_0(B)\eta = \chi_B \eta$ kaikilla $B \in \mathcal{A}$ ja $\eta \in \mathcal{K}_0$, huomaamme, että kolmikko $(\mathcal{K}_0, P_0, \mathcal{J}_0)$ antaa suuren M erään minimaalisen Naimarkin laajennuksen. Lisäksi M on spektraalimitta tarkalleen silloin, kun kuvaus \mathcal{J}_0 on unitaarinen [15] (remark 3.9.). Kootkaamme nämä tulokset yhdeksi lauseeksi.

Lause 2.5 *Olkkoon $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$, ja olkkoon $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ σ -äärellinen mitta, jonka suhteen mitat $\mathcal{A} \ni B \mapsto \langle \varphi | M(B) \psi \rangle$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, ovat absoluuttisesti jatkuvia. Seuraavat ehdot pätevät.*

- *On olemassa mitalliset kuvaukset $n : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ ja $a_k : \Omega \rightarrow \mathcal{V}^\times$, $k \in \mathbb{N}$, joilla $a_k(x) \neq 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_{n(x)}$ ja melkein kaikilla $x \in \Omega$ ja*

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \int_B \sum_{k=1}^{n(x)} \langle \varphi | a_k(x) \rangle \langle a_k(x) | \psi \rangle d\mu(x)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$ ja $B \in \mathcal{A}$.

- On olemassa vektorit ψ_k , $k = 1, \dots, d$, kaavan 22 mukaisessa suoraintegraaliavaruudessa \mathcal{K}_0 , joilla

$$M(B) = \sum_{k,l=1}^d \int_B \langle \psi_k(x) | \psi_l(x) \rangle d\mu(x) |e_k\rangle \langle e_l| = \left(\sum_{k=1}^d |\chi_B \psi_k\rangle \langle e_k| \right)^* \left(\sum_{l=1}^d |\chi_B \psi_l\rangle \langle e_l| \right)$$

kaikilla $B \in \mathcal{A}$ (sarja suppenee heikosti). Lisäksi vektorit $\chi_B \psi_k$, $B \in \mathcal{A}$, $k = 1, \dots, d$, virittävät avaruuden \mathcal{K}_0 tiheän aliavaruuden.

- Suoraintegraaliavaruus \mathcal{K}_0 , kaavan 23 isometria \mathcal{J}_0 ja $P_0 \in \Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{K}_0)$, $P_0 \eta = \chi_B \eta$ kaikilla $B \in \mathcal{A}$ ja $\eta \in \mathcal{K}_0$, antavat suureen M erään minimaalisen Naimarkin laajennuksen.
- Suure M on spektraalimitta tarkalleen silloin, kun vektorit ψ_k , $k \in \mathbb{N}_d$, muodostavat avaruuden \mathcal{K}_0 ortonormaalikannan. Tällöin operaattori \mathcal{J}_0 on unitaarinen.

Voimme nyt karakterisoida joukon $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ äärisuureet. Lause on peräisin lähteestä [16] (theorem 2.).

Lause 2.6 Olkoon $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ ja $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ σ -äärellinen mitta, jonka suhteen mitat $A \ni B \mapsto \langle \varphi | M(B) \psi \rangle$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, ovat absoluuttisesti jatkuvia, ja olkoon kolmikko $(\mathcal{K}_0, P_0, \mathcal{J}_0)$ suureen M ylläesitellyn kaltainen minimaalinen Naimarkin laajennus. Olkoot lisäksi vektorit $\psi_k \in \mathcal{K}_0$, $k \in \mathbb{N}_d$, kuten yllä. Suure M on äärisuure, $M \in \text{Ext}(\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H}))$, tarkalleen silloin, kun ei ole sellaista rajoitettua hajoavaa operaattoria $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_0)$, $A \neq O$,

$$A = \int_{\Omega}^{\oplus} A(x) d\mu(x), \quad A(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{n(x)}), \quad \text{kaikilla } x \in \Omega,$$

jolla

$$\int_{\Omega} \langle \psi_k(x) | A(x) \psi_l(x) \rangle d\mu(x) = 0 \tag{24}$$

kaikilla $k, l = 1, \dots, d$.

Todistus: Olettakaamme, että yllä kuvatun kaltainen hajoava operaattori $A \neq O$ on olemassa. Voimme olettaa, että A on itseadjungoitu ja $\|A\| = \text{ess sup}_{x \in \Omega} \|A(x)\| \leq 1$ tarvittaessa määrittelemällä sen uudelleen $A' = i(2\|A\|)^{-1}(A - A^*)$. Tällöin $A_{\pm} := I \pm A \geq O$ ja $A_+ \neq A_-$. Lisäksi määrittelemme $A_{\pm}(x) := I_{\mathcal{H}_{n(x)}} \pm A(x)$ kaikilla $x \in \Omega$. Koska vektorit $\chi_B \psi_k$, $B \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}_d$, virittävät avaruuden \mathcal{K}_0 tiheän aliavaruuden, on olemassa joukko $B_0 \in \mathcal{A}$ ja $k_0, l_0 \in \mathbb{N}_d$, joilla

$$\int_{B_0} \langle \psi_{k_0}(x) | A_+(x) \psi_{l_0}(x) \rangle d\mu(x) \neq \int_{B_0} \langle \psi_{k_0}(x) | A_-(x) \psi_{l_0}(x) \rangle d\mu(x),$$

joten heikosti määritellyt operaattorimitat

$$B \mapsto M_{\pm}(B) := \sum_{k,l=1}^d \int_B \langle \psi_k(x) | A_{\pm}(x) \psi_l(x) \rangle d\mu(x) |e_k\rangle \langle e_l|$$

ovat erisuuret, ja lisäksi ehdosta 24 seuraa, että $M_{\pm}(\Omega) = I$, ja selvästi $M_{\pm} \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$. Huomaamme, että $M = \frac{1}{2}(M_+ + M_-)$, eli M ei ole äärisuure.

Olettakaamme sitten, että M ei ole äärisuure, jolloin on olemassa suuret $M_{\pm} \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$, joilla $M = \frac{1}{2}(M_+ + M_-)$ ja $M_+ \neq M_-$. Olkoon $N \in \mathcal{A}$ μ -nollamitallinen, eli $\mu(N) = 0$, jolloin $\langle \varphi | M(N) \psi \rangle = 0$ kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Voimme Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä käyttämällä arvioida kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$

$$|\langle \varphi | M_{\pm}(N) \psi \rangle| \leq \sqrt{\langle \varphi | M_{\pm}(N) \varphi \rangle \langle \psi | M_{\pm}(N) \psi \rangle} \leq 2\sqrt{\langle \varphi | M(N) \varphi \rangle \langle \psi | M(N) \psi \rangle} = 0,$$

joten mitat $B \mapsto \langle \varphi | M_{\pm}(B) \psi \rangle$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, ovat absoluuttisesti jatkuvia mitan μ suhteen. Näin ollen suureilla M_{\pm} on yllä kuvatuun kaltaiset minimaaliset Naimarkin laajennukset $(\mathcal{K}_0^{\pm}, P_0^{\pm}, \mathcal{J}_0^{\pm})$ ja vektorit $\psi_k^{\pm} \in \mathcal{K}_0^{\pm}$, $k \in \mathbb{N}_d$, joilla

$$M_{\pm}(B) = \sum_{k,l=1}^d \int_B \langle \psi_k^{\pm}(x) | \psi_l^{\pm}(x) \rangle d\mu(x) |e_k\rangle \langle e_l|.$$

Määritelläkäämme jälleen operaattorit $\mathcal{J}_0^{\pm}(x)$ asettamalla $\mathcal{J}_0^{\pm}(x)\varphi = (\mathcal{J}_0^{\pm}\varphi)(x)$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{V}$ ja $x \in \Omega$. Nyt selvästi $\|\mathcal{J}_0^{\pm}(x)\| \leq \sqrt{2}\|\mathcal{J}_0(x)\|$ mitan μ suhteen melkein kaikilla $x \in \Omega$. Jos siis vektorit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{V}$ ovat sellaiset, että $\mathcal{J}_0(x)\varphi_1 = \mathcal{J}_0(x)\varphi_2$, saamme, että $\|\mathcal{J}_0^{\pm}(\varphi_1 - \varphi_2)\| = 0$. Voimmekin kaikilla $x \in \Omega$ määritellä kuva-avaruuden $\mathcal{J}_0(x)\mathcal{V}$ sulkeumassa kuvaukset $C_{\pm}(x)$ tiheästi asettamalla $C_{\pm}(x)(\mathcal{J}_0(x)\varphi) = \mathcal{J}_0^{\pm}(x)\varphi$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{V}$. Seuraavaksi laajennamme nämä operaattorit koko avaruuteen $\mathcal{H}_{n(x)}$ siten, että ne operoivat kuva-avaruuden $\mathcal{J}_0(x)\mathcal{V}$ sulkeuman ortogonaalikomplementissa nollaoperaattoreina; merkitsemme näin saatavia operaattoreita edelleen symboleilla $C_{\pm}(x)$. Erityisesti pätee $C_{\pm}(x)\psi_k(x) = \psi_k^{\pm}(x)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_d$. Seuraavaksi määräämme rajoitetut hajoavat operaattorit $C_{\pm} \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_0^{\pm})$,

$$C_{\pm} = \int_{\Omega}^{\oplus} C_{\pm}(x) d\mu(x)$$

asettamalla $C_{\pm}(\chi_B \psi_k) = \chi_B \psi_k^{\pm}$ kaikilla $B \in \mathcal{A}$ ja $k \in \mathbb{N}_d$ (muista lauseen 2.5 toisen kohdan loppuosa). Määritelläkäämme nyt operaattorit $A_{\pm}(x) := C_{\pm}(x)^* C_{\pm}(x)$, $x \in \Omega$, ja rajoitettu hajoava operaattori

$$A := \int_{\Omega}^{\oplus} (A_+(x) - A_-(x)) d\mu(x).$$

Kaikilla $B \in \mathcal{A}$ pätee nyt heikosti

$$M_{\pm}(B) = \sum_{k,l=1}^d \int_B \langle \psi_k(x) | A_{\pm}(x) \psi_l(x) \rangle d\mu(x) |e_k\rangle \langle e_l|.$$

Koska $M_+ \neq M_-$, pätee nyt $A \neq O$, mutta lisäksi pätee

$$\int_{\Omega} \langle \psi_k(x) | A(x) \psi_l(x) \rangle d\mu(x) = \langle e_k | (M_+(\Omega) - M_-(\Omega)) e_l \rangle = 0$$

kaikilla $k, l = 1, \dots, d$. Väitteen mukainen hajoava operaattori on siis olemassa. \square

Huomattakoon, että ehdon 24 voi kirjoittaa myös muodossa $\mathcal{J}_0^* A \mathcal{J}_0 = O$. Jos M on spektraalimitta, on operaattori \mathcal{J}_0 unitaarinen, jolloin, jos $\mathcal{J}_0^* A \mathcal{J}_0 = O$, on oltava $A = O$, mikä jälleen antaa todistuksen sille, että spektraalimitat ovat äärisuureita. Lähteessä [17] on annettu myös vaihtoehtoinen äärisuureiden karakterisaatio siinä tapauksessa, että arvoavaruus Ω on äärellinen ja $d < \infty$.

Olettakaamme, että $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ on sellainen suure, että $n(x) = 1$ mitan μ suhteen melkein kaikilla $x \in \Omega$. Olettakaamme lisäksi, että μ on todennäköisyysmitta. Tällöin $\mathcal{K}_0 = L^2(\Omega, \mu)$, ja kaikilla $B \in \mathcal{A}$

$$M(B) = \sum_{k,l=1}^d \int_B \overline{\psi_k(x)} \psi_l(x) d\mu(x) |e_k\rangle \langle e_l|.$$

Suure M on lauseen 2.6 mukaan äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole sellaista nollasta eriävää \mathcal{A} -mitallista oleellisesti rajoitettua funktiota $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (siis $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$), jolla

$$\int_{\Omega} f(x) \overline{\psi_k(x)} \psi_l(x) d\mu(x) = 0 \quad (25)$$

kaikilla $k, l \in \mathbb{N}_d$. Jos nyt vektorit $x \mapsto \overline{\psi_k(x)} \psi_l(x)$ virittävät avaruuden $L^2(\Omega, \mu)$ tiheän aliavaruuden ja vektori $f \in L^\infty(\Omega, \mu) \subset L^2(\Omega, \mu)$ on kuten kaavassa 25, seuraa integraalin lineaarisuudesta, että jatkuva lineaarifunktionaali

$$L^2(\Omega, \mu) \ni \varphi \mapsto \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) d\mu(x)$$

yhtyy nollakuvaukseen tiheällä aliavaruudella, joten $f = 0$. Saamme seurauksen:

Seuraus 2.3 *Olkkoon suure $M \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ sellainen, että $n(x) = 1$ mitan μ suhteen melkein kaikilla $x \in \Omega$. Olettakaamme myös, että μ on todennäköisyysmitta. Suure M on nyt äärisuure, jos vektorit $x \mapsto \overline{\psi_k(x)} \psi_l(x)$, $k, l \in \mathbb{N}_d$, virittävät avaruuden $L^2(\Omega, \mu)$ tiheän aliavaruuden.*

Erityisesti, kun $\Omega = I_1 \times \dots \times I_n$, $n \in \mathbb{N}$, missä $I_k \subset \mathbb{R}$ on väli kaikilla $k = 1, \dots, n$, ja $d\mu(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}$, missä $w : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ on mitallinen funktio, jolla $\int_{\Omega} w d^n \mathbf{x} = 1$, muodostavat polynomit

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n},$$

missä $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ ja $a_{k_1, \dots, k_n} \in \mathbb{C}$ kaikilla $k_j = 0, \dots, m_j$, $j = 1, \dots, n$, avaruuden $L^2(\Omega, \mu)$ tiheän aliavaruuden. Jos oletamme, että suureeseen M liittyvät vektorit ψ_k , $k = 1, \dots, d$, ovat tällaisia polynomeja (muussa tapauksessa voimme approksimoida niitä polynomeilla), ja jos lisäksi vektorit $x \mapsto \overline{\psi_k(x)}\psi_l(x)$, $k, l \in \mathbb{N}_d$, virittävät kaikki polynomit, seuraa, että M on äärisuure [16] (proposition 1).

Esimerkki 2.5 Olkoon $\Omega = [0, 2\pi)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 2\pi))$, ja olettakaamme, että $\dim(\mathcal{H}) = \infty$. Valitkaamme Hilbertin avaruudelle \mathcal{H} ortonormaalikanta $\{|k\rangle \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$, ns. *lukumääräkanta*. Olkoon $M_{\text{can}} \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ puolestaan ns. *kanoninen vaihesuure*, jolle kaikilla $B \in \mathcal{B}([0, 2\pi))$

$$M_{\text{can}}(B) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \int_B e^{i(k-l)\vartheta} \frac{d\vartheta}{2\pi} |k\rangle\langle l| = \int_B |\vartheta\rangle\langle \vartheta| d\mu(\vartheta), \quad (26)$$

missä

$$|\vartheta\rangle := \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\vartheta} |k\rangle \in \mathcal{V}^\times, \quad d\mu(\vartheta) = \frac{d\vartheta}{2\pi}, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi.$$

Kompleksiset Borel-mitat $B \mapsto \langle \varphi | M_{\text{can}}(B) \psi \rangle$ ovat mitan μ suhteen absoluuttisesti jatkuvia. Lisäksi $n(\vartheta) = 1$, $a_1(\vartheta) = |\vartheta\rangle$ ja $a_k = 0$, kun $k = 2, 3, \dots$ sekä $\psi_k(\vartheta) = e^{i(1-k)\vartheta|0\rangle} \sim e^{-ik\vartheta}$, $k \in \mathbb{N}$, melkein kaikilla $0 \leq \vartheta < 2\pi$. Siispä $\psi_k(\vartheta)\overline{\psi_l(\vartheta)} = e^{i(l-k)\vartheta}$, $k \in \mathbb{N}$, melkein kaikilla $0 \leq \vartheta < 2\pi$, joten seurauksen 2.3 mukaan kanoninen vaihesuure on äärisuure. Toisaalta huomataan, että kyseinen suure ei ole spektraalimitta, mikä osoittaa jälleen, että ääretönulotteisessa Hilbertin avaruudessa on aina äärisuure, joka ei ole spektraalimitta.

Esimerkki 2.6 Tutkikaamme jälleen esimerkin 2.4 mukaisia kovariantteja faasiavaruussuureita. Olkoon $m \in \mathbb{N}$ ja $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R}^m)$ yksikkövektori. Operaattorin $|\varphi_0\rangle\langle \varphi_0|$ määräämään kaavan 21 mukaiseen faasiavaruussuureeseen $M^{|\varphi_0\rangle\langle \varphi_0|}$ liittyvä lauseen 2.5 mukainen funktio $n : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ on vakiofunktio, $n = 1$. Lisäksi lauseen 2.5 mukaiset keskenään ortonormaalit vektorit $\psi_k \in L^2(\mathbb{R}^{2m})$, $k \in \mathbb{N}$, ovat muotoa $\psi_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \langle W(\mathbf{q}, \mathbf{p})\varphi_0 | e_k \rangle$ kaikilla $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, kun $\{e_k \in L^2(\mathbb{R}^m) \mid k \in \mathbb{N}\}$ on ortonormaalikanta.

Valitkaamme erityinen ortonormaalikanta $\{h_{\mathbf{k}} \mid \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^m\}$, jolla

$$h_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \pi^{-m/4} e^{-\mathbf{x}^2/2} \prod_{j=1}^m (2^{k_j} k_j!)^{-m/2} \partial_j^{k_j} e^{-\mathbf{x}^2}$$

kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, kun $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$, $k_j = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, m$. Merkitsemme jatkossa $h_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}\rangle = |k_1, \dots, k_m\rangle$, kun $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$. Huomaamme, että $|\mathbf{k}\rangle = |k_1\rangle \otimes \dots \otimes |k_m\rangle$, missä $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ ja vektorit $|k\rangle$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ovat kuten yllä tapauksessa $m = 1$. Voidaan osoittaa, että tapauksessa $m = 1$ voimme kirjoittaa Weylin esityksen muodossa $W(q, p) = D(q + ip)$, missä D on additiivisen kompleksilukuryhmän projektiivinen

esitys, jolle $D(z)|0\rangle = |z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Olkoot $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$, ja merkitkäämme $z_j = q_j + ip_j$ kullakin $j = 1, \dots, m$. Tällöin $W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = D(z_1) \otimes \dots \otimes D(z_m)$ ja

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{p})|0\rangle = D(z_1)|0\rangle \otimes \dots \otimes D(z_m)|0\rangle = |z_1\rangle \otimes \dots \otimes |z_m\rangle =: |z_1, \dots, z_m\rangle.$$

Projektio $|0\rangle\langle 0|$ määrää faasiavaruussuureen $M^{|0\rangle\langle 0|}$, jolle pätee

$$\begin{aligned} M^{|0\rangle\langle 0|}(B) &= \pi^{-m} \int_B |z_1, \dots, z_m\rangle \langle z_1, \dots, z_m| d^2 z_1 \dots d^2 z_m \\ &= (2\pi)^{-m} \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{\infty} \int_B \prod_{j=1}^m \frac{t_j^{(k_j+l_j)/2} e^{i(k_j-l_j)\vartheta_j}}{\sqrt{k_j! l_j!}} |k_1, \dots, k_m\rangle \langle l_1, \dots, l_m| \times \\ &\quad \times dt_1 \dots dt_m d\vartheta_1 \dots d\vartheta_m \end{aligned}$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2m})$. Yllä luvut z_j on annettu polaariesityksinä $z_j = t_j^{1/2} e^{i\vartheta_j}$, missä $t_j \geq 0$ ja $0 \leq \vartheta_j < 2\pi$. Huomaamme, että kaikilla $k, l = 0, 1, 2, \dots$, $t \geq 0$ ja $0 \leq \vartheta < 2\pi$ voimme kirjoittaa

$$t^{(k+l)/2} e^{i(k-l)\vartheta} = t^l e^{is\vartheta} t^{s/2} = t^k e^{-ir\vartheta} t^{r/2}, \quad (27)$$

missä on merkitty $s = k - l$ ja $r = l - k$.

Suure $M^{|0\rangle\langle 0|}$ on äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole olemassa sellaista oleellisesti rajoitettua mitallista nollasta eriävää funktiota $f : [0, 2\pi)^m \times [0, \infty)^m \rightarrow \mathbb{C}$, jolle

$$\int_{[0, 2\pi)^m \times [0, \infty)^m} f(\vartheta_1, \dots, t_m) \overline{\psi_{\mathbf{k}}(\vartheta_1, \dots, t_m)} \psi_{\mathbf{l}}(\vartheta_1, \dots, t_m) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_m dt_1 \dots dt_m = 0 \quad (28)$$

kaikilla $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_m)$, $k_j, l_j = 0, 1, 2, \dots$, missä $\psi_{\mathbf{k}}(\vartheta_1, \dots, t_m) = \prod_{j=1}^m \langle k_j | \sqrt{t_j} e^{i\vartheta_j} \rangle$. Määritelkäämme Borel-mitat μ_r , $r = 0, 1, 2, \dots$, joukossa $[0, \infty)$ asettamalla $d\mu_r(t) = t^{r/2} e^{-t} dt$. Käyttämällä laskelmaa 27, voidaan kaava 28 antaa muodossa

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\vartheta_1, \dots, t_m) \prod_{j=1}^m e^{ir_j \vartheta_j} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_m \right) \prod_{j=1}^m t_j^{k_j} \times \\ &\quad \times d\mu_{|r_1|}(t_1) \dots d\mu_{|r_m|}(t_m) \end{aligned} \quad (29)$$

kaikilla $r_j \in \mathbb{Z}$ ja $k_j = 0, 1, 2, \dots$, kun $j = 1, \dots, m$. Polynomit virittävät avaruudet $L^2([0, \infty), \mu_r)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, joten edeltävä yhtälö merkitsee sitä, että

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\vartheta_1, \dots, t_m) \prod_{j=1}^m e^{ir_j \vartheta_j} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_m = 0$$

kaikilla $r_j \in \mathbb{Z}$ ja melkein kaikilla $t_j \geq 0$, kun $j = 1, \dots, m$. Siispä $f = 0$ melkein kaikkialla. Tämä merkitsee sitä, että Gaussin tilan $h_0(\mathbf{x}) = \pi^{-m/4} e^{-\mathbf{x}^2/2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, määräämä faasiavaruussuure $M^{|h_0\rangle\langle h_0|} = M^{|0\rangle\langle 0|}$ on äärisuure joukossa $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2m}), L^2(\mathbb{R}^m))$. Tämäkään suure ei ole spektraalimitta.

2.5 Operaattorimittojen avaruus

Voimme soveltaa Kreinin-Milmanin lausetta 2.1 kvanttimekaniikan suureiden joukon rakenteen tutkimisessa, kunhan varustamme operaattorimittojen avaruuden lokaalisti konveksilla topologialla. Olkoon $M : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nyt operaattorimitta, missä $\mathcal{B}(\Omega)$ on jonkin lokaalisti kompaktin σ -kompaktin Hausdorffin avaruuden Ω Borelin joukkojen σ -algebra ja \mathcal{H} on jokin separoituva Hilbertin avaruus. Merkitsemme tällaisten operaattorimittojen kompleksista vektorivaruutta symbolilla $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$. Merkitsemme symbolilla $C_0(\Omega)$ jatkuvien ja rajoitettujen, äärettömydessä häviävien funktioiden $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ avaruutta, joka on Banachin avaruus normin

$$C_0(\Omega) \ni f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

suhteen. Duaali $C_0(\Omega)'$ koostuu jatkuvista lineaarikuvauksista $\Phi : C_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, ja se on Banachin avaruus normin

$$C_0(\Omega)' \ni \Phi \mapsto \|\Phi\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\Phi(f)|$$

suhteen. Olkoon $f \in C_0(\Omega)$, jolloin merkitsemme

$$M(f) := \int_{\Omega} f(x) dM(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Voimme ajatella operaattorimittaa affiinina kuvauksena $T \mapsto M[T]$ tilajoukosta $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ avaruuden $C_0(\Omega)$ duaaliin, kun asetamme

$$M[T](f) = \text{tr}[TM(f)], \quad T \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), \quad f \in C_0(\Omega).$$

Tällaisen kuvauksen voi laajentaa yksikäsitteisesti rajoitetuksi lineaarikuvaukseksi, joka on määritelty koko jälkiluokkaoperaattoreiden joukossa, eli $\mathcal{T}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto M[T] = \text{tr}[TM(\cdot)]$. Toisaalta jokainen tällainen rajoitettu lineaarikuvauksena syntyy edelläesitellyllä tavalla jostakin operaattorimitasta M .¹¹ Operaattorimitta $M : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow C_0(\Omega)'$ on *positiivinen*, kun $M[T](f) \geq 0$ aina, kun $T \geq O$ ja f on oleellisesti ei-negatiivinen. Huomaamme välittömästi, että tämä positiivisuuden määritelmä yhtyy tuttuun positiiviopeeraattorimitan määritelmään. Kuvauksena $M : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow C_0(\Omega)'$ on puolestaan semispektraalimitta, eli $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$, tarkalleen silloin, kun M on lineaarikuvauksena positiivinen ja $M[T](1) = \text{tr}[T]$ kaikilla $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, kun merkitsemme symbolilla 1 vakiokuvausta $\Omega \ni x \mapsto 1$.

Voimme nyt kullakin $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja $f \in C_0(\Omega)$ määritellä avaruuden $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ seminormin $p_{T,f}$ asettamalla

$$p_{T,f}(M) = |M[T](f)| = |\text{tr}[TM(f)]|, \quad M \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H}). \quad (30)$$

¹¹Tulos seuraa oleellisesti Rieszin-Markovin lauseesta.

Seminormijoukko $p_{T,f}$, $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $f \in C_0(\Omega)$, määrää avaruuteen $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ lokaalisti konveksin topologian, ja merkitsemme jatkossa tätä LKA:ta samalla symbolilla $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$. Huomaamme välittömästi, että suurejoukko $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ on tämän avaruuden suljettu ja konvekksi osajoukko. Avaruudessa $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ voidaan määritellä myös normi

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H}) \ni M \mapsto \|M\| = \sup_{\|T\|_{\text{tr}} \leq 1} \|M[T]\| = \sup_{\|T\|_{\text{tr}} \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |\text{tr}[TM(f)]|,$$

jonka määräämää yksikköpalloa $\{M \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H}) \mid \|M\| \leq 1\}$ merkitsemme symbolilla B . Helposti huomataan [18] (osio IV.A.), että osajoukko $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ on rajoitettu ja sisältyy palloon $2B$. Huomaamme, että duaalin $C_0(\Omega)'$ heikko*-topologian generoivat seminormit p_f , $f \in C_0(\Omega)$,

$$p_f(\Phi) = |\Phi(f)|, \quad \Phi \in C_0(\Omega)'.$$

Heikko*-topologia on siis lokaalisti konvekksi topologia. Voimme nyt todistaa, että yksikköpallo B on LKA:n $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ kompakti osajoukko.

Lause 2.7 *Yksikköpallo B on LKA:n $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ kompakti osajoukko.*

Todistus: Merkitkäämme kullakin $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$

$$S_T = \{\Phi \in C_0(\Omega)' \mid \|\Phi\| \leq \|T\|_{\text{tr}}\},$$

joka on Banachin-Alaogĭlun lauseen nojalla duaalin $C_0(\Omega)'$ kompakti osajoukko heikko*-topologian suhteen. Muodostakaamme karteesinen tulo

$$D := \prod_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})} S_T = \{F : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow C_0(\Omega)' \mid F[T] \in S_T \text{ kaikilla } T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})\},$$

joka puolestaan Tihonovin lauseen nojalla on kompakti vastaavan tulotopologian suhteen. Tulotopologia on tässä lokaalisti konvekksi, ja sen generoivat seminormit $p_{T,f}$, $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $f \in C_0(\Omega)$, jotka saadaan kaavasta

$$p_{T,f}(F) = p_f(F[T]) = |F[T](f)|, \quad F \in D.$$

Havaitsemme myös, että

$$\begin{aligned} B &= \{M \in D \mid M[\alpha S + \beta T] = \alpha M[S] + \beta M[T] \text{ kaikilla } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ ja } S, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})\} \\ &= \bigcap_{\alpha, \beta \in \mathbb{C}; S, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})} \{M \in D \mid M[\alpha S + \beta T] - \alpha M[S] - \beta M[T] = 0\}. \end{aligned}$$

Joukko B on siis tulotopologiassa suljettu yksiön $\{0\}$ alkukuvien leikkauksena tulotopologian suhteen jatkuvissa kuvauksissa $M \mapsto M[\alpha S + \beta T] - \alpha M[S] - \beta M[T]$. $B \subset D$ on siis tulotopologiassa kompakti. Lisäksi tulotopologian joukkoon B indusoima topologia

yhtyy LKA:n $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ siihen indusoimaan topologiaan, sillä niihin liittyvät seminormit yhtyvät. \square

Koska suurejoukko on suljettu operaattorimitta-avaruuden osajoukko, joka sisältyy kompaktiin joukkoon $2B$, saadaan nyt Kreinin-Milmanin lausetta 2.1 käyttämällä seuraava tulos:

Seuraus 2.4 *Suurejoukko $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ on LKA:n $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ kompakti osajoukko ja se yhtyy ääripistejoukkonsa konveksin verhon $\text{con}(\text{Ext}(\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})))$ sulkeumaan. Sama tulos pätee kaikille suljetuille konvekseille suurejoukoille $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$.*

Tämä tulos merkitsee sitä, että kun $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ on konvekksi ja suljettu suurejoukko, voidaan sen kaikkia suureita approksimoida äärisuurejoukon $\text{Ext}(\mathfrak{M})$ alkioiden konveksikombinaatioilla heikosti. Erityisesti jokaista $M \in \mathfrak{M}$ ja $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa jono $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ei-negatiivisia lukuja, jolla $\sum_{k \in \mathbb{N}} t_k = 1$, ja jono äärisuureita $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{Ext}(\mathfrak{M})$, joilla

$$\left| \langle \varphi | M(f) \psi \rangle - \sum_{k \in \mathbb{N}} t_k \langle \varphi | M_k(f) \psi \rangle \right| < \varepsilon$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ ja $f \in C_0(\Omega)$.

Yllä muotoillun LKA:n $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ voi myös antaa reaaliosassa muodossa $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{H})$ reaaliosassa vektorivaruudessa $\mathcal{T}_s(\mathcal{H}) = \mathcal{T}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ määriteltyjen rajoitettujen lineaari-kuvausten joukkona, jonka arvoavaruus on reaalisten, jatkuvien, äärettömyydessä häviävien funktioiden reaalisen Banachin avaruuden $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ duaali $C_0(\Omega, \mathbb{R})'$. Tarkastelun voi suorittaa täysin samalla tavalla kuin yllä.

3 Kovarianssisysteemien harmonista analyysiä

Suureiden $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ konveksikombinaatio $\sum_{k=1}^n p_k M_k$, missä $p_k \in (0, 1]$ kaikilla $k = 1, \dots, n$ ja $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, edustaa tietyssä mielessä suuretta, jossa on yhdistelty sattumanvaraisesti suureisiin M_k liittyviä mittausproseduureja. Konveksin suurejoukon $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ ääripisteet voi siis mieltää suureiksi, joita ei voi mitata yhdistelemällä erilaisia saman suureperheen suureiden mittauksia. Toisaalta äärisuureet ovat muita suureperheen jäseniä informatiivisempia siinä mielessä, että niiden konveksikombinaatiot antavat suuren määrän muita suureita, ja edellisen luvun mukaan, kun \mathfrak{M} on suljettu Borel-suureiden joukko operaattorimittojen LKA:ssa, kaikkia suureperheen \mathfrak{M} alkioita voidaan approksimoida pisteittäin äärisuureiden konveksikehitelmillä, kun suureiden $M \in \mathfrak{M}$ arvoavaruus Ω on lokaalisti kompakti, σ -kompakti ja Hausdorff. Äärisuureiden karakterisoinnilla on siis huomattava fysikaalinen merkitys.

Edellä olemme karakterisoineet *koko* suureperheen $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ ääripisteet, mutta fyysikaaliselta kannalta kiinnostavampaa on yleensä selvittää vain jonkin tietyn konveksin suurejoukon osajoukon ääripisteet, esimerkiksi ekstremaaliset lokalisointisuureet. Eräs tapa luokitella suureita on kuvailla, miten suure käyttäytyy sen arvoavaruuden symmetriamuunnoksissa. Yksi esimerkki tästä on määritellä suureluokka jonkin arvoavaruuden symmetriaryhmän esityksen suhteen kovarianttien suureiden perheenä. Toinen symmetrioihin perustuva tapa luokitella suureita on tutkia suureluokkia, jonka alkiot ovat invariantteja jonkin symmetriaryhmän jonkin esityksen suhteen. Tämän ja seuraavan luvun tavoitteena on esitellä eräitä erityisesti kovariantteihin suureisiin liittyviä tuloksia. Seuraavassa luvussa karakterisoimme sellaisten kovarianttien suurejoukkojen ääripisteet, joihin liittyvät symmetriaryhmät ovat lokaalisti kompakteja ja kommutatiivisia ja toteuttavat toisen numeroituvuusaksioman ja ovat Hausdorff. Tarkastelemme seuraavaksi yhtä esimerkkiä kovarianteista ja invarianteista suureista.

Esimerkki 3.1 Olettakaamme, että tutkittavaa systeemiämme kuvaa Hilbertin avaruus $L^2(\mathbb{R})$. Eräs tapa kuvailla systeemin lokalisointisuureita, on vaatia niiltä kovarianssia kaavan 19 ($n = 1$) mukaisen paikkasiirtoesityksen U suhteen. Suureen $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ kovarianssi esityksen U suhteen tarkoittaa sitä, että

$$U(q)M(B)U(q)^* = M(B + q) \quad (31)$$

kaikilla $q \in \mathbb{R}$ ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Toinen usein lokalisointisuureelta vaadittu ominaisuus on invarianssi kaavan 19 liikemääräsäysesityksen V suhteen. Suureen $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ invarianssi esityksen V suhteen tarkoittaa nyt sitä, että kaikilla $p \in \mathbb{R}$ ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pätee

$$V(p)M(B)V(p)^* = M(B). \quad (32)$$

Merkitsemme ehdot 31 ja 32 toteuttavien suureiden $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ joukkoa symbolilla $\mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$. Sanomme, että näin määritellyt lokalisointisuureet ovat paikkasiirtokovariantteja ja liikemääräsäysinvariantteja. Voimme yhdistää ehdot 31 ja 32 muodostamalla puolisuoran tulon $G = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}$, missä ryhmät \mathbb{R} ja \mathbb{R}^2 ovat additiivisia, ja ryhmätulon antaa kaikille $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^2$ ja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ kaava

$$(\mathbf{p}_1, x_1)(\mathbf{p}_2, x_2) = (\mathbf{p}_1 + \alpha_{x_1}(\mathbf{p}_2), x_1 + x_2),$$

missä ryhmähomomorfismi $\mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha_x \in \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ on muotoa

$$\alpha_x(p, t) = (p, t + xp)$$

kaikilla $x, p, t \in \mathbb{R}$. Samaistamme luonnollisesti ryhmät \mathbb{R} ja $G/\mathbb{R}^2 \otimes \{\mathbf{0}\}$, jolloin määräytyy ryhmän G operointi ryhmässä \mathbb{R} kaavalla

$$(\mathbf{p}, y) \cdot x = x + y$$

kaikilla $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ ja $x, y \in \mathbb{R}$. Määritelmämme nyt ryhmän G esitys π avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$ kaavalla

$$\left(\pi((p, t), y)\varphi\right)(x) = e^{i(px-t)}\varphi(x-y)$$

kaikilla $p, t, y, x \in \mathbb{R}$ ja $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Huomaamme, että ehdot 31 ja 32 voidaan nyt korvata yhdellä kovarianssiehdolla; ehto $M \in \mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ on voimassa tarkalleen silloin, kun pätee kovarianssi esityksen π suhteen, eli

$$\pi(\mathbf{p}, x)M(B)\pi(\mathbf{p}, x)^* = M(B+x).$$

Lokalisointisuureet $M \in \mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ voidaan nyt määrätä käyttäen Mackeyn menetelmiä (Mackey machine) ja yleistettyä imprimitiilauseetta, joka esitellään tuonnempana lauseena 3.10. Tulos on johdettu lähteessä [19], ja annamme tässä vain valmiin tuloksen. Olkoon $\rho : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ todennäköisyysmitta ja $M_{\mathcal{X}}$ kanoninen paikkasuure, jolla $M_{\mathcal{X}}(B)\varphi = \chi_B\varphi$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Voimme tällöin määrätä konvoluutiosuureen $\rho * M_{\mathcal{X}}$ asettamalla

$$\rho * M_{\mathcal{X}}(B) = \int_{\mathbb{R}} \rho(B-x) dM_{\mathcal{X}}(x), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (33)$$

Suora lasku osoittaa, että $\rho * M_{\mathcal{X}} \in \mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}^n))$. Voimme nyt antaa lähteen [19] tuloksen.

Lause 3.1 *Olkoon $M \in \mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$. On olemassa todennäköisyysmitta $\rho : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$, jolla $M = \rho * M_{\mathcal{X}}$. Toisaalta jokainen konvoluutiosuure $\rho * M_{\mathcal{X}}$ on paikkasiirtokovariantti ja liikemääräsysäysinvariantti.*

Olkoot $M_1, M_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$, $t \in [0, 1]$ ja $M = tM_1 + (1-t)M_2$. Olkoot toisaalta $\rho_1, \rho_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ todennäköisyysmittoja, joilla $M_j = \rho_j * M_{\mathcal{X}}$, $j = 1, 2$. Nyt $M = (t\rho_1 + (1-t)\rho_2) * M_{\mathcal{X}}$. Huomaamme, että paikkasiirtokovariantti ja liikemääräsysäysinvariantti suure $M = \rho * M_{\mathcal{X}}$ on joukon $\mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ ääripiste tarkalleen silloin, kun ρ Borelin σ -algebrassa $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ määriteltyjen todennäköisyysmittojen joukon ääripiste. Todennäköisyysmittojen $\rho : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ konveksin joukon ääripisteet ovat tarkalleen pistemitat δ_q , joilla $\delta_q(B) = 1$, jos $q \in B$ ja muulloin $\delta_q(B) = 0$. Määritelmämme $M_q := \delta_q * M_{\mathcal{X}}$. Suora lasku osoittaa, että $M_q(B) = M_{\mathcal{X}}(B-q)$. Joukon $\mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ ääripisteet ovat siis kaikki eräänlaisia ”siirrettyjä” kanonisia paikkasuureita, jotka ovat kaikki spektraalimittoja ja keskenään unitaariekvivalentteja, sillä $M_q(B) = U(q)^* M_{\mathcal{X}}(B)U(q)$ kaikilla $q \in \mathbb{R}$ ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Karakterisoimme joukon $\mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ hieman toisenlaisessa ekvivalentissa muodossa ja johdamme tuloksen 3.1 tuonnempana osioissa 4.3.2 ja 4.3.3.

3.1 Lokaalisti kompaktit ryhmät

Olkoon G ryhmä, jonka ryhmätuloa merkitsemme

$$G \times G \ni (g, g') \mapsto gg' \in G.$$

Ryhmän G neutraalialkio olkoon e ; siis $eg = ge = g$ kaikilla $g \in G$. Sanotaan, että G on *topologinen ryhmä*, kun sillä on topologia, jonka suhteen ylläesitelty ryhmätulo (lähtöpuolella on ryhmän topologiasta induoitu tulotopologia) ja alkion kääntökuvaus

$$G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$$

ovat jatkuvia. Jatkossa oletamme lisäksi, että G on *lokaalisti kompakti ryhmä*, eli topologinen ryhmä, jonka neutraalialkiolla e on jokin kompakti ympäristö¹². Kaikilla lokaalisti kompakteilla ryhmillä G on positiivista kerrointa vaille yksikäsitteiset Borelin σ -algebrassa $\mathcal{B}(G)$ määritellyt vasemmat ja oikeat Haarin mitat $m^l, m^r : \mathcal{B}(G) \rightarrow [0, \infty)$, toisin sanoen nollasta eriävät Radonin mitat, joille

$$m^l(gB) = m^l(B), \quad m^r(gB) = m^r(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(G).$$

Näiden mittojen suhteen voidaan muodostaa tutut funktioavaruudet $L^p(G)$ ($p \in \mathbb{N}$), jotka siis koostuvat Borel-mitallisista funktioista $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, joille

$$\int_G |f(g)|^p dm(g) < \infty,$$

kun $m = m^l$ tai $m = m^r$. Olkoon m^l vasen Haarin mitta, jolloin voimme määritellä oikean Haarin mitan $m_r^l : \mathcal{B}(G) \ni B \mapsto m^l(B^{-1})$. Kaikki muut oikeat Haarin mitat saadaan tästä positiivisella vakiokertoimella. Erityisesti, kun $m^l = m_r^l$, sanotaan, että ryhmä G on *unimodulaarinen*; unimodulaarisen ryhmän kaikki oikeat ja vasemmat Haarin mitat poikkeavat toisistaan korkeintaan jollakin positiivisella vakiokertoimella. Erityisesti kaikki kompaktit ryhmät ovat unimodulaarisia.

Olkoon G ryhmä ja \mathcal{H} jokin Hilbertin avaruus. Homomorfismia $V : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kutsutaan ryhmän G *esitykseksi* avaruudessa \mathcal{H} ; homomorfaehto kuuluu nyt tietenkin $V(gg') = V(g)V(g') \quad \forall g, g' \in G$. Jos $V(G) \subset \mathcal{U}(\mathcal{H})$, kutsutaan esitystä V *unitaariesitykseksi*. Jatkossa tarkastelemme yksinomaan unitaariesityksiä. Esitystä V kutsutaan *redusoitumattomaksi*, jos aliavaruudelle $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ pätee $V(g)\varphi \in \mathcal{M}$ kaikilla $g \in G$ ja $\varphi \in \mathcal{M}$ ainoastaan, kun $\mathcal{M} = \{0\}$ tai $\mathcal{M} = \mathcal{H}$. Schurin lemma antaa vaihtoehtoisen muotoilun redusoitumattomuudelle: esitys V on redusoitumaton tarkalleen silloin, kun operaattorille

¹²Tällöin kaikilla muillakin ryhmän jäsenillä on kompakti ympäristö, mikä huomataan siitä, että kuvaukset $g \mapsto g'g$ kiinteillä $g' \in G$ ovat homeomorfismeja. Ryhmä G on siis topologialtaan lokaalisti kompakti.

$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ pätee $AV(g) = V(g)A$ kaikilla $g \in G$ vain, kun $A = cI$ jollakin $c \in \mathbb{C}$. Jokaisella lokaalisti kompaktilla ryhmällä G on redusoitumattomia esityksiä, vieläpä niin paljon, että ne erottelevat ryhmän pisteet, kuten Gelfandin-Raikovin lause takaa.¹³ Tämä tarkoittaa sitä, että aina kun $g, h \in G$ ovat erisuuret, on olemassa ryhmän G redusoitumaton esitys π , jolla $\pi(g) \neq \pi(h)$.

Kun $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ on ryhmän G unitaariesitys, merkitsemme V :n kuvien kanssa kommutoituvien rajoitettujen operaattoreiden joukkoa symbolilla $C(V)$, eli $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kuuluu joukkoon $C(V)$, kun $AV(g) = V(g)A$ kaikilla $g \in G$. Sanotaan, että esitykset $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$ ja $W : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_2)$ ovat (unitaari)ekvivalentteja, jos löytyy sellainen unitaarikuvaus $L : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, että $LV(g) = W(g)L$ kaikilla $g \in G$. Jos G on topologinen ryhmä, voimme määritellä ryhmän G *esitysduaalin* \hat{G} . Tämä on ryhmän G redusoitumattomien esityksien ekvivalenssiluokkien joukko, joka tavallisesti varustetaan lokaalin konvergenssin topologialla¹⁴.

Olkoot $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n$ suljettuja Hilbertin avaruuden \mathcal{H} aliavaruuksia (ja siis Hilbertin avaruuksia itsekin), joilla $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^n \mathcal{M}_k$. Olkoot nyt $\pi_k : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{M}_k)$, $k = 1, \dots, n$, ryhmän G esityksiä avaruuksissa $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$, jolloin merkitsemme näiden esitysten suoralla summalla esitystä

$$V = \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_n, \quad V(g)\varphi = \pi_1(g)\varphi_1 + \dots + \pi_n(g)\varphi_n \quad \forall g \in G,$$

missä $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_n$, $\varphi_k \in \mathcal{M}_k$ kullakin $k = 1, \dots, n$. Voidaan toki muodostaa yleisempiä vastaavia suorasummasarjoja $V = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \pi_k$. Unitaariesityksen $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ sanotaan olevan *primaari*, jos $Z(C(V))$ on yksiulotteinen, eli koostuu vain operaattoreista muotoa $cI_{\mathcal{H}}$, $c \in \mathbb{C}$. Tässä $Z(C(V))$ on joukon $C(V)$ ydin tai keskus, eli

$$Z(C(V)) = \{C \in C(V) \mid CA = AC \quad \forall A \in C(V)\}.$$

Ryhmän G sanotaan olevan *tyyppiä I*, jos sen kaikki primaarit esitykset V voidaan esittää muodossa $V = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \pi_k$, missä jokainen π_k , $k \in \mathbb{N}$, on kopio samasta redusoitumattomasta esityksestä. Käytännössä kaikki fysiikan kannalta oleelliset ryhmät (kuten tavallisten fysikaalisten systeemien symmetriaryhmät) ovat tyyppiä I; nämä ryhmät ovat myös käytännössä aina lokaalisti kompakteja ja täyttävät toisen numeroituvuusaksioman, jolloin ehdon sille, että (symmetria)ryhmä G on tyyppiä I, voi muotoilla yksinkertaisemminkin, kuten seuraavassa osiossa näemme.

Erityisesti kaikki lokaalisti kompaktit Abelin ryhmät ovat tyyppiä I. Jos nimittäin V on tämän ryhmän unitaariesitys avaruudessa \mathcal{H} , kuuluvat operaattorit $V(g)$, $g \in G$, joukkoon $C(V)$. Jos V on primaari, huomaamme välittömästi, että $V(g) = \gamma(g) \otimes I_{\mathcal{H}}$,

¹³Kiinnostavaa on, että tämän tuloksen johdossa tavallisesti sovelletaan lausetta 2.1.

¹⁴Verkon duaalissa \hat{G} sanotaan suppenevan, kun se suppenee tasaisesti kaikissa G :n kompakteissa osajoukoissa

missä $\gamma \in \hat{G}$, eli kyseessä on suora summa kopioista samaa redusoitumatonta esitystä. On huomattava, että Schurin lemmasta johtuen kaikki lokaalisti kompaktin Abelin ryhmän G redusoitumattomat esitykset ovat yksiulotteisia, jolloin esitysduaalin alkiot samaistetaan ryhmähomomorfismeihin $\gamma : G \rightarrow \mathbb{T}$. Tavallisesti Abelin ryhmän esitysduaalin operointia merkitään $\gamma(g) = \langle g, \gamma \rangle$ aina, kun $\gamma \in \hat{G}$ ja $g \in G$. Tässä esityksessä \hat{G} on itseasiassa C^* -algebran $L^1(G)$ (laskutoimituksina pisteittäinen yhteenlasku ja konvoluutio ja involuutiona pisteittäinen kompleksikonjugointi) spektri Gelfandin muunnoksena $L^1(G) \ni f \mapsto \hat{f}$,

$$\hat{f}(\gamma) = \langle f, \gamma \rangle = \int_G \overline{\langle g, \gamma \rangle} f(g) dg \quad \forall \gamma \in \hat{G}.$$

Tietyissä tapauksissa esityksen $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ voi esittää G :n esitysduaalin \hat{G} alkoiden avulla suorina summoina tai integraaleina. Erityisesti, jos G on kompakti, on \hat{G} diskreetti, ja tällöin voidaan mikä tahansa unitaariesitys ilmaista tällaisena suorana summoina [5] (Theorem 5.2, Proposition 5.3-5.4):

Lause 3.2 *Olkoon G kompakti topologinen ryhmä ja $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ ryhmän G esitys Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Esityksen V voi nyt antaa suorana summoina*

$$V = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} V_\gamma, \quad V_\gamma(g) = \pi_\gamma(g) \otimes I_{\mathcal{L}_\gamma} \quad \forall g \in G, \quad \pi_\gamma \in \gamma$$

missä aliesitys V_γ operoi suljetussa aliavaruudessa $\mathcal{K}_\gamma \otimes \mathcal{L}_\gamma$ (\mathcal{K}_γ ja \mathcal{L}_γ ovat kumpikin Hilbertin avaruuksia) kullakin $\gamma \in \hat{G}$ ja

$$\mathcal{H} \simeq \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} \mathcal{K}_\gamma \otimes \mathcal{L}_\gamma$$

ja $\dim(\mathcal{K}_\gamma) < \infty$ kullakin $\gamma \in \hat{G}$.

Tässä esityksessä lukua $\dim(\mathcal{L}_\gamma) := m_\gamma \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ kutsutaan redusoitumattoman esityksen π_γ *multiplisiteetiksi* esityksessä V . Ylläolevan hajotelman voisi esittää niinkin, että kukin aliesitys V_γ korvataan suor summalla $\bigoplus_{k=1}^{m_\gamma} \pi_k$, missä kukin π_k , $k = 1, \dots, m_\gamma$, on kopio esityksestä π_γ . Voidaan helposti osoittaa, että suor summaesitys

$$V = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \pi_k,$$

missä esitykset π_k , $k \in \mathbb{N}$, ovat redusoitumattomia, on primaari tarkalleen silloin, kun $\pi_k \in \gamma$ jollakin $\gamma \in \hat{G}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ [5]. Yhdistämällä tämän tuloksen lauseeseen 3.2 huomaamme, että kompaktit ryhmät ovat tyyppiä I.

Lause 3.2 yleistyy tyyppi I toisen numeroituvuusaksiooman toteuttavilla ryhmillä G ; tällöin unitaariesitykset $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ separoituvissa Hilbertin avaruuksissa voidaan ilmaista suorina integraaleina [5]:

Lause 3.3 *Olkoon G tyypin I toisen numeroituvuusaksioman täyttävä ryhmä ja \mathcal{H} separoituva Hilbertin avaruus ja $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ unitaariesitys. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen äärellinen mitta $\nu : \mathcal{B}(\hat{G}) \rightarrow [0, \infty)$ ja sellaiset separoituvat Hilbertin avaruudet \mathcal{K}_γ ja \mathcal{L}_γ jokaisella $\gamma \in \hat{G}$, että*

$$\mathcal{H} \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} \mathcal{K}_\gamma \otimes \mathcal{L}_\gamma d\nu(\gamma). \quad (34)$$

Lisäksi on olemassa sellainen mitallinen kenttä esityksiä $W, W_\gamma : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{K}_\gamma \otimes \mathcal{L}_\gamma)$ ja sellainen unitaarikuvaus $U : \mathcal{H} \rightarrow \int_{\hat{G}}^{\oplus} \mathcal{K}_\gamma \otimes \mathcal{L}_\gamma d\nu(\gamma)$, että

$$UV(g)U^* = \int_{\hat{G}}^{\oplus} W_\gamma(g) d\nu(\gamma) \quad \forall g \in G,$$

missä $W_\gamma(g) = \pi_\gamma(g) \otimes I_{\mathcal{L}_\gamma}$, $\pi_\gamma \in \gamma$, kullakin $g \in G$ ja $\gamma \in \hat{G}$.

Voimme antaa lauseelle 3.3 vaihtoehtoisen spektraalimuotoilun Abelin ryhmän tapauksessa [5] (Theorem 4.44):

Lause 3.4 *Olkoon G lokaalisti kompakti Abelin ryhmä ja $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ G :n unitaariesitys Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen säännöllinen projektiarvoinen mitta $P : \mathcal{B}(\hat{G}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$, jolla*

$$V(g) = \int_{\hat{G}} \langle g, \gamma \rangle dP(\gamma) \quad \forall g \in G.$$

Toteamme lopuksi vielä yleisiä huomioita lokaalisti kompakteista ryhmistä. On suoraviivaista osoittaa, että lokaalisti kompakti topologinen avaruus on separoituva, jos se on Hausdorffin avaruus. Toisaalta on myös helppoa osoittaa, että jokainen separoituva ja metristyvä yleinen topologinen avaruus toteuttaa toisen numeroituvuusaksioman. Metristyvyys tarkoittaa sitä, että avaruuden topologian generoi jokin metriikka. Lokaalisti kompakteilla avaruuksilla pätee vahvempikin tulos: *Lokaalisti kompakti avaruus on toisen numeroituvuusaksioman toteuttava Hausdorffin avaruus tarkalleen silloin, kun se on separoituva ja metristyvä.* Rajoitumme jatkossa tutkimaan tiettyä lokaalisti kompaktien ryhmien joukkoa.

Huomautus 3.1 *Jatkossa tutkimamme topologiset ryhmät G ovat kaikki lokaalisti kompakteja tyypin I unimodulaarisia ryhmiä, jotka täyttävät toisen numeroituvuusaksioman ja ovat Hausdorff.*

Aiemmat toteamukset huomioiden edellisen huomautuksen mukaiset ryhmät voi kuvata ekvivalentisti niinä lokaalisti kompakteina separoituvina unimodulaarisina ryhminä, jotka ovat tyyppiä I ja ovat metristyviä. Huomattakoon myös, että tällaiset ryhmät ovat σ -kompakteja, kuten osiossa 1.2 on näytetty.

3.2 Toisen numeroituvuusaksiooman toteuttavat tyypin I ryhmät

Oletamme tässä osiossa, että ryhmä G on separoituva, lokaalisti kompakti, unimodulaarinen ja Hausdorff sekä toteuttaa toisen numeroituvuusaksiooman. Esittelemme joitakin tuloksia, jotka ovat joko riittäviä tai riittäviä ja välttämättömiä sille, että ryhmä G on tyyppiä I. Näemme, että tällaiset tyypin I ryhmät muodostavat fysiikan kannalta tärkeän ryhmien luokan.

Valitsemme ryhmälle G Haarin mitan dg . Ryhmälle G rakentuu nyt Banachin avaruus $L^1(G) := L^1(G, dg)$, joka koostuu Borel-mitallisista funktioista¹⁵ $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, joille

$$\|f\|_1 = \int_G |f(g)| dg < \infty.$$

Normina tässä avaruudessa on ylläesitelty $\|\cdot\|_1$. Kun $f_1, f_2 \in L^1(G)$, voidaan määritellä *konvoluutio* $f_1 * f_2 \in L^1(G)$ kaavalla

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(h)f_2(h^{-1}g) dh, \quad g \in G.$$

Määrittelemme lisäksi avaruudessa $L^1(G)$ involuution $f \mapsto f^*$ asettamalla $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$. Huomaamme, että näillä laskutoimituksilla varustettuna avaruus $L^1(G)$ on involuutiivinen Banachin algebra.

Olkoon V ryhmän G unitaariesitys Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Voimme tällöin määritellä kullekin $f \in L^1(G)$ Hilbert-Schmidt-operaattorin Bochner-integraalina

$$V(f) = \int_G f(g)V(g) dg.$$

Kutsumme involuutiivisen algebran $L^1(G)$ *positiivisiksi muodoiksi* lineaarikuvauksia $\Phi : L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$, joilla $\Phi(f^* * f) \geq 0$ kaikilla $f \in L^1(G)$. Lähteessä [5] on näytetty, että positiiviset muodot saadaan ns. *positiivisen tyypin funktioista* $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ kaavalla

$$\Phi(f) = \int_G f(g)\varphi(g) dg,$$

joita emme kuitenkaan tässä lähde tarkemmin tutkimaan. Merkitsemme positiivisten muotojen joukkoa symbolilla $\mathcal{F}(G)$. Lisäksi käytämme niiden positiivisten muotojen Φ , joilla $\Phi(f) \leq 1$ kaikilla $f \in L^1(G)$, joilla $\|f\|_1 \leq 1$, joukosta merkintää $B(G)$. Voimme nyt muotoilla seuraavan tuloksen [5] (proposition 7.1, corollary 7.2):

Lause 3.5 *Olkoot $f \in L^1(G)$ ja joukko $B(G)$ kuten yllä. Merkitsemme symbolilla $U(G)$ ryhmän G kaikkien unitaariesitysten ekvivalenssiluokkien joukkoa. Tällöin on voimassa*

$$\|f\| := \sup_{[V] \in U(G)} \|V(f)\|_{\mathcal{H}_V} = \sup_{\gamma \in \hat{G}} \|\pi_\gamma(f)\|_{\mathcal{H}_{\pi_\gamma}} = \sup_{\Phi \in B(G)} \sqrt{\Phi(f^* * f)},$$

¹⁵Tarkemmin kyseessä on jälleen ekvivalenssiluokkien avaruus; samaistamme keskenään funktiot, jotka yhtyvät Haarin mitan suhteen melkein kaikkialla.

missä esityksen V esitysavaruuksia on merkitty symbolilla \mathcal{H}_V ja $\pi_\gamma \in \gamma$ aina, kun $\gamma \in \hat{G}$. Kuvaus $\|\cdot\|$ on normi. Kun involutiivinen algebra $L^1(G)$ saatetaan täydelliseksi tämän normin suhteen, saadaan C^* -algebra.

Edellisessä lauseessa saatua C^* -algebraa kutsutaan ryhmän G C^* -algebraksi, ja merkitsemme sitä symbolilla $C^*(G)$.¹⁶

Olkoon V jälleen ryhmän G unitaariesitys. Tällöin merkitsemme

$$\text{Ker}(V) = \{f \in C^*(G) \mid V(f) = 0\},$$

joka on kaksipuolinen ihanne. Kutsumme joukkoja $\text{Ker}(V)$ algebran $C^*(G)$ *primitiivisiksi ihanteiksi* ja niiden joukosta käytämme merkintää $\text{Prim}(G)$. Lisäksi, jos U ja V ovat unitaariekvivalentteja ryhmän G esityksiä, huomaamme, että $\text{Ker}(U) = \text{Ker}(V)$. Näin kuvaus $U(G) \ni [U] \mapsto \text{Ker}(U) \in \text{Prim}(G)$ on hyvinmääritelty surjektio. Joukosta $\text{Prim}(G)$ saadaan topologinen avaruus määrittelemällä joukon $\mathfrak{X} \subset \text{Prim}(G)$ Jacobsonin sulkeuma $\overline{\mathfrak{X}}$ asettamalla

$$\overline{\mathfrak{X}} = \left\{ X \in \text{Prim}(G) \mid \bigcap_{Y \in \mathfrak{X}} Y \subset X \right\}.$$

Joukko $\mathfrak{X} \subset \text{Prim}(G)$ on siis suljettu, kun $\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}$. Näin tulee määrättyksi Jacobsonin topologia joukossa $\text{Prim}(G)$, jonka voimme siirtää esitysduaaliin määräämällä, että joukko $\Gamma \subset \hat{G}$ on avoin tarkalleen silloin, kun sen kuva kuvauksessa $\hat{G} \ni \gamma \mapsto \text{Ker}(\pi_\gamma) := \text{Ker}(\gamma) \in \text{Prim}(G)$ on avoin Jacobsonin topologiassa. Tätä esitysduaalin topologiaa kutsutaan *Fellin topologiaksi*.

Merkitsemme symbolilla $\Pi(G)$ kaikkien ryhmän G redusoitumattomien esitysten joukkoa, jonka voimme kirjoittaa erillisenä unionina $\Pi(G) = \Pi_\infty(G) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Pi_k(G)$, missä $\Pi_k(G)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on k -ulotteisten redusoitumattomien esitysten joukko. Olkoon nyt kullakin $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ \mathcal{B}_k suppein σ -algebra, jolla kuvaukset

$$\Pi_k(G) \ni \pi \mapsto \langle \varphi | \pi(g) \psi \rangle_{\mathcal{H}_\pi}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{H}_\pi, \quad g \in G$$

ovat mitallisia. Voimme nyt määritellä joukossa $\Pi(G)$ σ -algebran \mathcal{B} asettamalla, että $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ tarkalleen silloin, kun $\mathcal{U} \cap \Pi_k(G) \in \mathcal{B}_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Selvästi \hat{G} on joukkona avaruuden $\Pi(G)$ tekijäavaruus, joten voimme siirtää σ -algebran \mathcal{B} esitysduaalin \hat{G} σ -algebraksi, jota kutsutaan *Mackeyn-Borelin rakenteeksi*. Seuraava lähteessä [20] todistettu lause kertoo, milloin ryhmä G on tyyppiä I.¹⁷

Lause 3.6 *Olkoon G lokaalisti kompakti unimodulaarinen ryhmä, joka täyttää toisen numeroituvuusaksiooman. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät.*

¹⁶ C^* -algebra $C^*(G)$ voidaan konstruoida myös yleisen lokaalisti kompaktin ryhmän tapauksessa, jonka ei tarvitse olla unimodulaarinen. Tämä edellyttää vain involuution määrittelyn hienosäätöä.

¹⁷Tämäkin lause pätee myös silloin, kun G ei ole unimodulaarinen.

- (i) Ryhmä G on tyyppiä I.
- (ii) Kuvaus $\hat{G} \ni \gamma \mapsto \text{Ker}(\gamma) \in \text{Prim}(G)$ on injektio.
- (iii) Mackeyn-Borelin rakenne on Borelin σ -algebra esitysduaalin \hat{G} Fellin topologian suhteen.
- (iv) Jos π on ryhmän G redusoitumaton esitys avaruudessa \mathcal{H}_π , kuvajoukko $\pi(C^*(G))$ sisältää kaikki avaruuden \mathcal{H}_π kompaktit operaattorit.

C^* -algebraa \mathcal{A} sanotaan *liminaaliseksi*, kun $\pi(a)$ on kompakti operaattori kaikilla $a \in \mathcal{A}$ aina, kun π on algebran \mathcal{A} $*$ -esitys, eli on $*$ -homomorfismi $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jollakin Hilbertin avaruudella \mathcal{H} . Algebran $C^*(G)$ kaikki $*$ -esitykset ovat muotoa $C^*(G) \ni f \mapsto V(f)$, missä V on ryhmän G unitaariesitys [5], ja ryhmää G sanotaan *liminaaliseksi*, kun sen C^* -algebra $C^*(G)$ on liminaalinen. C^* -algebraa \mathcal{A} sanotaan puolestaan *postliminaaliseksi*, kun sen jokainen tekijä- C^* -algebra \mathcal{A}/\mathcal{J} , missä siis \mathcal{J} on algebran \mathcal{A} suljettu kaksipuolinen ihanne, sisältää yksiöstä $\{0\}$ poikkeavan kaksipuolisen ihanteen, joka on liminaalinen. Selvästikin C^* -algebra \mathcal{A} on postliminaalinen, kun se on liminaalinen. Ryhmää G sanotaan puolestaan postliminaaliseksi, kun sen C^* -algebra $C^*(G)$ on postliminaalinen. Seuraava lause on todistettu lähteessä [20].

Lause 3.7 *Olkoon G lokaalisti kompakti unimodulaarinen ryhmä, joka täyttää toisen numeroituvuusaksiooman. G on tyyppiä I tarkalleen silloin, kun se on postliminaalinen.*

Erityisesti siis liminaaliset ryhmät ovat tyyppiä I. Koska kompaktien ryhmien ja lokaalisti kompakten Abelin ryhmien redusoitumattomat esitykset ovat äärellisulotteisia, ne ovat liminaalisia ja siis tyyppiä I, kuten on jo aiemmin todettu. Lähteissä [21], [22], [23] ja [24] on todistettu myös seuraavat tulokset.

Lause 3.8 *Jokainen yhtenäinen puoliyksinkertainen Lien ryhmä on liminaalinen ja siis tyyppiä I. Myös jokainen yhtenäinen nilpotentti Lien ryhmä on liminaalinen.*

Näitä tuloksia käyttämällä huomaamme, että monet merkittävät fysikaaliset symmetriaryhmät ovat tyyppiä I ja täyttävät muutkin huomautuksen 3.1 ehdot. Erityisesti aika-avaruuden translaatioiden additiiviset ryhmät \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, ovat tällaisia; erityisesti ne ovat tyyppiä I koska ne ovat Abelin ryhmiä. Myös kompaktit ryhmät kuten \mathbb{T}^n , $n \in \mathbb{N}$, (vaihesymmetriat tai syklisen avaruuden siirtosymmetriat) ja $\text{SU}(2)$ (3-ulotteisen avaruuden kiertosymmetrioiden ryhmän $\text{SO}(3)_0$ peittoryhmä) ovat huomautuksen 3.1 mukaisia. Nämä ovat tyyppiä I, koska ne ovat kompakteja. Myös ryhmä $\text{SL}(4, \mathbb{C})$ (4-ulotteisen aika-avaruuden aitojen Lorentz-symmetrioiden ryhmän $\text{SO}(1, 3)_0$ peittoryhmä) on puoliyksinkertaisena ja yhdesti yhtenäisenä Lien ryhmänä tyyppiä I ja on muutenkin haluttua tyyppiä. Myös Heisenbergin ryhmät H_n , $n \in \mathbb{N}$, (faasiavaruuden siirtojen esitykset) ovat tätä

tyyppiä, koska ne ovat yhtenäisiä ja nilpotentteja. Esimerkiksi translaatioryhmien \mathbb{R}^n ja \mathbb{T}^n avulla voidaan määrätä paikka- tai vaihesiirtojen suhteen kovariantteja suureita. Tämä kovarianssiominaisuus on luonteva vaatimus lokalisointisuureille ja paikkaerosuureille. Tutkimme paikkasiirtokovariantteja suureita tarkemmin seuraavassa luvussa.

3.3 Kovarianssi- ja imprimitiivisysteemit

Oletamme jatkossa, että G on huomautuksen 3.1 ehtojen mukainen ryhmä. Sanotaan, että topologinen avaruus Ω on *transitiivinen G -avaruus*, kun on olemassa jatkuva kuvaus

$$G \times \Omega \ni (g, x) \mapsto g \cdot x \in \Omega, \quad (35)$$

jolle $e \cdot x = x$ kaikilla $x \in \Omega$, kun $e \in G$ on neutraalialkio (eli $eg = ge$ kaikilla $g \in G$), ja jolle kaikilla $g, g' \in G$ pätee $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$ ja lisäksi aina, kun $x, y \in \Omega$, löytyy sellainen $g \in G$, että $g \cdot x = y$. Kutsumme tätä transitiivista kuvausta ryhmän G vasemmaksi operoinniksi joukossa Ω . Lisäksi sanomme, että Borel-mitta $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ on *G -invariantti*, kun kullekin $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ ja $g \in G$ pätee $\mu(g \cdot B) = \mu(B)$. Voidaan osoittaa, että kaikki lokaalisti kompaktit transitiiviset G -avaruudet Ω ovat homeomorfinen jonkin tekijäryhmän G/H kanssa, kun $H \leq G$ on suljettu aliryhmä, kun lokaalisti kompakti ryhmä G on σ -kompakti [5] (Proposition 2.44). Näin on siis erityisesti, kun G on huomautuksen 3.1 mukainen. Merkitsemme jatkossa kanonista tekijäkuvausta (projektiota) $q : G \rightarrow G/H$, $q(g) = gH$. Vasen operointi tekijäavaruudessa G/H määrätään kaavalla $g \cdot g'H = g \cdot q(g') = q(gg') = (gg')H$.

Olkoon $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ vahvasti jatkuva ryhmän G unitaariesitys Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Merkitsemme symbolilla \mathfrak{M}_Ω^V niiden normitettujen positiivioperaattorimittojen $M : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{H})$ joukkoa, joille

$$V(g)^* M(B) V(g) = M(g^{-1} \cdot B) \quad \forall g \in G, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Kutsumme joukkoa \mathfrak{M}_Ω^V esityksen V määräämäksi *kovarianssirakenteeksi*. Jos $P \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ on projektioarvoinen, eli spektraalimita, ja $\Omega = G/H$ jollakin ryhmän G suljetulla aliryhmällä H , kutsutaan kolmikkoa (V, Ω, P) *transitiiviseksi imprimitiivisysteemiksi*.

Olkoon $\pi : H \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ vahvasti jatkuva ryhmän G aliryhmän H unitaariesitys. Tällöin on olemassa unitaariekvivalenssia vaille yksikäsitteinen esityksestä π *indusoitu* ryhmän G unitaariesitys $\text{ind}_H^G \pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{H}_\pi^\mu)$ ja G -invariantti mitta $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$, missä \mathfrak{H}_π^μ on funktioiden $f : G \rightarrow \mathcal{H}_\pi$ joukko, jonka jäsenille f pätee

- kuvaus $G \ni g \mapsto \langle f(g) | \varphi \rangle_{\mathcal{H}_\pi}$ on Borel-mitallinen kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_\pi$,
- $f(gh) = \pi(h)f(g)$ kaikilla $g \in G$, $h \in H$ ja

- $\int_{\Omega} \langle f(g)|f(g) \rangle_{\mathcal{H}_{\pi}} d\mu([g]) < \infty$ kaikilla $f \in \mathfrak{H}_{\pi}^{\mu}$ (edellinen ehto takaa sen, että tämä integraali on hyvin määritelty).

Nyt \mathfrak{H}_{π}^{μ} on Hilbertin avaruus sisätulon

$$\mathfrak{H}_{\pi}^{\mu} \times \mathfrak{H}_{\pi}^{\mu} \ni (f, f') \mapsto \langle f|f' \rangle_{\mathfrak{H}_{\pi}^{\mu}} := \int_{\Omega} \langle f(g)|f'(g) \rangle_{\mathcal{H}_{\pi}} d\mu([g])$$

suhteen. Indusoidun esityksen $\text{ind}_H^G \pi =: U$ operointi vektoreihin $f \in \mathfrak{H}_{\pi}^{\mu}$ voidaan ilmaista pisteittäin

$$(U(g)f)(g') = f(gg') \quad \forall g, g' \in G.$$

Kun varustamme Hilbertin avaruuden \mathfrak{H}_{π}^{μ} spektraalimitalla $D : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{H})$, joka määrittellään kaavalla

$$(D(B)f)(g) = \chi_B(p(g))f(g) \quad \forall B \in \mathcal{B}(G/H), \quad \forall f \in \mathfrak{H}_{\pi}^{\mu}, \quad \forall g \in G,$$

on kolmikko (U, Ω, D) imprimitiivisysteemi, nk. indusoituun esitykseen $U = \text{ind}_H^G \pi$ liittyvä *kanoninen transitiivinen imprimitiivisysteemi*. Mackeyn *imprimitiivilause* toteaa, että kanoniset transitiiviset imprimitiivisysteemit ovat oleellisesti ainoat transitiiviset imprimitiivisysteemit (katso esim. [5] ja [25]).

Lause 3.9 (Imprimitiivilause) *Olkoon $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ vahvasti jatkuva lokaalisti kompaktin ryhmän G unitaariesitys Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} ja Ω transitiivinen G -avaruus, joka on homeomorfinen tekijäavaruuden G/H kanssa, kun H on ryhmän G suljettu aliryhmä, ja $P \in \mathfrak{M}_{\Omega}^V$ esityksen V suhteen kovariantti spektraalimita. Merkitsemme yksinkertaisesti $\Omega = G/H$. Tällöin on olemassa sellainen aliryhmän H (vahvasti jatkuva) unitaariesitys $\pi : H \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_{\pi})$, että indusoituun esitykseen $\text{ind}_H^G \pi =: U$ liittyvä kanoninen transitiivinen imprimitiivisysteemi (U, Ω, D) on unitaariekvivalentti systeemin (V, Ω, P) kanssa, eli on olemassa unitaarioperaattori $R : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}_{\pi}^{\mu}$, jolle $RV(g) = U(g)R$ kaikilla $g \in G$ ja $RP(B) = D(B)R$, kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$. Lisäksi kaikki tällaiset aliryhmän H esitykset π ovat unitaariekvivalentteja.*

Olkoon $M \in \mathfrak{M}_{\Omega}^V$ jokin G -kovariantti semispektraalimita, jonka ei tarvitse olla spektraalimita. Kutsumme tällöin kolmikkoa (V, Ω, M) *kovarianssisysteemiksi* tai *yleistetyksi transitiiviseksi imprimitiivisysteemiksi*. Kovarianssisysteemeille saadaan vastaavanlainen tulos kuin transitiivisille imprimitiivisysteemeille [26] (proposition 1, proposition 2); Suurelle M konstruoidaan minimaalinen Naimarkin laajennus jossakin Hilbertin avaruudessa \mathfrak{H}' , johon esitys V laajenetaan siten, että suureen M laajennus (spektraalimita) on kovariantti esityksen V laajennuksen suhteen ja näin syntyvä transitiivinen imprimitiivisysteemi on unitaariekvivalentti edellisen lauseen perusteella tietyn kanonisen imprimitiivisysteemin kanssa. Todistus on suoraviivainen, emmekä esitä sitä tässä.

Lause 3.10 *Olkoon G lokaalisti kompakti toisen numeroituvuusaksiooman täyttävä ryhmä ja $\Omega = G/H$ jollakin suljetulla aliryhmällä $H \leq G$. Olkoon (V, Ω, M) kovarianssisysteemi Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Tällöin on olemassa separoituva Hilbertin avaruus \mathfrak{H} , kanoninen imprimitiivisysteemi (U, Ω, D) Hilbertin avaruudessa \mathfrak{H} ja isometria $W_0 : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$, jolla*

$$\begin{aligned} W_0 V(g) &= U(g) W_0, \quad \forall g \in G, \\ W_0 M(B) &= D(B) W_0, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega). \end{aligned}$$

Kaikki tällaiset kovarianssisysteemin (V, Ω, M) kanoniset laajennukset ovat keskenään unitaarisesti ekvivalentteja.

Tarkoituksena on seuraavaksi näyttää, että seurauksen 2.4 tulokset pätevät kovarianssirakenteille. Olkoon G huomautuksen 3.1 ehdot täyttävä ryhmä ja V sen esitys Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Olkoon lisäksi $\Omega = G/H$ jollakin suljetulla aliryhmällä $H \leq G$, jolloin merkitsemme jatkuvien äärettömyydessä häviävien funktioiden $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sup-normilla varustettua Banachin avaruutta symbolilla $C_0(\Omega)$. Määritelmämme kullekin $f \in C_0(\Omega)$ ja $g \in G$ funktio $f_g \in C_0(\Omega)$ asettamalla

$$f_g(x) = f(g \cdot x), \quad x \in \Omega.$$

Merkitsemme myös symbolilla $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ osiossa 2.5 esiteltyä lokaalisti konveksia operaattorimittojen avaruutta. Määritelmämme kullakin $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $f \in C_0(\Omega)$ ja $g \in G$ kuvaus $F_{T,f,g} : \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ asettamalla kaikilla $M \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$

$$F_{T,f,g}(M) = M[V(g)TV(g)^*](f) - M[T](f_g) = \text{tr}[TV(g)^*M(f)V(g)] - \text{tr}[TM(f_g)].$$

Voimme nyt arvioida kaavan 30 mukaisilla seminormeilla

$$|F_{T,f,g}(M)| \leq p_{V(g)TV(g)^*,f}(M) + p_{T,f_g}(M),$$

joten kuvaukset $F_{T,f,g}$, $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $f \in C_0(\Omega)$, $g \in G$, ovat jatkuvia, ja voimme ilmaista kovarianssirakenteen joukkona

$$\mathfrak{M}_\Omega^V = \bigcap_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})} \bigcap_{f \in C_0(\Omega)} \bigcap_{g \in G} F_{T,f,g}^{-1}(0),$$

joka siis on suljettu. Koska kovarianssirakenne \mathfrak{M}_Ω^V on suurejoukon $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ suljettu ja konvekssi osajoukko, siihen pätee seuraus 2.4, ja ääripistejoukko $\text{Ext}(\mathfrak{M}_\Omega^V)$ karakterisoi kaikki kovariantit suureet.

4 Kovarianssirakenne ja Abelin ryhmä

Tässä luvussa käsittelemme kovarianssirakenteita, joissa symmetriaryhmä on Abelinen lokaalisti kompakti ryhmä, joka täyttää toisen numeroituvuusaksiooman ja on Hausdorff. Määritämme tällaisten kovarianssirakenteiden ääripisteet sekä ne kovariantit suureet, jotka ovat äärisuureita kaikkien suureiden joukossa. Käsittelemme myös joitakin fysikaalisia esimerkkejä.

4.1 Abelin ryhmän suhteen kovariantit suureet

Oletamme koko tämän luvun ajan, että ryhmä G on kommutatiivinen (ja siis tyyppiä I) ja täyttää muutkin huomautuksen 3.1 ehdot ja $\Omega = G/H$ jollakin $H \leq G$. Merkitsemme kanoniselle tekijäprojektiolle $q : G \rightarrow G/H$ yleisesti $q(g) = [g]$ kaikilla $g \in G$. Lisäksi dg on ryhmän G Haarin mitta ja dh puolestaan aliryhmän H Haarin mitta¹⁸ ja μ on transitiivisen avaruuden Ω G -invariantti mitta; kyseessä on siis ryhmän G/H Haarin mitta. Ryhmän \hat{G} ryhmälaskutoimitusta merkitsemme $\hat{G} \times \hat{G} \ni (\gamma, \gamma') \mapsto \gamma + \gamma'$, eli $\langle g, \gamma + \gamma' \rangle = \langle g, \gamma \rangle \langle g, \gamma' \rangle$. Neutraalialkio olkoon ϑ , eli $\langle g, \vartheta \rangle = 1$ kaikilla $g \in G$. Aliryhmän H *annihilaattoria* merkitsemme

$$H^\perp := \{\eta \in \hat{G} \mid \langle h, \eta \rangle = 1 \text{ kaikilla } h \in H\}.$$

Selvästi $H^\perp \leq \hat{G}$. G -avaruuden avaruuden Ω karakterien joukon $\hat{\Omega}$ samaistamme annihilaattoriin H^\perp merkitsemällä kullakin $\eta \in H^\perp$ ja $[g] \in \Omega$ $\langle \eta, [g] \rangle := \langle \eta, g \rangle$. Lisäksi aliryhmän H karakterien joukko \hat{H} voidaan samaistaa tekijäryhmän \hat{G}/H^\perp kanssa määrittelemällä kullakin $\gamma \in \hat{G}$ ja $h \in H$ $\langle p(\gamma), h \rangle := \langle h, \gamma \rangle$, kun $p : \hat{G} \rightarrow \hat{G}/H^\perp$ on tekijäprojektiio. Merkitsemme jatkossa tavallisesti $p(\gamma) =: [\gamma]$. Varustamme annihilaattorin H^\perp Haarin mitalla¹⁹ $d\eta$, jolla Fourier-Plancherel-(käänteis)kuvaus $\mathfrak{F} : L^2(\Omega, \mu) \rightarrow L^2(H^\perp, d\eta)$, joka määritellään kaikille $f \in C_c(\Omega)$ kaavalla

$$(\mathfrak{F}f)(\gamma) = \int_{\Omega} \overline{\langle x, \eta \rangle} f(x) d\mu(x) \quad \eta \in H^\perp, \quad (36)$$

on unitaarinen.

Olkoon $f \in C_c(\hat{G})$ reaaliarvoinen ja $\nu : \mathcal{B}(\hat{G}/H^\perp) \rightarrow [0, \infty]$ kompakteilla joukoilla äärellinen mitta. Merkitään

$$L(f) := \int_{\hat{G}/H^\perp} \int_{H^\perp} f(\gamma + \eta) d\eta d\nu([\gamma]). \quad (37)$$

¹⁸Vasen ja oikea Haarin mitta tietenkin yhtyvät Abelin ryhmän tapauksessa.

¹⁹Tämä on siis Haarin mitta nimenomaan karakteriryhmän H^\perp sisällä.

Yllä oleva kaava määrittelee jatkuvan positiivisen lineaarikuvauksen $L : C_c(\hat{G}) \rightarrow \mathbb{C}$, joten Rieszin lauseen nojalla L määrittelee kuvauksen $\nu \mapsto \tilde{\nu}$ kaavalla

$$L(f) = \int_{\hat{G}} f(\gamma) d\tilde{\nu}(\gamma), \quad (38)$$

missä $\tilde{\nu} : \mathcal{B}(\hat{G}) \rightarrow [0, \infty]$ on kompakteilla joukoilla äärellinen mitta.

Olkoon $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ (vahvasti jatkuvan) esityksen $V : G \rightarrow \mathcal{H}$ suhteen kovariantti normitettu positiiviooperaattorimitta, missä \mathcal{H} on *separoituva* Hilbertin avaruus. Olkoon lisäksi π sellainen aliryhmän H esitys (esitysavaruutenaan \mathcal{H}_π), että lauseen 3.10 antama yleistettyyn imprimitiivisysteemiin (V, Ω, M) liittyvä kanoninen imprimitiivisysteemi on $(\text{ind}_H^G \pi, \Omega, D)$. lauseen 3.3 mukaan voimme olettaa, että esitys π operoi diagonaalisesti suoraintegraaliavaruudessa

$$\mathcal{H}_\pi = \int_{\hat{G}/H^\perp}^{\oplus} \mathcal{H}_{[\gamma]} d\nu([\gamma]),$$

missä ν on joukon \hat{G}/H^\perp kompakteilla joukoilla äärellinen Borelin mitta. Diagonaalinen operointi merkitsee tässä sitä, että π operoi kenttään $[\gamma] \mapsto \varphi([\gamma]) \in \mathcal{H}_{[\gamma]}$ siten, että

$$(\pi(h)\varphi)([\gamma]) = \langle h, \gamma \rangle \varphi([\gamma]), \quad h \in H.$$

Olkoon \mathcal{M} jokin separoituva ääretönulotteinen Hilbertin avaruus, jolla on ortonormaalikanta $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Olkoon lisäksi $[\gamma] \mapsto \{e_k([\gamma]) \mid 1 \leq k < m([\gamma]) + 1\}$ suoraintegraaliavaruuteen \mathcal{H}_π liittyvä mitallinen kenttä ortonormaalikantoja; tässä mitalliselle kuvaukselle $m : \hat{G}/H^\perp \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ pätee siis $\dim(\mathcal{H}_{[\gamma]}) = m([\gamma])$ kaikilla $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$. Voimme nyt muodostaa rajoitetun surjektiivisen lineaarikuvauksen $P : L^2(\hat{G}/H^\perp, \nu; \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{H}_\pi$ asettamalla $(P\varphi)([\gamma]) = P([\gamma])\varphi([\gamma])$, missä $P([\gamma]) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}_{[\gamma]}$, $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$, ovat rajoitettuja operaattoreita, joilla

$$P([\gamma])\varphi_k = \begin{cases} e_k([\gamma]), & k < m([\gamma]) + 1 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

”Projektio” P välittää siis esityksen π laajennuksen esitykseksi Π Hilbertin avaruudessa $L^2(\hat{G}/H^\perp, \nu; \mathcal{M})$, kun kaikilla $h \in H$ ja $\varphi \in L^2(\hat{G}/H^\perp, \nu; \mathcal{M})$

$$(\Pi(h)\varphi)([\gamma]) = \langle h, \gamma \rangle \varphi([\gamma]).$$

Seuraavaksi upotamme imprimitiivisysteemin (V, Ω, M) esityksestä Π indusoituun kanoniseen imprimitiivisysteemiin.

Olkoon \mathfrak{H} nyt Hilbertin avaruus, joka koostuu funktioista $\Phi : G \times \hat{G}/H^\perp \rightarrow \mathcal{M}$, jotka täyttävät ehdot

- kuvaukset $G \times \hat{G}/H^\perp \ni (g, [\gamma]) \mapsto \langle \xi | \Phi(g, [\gamma]) \rangle_{\mathcal{M}}$ ovat (tulo)mitallisia kaikilla $\xi \in \mathcal{M}$,

- $\Phi(gh, [\gamma]) = \langle h, \gamma \rangle \Phi(g, [\gamma])$ kaikilla $g \in G$, $h \in H$, $\gamma \in \hat{G}$ ja
- $\int_{\Omega \times \hat{G}/H^\perp} \|\Phi(g, [\gamma])\|_{\mathcal{M}}^2 d(\mu \times \nu)([g], [\gamma]) < \infty$.

Vektoreiden $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{H}$ välisen sisätulon antaa kaava

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle_{\mathfrak{H}} = \int_{\Omega \times \hat{G}/H^\perp} \langle \Phi_1(g, [\gamma]) | \Phi_2(g, [\gamma]) \rangle_{\mathcal{M}} d(\mu \times \nu)([g], [\gamma]).$$

Voimme määrittellä esityksen $U : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{H})$ kaavalla

$$(U(g)\Phi)(g', [\gamma]) = \Phi(gg', [\gamma])$$

kaikilla $g, g' \in G$, $\gamma \in \hat{G}$ ja $\Phi \in \mathfrak{H}$. Voimme lisäksi määrittellä spektraalimitan $P : \mathcal{B}(G/H) \rightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{H})$ kaavalla

$$(P(B)\Phi)(g, [\gamma]) = \chi_B(q(g))\Phi(g, [\gamma])$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$, $g \in G$, $\gamma \in \hat{G}$ ja $\Phi \in \mathfrak{H}$. Huomaamme, että kolmikko (U, Ω, P) on itseasiassa esityksestä Λ indusoitu imprimitiivisysteemi ja siis sisältää lauseen 3.10 kolmikkoon (V, Ω, M) liittämän kanonisen imprimitiivisysteemin [1]. Kolmikko (V, Ω, M) voidaan siis upottaa isometrisesti systeemiin (U, Ω, P) .

Olkoon $\psi : G \times \hat{G}/H^\perp \rightarrow \mathcal{M}$ jatkuva ja kompaktitukinen funktio, jolla kuvaukset $(g, [\gamma]) \mapsto \langle \xi | \psi(g, [\gamma]) \rangle_{\mathcal{M}}$ ovat (tulo)mitallisia, eli $\psi \in C_c(G \times \hat{G}/H^\perp; \mathcal{M})$. Voimme määrittellä funktion $\Phi_\psi : G \times \hat{G}/H^\perp \rightarrow \mathcal{M}$ kaavalla

$$\Phi_\psi(g, [\gamma]) := \int_H \langle h, \gamma \rangle \psi(gh, [\gamma]) dh$$

kullakin $g \in G$ ja $\gamma \in \hat{G}$. Helposti todetaan, että Φ_ψ on avaruuden \mathfrak{H} jatkuva alkio ja $F(\text{supp}\Phi_\psi)$ on kompakti, kun $F(g, [\gamma]) = ([g], [\gamma])$. Lisäksi joukko

$$\mathfrak{H}_0 := \{\Phi_\psi \mid \psi \in C_c(G \times \hat{G}/H^\perp; \mathcal{M})\}$$

on avaruuden \mathfrak{H} tiheä aliavaruus.

Olkoon nyt $\tilde{\nu}$ kaavan 38 mukainen. Merkitsemme jatkossa ryhmän G *diagonaalista esitystä* Hilbertin avaruudessa $L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$ symbolilla λ , toisin sanoen

$$(\lambda(g)\varphi)(\gamma) = \langle g, \gamma \rangle \varphi(\gamma)$$

kullakin $g \in G$, $\gamma \in \hat{G}$ ja $\varphi \in L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$. Lauseen 3.3 mukaan voimme ilmaista esityksen V diagonaalisenä esityksenä suoraintegraaliavaruudessa

$$\mathcal{H} = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \mathcal{H}_\gamma d\nu_V(\gamma),$$

missä $\nu_V : \mathcal{B}(\hat{G}) \rightarrow [0, \infty]$ on kompakteilla joukoilla äärellinen mitta; diagonallisuus merkitsee sitä, että $(V(g)\varphi)(\gamma) = \langle g, \gamma \rangle \varphi(\gamma)$ kaikilla $g \in G$, $\gamma \in \hat{G}$ ja $\varphi \in \mathcal{H}$. Olkoon $\gamma \mapsto \{f_k(\gamma) \mid 1 \leq k < n(\gamma) + 1\}$ suoraintegraaliavaruuteen \mathcal{H} liittyvä mitallinen kenttä ortonormaalikantoja, missä mitallinen kuvaus $n : \hat{G} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ antaa komponenttiavaruuksien \mathcal{H}_γ , $\gamma \in \hat{G}$, dimensiot. Voimme taas määritellä rajoitetun operaattorin $E : L^2(\hat{G}, \nu_V; \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{H}$ hajoavana operaattorina

$$E = \int_{\hat{G}}^{\oplus} E(\gamma) d\nu_V(\gamma), \quad (39)$$

missä $E(\gamma) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}_\gamma$ ovat rajoitettuja lineaarikuvauksia, joilla

$$E(\gamma)\varphi_k = \begin{cases} f_k(\gamma), & k < n(\gamma) + 1 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

”Projektio” E laajentaa jälleen esityksen V esitykseksi $\tilde{\lambda}$, joka operoi Hilbertin avaruudessa $L^2(\hat{G}, \nu_V; \mathcal{M})$ diagonaalisesti, eli

$$\tilde{\lambda}(g) = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \langle g, \gamma \rangle I_{\mathcal{M}} d\nu_V(\gamma), \quad g \in G;$$

samaistamme siis jälleen kullakin $\gamma \in \hat{G}$ avaruuden \mathcal{H}_γ kantavektoreiden φ_k , $1 \leq k < n(\gamma) + 1$ lineaarisen verhon sulkeumaan. Lisäksi, kun $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$, merkitsemme

$$M(f) = \int_{\Omega} f(x) dM(x)$$

kaikilla mitallisilla, jatkuvilla ja kompaktitukisilla $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, eli $f \in C_c(\Omega)$. Operaattori $M(f)$ on siis Hilbertin avaruuden \mathcal{H} rajoitettu operaattori. Lisäksi operaattorit $M(f)$, $f \in C_c(\Omega)$, määräävät tarkalleen suureen $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$.

Seuraavaksi tarkoituksena on muuntaa imprimitiivisysteemiä (U, Ω, P) unitaarisesti siten, että avaruus, jossa muunnettu esitys \tilde{U} ja muunnettu mitta \tilde{P} operoivat, on $L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$; tämä tehdään seuraavassa lauseessa, joka löytyy alunperin lähteestä [1] (proposition 3.3). Näin pääsemme vertailemaan suoraan alkuperäistä esitystä V ja sen kahta eri laajennusta \tilde{U} ja $\tilde{\lambda}$.

Lause 4.1 *Olkoon mitta ν kuten yllä ja $\tilde{\nu}$ kaavan 38 määrämä mitta. On olemassa unitaarioperaattori $R : \mathfrak{H} \rightarrow L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$, jolla*

$$RU(g) = \lambda(g)R$$

kaikilla $g \in G$. Lisäksi, kun merkitsemme $RP(B)R^ =: \tilde{P}(B)$ kullakin $B \in \mathcal{B}(G/H)$, pätee*

$$(\tilde{P}(f)\varphi)(\gamma) = \int_{H^\perp} (\mathfrak{F}f)(\eta)\varphi(\gamma - \eta) d\eta \quad (40)$$

kaikilla $f \in C_c(\Omega)$.

Todistus: Olettakaamme, että $\Phi \in \mathfrak{H}_0$. Havaitsemme funktion $G \ni g \mapsto \overline{\langle g, \gamma \rangle} \Phi(g, [\gamma])$ olevan vakio kunkin tekijäluokan $[g] \in \Omega$ sisällä. Merkitsemme tätä funktiota symbolilla Φ^γ , $\Phi^\gamma([g]) = \langle g, \gamma \rangle \Phi(g, [\gamma])$ kullakin $[g] \in \Omega$. Tällöin Φ^γ on jatkuva ja kompaktitukinen. Määritellämmme operaattori R kullakin $\Phi \in \mathfrak{H}_0$ kaavalla

$$(R\Phi)(\gamma) = \int_S \Phi^\gamma(x) d\mu(x),$$

jolloin $R\Phi$ on jatkuva [1]. Lisäksi, kun $\gamma \in \hat{G}$ ja $\eta \in H^\perp$, voimme kirjoittaa

$$(R\Phi)(\gamma + \eta) = (\mathfrak{F}\Phi^\gamma)(\eta),$$

mistä seuraa, että $R(\mathfrak{H}_0) \subset L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$ ja R on isometrinen [1]. Näin ollen R laajenee isometriaksi koko avaruuteen \mathfrak{H} ja $R(\mathfrak{H}) \subset L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$.

Olettakaamme, että $\varphi \in C_c(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$. Merkitään nyt

$$(R'\varphi)(g, [\gamma]) = \int_{H^\perp} \langle g, \gamma + \gamma' \rangle \varphi(\gamma + \gamma') d\mu_{H^\perp}(\gamma'),$$

jolloin $R'\varphi : G \times \hat{G}/H^\perp \rightarrow \mathcal{M}$ on jatkuva. Lisäksi huomaamme, että $(R'\varphi)(gh, [\gamma]) = \langle h, \gamma \rangle (\mathfrak{I}\varphi)(g, [\gamma])$ kaikilla $g \in G$, $h \in H$ ja $\gamma \in \hat{G}$. Toteamme välittömästi, että

$$(R'\varphi)(g, [\gamma]) = \langle g, \gamma \rangle (\mathfrak{F}^* \varphi_\gamma)([g])$$

kaikilla $g \in G$ ja $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$, kun $\varphi_\gamma(\eta) := \varphi(\gamma + \eta)$ kaikilla $\gamma \in \hat{G}$ ja $\eta \in H^\perp$. Tästä saadaan suoralla laskulla [1] operaattorin R' isometrisyys, joten R' laajenee isometriaksi koko avaruuteen $L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$ ja $R'(L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})) \subset \mathfrak{H}$. Lisäksi voidaan todeta suoraan, että

$$\langle R'\varphi | \Phi \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle \varphi | R\Phi \rangle_{L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})}$$

kaikilla $\varphi \in C_c(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$ ja $\Phi \in \mathfrak{H}_0$. Yksinkertaisella tiheysargumentilla siis $R' = R^*$ ja R on unitaarinen. Suora lasku [1] osoittaa lisäksi, että kun $\Phi \in \mathfrak{H}_0$, niin $RU(g)\Phi = \lambda(g)R\Phi$ kaikilla $g \in G$; siispä

$$RU(g) = \lambda(g)R$$

kaikilla $g \in G$.

Unitaarimuunnetun spektraalimitan \tilde{P} operointi avaruudessa $L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$ todetaan suoralla laskulla kaavan 40 mukaiseksi. Kaavan 40 johto on lähteessä [1] (*proposition 3.3*). Huomattakoon, että voimme myös kirjoittaa

$$(P(B)\varphi)(\gamma) = \int_{H^\perp} \int_B \langle \gamma', x \rangle \varphi(\gamma - \eta) d\mu(x) d\eta$$

kaikille $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ ja $\gamma \in \hat{G}$, kun φ kuuluu tiettyyn Hilbertin avaruuden \mathcal{H} tiheään aliavaruuteen. \square

Edellinen lause kertoo sen, että esitys V voidaan diagonalisoida, eli on olemassa isometria $W : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$, jolla $WV(g) = \lambda(g)W$ kaikilla $g \in G$ ja kun $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$, niin $WM(B)W^* = \tilde{P}(B)$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$. Selvittääksemme operaattorimitan M rakenteen ja konveksin joukon \mathfrak{M}_Ω^V ääripisteet, on meidän esitettävä isometria W hajoaavassa muodossa. Ensin esittelemme todistuksetta jatkon kannalta merkittävän mittateoreettisen tuloksen. Todistus on lähteessä [1].

Lause 4.2 *Olkoon $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ ryhmän G vahvasti jatkuva esitys ja $\Omega = G/H$, jolla on Haarin mitta μ . Olkoon ν_V esitysduaalin \hat{G} kompakteilla joukoilla äärellinen Borel-mitta, jolla esitys V operoi diagonaalisesti avaruudessa $\mathcal{H} \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} \mathcal{H}_\gamma d\nu_{\hat{G}}(\gamma)$ lauseen 3.3 mukaisesti. Nyt $\mathfrak{M}_\Omega^V \neq \emptyset$ tarkalleen silloin, kun on olemassa aliryhmän H vahvasti jatkuva esitys π , jolla $W_1V(g) = \text{ind}_H^G(\pi)(g)W_1$ kaikilla $g \in G$, kun $W_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}_\pi^\mu$ on isometria ja avaruus \mathfrak{H}_π^μ on induoidun esityksen $\text{ind}_H^G(\pi)$ osion 3.3 mukainen esitysavaruuus. Tällöin lisäksi mitta ν_V on absoluuttisesti jatkuva mitan $\tilde{\nu}$ suhteen, joka saadaan kaavojen 38 ja 37 mukaisesti esityksen π diagonaaliseen esitykseen liittyvästä lauseen 3.3 mukaisesta avaruuden \hat{G}/H^\perp Borel-mitasta ν . On siis olemassa mitallinen funktio $\rho : \hat{G} \rightarrow [0, \infty]$ siten, että*

$$d\nu_V(\gamma) = \rho(\gamma)d\tilde{\nu}(\gamma).$$

Äskeisen lauseen alkupuoli on lauseen 3.10 suora seuraus. Edellinen lause kertoo esimerkiksi, että tapauksessa $H = \{e\}$ $\mathfrak{M}_\Omega^V \neq \emptyset$ tarkalleen silloin, kun ν_V on absoluuttisesti jatkuva esitysduaalin Haarin mitan suhteen; tämä tulos on oleellisesti saatu myös lähteessä [27]. Lauseen 4.2 tulos on varsin ymmärrettävä vertailtaessa esityksen V kahta eri laajennusta λ ja $\tilde{\lambda}$ avaruuksissa $L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M})$ ja vastaavasti $L^2(\hat{G}, \nu_V; \mathcal{M})$. Voimme jatkossa olettaa yksinkertaisesti, että $\nu_V = \tilde{\nu}$, sillä voimme ”upottaa” tiheyden ρ esitysavaruuuden \mathcal{H} komponenttiavaruuksiin \mathcal{H}_γ , $\gamma \in \hat{G}$. Seuraava lause karakterisoi kaikki kovarianssirakenteen \mathfrak{M}_S^V alkioit.

Lause 4.3 *Olkoon $\hat{G} \ni \gamma \mapsto \mathcal{H}_\gamma$ lauseen 3.3 esitykseen V liittävä kenttä Hilbertin avaruuksia, joilla $\mathcal{H} = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \mathcal{H}_\gamma d\tilde{\nu}(\gamma)$. Olkoon $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$. Tällöin on olemassa mitallinen operaattorikenttä $\hat{G} \ni \gamma \mapsto W(\gamma) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\gamma; \mathcal{M})$, jolla $W(\gamma)$ on isometria mitan $\tilde{\nu}$ suhteen melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$ ja jolla*

$$\langle \varphi | M(f)\psi \rangle = \int_{\hat{G}} \int_{H^\perp} (\mathfrak{F}f)(\eta) \langle \varphi(\gamma) | W(\gamma)^* W(\gamma - \eta)\psi(\gamma - \eta) \rangle_{\mathcal{H}_\gamma} d\eta d\tilde{\nu}(\gamma) \quad (41)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ ja $f \in C_c(\Omega)$.

Toisaalta, jos mitallinen operaattorikenttä $\hat{G} \ni \gamma \mapsto W(\gamma) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\gamma; \mathcal{M})$ jollakin äärettömällä Hilbertin avaruudella \mathcal{M} on ylläolevan kaltainen, kaava 41 määrää erään normitetun positiivioperaattorimitan $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$.

Todistus: Olettakaamme, että $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$. Olkoon W ylläesitelty isometria, jolla pätee $WM(B) = \tilde{P}(B)W$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$. Olkoon $\hat{G} \ni \gamma \mapsto T(\gamma) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\gamma; \mathcal{M})$ (mitallinen) kenttä isomerioita ja merkitään $(T\varphi)(\gamma) = T(\gamma)\varphi(\gamma)$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$. Kun muistetaan, että esitys V operoi avaruudessa $\int_{\hat{G}}^{\oplus} \mathcal{H}_\gamma d\nu_{\hat{G}}(\gamma)$ diagonaalisesti lauseen 3.3 mukaisesti, huomaamme, että $TV(g) = \lambda(g)T$ kaikilla $g \in G$. Tällöin operaattori $W' := WT^*$ on osittainen isometria, jolla $W'\lambda(g) = \lambda(g)W'$ kaikilla $g \in G$. Näin ollen kullakin $\varphi \in \mathcal{H} = L^2(\hat{G}, \nu_{\hat{G}}; \mathcal{M})$ voidaan kirjoittaa $(W'\varphi)(\gamma) = W'(\gamma)\varphi(\gamma)$, missä $\hat{G} \ni \gamma \mapsto W'(\gamma)$ on mitallinen operaattorikenttä, jolla $W'(\gamma)$ on osittainen isometria mitan $\tilde{\nu}$ suhteen melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$. Nyt $W = WT^*T = W'T$, ja siis kullakin $\varphi \in \mathcal{H}$ ja $\gamma \in \hat{G}$

$$(W\varphi)(\gamma) = (W'T\varphi)(\gamma) = W'(\gamma)(T\varphi)(\gamma) = W'(\gamma)T(\gamma)\varphi(\gamma) =: W(\gamma)\varphi(\gamma),$$

missä on merkitty $W(\gamma) := W'(\gamma)T(\gamma)$ kullakin $\gamma \in \hat{G}$; isometria W on siis hajoava. Lisäksi koska $W^*W = I_{\mathcal{H}}$, saadaan $T(\gamma)^*W'(\gamma)^*W'(\gamma)T(\gamma) = I_{\mathcal{H}_\gamma}$ mitan $\tilde{\nu}$ suhteen melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$. Tästä taas seuraa, että $W'(\gamma)^*W'(\gamma) = I_{\mathcal{M}}$ melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$, ja siis $W(\gamma)$ on isometria melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$. Kentän $\gamma \mapsto W(\gamma)$ mitallisuus seuraa välittömästi. Havaitsemme nyt, että operaattori

$$W : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\hat{G}, \tilde{\nu}; \mathcal{M}), \quad W = \int_{\hat{G}}^{\oplus} W(\gamma) d\tilde{\nu}(\gamma)$$

on isometria. Kaavan 41 todetaan pätevän suoralla laskulla [1]. Käänteinen tulos on selvä. \square

4.2 Kovarianssirakenteen ääripisteet

Oletamme edelleen, että G on lokaalisti kompakti Abelin ryhmä ja meillä on transitiivinen G -avaruus $\Omega = G/H$ jollakin $H \leq G$ ja että V on ryhmän G vahvasti jatkuva unitaariesitys Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Lisäksi oletamme, että V operoi diagonaalisesti avaruudessa $\int_{\hat{G}}^{\oplus} \mathcal{H}_\gamma d\nu_V(\gamma) \simeq \mathcal{H}$. Jatkossa oletammekin yksinkertaisesti, että \mathcal{H} on kyseistä suoraintegraalimuotoa. Oletamme lisäksi, että $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V (\neq \emptyset)$, jolloin voimme valita $\nu_V = \tilde{\nu}$. Merkitkäämme lisäksi kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$ ja $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$

$$\|\varphi_{[\gamma]}\|_1 := \int_{H^\perp} \|\varphi(\gamma + \eta)\| d\eta$$

aina, kun kyseinen integraalioin määriteltä. Merkitkäämme lisäksi

$$\mathcal{D} := \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \int_{\hat{G}/H^\perp} \|\varphi_{[\gamma]}\|_1^2 d\nu([\gamma]) < \infty \right\},$$

jonka huomataan olevan avaruuden \mathcal{H} aliavaruus käyttämällä Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä. Olkoon $\psi \in C_c(\hat{G}; \mathcal{M})$. Tällöin myös funktio $\gamma \mapsto \|\psi(\gamma)\|$ on jatkuva ja kompaktitukinen, jolloin funktio $[\gamma] \mapsto \int_{H^\perp} \|\psi(\gamma + \eta)\| d\eta := \|\psi_{[\gamma]}\|_1$ on jatkuva ja kompaktitukinen [5]. Tämän funktion tuki sisältyy kompaktiin joukkoon $p(\text{supp}(\psi))$. Kun E on kuten kaavassa 39, on voimassa $\|E(\gamma)\| \leq 1$ melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$ ja voimme arvioida

$$\int_{\hat{G}/H^\perp} \|(E\psi)_{[\gamma]}\|_1^2 d\nu([\gamma]) \leq \int_{\hat{G}/H^\perp} \|\varphi_{[\gamma]}\|_1^2 d\nu([\gamma]) \leq \nu(p(\text{supp}(\varphi))) \max_{[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp} \|\varphi_{[\gamma]}\|_1^2.$$

Siispä koska $E(C_c(\hat{G}; \mathcal{M})) \subset \mathcal{D}$ on avaruuden \mathcal{H} tiheä aliavaruus²⁰, on myös \mathcal{D} tiheä aliavaruus.

Olkoon $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ ja hajoava operaattori W kuten lauseessa 4.3. Määritelmämme operaattori $\mathfrak{W} : \mathcal{D} \rightarrow L^2(\hat{G}/H^\perp, \nu; \mathcal{M})$ asettamalla jokaiselle $\varphi \in \mathcal{D}$ ja $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$

$$(\mathfrak{W}\varphi)([\gamma]) = \int_{H^\perp} W(\gamma + \eta)\varphi(\gamma + \eta)d\eta.$$

Voimme nyt kullakin $\varphi \in \mathcal{D}$ arvioida

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{W}\varphi\|^2 &= \int_{\hat{G}/H^\perp} \int_{H^\perp} \int_{H^\perp} \langle W(\gamma + \zeta)\varphi(\gamma + \zeta) | W(\gamma + \xi)\varphi(\gamma + \xi) \rangle d\xi d\zeta d\nu([\gamma]) \\ &\leq \int_{\hat{G}/H^\perp} \int_{H^\perp} \int_{H^\perp} \|\varphi(\gamma + \zeta)\| \|\varphi(\gamma + \xi)\| d\xi d\zeta d\nu([\gamma]) \\ &\leq \int_{\hat{G}/H^\perp} \|\varphi_{[\gamma]}\|_1^2 d\nu([\gamma]) < \infty, \end{aligned}$$

missä on käytetty tietoa, että $W(\gamma) \leq 1$ melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$. Operaattori \mathfrak{W} on siis hyvinmääritelty ja rajoitettu aliavaruudessa \mathcal{D} . Olkoot $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ ja $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ kompakti. Kaavasta 41 seuraa nyt käyttämällä Fubinin lausetta

$$\begin{aligned} &\langle \varphi | M(B)\psi \rangle \\ &= \int_B \int_{\hat{G}} \int_{H^\perp} \langle g, \xi \rangle \langle W(\gamma)\varphi(\gamma) | W(\gamma - \xi)\psi(\gamma - \xi) \rangle_{\mathcal{M}} d\xi d\tilde{\nu}(\gamma) d\mu([g]) \\ &= \int_B \int_{\hat{G}/H^\perp} \int_{H^\perp} \int_{H^\perp} \overline{\langle g, \xi \rangle} \langle W(\gamma + \zeta)\varphi(\gamma + \zeta) | W(\gamma + \zeta + \xi)\psi(\gamma + \zeta + \xi) \rangle_{\mathcal{M}} \times \\ &\quad \times d\xi d\zeta d\nu([\gamma]) d\mu([g]) \\ &= \int_B \int_{\hat{G}/H^\perp} \int_{H^\perp} \int_{H^\perp} \langle W(\gamma + \zeta)(V(g)^*\varphi)(\gamma + \zeta) | W(\gamma + \xi)(V(g)^*\psi)(\gamma + \xi) \rangle_{\mathcal{M}} \times \\ &\quad \times d\xi d\zeta d\nu([\gamma]) d\mu([g]). \end{aligned}$$

Tässä laskussa on käytetty annihilaattoriryhmän H^\perp Haarin mitan sekä mitan $\tilde{\nu}$ ominaisuuksia 37 ja 38. Tämä tulos pätee itse asiassa kaikille $\mathcal{B}(\Omega)$, sillä Ω on σ -kompakti.

²⁰Tämä johtuu siitä, että $\|E\| \leq 1$.

Huomaamme siis, että kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ ja $B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\langle \varphi | M(B)\psi \rangle = \int_B \langle \mathfrak{W}V(g)^*\varphi | \mathfrak{W}V(g)^*\psi \rangle d\mu([g]). \quad (42)$$

Määritelmämme suoraintegraaliavaruus

$$\mathbf{H} = \int_{\hat{G}/H^\perp}^\oplus \mathbf{H}_{[\gamma]} d\nu([\gamma]),$$

missä kullakin $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$ avaruus $\mathbf{H}_{[\gamma]}$ on vektoreiden $\int_{H^\perp} W(\gamma + \eta)E(\gamma + \eta)\varphi(\gamma + \eta) d\eta$, $\varphi \in C_c(\hat{G}; \mathcal{M})$, virittämä Hilbertin avaruus. Nyt $\mathfrak{W}(\mathcal{D}) \subset \mathbf{H}$. Olkoon $\Phi \in \mathbf{H}$ sellainen, että

$$\langle \mathfrak{W}\psi | \Phi \rangle_{\mathbf{H}} = 0$$

kaikilla $\psi \in \mathcal{D}$. Olkoot $\varphi \in C_c(\hat{G}; \mathcal{M})$ ja $B \in \mathcal{B}(\hat{G}/H^\perp)$ mielivaltaisia ja määritelmämme funktio $\psi := (\chi_B \circ p)E\varphi$, missä $p : \hat{G} \rightarrow \hat{G}/H^\perp$ on tekijäprojektio. Selvästi $\psi \in \mathcal{D}$ ja sijoittamalla tämä ψ edelliseen kaavaan saamme

$$\int_B \int_{H^\perp} \langle W(\gamma + \eta)E(\gamma + \eta)\varphi(\gamma + \eta) | \Phi([\gamma]) \rangle d\eta d\nu([\gamma]) = 0.$$

Koska $\varphi \in C_c(\hat{G}; \mathcal{M})$ ja $B \in \mathcal{B}(\hat{G}/H^\perp)$ ovat mielivaltaisia, täytyy päteä

$$\int_{H^\perp} \langle W(\gamma + \eta)E(\gamma + \eta)\varphi(\gamma + \eta) | \Phi([\gamma]) \rangle d\eta = 0$$

kaikilla $\varphi \in C_c(\hat{G}; \mathcal{M})$ ja melkein kaikilla $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$. Jokaista vektoria $\Phi([\gamma]) \in \mathbf{H}_{[\gamma]}$ voidaan approksimoida muotoa $\int_{H^\perp} W(\gamma + \eta)E(\gamma + \eta)\chi(\gamma + \eta) d\eta$, $\chi \in C_c(\hat{G}; \mathcal{M})$, olevilla vektoreilla, mistä seuraa, että $\Phi([\gamma]) = 0$ melkein kaikilla $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$, eli $\Phi = 0$. Tästä seuraa, että \mathbf{H} on kuva-avaruuden $\mathfrak{W}(\mathcal{D})$ sulkeuma.

Olkoon $\tilde{\Pi}$ diagonaalisen esityksen Π rajoittuma avaruuteen \mathbf{H} , eli

$$\tilde{\Pi}(h) = \int_{\hat{G}/H^\perp}^\oplus \langle h, \gamma \rangle I_{\mathbf{H}_{[\gamma]}} d\nu([\gamma]), \quad h \in H.$$

Kaikille $\varphi \in \mathcal{D}$, $h \in H$ ja $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$ pätee nyt

$$(\mathfrak{W}V(h)\varphi)([\gamma]) = \int_{H^\perp} \langle h, \gamma + \eta \rangle W(\gamma + \eta)\varphi(\gamma + \eta) d\eta = \langle h, \gamma \rangle (\mathfrak{W}\varphi)([\gamma]),$$

eli voimme kaikilla $h \in H$ kirjoittaa

$$\mathfrak{W}V(h)|_{\mathcal{D}} = \tilde{\Pi}(h)\mathfrak{W}. \quad (43)$$

Olkoon $s : \Omega \rightarrow G$ Borel-mitallinen sektio, eli $s(x) \in x$ kaikilla $x \in \Omega$; tällainen on olemassa, koska G on σ -kompakti [28] (lemma 3). Olettakaamme nyt, että itseadjungoitu operaattori $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $\|A\| \leq 1$, on sellainen, että

$$\int_{\Omega} \langle \mathfrak{W}(V \circ s)(x)^*\varphi | A\mathfrak{W}(V \circ s)(x)^*\psi \rangle d\mu(x) = 0 \quad (44)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$. Merkitsemme jatkossa $A^\pm := I_{\mathbf{H}} \pm A$; selvästi A^\pm ovat positiivisia operaattoreita. Johtuen vaatimuksesta 44 voimme määritellä operaattorimitat $M_\pm \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ asettamalla kaikille $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ ja $B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\langle \varphi | M_\pm(B) \psi \rangle = \int_B \langle \mathfrak{W}(V \circ s)(x)^* \varphi | A^\pm \mathfrak{W}(V \circ s)(x)^* \psi \rangle d\mu(x). \quad (45)$$

Jotta operaattorimitat M_\pm olisivat esityksen V suhteen kovariantteja, on pädeävä kommutointirelaatiot $[M_\pm(B), V(h)] = O$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ ja $h \in H$.²¹ Nopealla laskulla käyttäen yhtälöä 43 huomaamme, että tämä on sama kuin vaatimus $[A, \tilde{\Pi}(h)] = O$ kaikilla $h \in H$. Tämä merkitsee sitä, että operaattorin A on oltava hajoava, eli

$$A = \int_{\hat{G}/H^\perp}^\oplus A_{[\gamma]} d\nu([\gamma]),$$

missä $A_{[\gamma]} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{[\gamma]})$ on itseadjungoitu mitan ν suhteen melkein kaikilla $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$, ja

$$\text{ess sup}_{[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp} \|A_{[\gamma]}\| \leq 1.$$

Yksinkertainen laskelma osoittaa, että kaikki tällaisesta hajoavasta operaattorista ja kovariantista suureesta saatavat operaattorimitat M_\pm ovat kovariantteja. Jos $A \neq O$, eli on olemassa joukko $Z \in \mathcal{B}(\hat{G}/H^\perp)$, $\nu(Z) > 0$, jolla $A_{[\gamma]} \neq O$ kaikilla $[\gamma] \in Z$, ovat suuret M_\pm erisuuret, ja $M = \frac{1}{2}(M_+ + M_-)$, eli M ei voi olla kovarianssirakenteen \mathfrak{M}_Ω^V äärisuure.

Olettakaamme, että hajoava operaattori $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ on kuten edellä ja täyttää ehdon 44. Koska kullakin $f \in C_c(H^\perp)$ ja $\zeta, \xi \in H^\perp$ pätee [5] (theorem 4.21, theorem 4.32)

$$\int_\Omega \int_{H^\perp} \langle g, \zeta - \xi \rangle f(\xi) d\xi d\mu([g]) = f(\zeta), \quad (46)$$

voimme laskea kullakin $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ käyttäen ehtoa 44

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \int_{\hat{G}/H^\perp} \int_{H^\perp} \int_{H^\perp} \langle g, \zeta - \xi \rangle \langle W(\gamma + \zeta) \varphi(\gamma + \zeta) | A_{[\gamma]} W(\gamma + \xi) \psi(\gamma + \xi) \rangle \times \\ &\quad \times d\xi d\zeta d\nu([\gamma]) d\mu([g]) \\ &= \int_{\hat{G}/H^\perp} \int_{H^\perp} \langle W(\gamma + \eta) \varphi(\gamma + \eta) | A_{[\gamma]} W(\gamma + \eta) \psi(\gamma + \eta) \rangle d\eta d\nu([\gamma]). \end{aligned} \quad (47)$$

Tämä merkitsee sitä, että melkein kaikilla $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$ ja $\eta \in H^\perp$ pätee

$$W(\gamma + \eta)^* A_{[\gamma]} W(\gamma + \eta) = O.$$

Nyt voimme karakterisoida joukon \mathfrak{M}_Ω^V ääripisteet.

²¹Tämä merkitsee sitä, että esitys 45 ei riipu sektorin s valinnasta

Lause 4.4 Olkoon $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ ja $\gamma \mapsto W(\gamma)$ siihen liittyvä lauseen 4.3 mukainen isometriakenttä sekä operaattori \mathfrak{W} ja avaruudet \mathcal{D} ja

$$\mathbf{H} = \int_{\hat{G}/H^\perp}^\oplus \mathbf{H}_{[\gamma]} d\nu([\gamma])$$

kuten yllä. Suure M on kovarianssirakenteen \mathfrak{M}_Ω^V äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole sellaista hajoavaa operaattoria $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $A \neq O$,

$$A = \int_{\hat{G}/H^\perp}^\oplus A_{[\gamma]} d\nu([\gamma]), \quad A_{[\gamma]} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{[\gamma]}), \quad [\gamma] \in \hat{G}/H^\perp,$$

jolle pätsi melkein kaikilla $[\gamma] \in \hat{G}/H^\perp$ ja $\gamma' \in [\gamma]$ ehto

$$\tilde{W}(\gamma')^* A_{[\gamma]} \tilde{W}(\gamma') = O. \quad (48)$$

Todistus: Olkoon nyt $\gamma \mapsto W(\gamma)$ operaattorimitaan $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ liittyvä lauseen 4.3 mukainen operaattorikenttä ja olkoon hajoava operaattori $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ kuten yllä. Kuten lauseen 2.6 todistuksessa voimme nytkin olettaa, että $A^* = A$ ja $\|A\| \leq 1$. Määritellämme seuraavaksi positiiviset operaattorit $A^\pm := I_{\mathbf{H}} \pm A$, jotka ovat siis erisuuria. Kuten kaavassa 45 voimme näiden operaattorien avulla määrittellä keskenään erisuuret operaattorimitat $M_\pm \in \mathfrak{M}_\Omega^V$. Voimme nyt antaa operaattorimitan M epätriviaalina konveksikombinaationa $M = \frac{1}{2}(M_+ + M_-)$, ja siis $M \notin \text{Ext}(\mathfrak{M}_\Omega^V)$.

Olettakaamme sitten, että $M \notin \text{Ext}(\mathfrak{M}_\Omega^V)$. Olettakaamme lisäksi, että $\hat{G} \ni \gamma \mapsto W(\gamma)$ on lauseen 4.3 mukainen operaattorimitaan M liittyvä isometriakenttä, ja olkoot operaattori \mathfrak{W} ja avaruudet \mathcal{D} ja \mathbf{H} kuten yllä. Olkoot nyt semispektraalimitat $M_\pm \in \mathfrak{M}_\Omega^V$, $M_\pm \neq M$, sellaiset, että $M = \frac{1}{2}M_+ + \frac{1}{2}M_-$. Merkitsemme näihin operaattorimittoihin liittyviä lauseen 4.3 mukaisia isometriakenttiä vastaavasti $\hat{G} \ni \gamma \mapsto W_\pm(\gamma)$. Voimme jälleen näistä operaattorikentistä muodostaa operaattorit $\mathfrak{W}_\pm : \mathcal{D} \rightarrow L^2(\hat{G}/H^\perp, \nu; \mathcal{M})$ kuten suurelle M Selvästi näemme, että $\mathfrak{W}^* \mathfrak{W} = \frac{1}{2}(\mathfrak{W}_+^* \mathfrak{W}_+ + \mathfrak{W}_-^* \mathfrak{W}_-)$, joten voimme arvioida

$$\|\mathfrak{W}_\pm \varphi\| \leq \sqrt{2} \|\mathfrak{W} \varphi\| \quad (49)$$

kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}$. Olettakaamme nyt, että $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ ovat sellaiset, että $\mathfrak{W} \varphi = \mathfrak{W} \psi$. Käyttämällä epäyhtälöä 49 toteamme, että myös $\|\mathfrak{W}_\pm(\varphi - \psi)\| = 0$, eli $\mathfrak{W}_\pm \varphi = \mathfrak{W}_\pm \psi$. Voimme määrittellä nyt seskvilineaarimuodot $F_\pm : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$ (tiheästi) kaavalla

$$F_\pm(\mathfrak{W} \varphi, \mathfrak{W} \psi) = \langle \mathfrak{W}_\pm \varphi | \mathfrak{W}_\pm \psi \rangle$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$. Käyttämällä jälleen epäyhtälöä 49 huomaamme, että $F_\pm(\mathfrak{W} \varphi, \mathfrak{W} \varphi) \leq 2 \|\mathfrak{W} \varphi\|^2$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}$, jolloin Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla muodot F_\pm ovat hyvinmääriteltyjä ja rajoitettuja. Näinollen on olemassa positiiviset operaattorit $A^\pm \in$

$\mathcal{L}(\mathbf{H})$, joilla $F_{\pm}(\cdot, \cdot) = \langle \mathfrak{W} \cdot | A^{\pm} \mathfrak{W} \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$. Koska suureet M_{\pm} ovat kovariantteja, täytyy aieman perusteella operaattoreiden A^{\pm} olla hajoavia;

$$A^{\pm} = \int_{\hat{G}/H^{\perp}}^{\oplus} A_{[\gamma]}^{\pm} d\nu([\gamma]), \quad A_{[\gamma]} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{[\gamma]}), \quad [\gamma] \in \hat{G}/H^{\perp}.$$

Operaattori $A := A^{+} - A^{-}$ täyttää selvästi ehdon 44, joka on ekvivalentti ehdon 48 kanssa; operaattori A on selvästi itsekin hajoava. Koska lisäksi $M^{+} \neq M \neq M^{-}$, huomaamme, että A ei voi olla nollaoperaattori. Väitteen mukainen nollasta poikkeava operaattori siis löytyy. \square

4.2.1 Erityistapauksia

Eräissä erityistapauksissa voidaan ylläolevia tuloksia yksinkertaistaa. Kun $H = \{e\}$, on tekijäavaruus \hat{G}/H^{\perp} ja mitta ν triviaali, ja avaruuden $\Omega \simeq G$ G -invariantiksi mitaksi voimme valita (jonkin) ryhmän G Haarin mitan m . Mitta $\tilde{\nu} : \mathcal{B}(\hat{G}) \rightarrow [0, \infty]$ on nyt lauseen 4.2 mukaan absoluuttisesti jatkuva ryhmän \hat{G} Haarin mitan $d\gamma$ suhteen. Merkitkäämme jälleen $\mathfrak{W} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$,

$$\mathfrak{W}\varphi = \int_{\hat{G}} W(\gamma)\varphi(\gamma) d\gamma$$

kaikilla $\varphi \in \mathcal{D} = (L^1 \cap L^2)(\hat{G}, d\gamma, \mathcal{M})$. Merkitsemme jälleen aliavaruuden $\mathfrak{W}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{M}$ sulkeumaa symbolilla \mathbf{H} . Tapauksessa $H = \{e\}$, seuraa lauseesta 4.4 yksinkertaisempi äärisuureiden karakterisointi, joka on johdettu myös lähteessä [29].

Seuraus 4.1 *Suure $M \in \mathfrak{M}_G^V$ on äärisuure tarkalleen silloin, kun siitä, että on sellainen $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, että*

$$W(\gamma)^* A W(\gamma) = O$$

melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$, seuraa, että $A = O$, kun kenttä $\hat{G} \ni \gamma \mapsto W(\gamma) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\gamma}, \mathcal{M})$ suureeseen M liittyvä isometriakenttä on kuten lauseessa 4.3.

Kompaktin Abelin ryhmän tapauksessa voimme jälleen yksinkertaistaa kovarianssirakenteen \mathfrak{M}_{Ω}^V alkioiden karakterisointia ja ääripisteiden määrittystä. Tulemme huomaamaan, että tämän mahdollistaa erityisesti karakteriryhmän \hat{G} diskreettisyys. Olkoon siis G kompakti Abelin ryhmä ja H sen jokin aliryhmä ja $\Omega = G/H$ transitiivinen G -avaruus. Olkoon m ryhmän G (jokin) Haarin mitta. Olkoon μ jälleen avaruuden Ω G -invariantti Borelin mitta. Indeksoimme karakterit $\gamma \in \hat{G}$ joukolla \mathbb{N}_n , missä n on joukon \hat{G} kardinaaliteetti. Olkoon $c : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}$ kuvaus, jolla $c(k) = c(l)$ tarkalleen silloin, kun $\gamma_k - \gamma_l \in H^{\perp}$; funktio c siis erottaa toisistaan tekijäavaruuden \hat{G}/H^{\perp} alkiot, ja alkukuvan $c^{-1}(k)$ alkiot indeksoivat jonkin tekijäluokan alkiot aina, kun $c^{-1}(k) \neq \emptyset$.

Olkoon $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ ryhmän G vahvasti jatkuva esitys separoituvassa Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Esittäkäämme avaruus \mathcal{H} jälleen lauseen 3.2 mukaisena esityksen V diagonalisoivana suorana summana $\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_n} \mathcal{H}_k$. Merkitsemme kunkin $\varphi \in \mathcal{H}$ vastaavaa hajotelmaa $\varphi = \sum_{k \in \mathbb{N}_n} \varphi_k$, $\varphi_k \in \mathcal{H}_k$ kullakin $k \in \mathbb{N}_n$. Määrittelemme aliavaruuden $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ kuten aiemminkin. Olettakaamme, että $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$, johon lause 4.3 liittää operaattorikentän

$$\mathbb{N}_n \ni k \mapsto W(\gamma_k) =: W_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_k, \mathcal{M}).$$

Huomaamme, että kaavassa 41 ei esiinny termejä, joissa ilmenisi operaattorituloja $W_k^* W_l$, kun $\gamma_k - \gamma_l \notin H^\perp$. Voimmekin siis aina mahdollisesti määrittelemällä kenttä $k \mapsto W_k$ uudelleen olettaa, että avaruudet

$$\mathcal{M}_k := \left\{ \sum_{c(l)=k} W_l \varphi_l \mid \varphi \in \mathcal{D}^1 \right\} \quad (50)$$

ovat keskenään ortogonaalit,²² eli voimme olettaa, että

$$\gamma_k - \gamma_l \notin H^\perp \Rightarrow W_k^* W_l = O. \quad (51)$$

Voimme nyt kirjoittaa yksinkertaisesti kuillekin $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \int_B \sum_{k, l \in \mathbb{N}_n} \langle W_k (V(g)^* \varphi)_k | W_l (V(g)^* \psi)_l \rangle d\mu([g]). \quad (52)$$

Määritelkäämme operaattori $\mathfrak{W} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$ asettamalla kaikille $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\mathfrak{W}\varphi = \sum_{k \in \mathbb{N}_n} W_k \varphi_k, \quad (53)$$

ja merkitkäämme symbolilla \mathbf{H} aliavaruuden $\mathfrak{W}(\mathcal{D})$ sulkeumaa avaruudessa \mathcal{M} . Oletta-
kaamme, että operaattori $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ on itseadjungoitu, $\|A\| \leq 1$ ja aliavaruudet $A(\mathcal{M}_k)$ ovat keskenään ortogonaalisia, eli operaattori A säilyttää avaruuksien \mathcal{M}_k ortogonaalisuuden. Olettakaamme lisäksi, että

$$W_k^* A W_k = O$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}_n$. Voimmekin jälleen määritellä kaikille $k, l \in \mathbb{N}_n$ seskvilineaarimuodot $\Pi_{k,l}^\pm : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\Pi_{k,l}^\pm(\varphi, \psi) = \langle \varphi_k | W_k^* (I_{\mathcal{M}} \pm A) W_l \psi_l \rangle$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, jolloin saamme kovariantit suureet $M_\pm \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ asettamalla kaikille $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ ja $B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \int_B \sum_{k, l \in \mathbb{N}_n} \Pi_{k,l}^\pm(V(g)^* \varphi, V(g)^* \psi) d\mu([g]).$$

²²Tämä on mahdollista, sillä $\dim \mathcal{M} = \infty$.

Huomaamme välittömästi, että $M = \frac{1}{2}M^+ + \frac{1}{2}M^-$. Lisäksi, jos $A \neq O$, on voimassa $M^\pm \neq M$.

Olettakaamme sitten, että $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ ei ole kovarianssirakenteen ääripiste, jolloin on siis olemassa suureet $M^\pm \in \mathfrak{M}_\Omega^V$, joilla $M = \frac{1}{2}M^+ + \frac{1}{2}M^-$. Olkoon jälleen $k \mapsto W_k$ suureeseen M liittyvä operaattorikenttä, ja olkoot $k \mapsto W_k^\pm$ vastaavasti suureisiin M^\pm liittyvät operaattorikentät, joilla kaikilla on ominaisuus 51, ja $W_k^*W_k = W_k^{\pm*}W_k^\pm = I_{\mathcal{H}_k}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_n$. Olkoon jälleen $\mathfrak{W} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$ kaavan 53 mukainen suureeseen M liittyvä operaattori, jonka kuva-avaruuden sulkeumaa merkitsemme taas symbolilla \mathbf{H} . Määritelläkäämme nyt seskvilineaarimuodot $\Pi^\pm : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\Pi^\pm(\mathfrak{W}\varphi, \mathfrak{W}\psi) = \sum_{k, l \in \mathbb{N}_n} \langle W_k^\pm \varphi | W_l^\pm \psi \rangle$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, jotka ovat rajoitettuja, jolloin on olemassa positiiviset nollasta poikkeavat operaattorit $A^\pm \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, joilla

$$\Pi^\pm(\Phi, \Psi) = \langle \Phi | A^\pm \Psi \rangle$$

kaikilla $\Phi, \Psi \in \mathbf{H}$. Koska $W_k^{\pm*}W_l^\pm = O$ aina, kun $\gamma_k - \gamma_l \notin H^\perp$, täytyy operaattorien A^\pm säilyttää avaruuksien \mathcal{M}_k , $k \in \mathbb{N}_n$, ortogonaalisuus, eli $W_k^*AW_l = O$ aina, kun $\gamma_k - \gamma_l \notin H^\perp$. On siis olemassa operaattori $A := A^+ - A^-$, joka säilyttää avaruuksien \mathcal{M}_k ortogonaalisuuden, jolla

$$W_j^*AW_j = O$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}_n$, sillä $W_j^*A^\pm W_j = I_{\mathcal{H}_j}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}_n$. Voimme antaa kovarianssirakenteen ääripisteille seuraavan karakterisoinnin kompaktin Abelin ryhmän tapauksessa:

Lause 4.5 *Olkoon G kompakti Abelin ryhmä, $\Omega = G/H$ jollakin $H \leq G$ ja $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ vahvasti jatkuva esitys. Olkoon $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$, ja olkoon $k \mapsto W_k$ siihen liittyvä operaattorikenttä. Suure M on äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole olemassa nollasta poikkeavaa avaruuksien \mathcal{M}_k , $k \in \mathbb{N}_n$, (katso kaava 50) ortogonaalisuuden säilyttävää operaattoria $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, jolle*

$$W_j^*AW_j = O \tag{54}$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}_n$.

4.2.2 Joukon $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ kovariantit äärisuureet

Tässä osiossa tarkoituksenamme on vertailla edellä saatuja tuloksia osion 2.4 tuloksiin; karakterisoimme ne kovarianssirakenteen \mathfrak{M}_Ω^V suureet, jotka ovat suurejoukon $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ äärisuureita. Olkoon jälleen G huomautuksen 3.1 ehdot täyttävä Abelin ryhmä ja $H \leq G$ suljettu aliryhmä. Merkitsemme jälleen $\Omega := G/H$. Olkoon jälleen μ tekijäavaruuden Ω G -invariantti mitta. Koska ryhmä G on metristyvä ja σ -kompakti, voimme valita mitallisen

sektion²³ $s : \Omega \rightarrow G$ tekijäprojektiolle $G \ni g \mapsto [g] \in \Omega$ lähteen [28] (lemma 3) mukaan. Lisäksi johtuen ryhmän G σ -kompaktisuudesta, on myös Ω σ -kompakti, jolloin invariantti mitta μ on σ -äärellinen.

Oletamme, että ryhmällä G on unitaariesitys V Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} ja että \mathcal{H} on tämän esityksen suhteen jo aiemmin esiteltyä suoraintegraalimuotoa. Olettakaamme, että $\mathfrak{M}_\Omega^V \neq \emptyset$, ja olkoon \mathcal{M} kiinnitetty ääretönulotteinen Hilbertin avaruus. Olkoon $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$, johon liitämme edellisten osioiden mukaisen isometriakentän $\gamma \mapsto W(\gamma) : \mathcal{H}_\gamma \rightarrow \mathcal{M}$ ja sen määräämän operaattorin $\mathfrak{W} : \mathcal{D} \rightarrow L^2(\hat{G}/H^\perp, \nu; \mathcal{M})$ ja suoraintegraaliavaruuden \mathbf{H} . Määritkäämme sektion s avulla operaattorit $\mathcal{J}_s : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H})$ ja $\mathcal{J}_s(x) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{H}$ kullakin $x \in \Omega$ asettamalla kaikille $\varphi \in \mathcal{D}$ ja $x \in \Omega$

$$(\mathcal{J}_s\varphi)(x) = \mathfrak{W}(V \circ s)(x)^*\varphi = \mathcal{J}_s(x)\varphi,$$

eli $\mathcal{J}_s(x) = \mathfrak{W}(V \circ s)(x)^*$ kaikilla $x \in \Omega$. Voimme kirjoittaa käyttämällä kaavaa 42 kaikille $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ ja $B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \varphi | M(B)\psi \rangle &= \int_B \langle \mathfrak{W}(V \circ s)(x)^*\varphi | \mathfrak{W}(V \circ s)(x)^*\psi \rangle d\mu(x) = \int_B \langle \mathcal{J}_s(x)\varphi | \mathcal{J}_s(x)\psi \rangle d\mu(x) \\ &= \langle \mathcal{J}_s\varphi | P(B)\mathcal{J}_s\psi \rangle_{L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H})}, \end{aligned} \quad (55)$$

missä $P \in \Sigma(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ on spektraalimitta, jolle $P(B)\Phi = \chi_B\Phi$ kaikille $\Phi \in L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H})$. Lisäksi huomaamme suoralla laskulla, että \mathcal{J}_s on isometria. Hajotelma 55 ei riipu mitallisen sektion s valinnasta.

Kolmikko $(L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H}), P, \mathcal{J}_s)$ antaa siis suurelle M Naimarkin laajennuksen. Tämä Naimarkin laajennus on myös minimaalinen, sillä avaruuden \mathbf{H} määritelmän nojalla joukko $\{\mathfrak{W}\varphi | \varphi \in \mathcal{D}\}$ on avaruuden \mathbf{H} tiheä aliavaruus, jolloin helposti toteamme, että joukon $\{P(B)\mathcal{J}_s\varphi | B \in \mathcal{B}(\Omega), \varphi \in \mathcal{H}\}$ osajoukon $\{\chi_B\mathfrak{W}(V \circ s)(\cdot)^*\varphi | B \in \mathcal{B}(\Omega), \varphi \in \mathcal{D}\}$ lineaarinen verho on jo avaruuden $L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H})$ tiheä aliavaruus. Koska lisäksi kompleksimitat $\mathcal{B}(\Omega) \ni B \mapsto \langle \varphi | M(B)\psi \rangle$ ovat absoluuttisesti jatkuvia σ -äärellisen mitan μ suhteen, on tämä minimaalinen Naimarkin laajennus lauseen 2.5 mukainen. Lauseen 2.6 mukainen äärisuure-ehto kuuluu nyt niin, että kovariantti suure M on koko suurejoukon $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ äärisuure tarkalleen silloin, kun kaikki hajoavat operaattorit $D \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H}))$, $(D\Phi)(x) = D(x)\Phi(x)$ kaikilla $\Phi \in L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H})$ ja $x \in \Omega$, joilla $\mathcal{J}_s^*D\mathcal{J}_s = O$, ovat nollaoperaattoreita.

Olkoon $D \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H}))$ hajoava ja $s, s' : G \rightarrow \Omega$ toisistaan eriäviä mitallisia sektioita. Huomaamme käyttämällä yhtälöä 43, että

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle \mathcal{J}_{s'}(x)\varphi | D(x)\mathcal{J}_{s'}(x)\psi \rangle d\mu(x) &= \int_\Omega \langle \mathcal{J}_s(x)\varphi | \tilde{\Pi}(h(x))D(x)\tilde{\Pi}(h(x))^*\mathcal{J}_s(x)\psi \rangle d\mu(x) \\ &= \int_\Omega \langle \mathcal{J}_s(x)\varphi | \tilde{D}(x)\mathcal{J}_s(x)\psi \rangle d\mu(x), \end{aligned}$$

²³Siis $s : \Omega \rightarrow G$ on Borel-mitallinen kuvaus, jolla $s(x) \in x$ kullakin $x \in \Omega$.

missä $h : \Omega \rightarrow H$ on mitallinen kuvaus, jolle $h(x) = s'(x)s(x)^{-1}$ kaikilla $x \in \Omega$ ja $\tilde{D}(x) = \Pi(h(x))D(x)\Pi(h(x))^*$ kaikilla $x \in \Omega$. Operaattori $\tilde{D} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H}))$, jolle $(\tilde{D}\Phi)(x) = \tilde{D}(x)\Phi(x)$ kaikilla $\Phi \in L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H})$ ja $x \in \Omega$ on unitaariekvivalentti operaattorin D kanssa. Tästä seuraa, että jos $\mathcal{J}_s D \mathcal{J}_s = O$ kaikilla hajoavilla $D \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H}))$ jollakin mitallisella sektioilla s , sama pätee kaikilla mitallisilla sektioilla. Muotoilemme tämän tuloksen lauseeksi.

Lause 4.6 *Olkoon $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ kovariantti suure. Olkoon $\gamma \mapsto W(\gamma)$ suureeseen M liittyvä lauseen 4.3 mukainen isometriakenttä ja \mathfrak{W} siitä saatava operaattori ja \mathbf{H} sen kuvaavaruuden sulkeuma. Suure M on äärisuure joukossa $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ tarkalleen silloin, kun ei ole sellaista nollasta poikkeavaa hajoavaa operaattoria $D \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H}))$, $(D\Phi)(x) = D(x)\Phi(x)$ kaikilla $\Phi \in L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H})$ ja $x \in \Omega$, missä $D(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ kaikilla $x \in \Omega$, jolle jollakin mitallisella sektioilla $s : G \rightarrow \Omega$ pätee*

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \langle \mathfrak{W}(V \circ s)(x)^* \varphi | D(x) \mathfrak{W}(V \circ s)(x)^* \psi \rangle d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} \int_{\hat{G}/H^\perp} \int_{H^\perp} \int_{H^\perp} \langle \zeta - \xi, s(x) \rangle \langle W(\gamma + \zeta) \varphi(\gamma + \zeta) | D(x) W(\gamma + \xi) \psi(\gamma + \xi) \rangle \times \\ &\quad \times d\xi d\zeta d\nu([\gamma]) d\mu(x) \end{aligned} \quad (56)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$. Lisäksi M on spektraalimitta tarkalleen silloin, kun ylläesitelty operaattori $\mathcal{J}_s : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H})$ on unitaarinen.

Aina kun $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ on kovariantti suure ja äärisuure koko suurejoukossa $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$, on se toki myös kovarianssirakenteen äärisuure. Näemme tämän suoraankin ylläolevaa lausetta käyttämällä: Olettakaamme, että M on koko suureperheen $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ äärisuure, mutta se ei olisi kovarianssirakenteen äärisuure. Löydämme tällöin lauseen 4.4 perusteella hajoavan nollasta poikkeavan operaattorin $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$

$$A = \int_{\hat{G}/H^\perp}^{\oplus} A_{[\gamma]} d\nu([\gamma]), \quad A_{[\gamma]} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{[\gamma]}), \quad [\gamma] \in \hat{G}/H^\perp,$$

jolla pätee ehto 48. Voimme määritellä hajoavan operaattorin $D \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H}))$, jolla $(D\Phi)(x) = A\Phi(x)$ kaikilla $\Phi \in L^2(\Omega, \mu; \mathbf{H})$ ja $x \in \Omega$. Suora lasku, jossa sovelletaan kaavaa 46, osoittaa, että ehto 56 toteutuu operaattorilla $D \neq O$ ja millä tahansa sektioilla s . Tämä tuottaa ristiriidan. Suureen M on siis oltava myös kovarianssirakenteen äärisuure.

4.3 Kovariantit paikka- ja vaihesuureet

Tässä osiossa tarkastelemme paria edellä kehiteltyä teoriaa soveltavaa esimerkkiä, joissa kummassakin suureiden arvoavaruudet ovat samalla symmetriaryhmiä; kovariantit suurejoukot ovat siis muotoa \mathfrak{M}_G^V , missä G on lokaalisti kompakti Abelin ryhmä ja V on

sen esitys. Näissä esimerkeissä tarkastellaan muunmuassa kvanttiobjektin lokalisointia kiinteässä koordinaatistossa. Ensimmäisessä esimerkissä avaruus on suljettu tai syklinen, tarkemmin sanottuna muotoa $G = \mathbb{T}^n$. Erityistapauksessa $n = 1$ tutkimme sähkömagneettisen moodin (esimerkiksi lasersäteen) vaihesuureita. Toisessa esimerkissä objektia lokalisoidaan vapaassa avaruudessa \mathbb{R}^n .

4.3.1 Vaihesuureet ja paikkasuureet syklisessä avaruudessa

Olkoon $l \in \mathbb{N}$. Tutkikaamme syklistä ryhmää, joka voidaan samaistaa l -kertaiseen karteesiseen tuloon väliä $[0, 2\pi)$, joka on varustettu kommutoivalla ryhmälaskutoimituksella

$$[0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \ni (x, y) \mapsto x + y \pmod{2\pi}.$$

Jatkossa tarkastelemme ryhmää ekvivalentissa muodossa \mathbb{T}^l , joka on l -kertainen karteesinen tulo modulin 1 multiplikatiivisesta kompleksilukuryhmästä, toruksesta \mathbb{T} . Toisin sanoen

$$\mathbb{T}^l = \{(w_1, \dots, w_l) \in \mathbb{C}^l \mid |w_k| = 1 \text{ kaikilla } k = 1, \dots, l\}.$$

Kahden alkion $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{T}^l$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_l)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_l)$, välinen tulo on siis

$$\mathbf{vw} = (v_1 w_1, \dots, v_l w_l).$$

Alkion $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_l) \in \mathbb{T}^l$ käänteisalkio on $\bar{\mathbf{w}} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_l)$. Varustamme ryhmän \mathbb{T}^l luonnollisella tulotopologialla, jolloin \mathbb{T}^l on kompakti Abelin ryhmä. Varustamme ryhmän \mathbb{T}^l Haarin mitalla $\mu_l = \mu \times \dots \times \mu$, joka on l -kertainen tulo ryhmän \mathbb{T} normitetusta Lebesguen/Borelin mitasta μ , jolle

$$d\mu(z) = \frac{1}{2\pi} d(\arg(z)), \quad z \in \mathbb{T}.$$

Karakteriryhmä $\hat{\mathbb{T}}^l$ on diskreetti ja homeomorfinen additiiviselle ryhmälle \mathbb{Z}^l [5]. Dualiteetin määrää kaava

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{m} \rangle = w_1^{m_1} \dots w_l^{m_l}$$

kaikilla $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_l) \in \mathbb{T}^l$ ja $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_l) \in \mathbb{Z}^l$. Olkoon $Z \subset \mathbb{Z}^l$, $\#Z =: d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ja \mathcal{H} d -ulotteinen Hilbertin avaruus, jolla on ortonormaalikanta $\{b_{\mathbf{m}} \mid \mathbf{m} \in Z\}$. Varustamme avaruuden \mathcal{H} ryhmän \mathbb{T}^l esityksellä V_Z , jolle

$$V_Z(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{m} \in Z} \langle \mathbf{v}, \mathbf{m} \rangle |b_{\mathbf{m}}\rangle \langle b_{\mathbf{m}}| \quad (57)$$

kaikilla $\mathbf{v} \in \mathbb{T}^l$. Kun esitämme avaruuden \mathcal{H} muodossa $\bigoplus_{\mathbf{m} \in Z} \mathbb{C}b_{\mathbf{m}}$, huomaamme, että V_Z operoi siinä diagonaalisesti ja siihen liittyvä mitta $\nu_{V_Z} : 2^Z \rightarrow [0, \#Z]$ on lukumäärämitta. Edellisten osioiden mukainen mitta $\tilde{\nu} : 2^{\mathbb{Z}^l} \rightarrow [0, \infty]$ on absoluuttisesti jatkuva

lukumäärämitan suhteen ja Z -tukinen. Merkitsemme $L^2(\mathbb{T}^l, \mu_l) =: L^2(\mathbb{T}^l)$. Avaruudella $L^2(\mathbb{T}^l)$ on ortonormaalikanta $\{e_{\mathbf{m}} \mid \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^l\}$, kun asetetaan $e_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{m} \rangle$ kaikilla $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^l$ ja melkein kaikilla $\mathbf{w} \in \mathbb{T}^l$. Määritelläkäämme ryhmän \mathbb{T}^l esitys V_l avaruudessa $L^2(\mathbb{T}^l)$ asettamalla

$$V_l(\mathbf{v}) = e^{i \sum_{j=1}^l \arg(v_j) N_j} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^l} \langle \mathbf{v}, \mathbf{m} \rangle |e_{\mathbf{m}}\rangle \langle e_{\mathbf{m}}| \quad (58)$$

kaikilla $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_l) \in \mathbb{T}^l$. Tämä esitys on erityistapaus kaavan 57 mukaisista esityksistä ja sille pätee $(V_l(\mathbf{v})\varphi)(\mathbf{w}) = \varphi(\bar{\mathbf{v}}\mathbf{w})$. Edellisten osioiden mukainen mitta ν_{V_l} on nyt ryhmän \mathbb{Z}^l Haarin mitta.

Tapaus, jossa $V_Z = V_l$ ja $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}^l)$, kuvaa syklisessä avaruudessa \mathbb{T}^n , $n \in \mathbb{N}$, liikuvan objektin paikkasuureita, sillä esitys V_l vastaa syklisen avaruuden paikkasiirtoja. Kovarianssirakenne $\mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ on selvästi epätyhjä. Edellisessä osiossa kehitellyn teorian mukaisesti saamme kaikki suureet $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ valitsemalla kullekin $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^l$ yksikkövektorin $\xi_{\mathbf{m}}$ jossakin ääretönulotteisessa Hilbertin avaruudessa \mathcal{M} . Tapauksessa $V_Z = V_l$ voimme vapaasti valita $\mathcal{M} = \mathcal{H}$. Tämä valinta kiinnittää lauseen 4.3 mukaisen isometriakentän $Z \ni \mathbf{m} \mapsto W_{\mathbf{m}}$, jolla $W_{\mathbf{m}}b_{\mathbf{m}} = \xi_{\mathbf{m}}$ kaikilla $\mathbf{m} \in Z$. Kun yksikkövektoreiden $\xi_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in Z$, virittämä avaruuden \mathcal{H} aliavaruus on n -ulotteinen, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sanomme, että suure M on *astetta* n . Soveltamalla edellisten osioiden tuloksia saamme seuraavan lauseen.

Lause 4.7 *Jokaista suuretta $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ kohti on olemassa perhe $\{\xi_{\mathbf{m}} \mid \mathbf{m} \in Z\}$ jonkin ääretönulotteisen Hilbertin avaruuden \mathcal{M} yksikkövektoreita, joilla pätee kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^l)$ heikosti*

$$M(B) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l} \in Z} \langle \xi_{\mathbf{k}} \mid \xi_{\mathbf{l}} \rangle \int_B \langle \mathbf{z}, \mathbf{k} - \mathbf{l} \rangle d\mu_n(\mathbf{z}) |b_{\mathbf{k}}\rangle \langle b_{\mathbf{l}}|. \quad (59)$$

Toisaalta, kun $\{\xi_{\mathbf{m}} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{m} \in Z\}$ on mielivaltainen perhe yksikkövektoreita, määrää kaava 59 kovariantin paikkasuureen $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$.

Kovarianssirakenteen $\mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ äärisuure voi olla mitä astetta hyvänsä, kun $\#Z = \infty$. Kovariantti paikkasuure M , joka syntyy kaavan 59 mukaisesti jostakin yksikkövektoriperheestä $\{\xi_{\mathbf{m}} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{m} \in Z\}$, on kovarianssirakenteen $\mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole sellaista nollasta poikkeavaa rajoitettua operaattoria A vektoreiden $\xi_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in Z$, virittämässä Hilbertin avaruudessa \mathbf{H} , jolla pätee

$$\langle \xi_{\mathbf{m}} \mid A\xi_{\mathbf{m}} \rangle = 0 \quad (60)$$

kaikilla $\mathbf{m} \in Z$. Samainen suure M on koko suureperheen $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole sellaista heikosti mitallista kenttää operaattoreita $\mathbb{T}^l \ni \mathbf{z} \mapsto D(\mathbf{z}) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $0 < \text{ess sup}_{\mathbf{z} \in \mathbb{T}^n} \|D(\mathbf{z})\| < \infty$, jolla

$$\int_{\mathbb{T}^l} \langle \mathbf{z}, \mathbf{k} - \mathbf{l} \rangle \langle \xi_{\mathbf{k}} \mid D(\mathbf{z})\xi_{\mathbf{l}} \rangle d\mu_n(\mathbf{z}) = 0 \quad (61)$$

kaikilla $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in Z$. Lisäksi kaavan 59 mukainen kovariantti paikkasuure M on spektraalimitta tapauksessa $V_Z = V_l$ tarkalleen silloin, kun vektorit $\mathbb{T}^l \ni \mathbf{z} \mapsto \langle \mathbf{z}, \mathbf{m} \rangle \xi_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, muodostavat avaruuden $L^2(\mathbb{T}^n, \mu_n; \mathbf{H})$ ortonormaalikannan.

Todistus: Lauseen väitteet ovat pääosin aiempien osioiden suoria seurauksia. Tulee muistaa, että kaikki joukon \mathbb{Z}^l osajoukot Y , joilla $Y \cap Z = \emptyset$, ovat kuhunkin suureeseen $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ liittyvän mitan $\tilde{\nu}$ suhteen nollamittaisia. Ainoat väitteet, jotka tarvitsevat todistuksen on, että kovarianssirakenteen ääripiste $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ voi olla mitä astetta hyvänsä, kun $\#Z = \infty$, ja joukon $\mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_l}$ spektraalimittoja koskeva väite. Valitkaamme luku $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, jolloin merkintä \mathcal{H}_n tarkoittaa avaruutta \mathbb{C}^n , jos $n < \infty$ ja $\mathcal{H}_\infty = l^2$. Valitkaamme sellaiset nollasta poikkeavat vektorit $\varphi_{\mathbf{m}} \in \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$, $\mathbf{m} \in Z$, jotka muodostavat avaruuden \mathcal{H}_n tiheän osajoukon; tämä on mahdollista, sillä \mathcal{H}_d on separoituva ja $\#Z = \infty$. Voimme muodostaa yksikkövektorit $\xi_{\mathbf{m}} := \varphi_{\mathbf{m}} / \|\varphi_{\mathbf{m}}\|$, $\mathbf{m} \in Z$. Osajoukon $\{\varphi_{\mathbf{m}} \mid \mathbf{m} \in Z\}$ tiheydestä johtuen ehto 60 merkitsee sitä, että $A = O$, kun $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, eli kaavan 59 mukainen asteen n suure M on kovarianssirakenteen $\mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ ääripiste. Olkoon toisaalta kovariantti paikkasuure M kaavan 59 mukainen tapauksessa $Z = \mathbb{Z}^l$ ja $V_Z = V_l$. Huomaamme välittömästi, että $(\mathcal{J}e_{\mathbf{m}})(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{m} \rangle \xi_{\mathbf{m}}$ kaikilla $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ ja $\mathbf{z} \in \mathbb{T}^n$, kun isometria \mathcal{J} on osion 4.2.2 mukainen. Näinollen lauseen viimeinen väite on ekvivalentti sen kanssa, että \mathcal{J} on unitaarinen, mikä lauseen 4.6 mukaan on puolestaan ekvivalentti sen kanssa, että M on spektraalimitta. \square

Tutkikaamme tilannetta $Z = \mathbb{Z}^l$ ja $V = V_l$. Huomaamme, että valitsemalla vektorit $\xi_{\mathbf{k}} = \xi$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^l$, $\|\xi\| = 1$, saadaan erityinen paikkasuure M_{\varkappa} ,

$$M_{\varkappa}(B) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n} \int_B \langle \mathbf{z}, \mathbf{k} - \mathbf{l} \rangle d\mu_n(\mathbf{z}) |e_{\mathbf{k}}\rangle \langle e_{\mathbf{l}}|, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^n), \quad (62)$$

jonka havaitaan suoralla laskulla olevan spektraalimitta. Itse asiassa $M_{\varkappa}(B)\varphi = \chi_B\varphi$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^n)$ ja $\varphi \in \mathcal{H}$. Edellinen lause takaa sen, että tämä suure on äärisuure kovarianttien paikkasuureiden joukossa, minkä takaa tietysti myös se, että kyseessä on spektraalimitta. Olkoon M asteen 1 paikkasuure, johon liittyvät kaavan 59 mukaiset yksikkövektorit $\xi_{\mathbf{m}} = c_{\mathbf{m}}\xi_{\mathbf{0}}$, missä $c_{\mathbf{m}} \in \mathbb{T}$ kaikilla $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$. Määrittellemme unitaariopeeraattorin $R := \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{m}} |e_{\mathbf{m}}\rangle \langle e_{\mathbf{m}}|$, jolla pätee

$$M(B) = R^* M_{\varkappa}(B) R$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^n)$. Kaikki asteen 1 lokalisoituisuuret ovat siis spektraalimittoja ja unitaariekvivalentteja kanonisen paikkasuureen M_{\varkappa} kanssa. Jos taas vektorit $\xi_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, muodostavat ortonormaalin systeemin, voimme valita jotkin $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{l}$, joiden avulla muodostamme operaattorin $A = |\xi_{\mathbf{k}}\rangle \langle \xi_{\mathbf{l}}|$, jolle ehto 60 pätee. Koska $A \neq O$, ei kaavan

59 mukainen kovariantti paikkasuure M_s voi olla kovarianssirakenteen äärisuure. Suora lasku osoittaa, että $M_s(B) = \mu_n(B)I$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^n)$.

Olkoon $\{\xi_{\mathbf{k}} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{k} \in Z\}$ yksikkövektoriperhe, jolloin voimme muodostaa multiindeksoidun positiivisemidefiniitin matriisin $c = (c_{\mathbf{k},\mathbf{l}})_{\mathbf{k},\mathbf{l} \in Z} = (\langle \xi_{\mathbf{k}} | \xi_{\mathbf{l}} \rangle)_{\mathbf{k},\mathbf{l} \in Z}$, jolla $c_{\mathbf{m},\mathbf{m}} = 1$ kaikilla $\mathbf{m} \in Z$. Positiivisemidefiniittisyys tarkoittaa tässä sitä, että kaikilla kompleksilukujonoilla $(f_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in Z}$, joilla $\varphi_{\mathbf{k}} \neq 0$ vain äärellisen monella $\mathbf{k} \in Z$, pätee

$$\sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l} \in Z} c_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \overline{f_{\mathbf{k}}} f_{\mathbf{l}} \geq 0.$$

Lähteessä [1] on osoitettu, että kaikki tällaiset matriisit syntyvät jostakin yksikkövektoriperheestä $\{\xi_{\mathbf{k}} \in \mathcal{H} \mid \mathbf{k} \in Z\}$ yllä kuvatulla tavalla. Voimmekin ilmaista edellisen lauseen niin, että kaava

$$M(B) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l} \in Z} c_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \int_B \langle \mathbf{z}, \mathbf{k} - \mathbf{l} \rangle d\mu_n(\mathbf{z}) |e_{\mathbf{k}}\rangle \langle e_{\mathbf{l}}|, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^n) \quad (63)$$

määrittää affiinin bijektion suureiden $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ ja edelläkuvatun kaltaisten matriisien $c = (c_{\mathbf{k},\mathbf{l}})$ välille. Jos kovarianttiin paikkasuureeseen M liittyvä matriisi c on lisäksi sellainen, että sen kaikki matriisialkiot ovat toruksella, eli $|c_{\mathbf{k},\mathbf{l}}| = 1$ kaikilla $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n$, on M joukon $\mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ ääripiste. Voidaan osoittaa, että jos $Z \neq \mathbb{Z}^l$, ei kovarianssirakenne $\mathfrak{M}_{\mathbb{T}^l}^{V_Z}$ sisällä ainuttakaan spektraalimittaa.

Olettakaamme lopuksi, että $l = 1$ ja $Z = \{0, 1, 2, \dots\}$. Systeemimme on nyt sähkömagneettinen moodi, jonka vaihesuureita tutkimme. Valitkaamme avaruudelle \mathcal{H} ortonormaalikanta $\{|k\rangle \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$. Voimme muodostaa rajoittamattoman lukumääräoperaattorin $N = \sum_{k=0}^{\infty} k|k\rangle \langle k|$ ja kentän laskuoperaattorin $a = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{k} |k-1\rangle \langle k|$, jolle voidaan määritellä polaarihajotelma $a = \sqrt{N}\Phi$, missä Φ on osittainen isometria, jota kutsutaan *vaiheoperaattoriksi*. Voidaan osoittaa, että on olemassa yksikäsitteinen semispektraalimitta $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{T}), \mathcal{H})$, jolla $M[k] = \int_0^{2\pi} e^{ik\vartheta} dM(\vartheta) = \Phi^k$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$. Seuraa, että operaattorimitta M on kovariantti vaihesiirtoesityksen \tilde{V} , $\tilde{V}(v) = e^{i \arg(v)N} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k |k\rangle \langle k|$, $v \in \mathbb{T}$, suhteen. Kutsumme yleisesti tällaisia kovariantteja suureita *kovarianteiksi vaihesuureiksi*. Lauseesta 4.7 seuraa, että kovarianteilla vaihesuureilla on yksikäsitteinen esitys

$$M(B) = \sum_{k, l=0}^{\infty} c_{k, l} \int_B z^{k-l} d\mu(z) |k\rangle \langle l|, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}), \quad (64)$$

missä $c = (c_{k, l})_{k, l=0}^{\infty}$ on ylläesitellyssä mielessä positiivisemidefiniitti matriisi, jolla $c_{m, m} = 1$ kaikilla $m = 0, 1, 2, \dots$. Tämä tulos on osoitettu myös lähteessä [30].

Kovarianttien vaihesuureiden joukossa ole ainuttakaan spektraalimittaa, sillä olemme rajanneet karakteriryhmästä \mathbb{Z} pois kaikki negatiiviset kokonaisluvut. Kaavan 64 matriiseja c kutsutaan *vaihematriiseiksi*, ja jälleen kullekin vaihematriisille c löydetään yksikkövektoriperhe $\{\xi_{\mathbf{k}} \in \mathcal{H} \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$, jolla $c_{k, l} = \langle \xi_k | \xi_l \rangle$ kaikilla $k, l = 0, 1, 2, \dots$

On huomattava, että tapaus, jossa vektorit ξ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, yhtyvät, eli $c_{k,l} = 1$ kaikilla $k, l = 0, 1, 2, \dots$, tuottaa oleellisesti erilaisen suureen M_{can} kuin vastaava konstruktio aiemmin tässä osiossa; suure $M_{\mathcal{Z}}$ on spektraalimitta, kun taas jo kaavassa 26 esitelty kانونinen vaihesuure M_{can} ei ole spektraalimitta. Suure M_{can} on kylläkin äärisuure jopa koko suureiden joukossa, kuten on jo osoitettu. Voidaan osoittaa, että M_{can} on se yksikäsitteinen semispektraalimitta, jolla $M_{\text{can}}[k] = \Phi^k$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots$

4.3.2 Paikkasuureet vapaassa avaruudessa

Tarkastelkaamme additiivista ryhmää \mathbb{R}^l , $l \in \mathbb{N}$. Merkitsemme kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_l)$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=1}^l x_k y_k.$$

Ryhmä \mathbb{R}^l on luonnollisella topologiallaan varustettuna lokaalisti kompakti Abelin ryhmä ja se yhtyy omaan karakteriryhmäänsä. Karakterioperointi määräytyy nyt kaavasta

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{u} \rangle := e^{i(\mathbf{g}, \mathbf{u})}$$

kaikilla $\mathbf{g}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$. Valitsemme ryhmän \mathbb{R}^l Haarin mitaksi mitan $\frac{1}{(2\pi)^{l/2}} d^n \mathbf{g}$.

Kun $\varphi \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^l, d^n \mathbf{g})$, voimme kirjoittaa sen Fourier-Plancherel-muunnoksen muodossa $\mathfrak{F}\varphi =: \hat{\varphi} \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^l, d^l \mathbf{g})$ muodossa

$$\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{l/2}} \int_{\mathbb{R}^l} e^{-i(\mathbf{g}, \mathbf{u})} \varphi(\mathbf{g}) d^l \mathbf{g}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l.$$

Merkitsemme yleisesti vektorin $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^l, d^l \mathbf{g}) =: L^2(\mathbb{R}^l)$ Fourier-Plancherel-muunnosta symbolilla $\hat{\varphi}$. Varustamme avaruuden $L^2(\mathbb{R}^l)$ ryhmän \mathbb{R}^l säännöllisellä esityksellä U_l , jolla

$$(U_l(\mathbf{g})\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{g})$$

kaikilla $\mathbf{g}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$ ja $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^l)$. Muistutamme lukijaa siitä, että kaikilla $\mathbf{g}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$ ja $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^l)$ pätee

$$(\widehat{U_l(\mathbf{g})\varphi})(\mathbf{u}) = e^{-i(\mathbf{g}, \mathbf{u})} \hat{\varphi}(\mathbf{u}). \quad (65)$$

Tästä näemme, että esitys $\mathbf{x} \mapsto \mathfrak{F}U_n(\mathbf{x})\mathfrak{F}^* =: \hat{U}_n(\mathbf{x})$ operoi Fourier-muunnatussa avaruudessa $\hat{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}$ diagonaalisesti.

Tässä esimerkissä tutkittava systeemi on n :ssä paikkaulottuvuudessa liikkuvaa objekti, jota kuvaamme Hilbertin avaruudella $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Lokalisointisuureelta vaadimme kovarianssia esityksen $U_n =: U$ suhteen. Edellisen perusteella tutkimmekin Fourier-muunnatussa esityksen \hat{U} määräämää kovarianssirakennetta $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^{\hat{U}} \neq \emptyset$. Olettakaamme, että $\hat{M} \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^{\hat{U}}$, jolloin merkitsemme symbolilla M operaattorimittaa $B \mapsto \mathfrak{F}^* \hat{M}(B) \mathfrak{F}$, jolloin

taas $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$. Voimme jälleen määrätä suureet M ja \hat{M} kiinnittämällä heikosti mitallisen yksikkövektoriarvoisen kuvauksen $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}$, joka kiinnittää taas suureen M määräämän isometriakentän $\mathbf{u} \mapsto W(\mathbf{u}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}$, kun valitaan $W(\mathbf{u})(1) = \xi(\mathbf{u})$. Kun kuvaajoukon $\xi(\mathbb{R}^n)$ virittämä avaruus on d -ulotteinen, $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sanomme jälleen, että näitä vektoreita vastaava suure M on astetta d .

Olkoon $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}$ heikosti mitallinen yksikkövektoriarvoinen kuvaus ja joukko $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ jokin ortonormaalikanta. Voimme tällöin määrätä kullekin $k \in \mathbb{N}$ mitallisen funktion $a_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ asettamalla $a_k(\mathbf{u}) = \langle e_k \mid \xi(\mathbf{u}) \rangle$ kaikilla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Määrittelemme nyt mitallisen funktion $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$,

$$a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{a_k(\mathbf{y})} a_k(\mathbf{z}) = \langle \xi(\mathbf{y}) \mid \xi(\mathbf{z}) \rangle, \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (66)$$

Merkitsemme symbolilla $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$ sellaisten mitallisten funktioiden $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ joukkoa, joilla

A1 $a(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \overline{a(\mathbf{y}, \mathbf{z})}$ melkein kaikilla $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$

A2 $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \overline{f(\mathbf{y})} f(\mathbf{z}) d^n \mathbf{y} d^n \mathbf{z} \geq 0$ kaikilla $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$

A3 $a^{(0)}(\mathbf{y}) = 1$ melkein kaikilla $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Tässä $a^{(0)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ on ns. *diagonaalinen arvo*, jolle

$$a^{(0)}(\mathbf{y}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k(\mathbf{y})|^2,$$

missä funktiot $a_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, antavat funktiolle a kaavan 66 mukaisen hajotelman, jonka olemassaolon takaavat esimerkiksi lähteet [27] ja [31]. Jos nimittäin $a \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$, voimme määritellä avaruuden $L^2(\mathbb{R}^n)$ positiivisen operaattorin A asettamalla kaikille $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f \mid Ag \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \overline{f(\mathbf{y})} f(\mathbf{z}) d^n \mathbf{y} d^n \mathbf{z}.$$

Olkoon $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ jälleen avaruuden $L^2(\mathbb{R}^n)$ ortonormaalikanta ja merkitkäämme $b_k := \sqrt{A}e_k$ kullakin $k \in \mathbb{N}$. Suora lasku näyttää, että funktiolla a on kaavan 66 mukainen hajotelma, kun asetamme $a_k(\mathbf{y}) = \overline{b_k(\mathbf{y})}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja melkein kaikilla $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Ehdosta A3 seuraa, että funktio a saadaan myös jostakin yksikkövektoriarvoisesta funktiosta $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}$ kaavan 66 mukaisesti. Soveltamalla lauseita 4.3, 4.4 ja 4.6 sekä kaavaa 42 saamme seuraavan lauseen

Lause 4.8 *Jokaista kovarianttia paikkasuuretta $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$ kohti löytyy aina $a \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$ ja heikosti mitallinen yksikkövektoriarvoinen funktio $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}$, joilla*

$$\begin{aligned} \langle \varphi \mid M(B)\psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_B \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{y})} a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \overline{\hat{\varphi}(\mathbf{y})} \hat{\psi}(\mathbf{z}) d^n \mathbf{z} d^n \mathbf{y} d^n \mathbf{x}, \\ a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \langle \xi(\mathbf{y}) \mid \xi(\mathbf{z}) \rangle \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (67)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, joilla $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Toisaalta, kun $a \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$, määrittelee kaava 67 kovariantin paikkasuureen $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$. Kaava 67 määrää joukkojen $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$ ja $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$ välille affinin bijektio.

Kovarianssirakenteen äärisuure $\mathfrak{M}_{\mathcal{H}}^U$ voi olla mitä astetta hyvänsä. Kovariantti paikkasuure M , joka saadaan kaavan 67 mukaisesti jostakin heikosti mitallisesta yksikkövektorifunktiosta $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{H}$, on kovarianssirakenteen $\mathfrak{M}_{\mathcal{H}}^U$ äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole sellaista nollasta poikkeavaa rajoitettua operaattoria A kuva-avaruuden $\xi(\mathbb{R}^n)$ viritämässä Hilbertin avaruudessa \mathbf{H} , jolla pätee

$$\langle \xi(\mathbf{u}) | A\xi(\mathbf{u}) \rangle = 0 \quad (68)$$

melkein kaikilla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Samainen suure M on koko suureperheen $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{H})$ äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole olemassa sellaista heikosti mitallista operaattorikenttää $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto D(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $0 < \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|D(\mathbf{x})\| < \infty$, jolla

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{y})} \langle \xi(\mathbf{y}) | D(\mathbf{x})\xi(\mathbf{z}) \rangle d^n \mathbf{x} = 0 \quad (69)$$

melkein kaikilla $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Todistus: Lause on suurelta osin jälleen aiempien tulosten suora seuraus. Muut väitteet osoitetaan aivan samoin kuin lauseessa 4.7. \square

Suure $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$ on astetta 1 tarkalleen silloin, kun siihen liittyvä funktio $a \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$ on sellainen, että $|a(\mathbf{y}, \mathbf{z})| = 1$ melkein kaikilla $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Erityinen valinta, jossa a on vakiofunktio 1, tuottaa kanonisen paikkasuureen $M_{\mathcal{Z}}$, jolla $M_{\mathcal{Z}}(B)\varphi = \chi_B\varphi$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ja $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Olkoon $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$ astetta 1 ja $a \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$ siihen liittyvä funktio ja kenttä $\mathbf{u} \mapsto \xi(\mathbf{u}) = c(\mathbf{u})\xi(\mathbf{0})$ sellainen, että $a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \langle \xi(\mathbf{y}) | \xi(\mathbf{z}) \rangle$ kaikilla $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Tässä $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}$ on mitallinen funktio. Olkoot Q_k ja P_k kuhunkin koordinaattiin $k = 1, \dots, n$ liittyvät tiheästi määritellyt paikka- ja liikemääräoperaattorit, joilla $(Q_k\varphi)(\mathbf{x}) = x_k\varphi(\mathbf{x})$ melkein kaikilla $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $P_k\varphi = -i\partial_k\varphi$. Huomaamme, että nyt pätee $a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \overline{c(\mathbf{y})}c(\mathbf{z})$ kaikilla $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ja

$$M(B) = c(\mathbf{P})^* M_{\mathcal{Z}}(B)c(\mathbf{P}), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

missä on merkitty $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$. Kaikki asteen 1 paikkasuureet ovat siis spektraalimittoja ja unitaariekvivalentteja kanonisen paikkasuureen $M_{\mathcal{Z}}$ kanssa.

4.3.3 Liikemääräsäysinvariantit paikkasuureet

Edellisen osion mukaiselta lokalisointisuureelta $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$ on luontevaa vaatia vielä liikemääräsäysinvarianssia, eli invarianssia esityksen $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ suhteen, missä

$$(V(\mathbf{p})\varphi)(\mathbf{x}) = e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{p})}\varphi(\mathbf{x})$$

kaikilla $\mathbf{p}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $\varphi \in \mathcal{H}$. Vaadimme siis, että lokalisointisuurelle M pätee kaikilla $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ invarianssiehto $V(\mathbf{p})M(B)V(\mathbf{p})^* = M(B)$. Kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$ ja $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$(\widehat{V(\mathbf{p}_1)\varphi})(\mathbf{p}_2) = \hat{\varphi}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1). \quad (70)$$

Jos siis lokalisointisuure M saadaan jostakin $a \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$ kaavan 67 mukaisesti, merkitsee liikemääräsäysinvarianssi sitä, että

$$a(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}) = a(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (71)$$

melkein kaikilla $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Voimme määritellä funktion $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ asettamalla $\eta(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p} + \mathbf{p}', \mathbf{p}')$ melkein kaikilla $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^n$. Merkitsemme symbolilla $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ sellaisten mitallisten funktioiden $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ konveksia joukkoa, joilla

E1 $\eta(-\mathbf{p}) = \overline{\eta(\mathbf{p})}$ melkein kaikilla $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$,

E2 $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \overline{f(\mathbf{p}_1)} f(\mathbf{p}_2) d^n \mathbf{p}_1 d^n \mathbf{p}_2 \geq 0$ kaikilla $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ja

E3 $\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k(\mathbf{p})|^2 = 1$ melkein kaikilla $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, kun $\eta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{a_k(\mathbf{p}_1)} a_k(\mathbf{p}_2)$ kaikilla $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^n$.

Ehdon E3 funktiot $a_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ovat olemassa, sillä funktio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mapsto \eta(\mathbf{y} - \mathbf{z})$ on selvästi joukon $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$ alkio.

Voimme yksinkertaistaa ehtoa E3, sillä ehdot E1 ja E2 kertovat, että $\eta \in \mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ on ns. *positiivisen tyypin funktio*, jolle

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\mathbf{p}) (f^* * f)(\mathbf{p}) d^n \mathbf{p} \geq 0$$

kaikilla $f \in C^*(\mathbb{R}^n)$. Involuutio $C^*(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto f^* \in C^*(\mathbb{R}^n)$ on tässä osion 3.2 mukainen. Voidaan osoittaa [5] (corollary 3.21), että tällaiset funktiot yhtyvät melkein kaikkialla johonkin jatkuvaan positiivisen tyypin funktioon, joten voimme olettaa, että joukon $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ alkioit ovat jatkuvia, jolloin ehto E3 merkitsee yksinkertaisesti sitä, että $\eta(\mathbf{0}) = 1$ kaikilla $\eta \in \mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$. Voidaan myös osoittaa [5] (theorem 3.20, theorem 3.25), että joukon $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ ääripisteet ovat tarkalleen kaikki karakterit $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{p} \mapsto e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{p})}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Saamme seuraavan tuloksen.

Lause 4.9 *Olkoon $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$ liikemääräsäysinvariantti suure. On olemassa (jatkuva) $\eta \in \mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$, jolla*

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_B \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)} \eta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \overline{\hat{\varphi}(\mathbf{p}_1)} \hat{\psi}(\mathbf{p}_2) d^n \mathbf{p}_1 d^n \mathbf{p}_2 d^n \mathbf{x} \quad (72)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, joilla $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in C_c(\mathbb{R}^n)$, ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Toisaalta, jos $\eta \in \mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$, määrittelee kaava 72 liikemääräsäysinvariantin suureen $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$. Kaava 72 määrittää affinin bijektion liikemääräsäysinvarianttien suureiden $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$ joukon ja joukon $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ välille. Kaavan 72 suure M on paikkasiirtokovarianttien ja liikemääräsäysinvarianttien suureiden joukon ääripiste tarkalleen silloin, kun $\eta \in \text{Ext}(\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n))$, eli $\eta(\mathbf{p}) = e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{p})}$ kaikilla $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ jollakin $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Huomattakoon, että tapaus, jossa $\eta(\mathbf{p}) = 1$ melkein kaikilla $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ tuottaa kanonisen lokalisointisuureen $M_{\mathcal{X}}$. Yleisen paikkasiirtokovarianttien ja liikemääräsäysinvarianttien lokalisointisuureiden joukon ääripisteen tapauksessa, jossa siis $\eta(\mathbf{p}) = e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{p})}$ jollakin $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ aina, kun $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, huomaamme, että kaavasta 72 syntyvä suure $M_{\mathbf{q}}$ on ”siirretty kanoninen paikkasuure”, eli $M_{\mathbf{q}}(B) = M_{\mathcal{X}}(B - \mathbf{q})$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Jos paikkasiirtokovariantti ja liikemääräsäysinvariantti lokalisointisuure M on astetta 1 ja $\eta \in \mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ on siihen liittyvä funktio ja kenttä $\mathbf{u} \mapsto \xi(\mathbf{u})$ on sellainen, että $\eta(\mathbf{p}) = \langle \xi(\mathbf{p}) | \xi(\mathbf{0}) \rangle$ kaikilla $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^n$, voimme laskea $\eta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \langle \xi(\mathbf{p}_1) | \xi(\mathbf{0}) \rangle \langle \xi(\mathbf{0}) | \xi(-\mathbf{p}_2) \rangle = \eta(\mathbf{p}_1)\eta(\mathbf{p}_2)$ kaikilla $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^n$. Kaikki asteen 1 paikkasiirtokovariantit ja liikemääräsäysinvariantit lokalisointisuureet ovat siis paikkasiirtokovarianttien ja liikemääräsäysinvarianttien suureiden joukon ääripisteitä.

Olkoon $\rho : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$ äärellinen (kompleksi)mitta. Määräämme sille funktion $\hat{\rho} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ asettamalla

$$\hat{\rho}(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{p})} d\rho(\mathbf{x})$$

kaikille $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Jos ρ on positiivinen mitta, toteamme suoralla laskulla, että $\hat{\rho}$ on positiivisen tyypin funktio. Käänteininkin tulos pätee [5] (theorem 4.12): Kun $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ on positiivisen tyypin funktio, on olemassa yksikäsitteinen positiivinen joukon \mathbb{R}^n Borelin mitta ρ , jolle $\eta = \hat{\rho}$. Tämä tulos tunnetaan Bochnerin lauseena. Erityisesti, kun $\eta \in \mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$, on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $\rho : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$, jolle $\eta = \hat{\rho}$. Olkoon M suure, joka saadaan funktiosta η kaavan 72 mukaisesti ja ρ funktion η generoiva todennäköisyysmitta. Voimme nyt laskea kaikilla $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, joilla $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in C_c(\mathbb{R}^n)$, ja kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle \varphi | M(B) \psi \rangle &= (2\pi)^{-n} \int_B \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{x}, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)} \overline{\hat{\varphi}(\mathbf{p}_1)} \hat{\psi}(\mathbf{p}_2) d\rho(\mathbf{q}) d^n \mathbf{p}_1 d^n \mathbf{p}_2 d^n \mathbf{x} \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{q})} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{q}) d\rho(\mathbf{q}) d^n \mathbf{x} = \langle \varphi | \rho * M_{\mathcal{X}}(B) \psi \rangle, \end{aligned}$$

missä konvoluutiosuure $\rho * M_{\mathcal{X}}$ on määritelty kuten esimerkissä 3.1. Toisaalta suora lasku osoittaa, että kun $\rho : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ on todennäköisyysmitta, on konvoluutiosuure $\rho * M_{\mathcal{X}}$ paikkasiirtokovariantti ja liikemääräsäysinvariantti.

Olkoon $\delta_{\mathbf{q}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ pistemitta kullakin $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, jolla $\delta_{\mathbf{q}}(B) = 1$ jos $\mathbf{q} \in B$ ja $\delta_{\mathbf{q}}(B) = 0$ muulloin. Huomaamme, että $\hat{\delta}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{p})}$ kaikilla $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, joten pistemitat

ovat yksikäsitteisessä vastaavuudessa joukon $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ ääripisteiden kanssa. Saamme näin oleellisesti tuloksen 3.1.

Lause 4.10 *Olkoon $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$ liikemääräsäysinvariantti. On olemassa todennäköisyysmitta $\rho : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$, jolla $M = \rho * M_{\mathbf{z}}$, ja toisaalta konvoluutiosuure $\rho * M_{\mathbf{z}}$, missä $\rho : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ on todennäköisyysmitta, on paikkasiirtokovariantti ja liikemääräsäysinvariantti. Pistemitat $\delta_{\mathbf{q}}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, joilla $\delta_{\mathbf{q}}(B) = 1$, jos $\mathbf{q} \in B$ ja $\delta_{\mathbf{q}}(B) = 0$ muulloin, tuottavat kaikki liikemääräsäysinvarianttien suureiden $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$ joukon ääripisteet, ts ääripisteet ovat muotoa $M_{\mathbf{q}}$, joilla $M_{\mathbf{q}}(B) = M_{\mathbf{z}}(B - \mathbf{q})$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Nämä kaikki ovat spektraalimittoja.*

4.4 Kovariantit paikkaerosuureet

Tarkastelemme vielä paria esimerkkitapausta, joissa symmetriaryhmän transitiivinen avaruus ei ole ryhmä itse; kovariantteja paikkaerosuureita syklisissä ja vapaissa avaruuksissa. Tässä osiossa läpikäytävien esimerkkien voidaan ajatella kuvaavan kahden hiukkasen paikkaeroa. Tutkimme ensin kompaktin ryhmän $G = \mathbb{T}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, tapausta ja sitten tapausta $G = \mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Kompaktin ryhmän tapaus vastaa syklisessä avaruusajassa liikkuvien hiukkasten paikkaeroa. Jälkimmäinen tapaus vastaa taas kahden vapaan rajattomassa litteässä n -ulotteisessa avaruudessa liikkuvan hiukkasen paikkaeroa.

4.4.1 Paikkaerosuureet syklisessä avaruudessa

Esimerkkisysteemimme koostuu nyt kahdesta avaruudessa \mathbb{T}^n olevasta hiukkasesta, joiden paikkaerosuureita tutkimme seuraavaksi. Systemiämme kuvaa nyt Hilbertin avaruus $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{T}^{2n}, \mu_{2n})$. Merkitsemme avaruuden (ryhmän) \mathbb{T}^{2n} vektoreita yleensä muodossa (\mathbf{w}, \mathbf{z}) , missä $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{T}^n$; ensimmäiset koordinaatit ovat hiukkasen 1 koordinaatit ja loput ovat hiukkasen 2 koordinaatteja. Kun hiukkanen 1 on pisteessä \mathbf{w} ja hiukkanen 2 pisteessä \mathbf{z} , niiden paikkaero on $\mathbf{z}\bar{\mathbf{w}}$. Paikkaerosuureiden arvoavaruus on \mathbb{T}^n , ja kun hiukkasten koordinaatteja siirretään vektorilla $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{T}^{2n}$, muuttuu paikkaero $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^n$ muodossa

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{w}\bar{\mathbf{v}}. \quad (73)$$

Huomaamme, että paikkaeron arvoavaruus on homeomorfinen tekijäryhmälle \mathbb{T}^{2n}/H , missä

$$H = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \in \mathbb{T}^{2n} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{T}^n\}.$$

Kaavan 73 mukainen ryhmän \mathbb{T}^{2n} operointi arvoavaruudessa on ryhmän kanoninen tekijäoperointi tekijäryhmässä \mathbb{T}^{2n}/H , kun tekijäprojektiio samaistetaan kuvaukseen $\mathbb{T}^{2n} \ni (\mathbf{w}, \mathbf{z}) \mapsto \mathbf{z}\bar{\mathbf{w}}$; tämä kuvaus on selvästi vakiokuvaus kussakin aliryhmän H määräämässä tekijäluokassa.

Merkitsemme ryhmän \mathbb{Z}^{2n} alkioita yleensä muodossa (\mathbf{k}, \mathbf{l}) , missä $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n$. Annihi-laattorialiryhmä H^\perp on nyt selvästi muotoa

$$H^\perp = \{(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}^{2n} \mid \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Siispä $H^\perp \simeq \mathbb{Z}^n$ ja $\mathbb{Z}^{2n}/H^\perp \simeq \mathbb{Z}^n$. Annihi-laattorin H^\perp Haarin mitaksi valitsemme lukumäärämitan ν_n . Voimme selvästi valita tekijäryhmän \mathbb{Z}^{2n}/H^\perp sivuluokista edustajat $(\mathbf{j}, \mathbf{0}) \in \mathbb{Z}^{2n}$, missä $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$ määräytyy yksikäsitteisesti sivuluokasta. Tämän alkion edustaman tekijäluokan alkiot ovat siis muotoa $(\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$.

Olkoon esitys $V_{2n} =: V$ kuten osiossa 4.3.1 tapauksessa $Z = \mathbb{Z}^{2n}$. Kuten lähteessä [32] mutta yleistäen nyt tapaukseen $n \geq 1$ määrittelemme nyt hiukkasten paikkaerosuuret $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ kovarianssiehdolla

$$V(\mathbf{u})M(B)V(\mathbf{u})^* = M(\mathbf{u} \cdot B) \quad (74)$$

aina, kun $\mathbf{u} \in \mathbb{T}^{2n}$ ja $B \in \mathcal{B}(\Omega)$. Ryhmän \mathbb{T}^{2n} operointi avaruudessa Ω on nyt kuten kaavassa 73. Paikkaerosuuret muodostavat siis kovarianssirakenteen \mathfrak{M}_Ω^V .

Hilbertin avaruudella \mathcal{H} on jälleen osion 4.3.1 mukainen ortonormaalikanta $\{e_{\mathbf{m}} \in \mathcal{H} \mid \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}\}$, jolle $e_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{m} \rangle$ kaikilla $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}$ ja $\mathbf{u} \in \mathbb{T}^{2n}$ ja jonka suhteen voimme diagonalisoida esityksen V . Voimme ajatella, että esitys V on indusoitu aliryhmän H triviaaliesityksestä avaruudessa $L^2(\mathbb{Z}^n, \nu_n)$, ja tähän esitykseen liittyväksi tekijäryhmän $\widehat{\mathbb{T}^{2n}/H^\perp} \simeq \mathbb{Z}^n$ Borel-mitaksi voimme valita lukumäärämitan ν_n , jolloin kaavojen 37 ja 38 mukainen Borel-mitta karakteriryhmässä \mathbb{T}^{2n} on $\tilde{\nu}_n = \nu_{2n}$. Nyt siis Radon-Nikodým-derivaatta $\mathbb{Z}^{2n} \ni \mathbf{m} \mapsto \frac{d\nu_{2n}(\mathbf{m})}{d\tilde{\nu}_n(\mathbf{m})} =: \rho(\mathbf{m})$ on olemassa ja $\rho = 1$, jolloin siis lauseen 4.2 mukaan $\mathfrak{M}_\Omega^V \neq \emptyset$, eli paikkaerosuureita on olemassa.

Voimme olettaa, että lauseen 4.3 ääretönulotteinen Hilbertin avaruus \mathcal{M} on systeemin oma Hilbertin avaruus \mathcal{H} . Kukin kovariantti paikkaerosuure $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ määräytyy nyt lauseen 4.3 mukaan valitsemalla isometriakenttä $\mathbb{Z}^{2n} \ni \mathbf{m} \mapsto W_{\mathbf{m}} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}e_{\mathbf{m}}, \mathcal{H})$. Toisin sanoen meidän on vain valittava perhe $\{\xi_{\mathbf{m}} \in \mathcal{H} \mid \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}\}$ yksikkövektoreita, eli jokaisella $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}$ pätee $\|\xi_{\mathbf{m}}\| = 1$, jolloin voimme asettaa kullekin $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}$

$$W_{\mathbf{m}}e_{\mathbf{m}} = \xi_{\mathbf{m}}.$$

Merkitsemme usein näitä yksikkövektoreita muodossa $\xi_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$, $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n$. Käytämme vastaavaa merkintää myös ortonormaalikannan alkiuille, eli $e_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{z}, \mathbf{l} \rangle$ kaikilla $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n$ ja $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{T}^n$.

Merkitsemme symbolilla $\mathfrak{C}(\mathbb{Z}^n)$ sellaisten multi-indeksoitujen kompleksilukuperheiden $\mathbf{c} = (c_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^{2n}}$ joukkoa, joilla matriisit $(c_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{\mathbf{j}})_{\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^{2n}}$ ovat osion 4.3.1 mukaisia positiivisemidefiniittejä matriiseja, joilla $c_{\mathbf{m}, \mathbf{m}}^{\mathbf{j}} = 1$ kaikilla $\mathbf{j}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}$. Valitkaamme yksikkövektoriperhe $\{\xi_{\mathbf{m}} \in \mathcal{H} \mid \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}\}$. Huomaamme, että multi-indeksoitu lukuperhe $\mathbf{c} = (c_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{\mathbf{j}})$,

$$c_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{\mathbf{j}} = \langle \xi_{\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{k}} \mid \xi_{\mathbf{j}-\mathbf{l}, \mathbf{l}} \rangle, \quad \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^{2n} \quad (75)$$

on joukon $\mathfrak{C}(\mathbb{Z}^n)$ alkio. Toisaalta kukin joukon $\mathfrak{C}(\mathbb{Z}^n)$ alkio saadaan jostakin joukolla \mathbb{Z}^{2n} indeksoidusta avaruuden \mathcal{H} yksikkövektoriperheestä ylläolevan kaavan mukaisesti. Saamme seuraavan tuloksen, joka todistetaan kuten aiemmissakin osioissa.

Lause 4.11 *Jokainen kovariantti paikkaerosuure $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ määräytyy jostakin $\mathbf{c} \in \mathfrak{C}(\mathbb{Z}^n)$ ja toisaalta jostakin yksikkövektoriperheestä $\{\xi_{\mathbf{m}} \in \mathcal{H} \mid \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}\}$ kaavalla*

$$\begin{aligned} M(B) &= \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{\mathbf{j}} \int_B \langle \mathbf{z}, \mathbf{l} - \mathbf{k} \rangle d\mu_n(\mathbf{z}) |e_{\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{k}} \rangle \langle e_{\mathbf{j}-\mathbf{l}, \mathbf{l}}|, \\ c_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{\mathbf{j}} &= \langle \xi_{\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{k}} | \xi_{\mathbf{j}-\mathbf{l}, \mathbf{l}} \rangle \quad \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \quad (76)$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$, ja toisaalta, kun $\mathbf{c} \in \mathfrak{C}(\mathbb{Z}^n)$ ja $\xi_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}$, ovat mielivaltaisia yksikkövektoreita, kaava 76 määrittelee kovariantin paikkaerosuureen. Kaava 76 määrittelee joukkojen \mathfrak{M}_Ω^V ja $\mathfrak{C}(\mathbb{Z}^n)$ välille affiinin bijektio.

Kovariantti paikkaerosuure M , joka saadaan yksikkövektoreista $\xi_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}$, kaavan 76 mukaisesti, on kovarianssirakenteen \mathfrak{M}_Ω^V äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole sellaista heikosti mitallista operaattorikenttää $\mathbb{Z}^n \ni \mathbf{j} \mapsto A_{\mathbf{j}} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{\mathbf{j}})$, $0 < \text{ess sup}_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \|A_{\mathbf{j}}\| < \infty$, missä $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}$ on vektorien $\xi_{\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, virittämä suljettu aliavaruus, jolle pätee

$$\langle \xi_{\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{k}} | A_{\mathbf{j}} \xi_{\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{k}} \rangle = 0 \quad (77)$$

kaikilla $\mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$. Samainen suure on koko suureluokan $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{T}^n), \mathcal{H})$ äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole sellaista heikosti mitallista operaattorikenttää $\mathbb{T}^n \ni \mathbf{z} \mapsto D(\mathbf{z}) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $0 < \text{ess sup}_{\mathbf{z} \in \mathbb{T}^n} \|D(\mathbf{z})\| < \infty$, missä $\mathbf{H} = \bigoplus_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{H}_{\mathbf{j}}$, jolle pätee

$$\int_{\mathbb{T}^n} \langle \mathbf{z}, \mathbf{l} - \mathbf{k} \rangle \langle \xi_{\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{k}} | D(\mathbf{z}) \xi_{\mathbf{j}-\mathbf{l}, \mathbf{l}} \rangle d\mu_n(\mathbf{z}) = 0 \quad (78)$$

kaikilla $\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n$. Lisäksi kaavan 76 mukainen suure M on spektraalimitta tarkalleen silloin, kun vektorit $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \ni (\mathbf{z}, \mathbf{j}) \mapsto \langle \mathbf{z}, \mathbf{k} \rangle \xi_{\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, muodostavat avaruuden $L^2(\mathbb{T}^n, \mu_n; \mathbf{H})$ ortonormaalikannan.

Ylläolevan tuloksen alkupuoli on saatu tapauksessa $n = 1$ lähteissä [1] ja [32], joskin jälkimmäisessä kovarianssirakenne \mathfrak{M}_Ω^V karakterisoitiin suoraan kahdella eri menetelmällä. Kovarianssiehdon 74 toteuttava kanoninen paikkaerosuure $E_{\mathcal{Z}}$ on spektraalimitta, jolla kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{H}$ ja $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{T}^n$

$$(E_{\mathcal{Z}}(B)\varphi)(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \chi_B(\mathbf{z}\bar{\mathbf{w}})\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{z}).$$

Tämä kanoninen suure saadaan valitsemalla kaavassa 76 $c_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{\mathbf{j}} = 1$ kaikilla $\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^n$ [32]; kyseessä on siis kovariantti äärisuure. Kuten edellisissä osioissa todetaan nytkin, että jos jokainen suureeseen $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{T}^n}^V$ liittyvistä avaruuksista $\mathbf{H}_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$, on yksiulotteinen, on

suure M spektraalimitta ja unitaariekvivalentti kanonisen paikkaerosuureen $E_{\mathcal{Z}}$ kanssa. Suoralla laskulla kaavasta 76 todetaan, että paikkaerosuure $M \in \mathfrak{M}_{\Omega}^V$ voidaan määrätä suoraan sen ensimmäisen momentin projektioista [32]

$$M[1]_k = \int_{\Omega} \arg z_k dM(z_1, \dots, z_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

Toisaalta ylläolevan lauseen mielessä ”mahdollisimman sumea” paikkaerosuure $E_s \in \mathfrak{M}_{\Omega}^V$ saadaan jälleen, kun sen synnyttävä yksikkövektoriperhe $\{\xi_{\mathbf{m}} \in \mathcal{H} \mid \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}\}$ on avaruuden \mathcal{H} ortonormaalikanta, eli esimerkiksi $\xi_{\mathbf{m}} = e_{\mathbf{m}}$ kullakin $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{2n}$. Kaavan 76 mukaan tällöin

$$E_s(B) = \mu_n(B) I_{\mathcal{H}}$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$.

4.4.2 Paikkaerosuureet vapaassa avaruudessa

Systeemimme koostuu nyt kahdesta hiukkasesta vapaassa avaruudessa \mathbb{R}^n , joiden paikkaerosuureita tutkimme. Systeemin Hilbertin avaruus on nyt $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^{2n}, d^{2n}\mathbf{g})$. Merkitsemme yleensä avaruuden \mathbb{R}^{2n} vektoreita muodossa (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , missä $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Tässä merkinnässä ensimmäiset koordinaatit ovat hiukkasen 1 koordinaatit ja loput ovat hiukkasen 2 koordinaatit. Kun hiukkanen 1 on pisteessä \mathbf{x} ja hiukkanen 2 pisteessä \mathbf{y} , on niiden paikkaero $\mathbf{y} - \mathbf{x}$. Ryhmä \mathbb{R}^{2n} operoi jälleen paikkaeron arvoavaruudessa \mathbb{R}^n transitiivisesti kaavan

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{z} - \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$$

mukaisesti. Arvoavaruus on jälleen homeomorfinen tekijäavaruudelle \mathbb{R}^{2n}/H , missä

$$H = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Annihilaattorialiryhmä H^{\perp} on nyt

$$H^{\perp} = \{(\mathbf{y}, -\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Annihilaattorin Haarin mitaksi valitsemme mitan $d^n \mathbf{y} / (2\pi)^{n/2}$. Voimme valita kustakin tekijäryhmän $\mathbb{R}^{2n}/H^{\perp}$ tekijäluokasta yksikäsitteisen edustajan $(\mathbf{w}, \mathbf{0})$, missä $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

Vaadimme, että paikkaerosuureet ovat kovariantteja säännöllisen esityksen $U_{2n} =: U$ suhteen. Siirrymme jälleen tarkastelemaan esitystä $\mathbf{g} \mapsto \mathfrak{F}U(\mathbf{g})\mathfrak{F}^* := \hat{U}(\mathbf{g})$ ja kovarianssirakennetta $\mathfrak{M}_{\Omega}^{\hat{U}}$ Fourier-Plancherel-muunnetussa avaruudessa $\hat{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{R}^{2n}, d^{2n}\mathbf{u})$, sillä kaavasta 65 huomaamme, että \hat{U} operoi diagonaalisesti avaruudessa $\hat{\mathcal{H}}$, eli on muotoa

$$\mathbf{g} \mapsto \int_{\mathbb{R}^{2n}}^{\oplus} e^{-i(\mathbf{g}, \mathbf{u})} I d^{2n}\mathbf{u}.$$

Lauseen 3.3 mukaiset komponenttiavaruudet ovat $\mathcal{H}_{\mathbf{u}} := \mathbb{C}$ kaikilla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2n}$, ja voimme jälleen valita $\mathcal{M} = \mathcal{H}$.

Voimme taas valita esitykseen U liittyväksi avaruuden $\mathbb{R}^{2n}/H^\perp \simeq \mathbb{R}^n$ Borel-mitaksi ν mitan $d^n \mathbf{x}$, jolloin mitaksi $\tilde{\nu}$ valitaan $(2\pi)^{-n/2} d^{2n} \mathbf{g}$. Lauseen 4.2 mukaan $\mathfrak{M}_\Omega^{\hat{U}} \neq \emptyset$. Olkoon nyt $\hat{M} \in \mathfrak{M}_\Omega^{\hat{U}}$, ja merkitään symbolilla M operaattorimittaa $\mathcal{B}(\Omega) \ni B \mapsto \mathfrak{F}^* \hat{M}(B) \mathfrak{F}$. Voimme nyt määrätä operaattorimittoihin M ja \hat{M} liittyvän edellisten osioiden mukaisen operaattorikentän $\mathbb{R}^{2n} \ni \mathbf{u} \mapsto W(\mathbf{u}) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \hat{\mathcal{H}})$ kiinnittämällä heikosti mitallisen yksikkövektoriarvoisen funktion $\xi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{H}$ asettamalla

$$W(\mathbf{u})(1) = \xi(\mathbf{u}) \quad (79)$$

kullakin $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2n}$. Merkintä $\xi(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, tulee jälleen ymmärtää niin, että vektori (\mathbf{y}, \mathbf{z}) on avaruuden \mathbb{R}^{2n} alkio.

Merkitsemme symbolilla $\mathfrak{A}'(\mathbb{R}^n)$ sellaisten Borel-mitallisten funktioiden $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ joukkoa, joilla

$$\mathbf{A1}' \quad \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \overline{\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{y})} \text{ melkein kaikilla } \mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{A2}' \quad \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \overline{f(\mathbf{y})} f(\mathbf{z}) d^n \mathbf{y} d^n \mathbf{z} \geq 0 \text{ kaikilla } f \in C_c(\mathbb{R}^n) \text{ ja}$$

$$\mathbf{A3}' \quad \alpha^{(0)}(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = 1 \text{ melkein kaikilla } \mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Jälleen olemme merkinneet $\alpha^{(0)}(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k(\mathbf{w}, \mathbf{y})|^2$ kaikilla $\mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, kun funktiot $\alpha_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ antavat funktiolle α edellisestä osiosta tutun esityksen

$$\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\alpha_k(\mathbf{w}, \mathbf{y})} \alpha_k(\mathbf{w}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (80)$$

jonka löydämme kuten osiossa 4.3.2. Huomaamme nyt, että kun \hat{M} , M ja kenttä $\mathbf{u} \mapsto W(\mathbf{u})$ ovat kuten yllä, ja yhtälö 79 pätee jollekin heikosti mitalliselle yksikkövektorifunktiolle $\xi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{H}$, niin funktio

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mapsto \langle \xi(\mathbf{w} - \mathbf{y}, \mathbf{y}) | \xi(\mathbf{w} - \mathbf{z}, \mathbf{z}) \rangle$$

on alkio joukossa $\mathfrak{A}'(\mathbb{R}^n)$. Toisaalta jokainen joukon $\mathfrak{A}'(\mathbb{R}^n)$ funktio saadaan jostakin heikosti mitallisesta yksikkövektoriarvoisesta funktiosta $\xi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{H}$ ylläolevan kaavan mukaisesti käyttämällä kaavan 80 mukaista hajotelmaa ja ehtoa $\mathbf{A3}'$. Suoralla sijoituksella kaavaan 41 tai 42 ja soveltamalla lausetta 4.6 saamme nyt seuraavan lauseen.

Lause 4.12 *Jokaista kovarianttia paikkaerosuuretta $M \in \mathfrak{M}_\Omega^U$ vastaa funktio $\alpha \in \mathfrak{A}'(\mathbb{R}^n)$ ja heikosti mitallinen yksikkövektoriarvoinen funktio $\xi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{H}$ siten, että kaikilla*

$\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$, joilla $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in C_c(\mathbb{R}^{2n})$ ja $B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \varphi | M(B) \psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_B \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{y})} \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \overline{\hat{\varphi}(\mathbf{w} - \mathbf{y}, \mathbf{y})} \hat{\psi}(\mathbf{w} - \mathbf{z}, \mathbf{z}) \times \\ &\quad \times d^n \mathbf{y} d^n \mathbf{z} d^n \mathbf{w} d^n \mathbf{x}, \\ \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \langle \xi(\mathbf{w} - \mathbf{y}, \mathbf{y}) | \xi(\mathbf{w} - \mathbf{z}, \mathbf{z}) \rangle, \quad \mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (81)$$

Toisaalta, jos $\alpha \in \mathfrak{A}'(\mathbb{R}^n)$ tai $\xi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{H}$ on mielivaltainen heikosti mitallinen yksikkövektoriarvoinen funktio, kaava 81 määrää kovariantin paikkaerosuureen $M \in \mathfrak{M}_\Omega^U$. Kaava 81 määrää kovarianssirakenteen \mathfrak{M}_Ω^U ja joukon $\mathfrak{A}'(\mathbb{R}^n)$ välille affiinin bijektion. Olkoon kovariantti paikkaerosuure M kaavan 81 mukainen. Merkitkäämme yksikkövektoreiden $\xi(\mathbf{w} - \mathbf{y}, \mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ virittämää suljettua aliavaruutta symbolilla $\mathbf{H}_\mathbf{w}$ kullakin $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Suure M on kovarianssirakenteen \mathfrak{M}_Ω^U äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole olemassa sellaista heikosti mitallista operaattorikenttää $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{w} \mapsto A(\mathbf{w}) \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_\mathbf{w})$, $0 < \text{ess sup}_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \|A(\mathbf{w})\| < \infty$, jolle pätee

$$\langle \xi(\mathbf{w} - \mathbf{y}, \mathbf{y}) | A(\mathbf{w}) \xi(\mathbf{w} - \mathbf{y}, \mathbf{y}) \rangle = 0 \quad (82)$$

melkein kaikilla $\mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Samainen suure M on koko suureperheen $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{H})$ äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole sellaista heikosti mitallista operaattorikenttää $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto D(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $0 < \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|D(\mathbf{x})\| < \infty$, missä $\mathbf{H} := \int_{\mathbb{R}^n}^\oplus \mathbf{H}_\mathbf{x} d^n \mathbf{x}$, jolle

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{y})} \langle \xi(\mathbf{w} - \mathbf{y}, \mathbf{y}) | D(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{w} - \mathbf{z}, \mathbf{z}) \rangle d^n \mathbf{x} = 0 \quad (83)$$

melkein kaikilla $\mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Jos valitsemme kaavassa 81 funktion ξ vakioksi, saamme spektraalimitan $E_{\mathcal{Z}}$, kanonisen paikkaerosuureen, jolla $(E_{\mathcal{Z}}(B)\varphi)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi_B(\mathbf{y} - \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ ja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Kuten edellä voidaan jälleen osoittaa, että jos paikkaerosuure $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}^U$ on sellainen, että siihen liittyvät avaruudet $\mathbf{H}_\mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, ovat yksiulotteisia, suure M on spektraalimitta ja unitaariekvivalentti kanonisen paikkaerosuureen $E_{\mathcal{Z}}$ kanssa.

4.5 Vapaan hiukkasen aikasuureet

Käsitlemme vielä esimerkkinä vapaan (yhden vapausasteen) spinin 0 Galilei-objektin aikasuureita. Systeemiämme kuvaa Hilbertin avaruus $L^2(\mathbb{R})$, jonka aikasiirrot generoi Hamiltonin operaattori $H_0 := P^2/(2m)$, missä $m \geq 0$ on hiukkasen massa ja P on aiemmin esitelty liikemääräoperaattori. Usein sanotaan, ettei tällä systeemillä ole aikasuureita, sillä ei ole olemassa itseadjungoitua operaattoria T , jolla pätee kanoninen kommutointiehto

$$[H_0, T]\varphi = (H_0 T - T H_0)\varphi = i\varphi, \quad (84)$$

kun $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ kuuluu johonkin tiheään aliavaruuteen. Tämä merkitsee sitä, ettei ole olemassa spektraalimittaa $P \in \Sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$, joka olisi kovariantti aikasiirtoesityksen $\mathbb{R} \ni t \mapsto V(t) = e^{-itH_0}$ suhteen; jos tällainen olisi olemassa, täyttäisi itseadjungoitu operaattori $P[1] =: T$ kommutointiehdon 84. Osoitamme seuraavaksi, että on olemassa semispektraalimittoja $M \in \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$, joille

$$V(t)M(B)V(t)^* = M(B+t)$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; näistä yksikään ei tosin voi olla spektraalimitto. Kutsumme kovarianssirakenteen $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^V$ alkioita vapaan hiukkasen aikasuureiksi.

Olkoon \mathbb{R}^+ positiivisten reaalilukujen joukko. Muodostamme unitaarikuvauksen

$$L^2(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^2),$$

$$\tilde{\varphi}(\varepsilon) = \left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{1/4} (\hat{\varphi}(\sqrt{2m\varepsilon}), \hat{\varphi}(-\sqrt{2m\varepsilon})), \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}), \quad \varepsilon > 0.$$

Toteamme, että $(\widehat{V(t)\varphi})(\varepsilon) = e^{-it\varepsilon} \tilde{\varphi}(\varepsilon)$. Kun määräämme additiivisen itseduaalisen ryhmän \mathbb{R} karakterit asettamalla $\langle t, \varepsilon \rangle = e^{-it\varepsilon}$ kaikilla $t, \varepsilon \in \mathbb{R}$, huomaamme, että systeemin esitys avaruudessa $L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{C}^2)$ antaa lauseen 3.3 mukaisen diagonaalisen muodon esitykselle V ja mitta ν_V on reaalilukujoukon \mathbb{R} Lebesguen mitta rajoitettuna joukkoon \mathbb{R}^+ . Lauseesta 4.2 seuraa, että aikasuureita on olemassa. Karakteriryhmän \mathbb{R} rajaaminen joukkoon \mathbb{R}^+ aiheuttaa sen, ettei yksikään aikasuure $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^V$ ole spektraalimitto. Mikä tahansa aikasuure $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^V$ voidaan määrätä valitsemalla jokin heikosti mitallinen isometriakenttä $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon \mapsto W(\varepsilon) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2; \mathcal{M})$, missä \mathcal{M} on jokin ääretönulotteinen Hilbertin avaruus (vaikkapa $\mathcal{M} = L^2(\mathbb{R})$), ja asettamalla

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_B \int_0^\infty \int_0^\infty e^{it(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \langle \tilde{\varphi}(\varepsilon_1) | W(\varepsilon_1)^* W(\varepsilon_2) \tilde{\psi}(\varepsilon_2) \rangle_{\mathbb{C}^2} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 dt \quad (85)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$, joilla $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in C_c(\mathbb{R})$, ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Toisaalta jokainen tällainen isometriakenttä $\varepsilon \mapsto W(\varepsilon)$ voidaan määrittellä valitsemalla jotkin heikosti mitalliset yksikkövektoriarvoiset funktiot $\zeta_j : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}$, $j = 0, 1$, joilla $\zeta_0(p) \perp \zeta_1(p)$ melkein kaikilla $p > 0$ ja

$$W(\varepsilon) = |\zeta_0(\sqrt{2m\varepsilon})\rangle\langle 0| + |\zeta_1(\sqrt{2m\varepsilon})\rangle\langle 1|, \quad \varepsilon > 0.$$

Vektorit $|j\rangle$, $j = 0, 1$, muodostavat tässä avaruuden \mathbb{C}^2 luonnollisen ortonormaalikannan. Kaavaa 85 käsittelemällä saamme seuraavan tuloksen.

Lause 4.13 *Olkoon $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^V$. On olemassa heikosti mitalliset yksikkövektoriarvoiset funktiot $\zeta_j : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}$, $j = 0, 1$, joilla $\zeta_0(p) \perp \zeta_1(p)$ melkein kaikilla $p > 0$ ja*

$$\begin{aligned} & \langle \varphi | M(B) \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi m} \int_B \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\frac{it}{2m}(p_2^2 - p_1^2)} \sum_{j,k=0}^1 \langle \zeta_j(p_1) | \zeta_k(p_2) \rangle \overline{\hat{\varphi}((-1)^j p_1)} \hat{\psi}((-1)^k p_2) \times \\ & \times \sqrt{p_1 p_2} dp_1 dp_2 dt \end{aligned} \quad (86)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$, joilla $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in C_c(\mathbb{R})$, ja $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Olkoon aikasuure M kuten kaavassa 86. Merkitsemme vektorien $\zeta_j(p)$, $j = 0, 1$, $p > 0$, virittämää Hilbertin avaruutta symbolilla \mathbf{H} . Aikasuure M on joukon $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^V$ ääripiste tarkalleen silloin, kun ei ole olemassa sellaista nollasta poikkeavaa operaattoria $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, jolle

$$\langle \zeta_j(p) | A \zeta_k(p) \rangle = 0 \quad (87)$$

melkein kaikilla $p > 0$ aina, kun $j, k = 0, 1$. Aikasuure M on joukon $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ äärisuure tarkalleen silloin, kun ei ole olemassa sellaista heikosti mitallista operaattori-kenttää $\mathbb{R} \ni t \mapsto D(t) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}; \mathbf{H}))$, $0 < \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} \|D(t)\| < \infty$, jolle

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\frac{it}{2m}(p_2^2 - p_1^2)} \sum_{j,k=0}^1 \langle \zeta_j(p_1) | D(t) \zeta_k(p_2) \rangle \overline{\hat{\varphi}((-1)^j p_1)} \hat{\psi}((-1)^k p_2) \sqrt{p_1 p_2} dp_1 dp_2 dt = 0 \quad (88)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$, joilla $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in C_c(\mathbb{R})$, aina, kun $j, k = 0, 1$.

Määritelkäämme kanoninen aikasuure $\tau \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^V$ määrittelemällä se kuten kaavassa 86, jossa asetetaan $\zeta_j(p) = \varphi_j$, $j = 0, 1$, kaikilla $p > 0$, kun $\varphi_0, \varphi_1 \in L^2(\mathbb{R})$ ovat yksikkövektoreita ja $\varphi_0 \perp \varphi_1$. Tämä merkitsee sitä, että

$$\langle \varphi | \tau(B) \psi \rangle = \frac{1}{2\pi m} \int_B \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\frac{it}{2m}(p_2^2 - p_1^2)} (\overline{\hat{\varphi}(p_1)} \hat{\psi}(p_2) + \overline{\hat{\varphi}(-p_1)} \hat{\psi}(-p_2)) \sqrt{p_1 p_2} dp_1 dp_2 dt \quad (89)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$, joilla $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in C_c(\mathbb{R})$, ja kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Voidaan osoittaa, että momenttioperaattori $\tau[1] =: T$ on symmetrinen ja tiheästi määritelty. Operaattori T yhtyy tiheällä aliavaruudella operaattoriin

$$T' = m \text{signum}(P) |P|^{-1/2} Q |P|^{-1/2},$$

missä Q on aiemmin määritelty paikkaoperaattori [8], [33]. Operaattorit T ja T' eivät ole itseadjungoituja, mutta T' toteuttaa muodollisesti kommutointiehdon 84.

Huomaamme välittömästi, että τ on kovarianssirakenteen $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^V$ ääripiste. Soveltamalla kaavaa 88 kanoniseen aikasuureeseen τ ja valitsemalla, että $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ ovat sellaisia, että $\hat{\varphi}$ ja $\hat{\psi}$ häviävät joko negatiivisten tai positiivisten reaalilukujen joukossa, huomaamme, että τ on äärisuure joukossa $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ tarkalleen silloin, kun ehdosta

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{it(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} d_{j,k}(t) f(\varepsilon_1) g(\varepsilon_2) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 dt = 0 \quad (90)$$

kaikilla $f, g \in C_c(\mathbb{R}^+)$ ja $j, k = 0, 1$ seuraa, että funktiot $d_{k,l} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $k, l = 0, 1$, yhtyvät nollafunktioihin melkein kaikkialla. Tässä matriisit $D(t) = (d_{k,l}(t))_{k,l=0}^1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$, muodostavat kaavan 88 mukaisen mitallisen operaattori-kentän. Ehto 90 kuitenkin merkitsee sitä, että nämä häiriömatriisit ovat melkein kaikkialla nollamatriiseja. Kanoninen aikasuure τ on näinollen joukon $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ äärisuure. Painotettakoon vielä, ettei τ ole spektraalimitta.

5 Kovariantit suureet ja mittaukset

Tässä luvussa käsittelemme pikaisesti joitakin kovariantteja suureita ja instrumentteja koskevia tuloksia. Erityisesti esittelemme edellisen luvun keskeisten tulosten vastineita yleisemmän tyypin I ryhmän ja toisaalta kompaktin ryhmän tapauksissa. Kovarianssirakennetta ja sen ääripisteitä ei vielä osata tyhjentävästi karakterisoida yleisen tyypin I ryhmän tapauksessa, paitsi, kun transitiivisena avaruutena on ryhmä itse. Tarkka karakterisointi tunnetaan vain Abelin ryhmän (edellinen luku) ja toisaalta kompaktin ryhmän tapauksessa, johon liittyviä tuloksia esittelemme tässä luvussa. Seuraavana tavoitteena on laajentaa Abelin ryhmää koskevat tulokset koskemaan mielivaltaista tyypin I ryhmää. Emme mene siihen kuitenkaan tämän tutkielman puitteissa. Lopuksi käsittelemme vielä lyhyesti instrumenttien joukon konveksia rakennetta.

5.1 Kovarianssirakenne ja yleinen tyypin I ryhmä

Olkoon \mathcal{H} separoituva kompleksinen Hilbertin avaruus ja G tyypin I lokaalisti kompakti unimodulaarinen ryhmä, joka täyttää toisen numeroituvuusaksiooman, toisinsanoen on yleinen huomautuksen 3.1 mukainen ryhmä. Valitaan ryhmälle G Haarin mitta $d\nu$. Olkoon V tämän ryhmän unitaariesitys avaruudessa \mathcal{H} . Samaistamme Hilbertin avaruuden \mathcal{H} jälleen lauseen 3.3 mukaiseen suoraan integraaliin

$$\mathcal{H} = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\gamma} d\nu(\gamma), \quad (91)$$

missä $\mathcal{H}_{\gamma} = \mathcal{K}_{\gamma} \otimes \mathcal{L}_{\gamma}$, missä \mathcal{K}_{γ} ja \mathcal{L}_{γ} ovat separoituvia Hilbertin avaruuksia kaikilla $\gamma \in \hat{G}$ ja \mathcal{K}_{γ} on esityksen γ (redusoitumaton) esitysavaruus. Kaikilla $g \in G$ voidaan siis kirjoittaa

$$V(g) = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \gamma(g) \otimes I_{\mathcal{L}_{\gamma}} d\nu(\gamma),$$

jolloin kaikilla ν -mitallisilla kentillä $\gamma \mapsto \zeta(\gamma) \in \mathcal{K}_{\gamma}$ ja $\gamma \mapsto \xi(\gamma) \in \mathcal{L}_{\gamma}$ sekä $\gamma \mapsto \varphi(\gamma) = \zeta(\gamma) \otimes \xi(\gamma)$

$$(V(g)\varphi)(\gamma) = \gamma(g)\zeta(\gamma) \otimes \xi(\gamma), \quad g \in G, \quad \gamma \in \hat{G}.$$

Jatkossa merkitsemme tällaisia hajoavia kenttiä yksinkertaisesti symbolilla $\zeta \otimes \xi$. Lisäksi käytämme hajoavien kenttien $\gamma \mapsto \zeta(\gamma) \otimes \xi(\gamma)$, missä $\gamma \mapsto \zeta(\gamma) \in \mathcal{K}_{\gamma}$ ja $\gamma \mapsto \xi(\gamma) \in \mathcal{L}_{\gamma}$ ovat ν -mitallisia kenttiä, lineaarisesta verhosta merkintää \mathcal{D} , ja lisäksi

$$\mathcal{D}^1 := \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D} \mid \int_{\hat{G}} \|\varphi(\gamma)\| d\nu(\gamma) < \infty \right\}.$$

Käytämme taas kovarianttien G -arvoisten suureiden joukosta merkintää \mathfrak{M}_G^V . Lähteissä [34] ja [31] on karakterisoitu kaikki kovarianssirakenteen \mathfrak{M}_G^V suureet tietynlaisina seskvi-lineaarimuotokenttinä.

Sanomme, että [II] on *mitallinen kenttä seskvilineaarimuotoja avaruudessa* \mathcal{D} yli joukon $\hat{G} \times \hat{G}$, kun Π on ν -mitallinen kenttä $\hat{G} \times \hat{G} \ni (\gamma, \gamma') \mapsto \Pi_{\gamma, \gamma'}^{24}$, jossa $\Pi_{\gamma, \gamma'} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ on seskvilineaarimuoto kaikilla $\gamma, \gamma' \in \hat{G}$. Tarkemmin sanottuna

- $\Pi_{\gamma, \gamma'}(\varphi, \varkappa\chi + \lambda\psi) = \varkappa(\gamma')\Pi_{\gamma, \gamma'}(\varphi, \chi) + \lambda(\gamma')\Pi_{\gamma, \gamma'}(\varphi, \psi)$ ja
- $\Pi_{\gamma, \gamma'}(\varphi, \psi) = \overline{\Pi_{\gamma', \gamma}(\psi, \varphi)}$

kaikilla $\varphi, \chi, \psi \in \mathcal{D}$, kaikilla ν -mitallisilla funktioilla $\varkappa, \lambda : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ ja mitan ν suhteen melkein kaikilla $\gamma, \gamma' \in \hat{G}$.

Merkitsemme symbolilla \mathfrak{P} sellaisten ylläesitellyn kaltaisten seskvilineaarimuotokenttien [II] joukkoa, joilla

1. $|\Pi_{\gamma, \gamma'}(\zeta_1 \otimes \xi_1, \zeta_2 \otimes \xi_2)| \leq \|\zeta_1(\gamma)\| \|\xi_1(\gamma)\| \|\zeta_2(\gamma')\| \|\xi_2(\gamma')\|$ kaikilla mitallisilla kentillä $\gamma \mapsto \zeta_k(\gamma) \in \mathcal{K}_\gamma$ ja $\gamma \mapsto \xi_k(\gamma) \in \mathcal{L}_\gamma$, $\zeta_k \otimes \xi_k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2$,
2. $\Pi(\varphi, \varphi) \geq 0$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}^1$, missä $\Pi : \mathcal{D}^1 \times \mathcal{D}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ on seskvilineaarimuotokenttä, joka määritellään kaavalla

$$\Pi(\varphi, \psi) := \int_{\hat{G}} \int_{\hat{G}} \Pi_{\gamma, \gamma'}(\varphi, \psi) d\nu(\gamma) d\nu(\gamma'), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}^1, \quad (92)$$

3. kullakin mitallisella kentällä $\gamma \mapsto \xi(\gamma) \in \mathcal{L}_\gamma$ ja melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$ pätee

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \Pi_\gamma^{(0)}(e_k \otimes \xi, e_k \otimes \xi) = \langle \xi(\gamma) | \xi(\gamma) \rangle_{\mathcal{L}_\gamma},$$

kun $\gamma \mapsto \{e_k(\gamma) \in \mathcal{K}_\gamma \mid k \in \mathbb{N}\}$ on mitallinen kenttä ortonormaalikantoja.

Yllä ehdossa 3 käytetty merkintä $\Pi_\gamma^{(0)}$, $\gamma \in \hat{G}$, tarkoittaa kentän [II] *diagonaaliarvoa* pisteessä (γ, γ) . Yleisesti, kun (X, μ) on Borelin avaruus ja μ on σ -äärellinen mitta topologisessa avaruudessa X , ovat kaikki avaruuden $L^2(X, \mu)$ positiivisten jälkiluokkaoperaattoreiden \mathbb{C} -kernelit ”Greenin funktiot” $X \times X \ni (x, y) \mapsto P_{x, y}$ muotoa

$$P_{x, y} = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \overline{f_k(y)}, \quad x, y \in X,$$

joillakin $f_k \in L^2(X, \mu)$, $k \in \mathbb{N}$. Diagonaaliarvo pisteessä (x, x) , $x \in X$, määritellään nyt kaavalla $P_x^{(0)} := \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)|^2$. Jos seskvilineaarimuotokenttä [II] täyttää nyt ehdot 1 ja 2, on lähteessä [31] osoitettu, että kun $\gamma \mapsto \{e_k(\gamma) \in \mathcal{K}_\gamma \mid k \in \mathbb{N}\}$ on kenttä ortonormaalikantoja, voidaan \mathbb{C} -kernelille $(\gamma, \gamma') \mapsto \Pi_{\gamma, \gamma'}(e_k \otimes \xi, e_k \otimes \xi)$ määritellä diagonaaliarvo aina, kun kenttä $\gamma \mapsto \xi(\gamma) \in \mathcal{L}_\gamma$ on ν -mitallinen, sillä kyseessä on jälkiluokkaoperaattorin määräävä integraalioperaattorin kernel.

Seuraava lause on todistettu lähteissä [34] ja [31].

²⁴Siis kenttä $(\gamma, \gamma') \mapsto \Pi_{\gamma, \gamma'}(\varphi, \psi)$ on mitallinen kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$.

Lause 5.1 *Olkoon V huomautuksen 3.1 mukaisen ryhmän G esitys. Kaavan 91 mukainen mitta ν on absoluuttisesti jatkuva esitysduaalin \hat{G} Plancherelin mitan suhteen tarkalleen silloin, kun $\mathfrak{M}_G^V \neq \emptyset$. Lisäksi kaava*

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \int_B \Pi(V(g)^* \varphi, V(g)^* \psi) dg, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}^1, \quad B \in \mathcal{B}(G) \quad (93)$$

määrittelee affiinin bijektiivisen vastaavuuden $\mathfrak{M}_G^V \ni M \leftrightarrow [\Pi] \in \mathfrak{P}$, kun seskvilineaarimuoto $\Pi : \mathcal{D}^1 \times \mathcal{D}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään kaavalla 92.

Olemme osoittaneet lauseen 5.1 jo edellisessä luvussa Abelin ryhmän tapauksessa vieläpä, kun transitiivinen G -avaruus on yleisempi tekijäavaruus $\Omega = G/H$, $H \leq G$. Lauseen 5.1 voi todistaa oleellisesti edellisen luvun menetelmillä, joskin koska esitysduaalilla \hat{G} ei yleisessä tapauksessa ole ryhmärakennetta, on todistuksessa käytettävä syvempiä tieto- ja epäkommutatiivisesta harmonisesta analyysistä, kuten avaruuden $L^1(G, dg)$ Fourier-Plancherel-muunnoksen \mathfrak{F} yleistystä²⁵ epäkommutatiiviseen ryhmään G . Lauseen 3.10 mukaan taas kukin $M \in \mathfrak{M}_G^V$ voidaan laajentaa kanoniseksi suureeksi M_\varkappa avaruudessa $L^2(G; \mathcal{M})$,

$$M_\varkappa(B)\varphi = \chi_B \varphi, \quad B \in \mathcal{B}(G), \quad \varphi \in L^2(G; \mathcal{M}),$$

jollakin ääretönulotteisella separoituvalla Hilbertin avaruudella \mathcal{M} . Kun symbolilla \hat{M}_\varkappa merkitään suuretta $B \mapsto \mathfrak{F}M_\varkappa(B)\mathfrak{F}^*$, on lähteessä [29] osoitettu, että suuret M ja \hat{M}_\varkappa toisiinsa kietova isometria W on hajoava; todistus on oleellisesti sama, kuin lauseen 4.3 todistus.

Käytämme muotoa $\zeta \otimes \xi$, $\zeta \in \mathcal{K}_\gamma$, $\xi \in \mathcal{L}_\gamma$, olevien alkioiden lineaarisesta verhosta merkintää \mathcal{D}_γ kullakin $\gamma \in \hat{G}$. Voimme nyt määritellä seskvilineaarimuotokenttään $[\Pi]$ liittyvän minimaalisen Kolmogorov-hajotelman operaattorikenttänä $[\Phi]$; $\hat{G} \ni \gamma \mapsto \Phi(\gamma) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\gamma; \mathcal{M})$, missä \mathcal{M} on jokin ääretönulotteinen Hilbertin avaruus. Tältä kentältä vaaditaan

$$\Pi_{\gamma, \gamma'}(\varphi, \psi) = \langle \Phi(\gamma)\varphi(\gamma) | \Phi(\gamma')\psi(\gamma') \rangle_{\mathcal{M}}$$

kaikilla $\gamma, \gamma' \in \hat{G}$ ja $\varphi, \psi \in \mathcal{D}^1$. Lisäksi olkoon $\mathbf{H} \subset \mathcal{M}$ se Hilbertin avaruus, joka saadaan vektoreiden

$$\Phi\varphi = \int_{\hat{G}} \Phi(\gamma)\varphi(\gamma) d\nu(\gamma), \quad \varphi \in \mathcal{D}^1$$

lineaarisen verhon sulkeumana avaruudessa \mathcal{M} . Toisin sanoen kenttä $[\Phi]$, $\Phi(\gamma) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\gamma; \mathbf{H})$ kaikilla $\gamma \in \hat{G}$, on sellainen, että yllämääritellyn integraalioperaattorin $\Phi : \mathcal{D}^1 \rightarrow \mathbf{H}$ kuvaavaruus on totaalinen Hilbertin avaruudessa \mathbf{H} . Lisäksi vaadimme, että

$$\|\Phi(\gamma)\zeta \otimes \xi\|_{\mathbf{H}} \leq \|\zeta\|_{\mathcal{K}_\gamma} \|\xi\|_{\mathcal{L}_\gamma}$$

²⁵ $(\mathfrak{F}f)(\gamma) = \int_G f(g)\gamma(g)^* dg$ on nyt Hilbert-Schmidt-operaattori avaruudessa \mathcal{K}_γ kaikilla $f \in L^1(G, dg)$ ja $\gamma \in \hat{G}$.

kaikilla $\zeta \in \mathcal{K}_\gamma$ ja $\xi \in \mathcal{L}_\gamma$ aina, kun $\gamma \in \hat{G}$, ja lisäksi kun $\gamma \mapsto \{e_k(\gamma) \in \mathcal{K}_\gamma \mid k \in \mathbb{N}\}$ on mitallinen kenttä kantoja, niin

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|\Phi(\gamma)e_k(\gamma) \otimes \xi\|_{\mathbf{H}}^2 = \|\xi\|_{\mathcal{L}_\gamma}^2$$

mitan ν suhteen melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$, kun $\xi \in \mathcal{L}_\gamma$. Tavallisilla tiheysargumenteilla voidaan helposti osoittaa, että tällainen hajotelma on unitaari-ekvivalenssia vaille yksikäsitteinen. Kun $[\Phi]$ on kentän $[\Pi]$ minimaalinen Kolmogorov-hajotelma on ylläolevan perusteella (polarisaatio) olemassa perhe $[\Phi_k]$, $k \in \mathbb{N}$, operaattorikenttiä $\gamma \mapsto \Phi_k(\gamma) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_\gamma; \mathbf{H})$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joilla

$$\Pi_{\gamma, \gamma'}(e_k \otimes \xi_1, e_l \otimes \xi_2) = \langle \Phi_k(\gamma)\xi_1(\gamma) | \Phi_l(\gamma')\xi_2(\gamma') \rangle_{\mathbf{H}}$$

melkein kaikilla $\gamma, \gamma' \in \hat{G}$ sekä mitallisilla kentillä $\gamma \mapsto \xi_m(\gamma) \in \mathcal{L}_\gamma$, $m = 1, 2$, kun $\gamma \mapsto \{e_k(\gamma) \in \mathcal{K}_\gamma \mid k \in \mathbb{N}\}$ on mitallinen kenttä ortonormaalikantoja.

Lähteessä [29] on etsitty kullekin $[\Pi] \in \mathfrak{P}$ minimaalinen Kolmogorov-hajotelma. Emme mene kyseiseen konstruktion kuitenkään tässä. Toteamme vain, että tällainen hajotelma saadaan kaikille $[\Pi]$ ja siten kaikille kovarianteille suureille $M \in \mathfrak{M}_G^V$. Jokaisella $M \in \mathfrak{M}_G^V$ on siis olemassa minimaalinen Kolmogorov-hajotelma $[\Phi]$, joka täyttää ylläolevat ehdot ja

$$\langle \varphi | M(B)\psi \rangle = \int_B \int_{\hat{G}} \int_{\hat{G}} \langle \Phi(\gamma)(V(g)^*\varphi)(\gamma) | \Phi(\gamma')(V(g)^*\psi)(\gamma') \rangle_{\mathbf{H}} d\nu(\gamma) d\nu(\gamma') dg \quad (94)$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}^1$ ja $B \in \mathcal{B}(G)$.

Voimme nyt todistaa ekstremaaleja koskevan tuloksen aivan samoin, kuin lauseen 4.4 yhteydessä.

Lause 5.2 *Olkoon G huomautuksen 3.1 ehdot täyttävä ryhmä ja V sen unitaari-esitys avaruudessa \mathcal{H} , joka on kaavan 91 mukaista suoraintegraalimuotoa. Olkoon lisäksi $M \in \mathfrak{M}_G^V$ kovariantti suure, jolla siis on kaavan 94 mukainen minimaalinen Kolmogorov-hajotelma $[\Phi]$ ja siihen liittyvä perhe $[\Phi_k]$, $k \in \mathbb{N}$, operaattorikenttiä. Nyt $M \notin \text{Ext}(\mathfrak{M}_G^V)$ tarkalleen silloin, kun on olemassa nollasta poikkeava operaattori $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, jolla*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \Phi_k(\gamma)^* A \Phi_k(\gamma) = 0 \quad (95)$$

mitan ν suhteen melkein kaikilla $\gamma \in \hat{G}$.

5.2 Kompaktin ryhmän suhteen kovariantit suureet

Olkoon G kompakti ryhmä varustettuna Haarin mitalla dg , ja olkoon V ryhmän G unitaari-esitys Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Esitysduaali \hat{G} on diskreetti, ja luetteloimme sen alkiot

luonnollisilla luvuilla. Samaistamme jälleen

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k, \quad (96)$$

missä $\mathcal{H}_k = \mathcal{K}_k \otimes \mathcal{L}_k$, $k \in \mathbb{N}$, ja \mathcal{K}_k on esityksen γ_k redusoitumaton esitysavaruus ja $\dim(\mathcal{L}_k) =: d_k < \infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Esitys V saa nyt kullekin $g \in G$ muodon

$$V(g) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \gamma_k(g) \otimes I_{\mathcal{L}_k}.$$

Kun $\varphi \in \mathcal{H}$, merkitsemme yleisesti $\varphi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k$, missä $\varphi_k \in \mathcal{H}_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Esittelemme tiheän aliavaruuden

$$\mathcal{D}^1 := \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\| < \infty \right\}.$$

Olkoon taas $H \leq G$ ja merkitään jälleen $\Omega = G/H$. Varustamme G -avaruuden Ω normitetulla Haarin mitalla μ , eli $\mu(\Omega) = 1$. Käytämme taas kovarianttien suureiden joukosta merkintää \mathfrak{M}_Ω^V

Voimme jälleen määritellä seskvilineaarimuotokentät $[\Pi] = [\Pi_{k,l}]_{k,l \in \mathbb{N}}$ kuten edellisessä osiossa, eli $\Pi_{k,l} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ on seskvilineaarimuoto kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$. Merkitsemme jälleen symbolilla \mathfrak{P}_V sellaisten seskvilineaarimuotokenttien $[\Pi]$ joukkoa, joilla

- $\Pi_{k,l}$ on rajoitettu kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$,
- $\Pi_{k,l}(V(h)\varphi, V(h)\psi) = \Pi_{k,l}(\varphi, \psi)$ kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ ja $h \in H$,
- $\sum_{k,l \in \mathbb{N}} \Pi_{k,l}(\varphi_k, \varphi_l) \geq 0$ aina, kun $\varphi \in \mathcal{H}$ on sellainen, että $\varphi_k \neq 0$ vain äärellisen monella $k \in \mathbb{N}$ ja
- kaikilla $\varphi_l, \psi_l \in \mathcal{H}_l$, $l \in \mathbb{N}$, ja kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$\int_G \Pi_{k,k}(V(g)\varphi_l, V(g)\psi_l) dg = \delta_{k,l} \int_\Omega \Pi_{l,l}(V(g)^*\varphi_l, V(g)^*\psi_l) d\mu([g]) = \delta_{k,l} \langle \varphi_l | \psi_l \rangle.$$

Lähteessä [18] on osoitettu, että kaava

$$\langle \varphi | M(B)\psi \rangle = \int_\Omega \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \Pi_{k,l}(V(g)^*\varphi, V(g)^*\psi) d\mu([g]), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}^1, \quad B \in \mathcal{B}(\Omega) \quad (97)$$

määrittelee affiinin bijektiivisen vastaavuuden $\mathfrak{M}_\Omega^V \ni M \leftrightarrow [\Pi] \in \mathfrak{P}_V$.

Voimme toisaalta määritellä joukon \mathfrak{K}_Ω^V , jonka alkiot ovat kerneloperaattorikenttiä $[K] = [K_{k,l}]_{k,l \in \mathbb{N}}$, joilla

- (i) $K_{k,l} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$,

- (ii) $V(h)K_{k,l} = K_{k,l}V(h)$ kaikilla $h \in H$ ja $k, l \in \mathbb{N}$,
- (iii) $\sum_{k,l \in \mathbb{N}} \langle \varphi_k | K_{k,l} \varphi_l \rangle \geq 0$ aina, kun $\varphi \in \mathcal{H}$ on sellainen, että $\varphi_k \neq 0$ vain äärellisen monella $k \in \mathbb{N}$, ja
- (iv) $\text{tr}_{\mathcal{K}_k} [K_{l,l}] = \delta_{k,l} d_k I_{\mathcal{L}_k}$ kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$.

Voimme nyt karakterisoida kovarianssilakenteen \mathfrak{M}_Ω^V suureet, kuten lähteessä [18].

Lause 5.3 *Olkoon $[K] \in \mathfrak{K}_\Omega^V$ kerneloperaattorikenttä. Tällöin kaava*

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} \langle V(g)^* \varphi_k | K_{k,l} V(g)^* \psi_l \rangle d\mu([g]), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}^1, \quad B \in \mathcal{B}(\Omega), \quad (98)$$

määrittelee kovariantin suureen $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$. Toisaalta, jos $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$, on olemassa kerneloperaattorikenttä $[K] \in \mathfrak{K}_\Omega^V$, jolla kaava 98 pätee. Näin syntyvä vastaavuus $\mathfrak{M}_\Omega^V \leftrightarrow \mathfrak{K}_\Omega^V$ on affiini bijektio.

Olemme saaneet tämän tuloksen jo edellisessä luvussa kompaktin Abelin ryhmän tapauksessa; saimme tuolloin vieläpä suoraan operaattorikentän minimaalisen Kolmogorov-hajotelman, jonka avulla määritimme äärisuureet. Lähteessä [18] on etsitty operaattorikenttien $[K] \in \mathfrak{K}_\Omega^V$ Kolmogorov-hajotelmat, ja esittelemme tämän menetelmän seuraavassa.

Kutsumme operaattorikentän $[K] \in \mathfrak{K}_\Omega^V$ minimaaliseksi Kolmogorov-hajotelmaksi operaattorikenttää $[\Psi] = [\Psi_k]_{k \in \mathbb{N}}$, kun $\Psi_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{M})$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, missä puolestaan \mathcal{M} on separoituva Hilbertin avaruus, jossa on aliryhmän H esitys U , ja

- (a) $\Psi_k V(h) = U(h) \Psi_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $h \in H$,
- (b) operaattoreiden Ψ_k , $k \in \mathbb{N}$, kuva-avaruuksien unionien lineaarinen verho on avaruuden \mathcal{M} tiheä aliavaruus, eli $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{ran}(\Psi_k)$ on totaalinen avaruudessa \mathcal{M} ja
- (c) $K_{k,l} = \Psi_k^* \Psi_l$ kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$.

Tämä hajotelma on oleellisesti yksikäsitteinen, eli jos $[\Phi]$, $\Phi_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, on toinen tällainen hajotelma, on olemassa unitaarioperaattori $R \in \mathcal{U}(\mathcal{K}; \mathcal{M})$, joka kietoo aliryhmän H esitykset avaruuksissa \mathcal{M} ja \mathcal{K} ja $R\Phi_k = \Psi_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Seuraavaksi konstruoinme yhden Kolmogorov-hajotelman realisaation. Olkoot $[K] \in \mathfrak{K}_\Omega^V$, $\varphi \in \mathcal{H}$ ja $l \in \mathbb{N}$. Määrittelemme kentän $\mathbb{N} \ni k \mapsto f_k^l(\varphi)$ kaavalla

$$f_k^l(\varphi) = K_{k,l} \varphi, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (99)$$

Lisäksi määrittelemme avaruden \mathcal{H}_K^0 tällaisten kenttien $[f^l(\varphi)]$, $l \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{H}$, lineaarisena verhona, ja määräämme kahdelle tällaiselle kentälle $[f^k(\varphi)]$ ja $[f^l(\psi)]$ seskvilineaarimuodon (sisätulon) $\langle \cdot | \cdot \rangle_K$ kaavalla

$$\langle [f^k(\varphi)] | [f^l(\psi)] \rangle_K := \langle \varphi | K_{k,l} \psi \rangle.$$

Laajennamme avaruuden \mathcal{H}_K^0 Hilbertin avaruudeksi $\mathcal{H}_K = (\mathcal{H}_K, \langle \cdot | \cdot \rangle_K)$ tämän muodon suhteen. Voidaan osoittaa, että avaruus \mathcal{H}_K koostuu edelleen kentistä $[f] = [f_k]_{k \in \mathbb{N}}$, $f_k \in \mathcal{H}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, ja sijoituskuvaukset

$$\Gamma_k[f] = f_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad [f] \in \mathcal{H}_K,$$

ovat jatkuvia. Voidaan helposti tarkistaa, että operaattorikenttä $[\Gamma^*] = [\Gamma_k^*]_{k \in \mathbb{N}}$ täyttää Kolmogorov-hajotelman ehdot (a)-(c), kun avaruus \mathcal{H}_K varustetaan aliryhmän H esityksellä U ,

$$U(h)[f] = [V(h)f_k]_{k \in \mathbb{N}}, \quad h \in H, \quad [f] \in \mathcal{H}_K.$$

Erityisesti nyt pätee siis $K_{k,l} = \Gamma_k \Gamma_l^*$ ja $\Gamma_k U(h) = V(h) \Gamma_k$ kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$ ja $h \in H$.

Merkitsemme niiden jälkilookkaoperaattoreiden $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, joilla $TV(g) = V(g)T$ kaikilla $g \in G$, joukkoa symbolilla \mathcal{T}_V , ja niiden $S \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_K)$ joukkoa, joilla $SU(h) = U(h)S$ kaikilla $h \in H$, puolestaan symbolilla \mathcal{T}_U . Lisäksi käytämme merkintää \mathfrak{T}_V operaattoreiden $\Gamma_k^* T \Gamma_k$, $k \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{T}_V$, lineaarisen verhon sulkeumasta. Seuraava äärisuureiden karakterisointi voidaan nyt todistaa oleellisesti samaan tapaan, kuin lause 4.4.

Lause 5.4 *Olkoon $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$ kompaktin ryhmän G esityksen V suhteen kovariantti suure, jolloin siihen liittyy yllä kuvatus kaltainen minimaalinen Kolmogorov-hajotelma. M ei ole joukon \mathfrak{M}_Ω^V äärisuure tarkalleen silloin, kun on olemassa nollasta poikkeava operaattori $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K)$, jolla*

$$AU(h) = U(h)A \tag{100}$$

kaikilla $h \in H$ ja

$$\text{tr}[AT] = 0 \tag{101}$$

kaikilla $T \in \mathfrak{T}_V$.

Kompaktin Abelin ryhmän tapauksessa äärisuure-ehto 100 vaikuttaa uudelta verrattuna lauseen 4.4 mukaisiin ehtoihin. Ehto 100 sisältyy kuitenkin lauseen 4.4 vaatimukseen, että häiriöoperaattori A on hajoava. Lauseen 4.5 mukaisessa muotoilussa ehto 100 sisältyy puolestaan vaatimukseen, että häiriöoperaattori A säilyttää kaavan 50 mukaisten avaruuksien \mathcal{M}_k , $k \in \mathbb{N}$, keskinäisen ortogonaalisuuden.

5.3 Operaatioiden ja instrumenttien konvekssi rakenne

Olemme jo ensimmäisessä osiossa esitelleet Schrödinger-operaatioiden käsitteen. Laajennamme operaatioiden määritelmää hieman: Merkitsemme symbolilla $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, missä \mathcal{H} ja \mathcal{K} ovat Hilbertin avaruuksia, sellaisten lineaarikuvausten $\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{K})$ joukkoa, joilla $\Phi(T) \geq O$ kaikilla positiivisilla $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja

$$0 \leq \text{tr}[\Phi(T)] \leq 1$$

kaikilla $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Joukko $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ on siis avaruuden \mathcal{H} Schrödinger-operaatioiden joukko. Kutsumme myös joukon $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ alkioita Schrödinger-operaatioiksi tai vain operaatioiksi. Kuten Heisenberg-operaatioidenkin tapauksessa sanomme, että yleinen lineaarikuvaus $\Psi : \mathcal{L}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on n -positiivinen, $n \in \mathbb{N}$, kun kuvaus $\Psi_n : \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{L}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\Psi_n = \mathfrak{I}_n \otimes \Psi$ on positiivinen, eli kuvaa osittain järjestetyn joukon $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{L}(\mathcal{K})$ positiivisen alkion joukon $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H})$ positiiviseksi alkioiksi. Tässä $\mathcal{M}_n := \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on $n \times n$ -kompleksimatriisien C^* -algebra ja $\mathfrak{I}_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ on identiteettikuvaus. Lineaarikuvaus $\Psi : \mathcal{L}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on jälleen täyspositiivinen, kun se on n -positiivinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lineaarikuvaus $\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{K})$ on täyspositiivinen, kun sen transpoosi $\Phi^* : \mathcal{L}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\text{tr}[\Phi(T)A] = \text{tr}[T\Phi^*(A)]$ kaikilla $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$, on täyspositiivinen. Stinespringin dilaatiolauseesta seuraa, että $\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{K})$ on täyspositiivinen tarkalleen silloin, kun on olemassa operaattorit $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $k \in \mathbb{N}$, joilla

$$\Phi(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} A_k T A_k^*, \quad T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}),$$

missä sarja suppenee jälkinormin suhteen. Sanomme positiivista operaattoria $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ *puhtaaksi*, kun se on muotoa $T = cP[\varphi]$ joillakin $c \geq 0$ ja $\varphi \in \mathcal{H}$. Sanomme lisäksi lineaarikuvausta $\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{K})$ *puhtaaksi*, kun $\Phi(T)$ on positiivinen ja puhdas aina, kun $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ on positiivinen ja puhdas. Tämä kielenkäyttö on jokseenkin harhaanjohtavaa, sillä se, että operaatio Φ on puhdas, ei merkitse sitä, että se olisi konvekssin joukon $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ äärioperaatio. Itse asiassa joukon $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ äärioperaatioiden tyhjentävää karakterisointia ei tunneta; esittelemme tosin tuonnempana joitakin esimerkkejä äärioperaatioista ja joitakin erityisiä tapauksia, joissa äärioperaatiot voidaan karakterisoida. Sen sijaan puhtaat operaatiot tunnetaan, ja ne on karakterisoitu lähteessä [3] (theorem 3.1).

Lause 5.5 *Jokainen puhdas lineaarikuvaus $\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{K})$ on joko muotoa*

$$\Phi(T) = ETE^*, \quad T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}),$$

missä $E \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ on vaihetekijää vaille yksikäsitteinen, muotoa

$$\Phi(T) = FTF^*, \quad T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}),$$

missä $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ on vaihetekijää vaille yksikäsitteinen rajoitettu antilineaarinen operaattori tai muotoa

$$\Phi(T) = \text{tr}[AT]P[\varphi], \quad T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$$

missä $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on positiivinen ja $\varphi \in \mathcal{H}$.

Tutkikaamme seuraavaksi lineaarisia matriisimuunnoksia $\Phi : \mathcal{M}_m \rightarrow \mathcal{M}_n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Tällainen matriisimuunnos on operaatio, kun se on joko jäljen säilyttävä tai jälkeä kutistava. Merkitsemme symbolilla $E_{k,l}$ sellaista $m \times m$ -matriisia, jonka paikassa (k, l) on ykkönen ja muualla nollaa; joukko $\{E_{k,l} \mid k, l = 1, \dots, m\}$ muodostaa siis avaruuden $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^m)$ ortonormaalikannan. Olettakaamme, että lineaarikuvaus $\Phi : \mathcal{M}_m \rightarrow \mathcal{M}_n$ on täyspositiivinen, jolloin erityisesti kuvaus $\Phi \otimes \mathcal{I}_m$ on positiivinen. Muodostakaamme positiivinen matriisi $M := \sum_{k,l=1}^m E_{k,l} \otimes E_{k,l} \in \mathcal{M}_m \otimes \mathcal{M}_m = \mathcal{M}_{m^2}$, jolloin siis matriisi

$$N_\Phi := (\Phi \otimes \mathcal{I}_m)(M) = \sum_{k,l=1}^m \Phi(E_{k,l}) \otimes E_{k,l} \in \mathcal{M}_{mn}$$

on positiivinen.

Olettakaamme, että $\Phi : \mathcal{M}_m \rightarrow \mathcal{M}_n$ on lineaarinen. Jos taas edelläesitellyn kaltainen matriisi $N_\Phi \in \mathcal{M}_{mn}$ on positiivinen, on olemassa (keskenään ortogonaalit) matriisin N_Φ ominaisvektorit $\mathbf{x}_r \in \mathbb{C}^{mn}$, $r = 1, \dots, d \leq mn$, joilla $N_\Phi = \sum_r \mathbf{x}_r \mathbf{x}_r^*$. Merkitkäämme symbolilla P_k avaruuden $\mathbb{C}^{mn} = \bigoplus_{s=1}^m \mathbb{C}_s^n$, missä $\mathbb{C}_s^n = \mathbb{C}^n$ kaikilla $s = 1, \dots, m$, projektiota avaruudelle \mathbb{C}_k^n edellisessä suorasummaesityksessä, jolloin

$$P_k N_\Phi P_l = \Phi(E_{k,l}) = \sum_r (P_k \mathbf{x}_r)(P_l \mathbf{x}_r)^*.$$

Määritellämme kompleksiset $n \times m$ -matriisit A_r ,

$$A_r = \left(P_{1\mathbf{x}_r} \left| \cdots \right| P_{m\mathbf{x}_r} \right), \quad r = 1, \dots, d.$$

Saamme suoraan edellistä laskelmaa käyttämällä, että $\Phi(E_{k,l}) = \sum_r A_r E_{k,l} A_r^*$ kaikilla $k, l = 1, \dots, m$. Lineaarisuutta käyttämällä saamme, että Φ on täyspositiivinen. Saamme näin seuraavan tuloksen.

Lause 5.6 *Olkoon $\Phi : \mathcal{M}_m \rightarrow \mathcal{M}_n$ lineaarinen. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät.*

- Φ on täyspositiivinen.
- Kuvaus $\Phi \otimes \mathcal{I}_m$ on positiivinen, eli Φ on m -positiivinen.

- Matriisi $N_\Phi \in \mathcal{M}_{mn}$,

$$N_\Phi = \sum_{k,l=1}^m \Phi(E_{k,l}) \otimes E_{k,l} = \begin{pmatrix} \Phi(E_{1,1}) & \cdots & \Phi(E_{1,m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(E_{m,1}) & \cdots & \Phi(E_{m,m}) \end{pmatrix},$$

on positiivinen (positiivisemidefiniitti).

Kiinnittäkäämme matriisi $E \in \mathcal{M}_n$ ja merkitkäämme symbolilla $\mathfrak{P}_E^{m,n}$ niiden täyspositiivisten lineaarikuvausten $\Phi : \mathcal{M}_m \rightarrow \mathcal{M}_n$ joukkoa, joilla $\Phi(I_m) = E$, missä I_m on $m \times m$ -identiteettimatriisi. Huomaamme välittömästi, että joukko $\mathfrak{P}_E^{m,n}$ on konvekssi. Lähteessä [35] on karakterisoitu joukon $\mathfrak{P}_E^{m,n}$ ääripisteet.

Lause 5.7 *Kuvaus Φ on joukon $\mathfrak{P}_E^{m,n}$ ääripiste tarkalleen silloin, kun sillä on olemassa esitys*

$$\Phi(T) = \sum_r A_r T A_r^*, \quad T \in \mathcal{M}_m,$$

missä A_r , $r = 1, \dots, d \leq mn$, ovat $n \times m$ -kompleksimatriiseja, joilla joukko $\{A_r A_s^* \mid r, s = 1, \dots, d\}$ on lineaarisesti riippumaton.

Olkoon (Ω, \mathcal{A}) mitallinen avaruus sekä \mathcal{H} ja \mathcal{K} Hilbertin avaruuksia. Kutsumme σ -additiivisia kuvauksia $\mathcal{A} \ni B \mapsto \mathcal{J}_B \in \mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, joilla \mathcal{J}_\emptyset on nollakuvaus ja \mathcal{J}_Ω on jäljen säilyttävä, instrumenteiksi. σ -additiivisuudella tarkoitetaan tässä sitä, että kun $\{B_k \in \mathcal{A} \mid k \in \mathbb{N}\}$ on jono erillisiä mitallisia joukkoja, niin

$$\mathcal{J}_{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k}(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_{B_k}(T), \quad T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}),$$

missä oikean puolen sarja suppenee jälkinormin suhteen. Edelläkuvatun kaltaisten instrumenttien joukkoa merkitsemme symbolilla $\mathfrak{I}(\mathcal{A}; \mathcal{H}, \mathcal{K})$. Jos Ω on topologinen avaruus, $\mathcal{B}(\Omega) \ni B \mapsto \mathcal{J}_B \in \mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ on instrumentti ja $f \in C_c(\Omega)$, määrittelemme kullakin $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ operaattorin $\mathcal{J}_f(T) \in \mathcal{T}(\mathcal{K})$ asettamalla kaikille $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$

$$\mathrm{tr}[A \mathcal{J}_f(T)] = \int_\Omega f d\mu_{A,T}^{\mathcal{J}},$$

missä $\mu_{A,T}^{\mathcal{J}}$ on avaruuden Ω Borelin mitta, jolla $\mu_{A,T}^{\mathcal{J}}(B) = \mathrm{tr}[A \mathcal{J}_B(T)]$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$. Jälkiluokkaoperaattorit $\mathcal{J}_f(T)$, $f \in C_c(\Omega)$, $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, määräävät tarkalleen joukon $\mathfrak{I}(\mathcal{B}(\Omega); \mathcal{H}, \mathcal{K})$ alkion $B \mapsto \mathcal{J}_B$ [3] (theorem 1.2). Kuten olemme luvussa 1 nähneet, instrumentit ovat yhteydessä suureiden (semispektraalimittojen) realisaatioihin fysikaalisissa mittauksissa. Tämän takia instrumenttien joukon konveksien ääripisteiden karakterisointi on kiinnostavaa fysikaaliselta kannalta. Ääri-instrumenteilla ei ole vielä tyhjentävää karakterisointia; yleisen karakterisoinnin etsiminen jää tulevien tutkimusten tavoitteeksi.

Instrumenttien joukon erilaisten konveksien osajoukkojen ääri-instrumenttien selvittäminen on myös kiehtova ongelma. Olkoon esimerkiksi ryhmä G huomautuksen 3.1 mukainen, ja $\Omega = G/H$ jollakin suljetulla aliryhmällä $H \leq G$. Olkoon myös V ryhmän G (vahvasti jatkuva) unitaariesitys Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Merkitsemme symbolilla \mathfrak{I}_Ω^V niiden instrumenttien $\mathcal{B}(\Omega) \ni B \mapsto \mathcal{J}_B \in \mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ joukkoa, joille pätee kovarianssiehto

$$\mathcal{J}_{g \cdot B}(T) = V(g)^* \mathcal{J}_B(V(g)TV(g)^*)V(g)$$

kaikilla $g \in G$, $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ ja $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Olkoon nyt $B \mapsto \mathcal{J}_B$ yllä kuvatun kaltainen kovariantti instrumentti, jolloin voimme määritellä semispektraalimitan $M : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ asettamalla kaikille $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja $B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\text{tr}[TM(B)] = \text{tr}[\mathcal{J}_B(T)].$$

Selvästi $M \in \mathfrak{M}_\Omega^V$. Kutsummekin joukkoa \mathfrak{I}_Ω^V esityksen V suhteen kovarianttien instrumenttien joukoksi. Huomattakoon kuitenkin, että kovariantin suureen voi myös määritellä instrumentti, joka ei itse ole kovariantti ylläesitellyssä mielessä. Lähteessä [3] on karakterisoitu joukon \mathfrak{I}_Ω^V alkiot, kun G on kompakti²⁶.

Lause 5.8 *Olkoon G metristyvä kompakti ryhmä, jonka vasenta Haarin mittaa merkitsemme symbolilla dg . Olkoon $H \leq G$ suljettu aliryhmä ja merkittäämme $\Omega := G/H$. Merkitsemme alkion g määräämää sivuluokkaa $gH \in \Omega$ symbolilla $[g]$. Olkoon V ryhmän G esitys Hilbertin avaruudessa \mathcal{H} . Merkitsemme lisäksi symbolilla \mathfrak{F}_H^V sellaisten jäljen säilyttävien operaatioiden $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ joukkoa, joille*

$$\Phi(V(h)TV(h)^*) = V(h)\Phi(T)V(h)^*$$

kaikilla $h \in H$ ja $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Kun $B \mapsto \mathcal{J}_B$ on kovariantti instrumentti, on olemassa yksikäsitteinen $\Phi \in \mathfrak{F}_H^V$, jolle

$$\mathcal{J}_f(T) = \int_G f([g])V(g)^*\Phi(V(g)TV(g)^*)V(g) dg \quad (102)$$

kaikilla jatkuvilla $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ja kaikilla $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Jos taas $\Phi \in \mathfrak{F}_H^V$, määrää kaava 102 kovariantin instrumentin $B \mapsto \mathcal{J}_B$. Kaava 102 määrää joukkojen \mathfrak{I}_Ω^V ja \mathfrak{F}_H^V välille affiinin bijektion.

FINIS CORONAT OPUS.

²⁶Itse asiassa tässä lauseessa ei tarvitse olettaa kaikkia huomautuksen 3.1 ehtoja.

Viitteet

- [1] G. Cassinelli, E. De Vito ja A. Toigo, *J. Math. Phys.* **45**, 418 (2004).
- [2] P. Busch, M. Grabowski ja P. J. Lahti, *Operational Quantum Physics*, 1 ed. (Lecture Notes in Physics; Monographs, m 31, Springer , 1997).
- [3] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems* (Academic Press Inc. , 1976).
- [4] P. J. Lahti ja K. Ylinen, *Johdatus kvanttimekaniikkaan* (Suomen fyysikkoseuran julkaisuja, Gummerus , 1989).
- [5] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis* (CRC Press Inc. , 1995).
- [6] E. G. Beltrametti ja G. Cassinelli, *The Logic of Quantum Mechanics* (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Addison-Wesley Publishing Company , 1981).
- [7] A. M. Gleason, *J. Math. Mech.* **6**, 885 (1957).
- [8] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North-Holland Series in Statistics and Probability, Vol **1**, North-Holland , 1980).
- [9] P. Busch, P. J. Lahti ja M. Mittelstaedt, *The Quantum Theory of Measurement*, 1 ed. (Lecture Notes in Physics; Monographs, m 2, Springer , 1996).
- [10] K. Kraus, *States, Effects, and Operations* (Springer , 1983).
- [11] Ozawa, *J. Math. Phys.* **27**, 759 (1986).
- [12] G. Ludwig, *Foundations of Quantum Mechanics I* (Springer , 1983).
- [13] C. Cassinelli, E. De Vito ja A. Levrero, *J. Math. Anal. Appl.* **210**, 472 (1997).
- [14] S. T. Ali ja E. Prugovecki, *J. Math. Phys.* **18**, 219 (1977).
- [15] T. Hytönen, J.-P. Pellonpää ja K. Ylinen, *J. Math. Anal. Appl.* **336**, 1287 (2007).
- [16] J.-P. Pellonpää, *J. Phys. A* (in press), arXiv: quant-ph/1007.3211v1 (2010).
- [17] G. M. D'Ariano ja P. Lo Presti, arXiv: quant-ph/0301110v1 (2003).
- [18] C. Carmeli, T. Heinosaari, J.-P. Pellonpää ja A. Toigo, *J. Math. Phys.* **49**, 063504 (2008).
- [19] C. Carmeli, T. Heinosaari ja A. Toigo, *J. Math. Phys.* **45**, 2526 (2004).
- [20] J. G. Glimm, *Ann. of Math.* **73**, 572 (1961).
- [21] J. Dixmier, *Bull. Soc. Math. France* **87**, 65 (1959).
- [22] Harish-Chandra, *Trans. A. M. S.* **75**, 185 (1953).
- [23] Harish-Chandra, *Trans. A. M. S.* **76**, 234 (1954).

- [24] A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations* (Springer , 1976).
- [25] G. W. Mackey, *Ann. of Math.* **55**, 101 (1952).
- [26] U. Cattaneo, *Comment. Math. Helvetici* **54**, 629 (1979).
- [27] A. S. Holevo, *Izvestiya VUZ. Matematika* **27**, 49 (1983).
- [28] L. W. Baggett ja A. Ramsay, *Can. J. Math.* **XXXII**, 441 (1980).
- [29] A. S. Holevo ja J.-P. Pellonpää, *Found. Phys.* **39**, 625 (2009).
- [30] P. J. Lahti ja J.-P. Pellonpää, *J. Math. Phys.* **40**, 4688 (1999).
- [31] A. S. Holevo, *Math. USSR Izvestiya* **28**, (1987).
- [32] T. Heinonen, P. J. Lahti ja J.-P. Pellonpää, *J. Math. Phys.* **44**, 466 (2003).
- [33] P. Busch, M. Grabowski ja P. J. Lahti, *Phys. Lett. A* **191**, 357 (1994).
- [34] A. S. Holevo, *Covariant Measurements and Imprimitve Systems* (Lecture Notes in Mathematics, Vol **1055**, Springer , 1984).
- [35] M.-D. Choi, *Lin. Alg. Appl.* **10**, 285 (1975).