

# Kvanttimekaaniset heikot arvot

Luk-tutkielma  
Turun yliopisto  
Fysiikka  
2025  
Tuomo Rentto  
Tarkastaja:  
Tom Kuusela

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

**Rentto, Tuomo** Kvanttimekaaniset heikot arvot

Luk-tutkielma, 19

Fysiikka

28.3.2025

---

Tutkielmassa käsitellään tapoja tutkia kvanttimekaanisia systeemejä ilman tilan romahdusta. Tarkoituksena on tutustua heikkoihin kvanttimitauksiin, josta voidaan johtaa kvanttimekaaniset heikot arvot. Perehdytään tarkemmin heikkojen arvojen erikoisiin ominaisuuksiin ja käydään läpi erilaisia tapoja mitata heikkoja arvoja. Lopuksi tutustutaan kirjallisuuden pohjalta erilaisiin heikkojen arvojen tulkintoihin.

Kvanttimittaukset kuvataan systeemin ja mittalaitteen välisenä vuorovaikutuksena. Pienentämällä vuorovaikutuksen voimakkuutta voidaan mitata systeemin suureita häiritsemällä systeemin tilaa minimaalisesti. Vuorovaikutuksen heikentäminen johtaa kuitenkin siihen, että yksittäisen mittauksen epätarkkuus on niin suuri, ettei mittaus anna yhtään informaatiota systeemin tilasta. Suorittamalla monta identtistä mittausta voidaan mittausjoukon tarkkuus saadaan mielivaltaisen suureksi.

Heikot arvot ovat heikkojen mittausten lopputuloksia. Nämä ovat erikoisia systeemiä kuvaavia suureita, koska ne voivat saada kompleksiarvoisia lopputuloksia, sekä ne voivat olla paljon ominisarvoja suurempia.

Tilan minimaalisen häiriön sekä heikkojen arvojen kompleksisen luonteen ansiosta heikoilla mittauksilla on mahdollista mitata systeemin ei-kommutoivia suureita. Voidaan siis suorittaa useampi heikko mittaus peräkkäin samalle systeemille. Näillä mittauksilla voidaan suorittaa kvanttisysteemin tilaa kuvaavan aaltofunktion tomografia tai mitata yksittäisen fotonin ei-kommutoivien polarisaatio-observaabelien arvoja.

Erikoisen luonteensa ansiosta heikoille arvoille ei ole yksikäsitteistä tulkintaa. Tutkielmassa tutustutaan erilaisiin tulkintoihin. Odotusarvotulkinnan mukaan heikot arvot kuvaavat tietynlaista idealisoitua odotusarvoa systeemin suureille. Tilastollisessa tulkinnassa ehdotetaan heikkojen arvojen syntyvän mittausdatan ulkoisesta häiriöstä ja tilastollisesta manipuloinnista, jolloin sen kvanttimekaaninen luonne katoaa. Heikkojen arvojen voidaan myös niiden käyttäytymisen mukaan ajatella kuvaavan kahden amplitudin välistä suhdetta.

Asiasanat: Kvanttimekaniikka, kvanttimekaaninen heikko mittaus, kvanttimekaaniset heikot arvot, kvanttimekaniikan mittausongelma

# Sisällys

<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>1 Teoria</b>	<b>2</b>
1.1 Heikot mittaukset . . . . .	2
1.2 Heikko arvo . . . . .	3
1.3 Kompleksiluonne . . . . .	6
<b>2 Heikkojen arvojen mittauksia</b>	<b>7</b>
2.1 Spin-1/2 hiukkanen . . . . .	7
2.2 Peräkkäiset heikot arvot . . . . .	9
2.3 Aaltofunktioiden tomografia . . . . .	12
<b>3 Tulkinta</b>	<b>14</b>
3.1 Odotusarvotulkinta . . . . .	15
3.2 Tilastollinen tulkinta . . . . .	15
3.3 Amplitudien välinen suhde . . . . .	16
<b>4 Yhteenveto</b>	<b>18</b>

## Johdanto

Kvanttimekaniikan mittausingelma on yksi modernin fysiikan tärkeimmistä kysymyksistä. Yksinkertaistettuna kvanttisysteemit koostuvat eri tilojen lineaarikombinaatioista tai superpositioista. Tilojen aikakehitys on lineaarista ja sitä voidaan mallintaa Schrödingerin yhtälöllä. Ennen mittauksen suorittamista kvanttimekaniikka on siis täysin determinististä, koska voimme alkutilan perusteella laskea sen aikakehityksen Schrödingerin yhtälön avulla. Mittauksessa systeemin tila kuitenkin muuttuu pysyvästi ja vastaukseksi voidaan saada vain alkuperäisen tilan ominaisarvoja. Eli usean tilan lineaarikombinaatiosta saadaan mittaustulokseksi yksi näiden tilojen ominaisarvoista. Kvanttimittaukset eivät ole lineaarisia, joten ne eivät noudata Schrödingerin yhtälöä, eivätkä ne ole deterministisiä, koska ennen mittausta voidaan laskea vain eri tulosten todennäköisyydet. Mittausingelmalle on esitetty paljon eri vastauksia, joihin kuuluvat mm. Kööpenhaminan tulkinta, monimaailmatulkinta ja moni muu vastaava. Yleisesti näiden tulkintojen ongelma on, etteivät ne anna uusia ennustuksia kvanttimekaniikasta, joten niitä ei voida todistaa oikeaksi. [1]

Kvanttimittaukset esitetään matemaattisesti mitattavan systeemin ja mittalaitteen välisenä vuorovaikutuksena. Aharonov, Albert ja Vaidman esittelivät artikkelissaan [2], kuinka heikentämällä tätä vuorovaikutusta voidaan mitata kvanttisysteemiä ilman tilan romahdusta. Näitä mittauksia kutsutaan heikoiksi mittauksiksi ja niiden mittaustuloksia heikoiksi arvoiksi. Heikot mittaukset tuottavat useissa tapauksissa erikoisia tuloksia, jotka voivat olla kompleksiarvoisia ja ne voivat olla paljon systeemin ominaisarvoja suurempia.

Heikot mittaukset ja niistä saatavat heikot arvot mahdollistavat syvällisemmän ymmärryksen kvanttimittauksiin. Ne myös mahdollisesti ohjaavat meitä kohti mittausingelman ratkaisua.

# 1 Teoria

## 1.1 Heikot mittaukset

Mittaamalla fysikaalista suuretta kuvaavaa observaabelia  $\hat{A}$ , voidaan kvanttimekaniikan standardimittausmallin mukaan saada tulokseksi vain diskreettejä ominaisarvoja  $a_i$ . Kvanttimittauksia kuvataan mittalaitteen ja mitattavan systeemin välisenä vuorovaikutuksena. Matemaattisesti sitä kuvataan Hamiltonin operaattorilla

$$\hat{H} = -g(t)q\hat{A}, \quad (1)$$

jossa  $g(t)$  on normalisoitu funktio,  $q$  on mittauslaitteen kanoninen muuttuja, jolle on olemassa konjugaatti liikemäärä  $\pi$ , ja  $\hat{A}$  on mitattavaa suuretta kuvaava hermiittinen operaattori. Mittalaitetta kuvaava tila voidaan ideaalisessa tapauksessa esittää Gaussin jakaumana  $q$ -kannassa, jolloin sen konjugaatti  $\pi$  on myös Gaussin jakauma. Tällöin Hamiltonin operaattori johtaa muunnokseen

$$e^{-i \int \hat{H} dt} e^{\frac{-\pi^2}{4(\Delta\pi)^2}} \sum_i a_i |A = a_i\rangle = \sum_i a_i e^{\frac{-(\pi - a_i)^2}{4(\Delta\pi)^2}} |A = a_i\rangle, \quad (2)$$

jossa  $\sum_i a_i |A = a_i\rangle$  on mitattavan systeemin alkutila. Jos  $\pi$ -jakauman hajonta  $\Delta\pi$  on paljon systeemin ominaisarvojen  $a_i$  erotuksia pienempi, vuorovaikutuksen jälkeen jää jäljelle sekoitus Gaussisia jakaumia ominaisarvojen ympärille, jolloin  $\pi$ :n mittauksesta saadaan observaabelin  $\hat{A}$  arvo. Tämä kuvaa vahvasti vuorovaikuttavaa mittausta, jolloin mittalaitteen ja systeemin välinen vuorovaikutus muuttaa mitattavan systeemin tilaa pysyvästi. [2]

Jos mittauksen epätarkkuus  $\Delta\pi$  on paljon suurempi kuin mikään  $a_i$ :n arvoista, todennäköisyysjakauma on taas mittauksen jälkeen lähellä Gaussista jakaumaa, jonka hajonta on  $\Delta\pi$ . Täten suoritettu mittaus ei ole tuhonnut systeemin alkuperäistä tilaa. Tässä tapauksessa Gaussisen jakauman keskikohdassa sijaitsee observaabelin  $\hat{A}$  odotusarvo, joka voidaan kirjoittaa muotoon  $\langle \hat{A} \rangle = \sum_i |a_i|^2 a_i$ . Suorittamalla tämä mittaus ei saada informaatiota systeemistä, koska mittauksen epätarkkuus on

paljon odotusarvoa suurempi  $\Delta\pi \gg \langle \hat{A} \rangle$ . Preparoimalla  $N$  määrä identtisiä systeemejä ja suorittamalla niille identtiset mittaukset mittausjoukon epätarkkuus pienee kertoimella  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . Nyt valitsemalla systeemille tietty lopputila (engl. postselection) voidaan mittauksista saada tuloksia, jotka ovat kompleksiarvoisia ja ne voivat saada myös arvoja standardimittausmallin sallittujen arvojen  $[\min(a_i), \max(a_i)]$  ulkopuolelta. [2]

Muuttamalla siis mittalaitteen ja mitattavan systeemin vuorovaikutuksen voimakkuutta voidaan heikoilla mittauksilla mitata kvanttisysteemin tilan muuttujia ilman tilan romahdusta. [2]

## 1.2 Heikko arvo

Valitaan identtisesti preparoitu joukko hiukkasia, jotka ennen mittausta ovat alkutilassa  $|\psi_i\rangle$  ja mittauksen jälkeen valitussa lopputilassa  $|\psi_f\rangle$ . Tilojen välissä suoritetaan kaavan (1) Hamiltonin operaattorin mukainen mittaus. Mittalaitteen alkutila on tällöin

$$|\varphi_i\rangle = \left[ \frac{1}{\sqrt{\Delta}(2\pi)^{1/4}} \right] \times \exp\left(\frac{-q^2}{4\Delta^2}\right).$$

Mittauksen jälkeen taas mittalaitteen tilaksi saadaan

$$\langle \psi_f | e^{-i \int \hat{H} dt} | \psi_i \rangle e^{\frac{-q^2}{4\Delta^2}} \cong \langle \psi_f | \psi_i \rangle \exp \left[ iq \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \right] e^{\frac{-q^2}{4\Delta^2}}.$$

Jos hajonta  $\Delta$  on tarpeeksi pieni, sille pätee ehto  $\Delta \ll \max_n \frac{|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|}{(|\langle \psi_f | \hat{A}^n | \psi_i \rangle|^{1/n})}$ .  $\pi$ -kannassa mittalaitteen tila voidaan approksimoida muotoon

$$\exp \left[ -\Delta^2 \left( \pi - \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Tästä voidaan tulkita, että mittalaitteen mittaama  $\hat{A}$ :n arvo saadaan muotoon  $\frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle}$ , joka on hiukkasjoukon heikko arvo. Heikon arvon määritelmästä

$$\hat{A}_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \quad (4)$$

nähdään, että heikot arvot eivät rajoitu ominaisarvon minimi- ja maksimiarvoihin. Tämä johtuu siitä, että alku- ja lopputilojen lähestyessä ortogonaalisia tiloja niiden sisätulo lähestyy nollaa, joka kasvattaa heikkoa arvoa lähes rajattomasti. Myös loppu- ja alkutilojen ollessa sama tila huomataan heikon arvon muuttuvan vain perinteiseksi observaabelin odotusarvoksi  $\hat{A}_w = \langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle$ , kun  $|\psi_i\rangle = |\psi_f\rangle \Rightarrow \langle \psi_f | \psi_i \rangle = 1$ . Vaaditaan myös, että alku- ja lopputila eivät saa olla ortogonaaliset, koska muuten kaavan (2) nimittäjä on nolla, kun  $\langle \psi_f | \psi_i \rangle = 0$ . Suorittamalla mittaus  $N$  määrälle hiukkasia voidaan mittausten epätarkkuus saada muotoon  $\frac{1}{\sqrt{N}} \Delta \pi \ll \hat{A}_w$ , jolloin heikko arvo voidaan siis mitata mielivaltaisen suurella epätarkkuudella. [2]

Aharonov ja Vaidman esittelivät artikkelissaan [3] esimerkin spin- $\frac{1}{2}$  hiukkasen heikon arvon selvityksestä. Hiukkanen on preparoitu siten, että sen alkutilassa sen spin osoittaa ylöspäin  $x$ -suunnassa  $|\psi\rangle = |\uparrow_x\rangle$ . Hiukkaselle valitaan lopputilaksi spin ylös  $y$ -suunnassa  $|\phi\rangle = |\uparrow_y\rangle$ . Alku- ja lopputilojen välillä Stern-Gerlachin mittauksella selvitetään hiukkasen spin  $\xi$ -suuntaan, kun  $\hat{\xi}$  on  $\hat{x}$  ja  $\hat{y}$  puolittaja, jolloin observaabeli saadaan muotoon  $\hat{\sigma}_\xi = \left( \frac{\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y}{\sqrt{2}} \right)$ .  $\hat{\sigma}_\xi$  saadaan tällöin laskettua heikon arvon kaavan (4) avulla

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}_\xi)_w &= \frac{\langle \phi | \hat{\sigma}_\xi | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \\ (\hat{\sigma}_\xi)_w &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle \phi | (\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y) | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \\ (\hat{\sigma}_\xi)_w &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Huomataan, että laskettu heikko arvo on sallittujen ominaisarvojen  $\pm 1$  ulkopuolella. Olettamalla mittauksen olevan ideaalinen, jolloin mittalaitetta kuvaava tila on Gaussinen jakauma, vuorovaikutusta kuvaa kaavan (1) muotoinen Hamiltonin operaattori. Tällöin saadaan hiukkasen ja mittalaitteen mittauksen jälkeiseksi tilaksi

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) |\uparrow_\xi\rangle e^{-\frac{(g-1)^2}{2\Delta^2}} + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) |\downarrow_\xi\rangle e^{-\frac{(g+1)^2}{2\Delta^2}}. \quad (5)$$

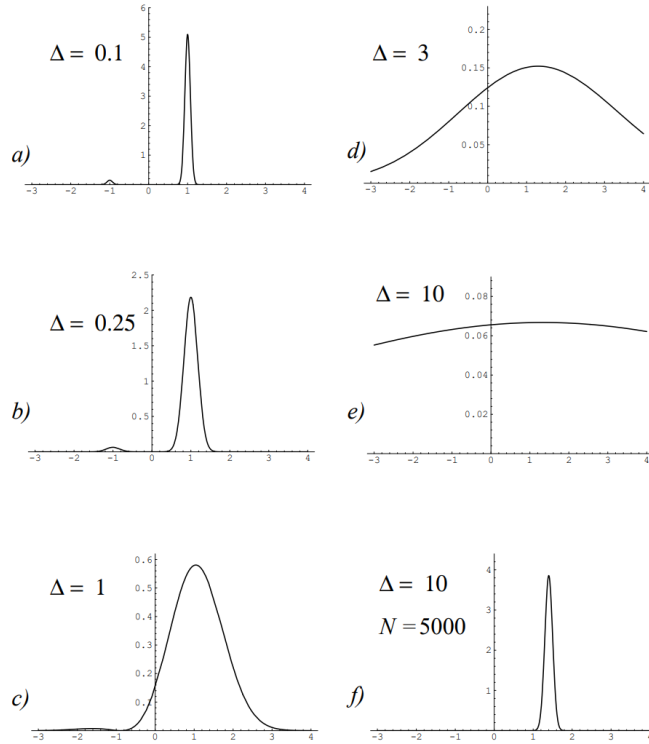
Valitsemalla tarkasteluun vain mittaustulokset, jolla  $\hat{\sigma}_y = 1$ , saadaan hiukkasen lopputilaksi  $\xi$ -kannassa  $\langle \uparrow_y | = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \langle \uparrow_\xi | - i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \langle \downarrow_\xi |$ . Projisoimalla kaava (5)

hiukkasen lopputilaan saadaan mittalaitteen lopputila muotoon

$$\phi(q) = \mathcal{N} \left( \cos^2 \left( \frac{\pi}{8} \right) e^{-\frac{(q-1)^2}{2\Delta^2}} - \sin \left( \frac{\pi}{8} \right) e^{-\frac{(q+1)^2}{2\Delta^2}} \right), \quad (6)$$

jossa  $\mathcal{N}$  on normalisointitekijä. Bornin säännöllä saadaan mittauksen todennäköisyysjakaumaksi

$$P(q) = \mathcal{N}^2 \left( \cos^2 \left( \frac{\pi}{8} \right) e^{-\frac{(q-1)^2}{2\Delta^2}} - \sin \left( \frac{\pi}{8} \right) e^{-\frac{(q+1)^2}{2\Delta^2}} \right)^2. \quad (7)$$



Kuva 1. Spin- $\frac{1}{2}$  hiukkasen mittausten todennäköisyysjakaumat kuvattuna eri hajontan  $\Delta$  arvoilla. Mittaukset voidaan kategorisoida vahvoiksi mittauksiksi, kun hajonta  $\Delta \ll 1$ . Kuvan f)-kohdassa kuvataan 5000 identtisesti preparoidun hiukkasen mittauksen todennäköisyysjakauma, kun hajonta  $\Delta = 10$ . [3]

Mittausta voidaan pitää vahvana, kun todennäköisyysjakauman hajonta  $\Delta \ll 1$ . Kuvat 1a ja 1b ovat vahvan mittauksen todennäköisyysjakaumat, josta huomataan jakauman lokalisoituvan ominaisarvojen  $\pm 1$  ympärille. Kuvat 1c-e kuvaavat yksittäisen hiukkasen heikkoja mittauksia, jossa mittausten epätarkkuus kasvaa ja tällöin mittauksesta saatu informaatio systeemistä vähenee. Kuvassa 1f on kuvattu

5000 identtisesti preparoidun hiukkasen heikko mittaustulos, jolloin sen hajonta  $\Delta = 10$  pienenee muotoon  $\frac{10}{\sqrt{5000}} \approx 0,14$ , jolloin sen tarkkuus on melkein yhtä hyvä kuin kuvassa 1a suoritettussa vahvassa mittauksessa. Huomataan myös, että kuvaaja lokalisoituu arvon  $\sqrt{2} \approx 1,41$  ympärille, joka aiemman laskun perusteella on hiukkasen heikko arvo. Näin voidaan siis hiukkasjoukon alkioden määrää kasvattamalla saada heikkojen mittausten tarkkuutta kasvatettua. [3]

### 1.3 Kompleksiluonne

Heikoilla arvoilla on useita erikoisia ominaisuuksia, joista yksi tärkeimmistä on niiden kompleksinen luonne. Kuten kaavasta (4) voidaan päätellä heikot arvot voivat saada kompleksisia arvoja. Tämä on kummallista, koska yleisesti fysikaalisten mittausten arvot ovat reaalisia. Joten herääkin kysymys, mitä kompleksiarvoisuus tarkoittaa heikkojen arvojen tapauksessa. Dressel ja Jordan pyrkivät artikkelissaan [4] vastaamaan tähän kysymykseen.

Yleistety heikon arvon reaaliosaa voidaan tiettyssä mielessä ajatella mitattavan suureen ideaalisena painotettuna keskiarvona. Tämä kuvaus pätee vain tapauksissa, joissa mittauksen systeemiin aiheuttava häiriö lähestyy nollaa. Käsittelemällä systeemin painotettua keskiarvoa heikossa mittauksessa se suppenee kohti heikon arvon reaaliosaa mittauksen vuorovaikutuksen lähestyessä nollaa. Reaaliosa voidaan kirjoittaa tällöin muotoon

$$\text{Re}\hat{A}_w = \frac{\text{Tr}(\hat{P}_f\{\hat{A},\hat{\rho}\})}{2\text{Tr}(\hat{P}_f\hat{\rho})}, \quad (8)$$

jossa  $\hat{\rho}$  on systeemin alkutilaa kuvaava tiheysmatriisi ja  $\hat{P}_f$  on valittu lopputila, joka on esitetty kvanttimitauksia kuvaavan positiivioperaattorimitan (POM) yhtenä alkiona. Kaavassa esiintyy myös antikommutaattori  $\{\hat{A},\hat{\rho}\} = \hat{A}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{A}$ . Tätä tulkintaa tukee se, että reaaliosan ollessa joku systeemin ominaisarvoista, se sopii suureen klassiseen painotettuun keskiarvoon. Myös reaaliosan ollessa ominaisarvojen

ulkopuolella se noudattaa johdonmukaista sisäistä logiikkaa samalla antaen järkevää informaatiota mitatusta suureesta. [4]

Dressel ja Jordan toteavat, että heikon arvon imaginääriosia ei anna informaatiota mitatusta suureesta, vaan se liittyy mittauksesta aiheutuvaan häiriöön. Imaginääriosan avulla selviää, miten systeemiin kytketty observaabeli  $\hat{A}$  generoi systeemin unitaarista aikaevoluutiota. Sen avulla voidaan siis tarkastella mittauksen vaikutusta systeemin alkutilaan vuorovaikutuksen lähestyessä nollaa. Imaginääriosia voidaan kirjoittaa muotoon

$$\text{Im}\hat{A}_w = \frac{\text{Tr}(\hat{P}_f(-i[\hat{A},\hat{\rho}]))}{2\text{Tr}(\hat{P}_f\hat{\rho})}, \quad (9)$$

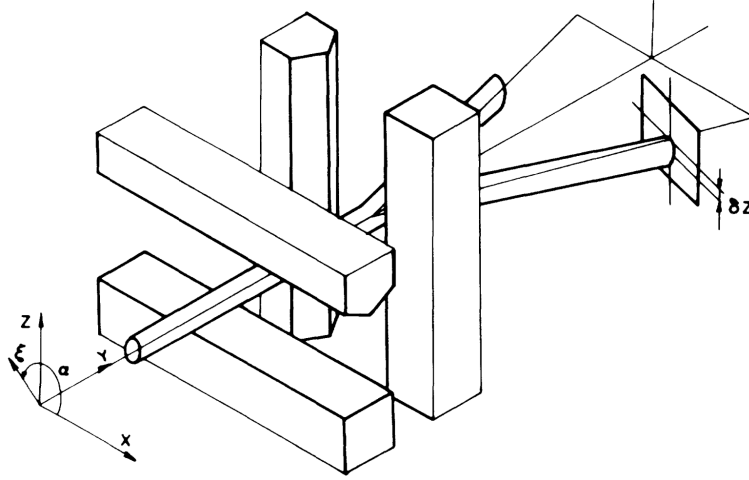
jossa  $[\hat{A},\hat{\rho}] = \hat{A}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{A}$  on perinteinen kommutaattori.

Heikkojen arvojen kompleksiluonteen ansiosta voidaan mitata muita kvanttimekaniikan kompleksisia suureita. Tämä tarkoittaa, että heikkojen mittausten avulla voidaan mitata suureita, jotka eivät kommutoi keskenään. Näitä ei voida mitata vahvoilla kvanttimitauksilla Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen nojalla. Epätarkkuusperiaatteen mukaan tiettyjä keskenään korreloivia suureita ei voida tuntea mielivaltaisella tarkkuudella, joten suorittamalla tarkka mittaus yhdelle suureelle, toisen suureen epätarkkuus kasvaa suureksi. Heikot mittaukset eivät anna tarkkoja arvoja, joten niiden avulla voidaan mitata näitä keskenään korreloivia suureita. [5]

## 2 Heikkojen arvojen mittauksia

### 2.1 Spin-1/2 hiukkanen

Heikkoja arvoja on mahdollista mitata usealla eri tavalla. Yksi näistä tavoista on suorittaa yksi heikko mittaus ja sen jälkeen vahva mittaus, jonka avulla voidaan valita haluttu lopputila. Aharonov, Albert ja Vaidman esittelivät artikkelissaan [2] yhden mahdollisen tavan mitata spin-1/2 hiukkasen spinin z-komponentin heikon arvon.



Kuva 2. Hiukkassuihkun  $z$ -suunnan spinin heikkojen arvojen mittaus. Kuvassa on kaksi peräkkäistä Sternin-Gerlachin mittalaitetta. Ensimmäisen mittalaitteen magneettikentän gradientti on pieni ja sen avulla voidaan suorittaa  $z$ -suuntainen heikko mittaus. Toisessa mittauksessa on suuri magneettikentän gradientti, jonka avulla suoritetaan lopputilan valinta. Spinin  $z$ -komponentin heikko arvo voidaan lukea ilmaisilevyltä, joka on sijoitettu tarpeeksi kauas mittalaitteista. [2]

Mittaukseen käytetään kahta peräkkäistä Stern-Gerlachin mittalaitetta hiukkassuihkulle. Spin- $\frac{1}{2}$  hiukkasia liikkuu kuvassa 1  $xz$ -tasolla  $y$ -suuntaan jollain hyvin määritellyllä nopeudella, jolloin niillä on keskimääräinen liikemäärä  $p_0$   $y$ -askelin suuntaan ja massa  $m$ . Hiukkaset on identtisesti preparoitu tilaan

$$|\psi_{in}\rangle = \Delta^{-\frac{3}{4}} e^{\frac{x^2}{4\Delta^2}} e^{\frac{-z^2}{4\Delta^2}} e^{\frac{-y^2}{4\Delta^2}} e^{-ip_0 y} (\cos(\frac{\alpha}{2}) |\uparrow_x\rangle + \sin(\frac{\alpha}{2}) |\downarrow_x\rangle), \quad (10)$$

jolloin niiden spin osoittaa kuvan 2 mukaisesti suuntaan  $\hat{\xi}$ , jossa  $\alpha$  on  $\hat{\xi}$  ja  $x$ -akselin välinen kulma. Hiukkassuihku ohjataan nyt ensimmäisen Stern-Gerlachin laitteen läpi, jossa hiukkasten spin mitataan heikosti  $z$ -akselin suuntaisesti. Ensimmäisen mittalaitteen ja preparoidun hiukkasen välisen vuorovaikutuksen Hamiltonin operaattori voidaan kirjoittaa tällöin muodossa  $\hat{H}_1 = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} z \sigma_z g(y - y_1)$ , jossa  $\mu$  on magneettinen momentti,  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$  on magneettikentän  $z$ -suunnan gradientti ja  $g(y - y_1)$  on normalisoitu funktio. Valitsemalla alkutila (10) ja lopputilaksi  $\sigma_x = 1$  hiukkaset, voidaan magneettikentän gradientin aiheuttama  $z$ -suuntaisen liikemäärän muutos kirjoittaa muotoon  $\delta p_z = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \tan(\frac{\alpha}{2})$ . Jotta ensimmäinen mittaus ei vuorovaiku-

ta liikaa systeemin kanssa, pätee magneettikentän gradientille ja sen aiheuttamalle momentille ehto  $\mu \left| \frac{\partial B_z}{\partial z} \right| \max \left[ \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right), 1 \right] \ll \Delta p_z = \frac{1}{2\Delta}$ . [2]

Heikon mittauksen jälkeen hiukkassuihku ohjataan normaalin Stern-Gerlachin mittalaitteen läpi, jossa on voimakas magneettikentän gradientti. Tälle mittalaitteen ja mitattavan hiukkasen väliselle vuorovaikutukselle voidaan kirjoittaa taas Hamiltonin operaattori muotoon  $\hat{H}_2 = -\mu \frac{\partial B_x}{\partial x} x \sigma_x g(y - y_1)$ . Jotta magneettikentän gradientti on tarpeeksi suuri jakaakseen hiukkassuihkun  $\sigma_x = \pm 1$  mukaisesti kahteen osaan, pitää sen noudattaa ehtoa  $\mu \left| \frac{\partial B_x}{\partial x} \right| \gg \Delta p_x = \frac{1}{2\Delta}$  tai  $\alpha$ :n lähestyessä arvoa  $\pi$  ehtoa  $e^{-2\Delta^2 \mu^2 \left| \frac{\partial B_x}{\partial x} \right|^2} \ll \cot^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)$ . Tämän gradientin aiheuttama momentti ohjaa valitun lopputilan  $\sigma_x = 1$  suuntaan  $\mu \frac{\partial B_x}{\partial x} \hat{x} + p_0 \hat{y}$ . Asettamalla suihkun radalle ilmaislevyn, jolla voidaan mitata saapuvien hiukkasten jakauma  $z$ -suunnassa, voidaan mitata  $z$ -komponentille heikko arvo. Halutaan, että ilmaislevy on tarpeeksi kaukana mittalaitteista, jotta hiukkasten saaman  $z$ -suuntaisen liikemäärän  $p_z$  aiheuttama siirtymä levyllä on suurempi kuin mittauksen epätarkkuus  $\Delta z$ . Asetetaan levy siis etäisyydelle  $l$  mittalaitteista siten, että  $\frac{l\mu}{p_0} \left| \frac{\partial B_x}{\partial x} \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right| \gg \Delta$ . [2]

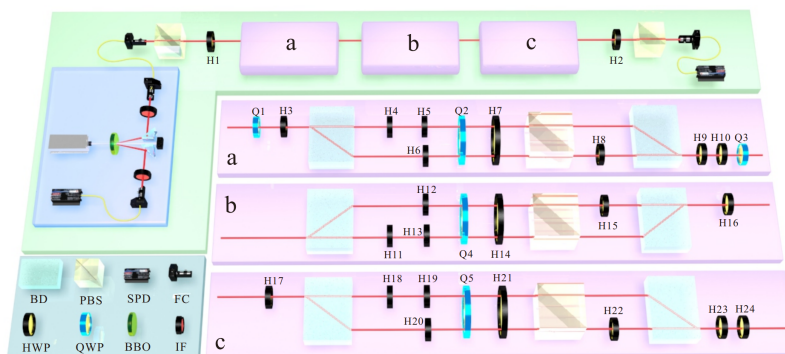
Yksittäisen hiukkasen aaltofunktio  $z$ -kannassa ennen ilmaislevyn aiheuttamaa romahdusta on likimain  $\exp \left[ -\Delta^2 \left( \frac{p_0}{l} \right)^2 \left( z - \frac{l\mu}{p_0} \frac{\partial B_x}{\partial x} \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 \right]$ . Spinin  $z$ -komponentin heikoksi arvoksi tällöin saadaan

$$\sigma_{z,w} = \frac{\langle \uparrow_x | \sigma_z | \uparrow_\xi \rangle}{\langle \uparrow_x | \uparrow_\xi \rangle} = \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right). \quad (11)$$

Jotta mittauksesta saadaan haluttu tarkkuus  $\frac{1}{M}$ , tarvitaan tätä varten  $N$  lukumäärä hiukkasia, joka voidaan approksimoida muotoon  $N \cong \frac{M^3}{\cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)}$ . [2]

## 2.2 Peräkkäiset heikot arvot

Artikkelissaan Chen et al. [6] esittelevät tavan, jolla voidaan mitata yksittäisillä foneilla epäkommutatiivisten Paulin polarisaatio-observaabelien peräkkäiset heikot arvot.



Kuva 3. Mittauslaitteisto, jossa yksifotonilähde luo kietoutuneen fotoniparin. Toinen fotoni ohjataan suoraan vyörytyyppiseen fotonilmaisimeen ja toinen fotoni ohjataan heikkojen mittausten moduulien a, b ja c läpi. Fotoni preparoidaan valittuun alkutilaan polarisoivalla säteenjakajalla PBS ja puolialttolevyllä H1. Heikot mitaukset suoritetaan moduuleissa a, b ja c, joissa fotonille suoritetaan mitaukset aaltolevyjen, säteensiirtäjien ja polarisoivien säteenjakajien avulla. Heikkojen mittausten jälkeen suoritetaan fotonille projektiivinen mittaus, jonka avulla voidaan valita haluttu lopputila. [6]

Mittauksella on viisi eri vaihetta, jotka esitellään kuvassa 3. Fotonilähde luo kaksi kietoutunutta fotonia. Toiselle fotoneista suoritetaan halutut mitaukset ja toista fotonia käytetään liipaisimena, jonka avulla varmistutaan mitatun fotonin saapuneen fotonilähteestä. Mitattava fotoni preparoidaan haluttuun alkutilaan polarisoivalla säteenjakajalla ja puolialttolevyllä. Alkutila HV-kannassa on  $|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ , jossa  $|H\rangle$  ja  $|V\rangle$  edustavat horisontaalista ja vertikaalista polarisaatiotilaa. Peräkkäiset heikot mitaukset taas suoritetaan kuvassa 3 näkyvillä heikkojen mittausten moduuleilla a, b ja c. Moduulien jälkeen fotonille suoritetaan projektiomittaus puolialttolevyllä ja polarisoivalla säteenjakajalla, joiden avulla valitaan halutuksi lopputilaksi  $|\psi_f\rangle = \cos(\theta)|H\rangle + \sin(\theta)|V\rangle$ . [6]

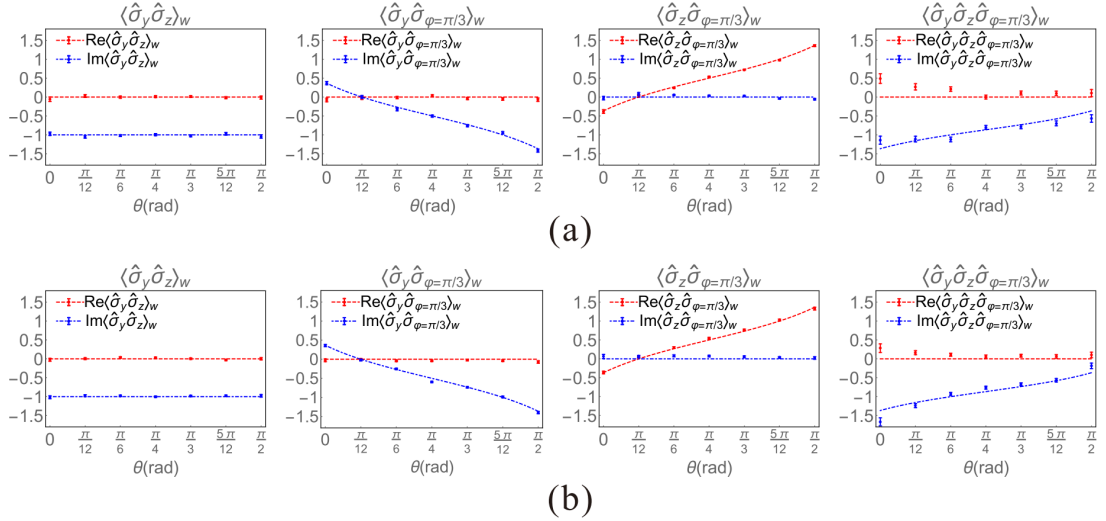
Moduuleissa a, b ja c suoritetaan heikot mitaukset polarisaatio-observaabeleille

$$\hat{\sigma}_y \equiv |R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L| \quad (12)$$

$$\hat{\sigma}_z \equiv |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V| \quad (13)$$

$$\hat{\sigma}_\varphi \equiv |\varphi\rangle\langle\varphi| - |\varphi^\perp\rangle\langle\varphi^\perp|. \quad (14)$$

Moduuleissa heikot mittaukset suoritetaan samankaltaisella prosessilla, joten voidaan tarkemmin tarkastella c-moduulin toimintaa, jolla mitataan kaavan (14) observaabelia  $\hat{\sigma}_\varphi$  kannassa  $\{|\varphi\rangle, |\varphi^\perp\rangle\}$ . Kantavektorit voidaan kirjoittaa HV-kannan lineaarikombinaationa  $|\varphi\rangle = \cos(\varphi)|H\rangle + \sin(\varphi)|V\rangle$  ja  $|\varphi^\perp\rangle = \sin(\varphi)|H\rangle - \cos(\varphi)|V\rangle$ . Preparoitu fotonit saapuu moduuliin tilassa  $\alpha|\varphi\rangle + \beta|\varphi^\perp\rangle$ , jossa puoliaaltolevy H17 muuttaa fotonin tilan HV-kantaan  $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$ . Säteensiirtäjä BD jakaa fotonit polarisaation mukaan ylä- ja alapolulle. Tällöin fotonien polarisaatioon liittyvä informaatio saadaan selville fotonien kulkemista poluista, joten mittaamalla fotonin kulkema polku, saadaan selville sen polarisaatio. [6]



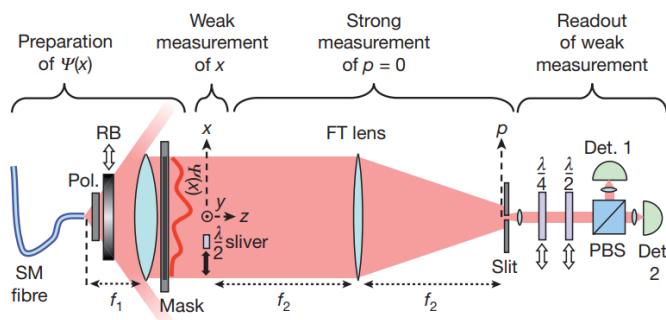
Kuva 4. Peräkkäisten heikkojen arvojen mittaukset nähdään a ja b-kohdista, kun a-kohdassa vuorovaikutusparametri  $\gamma = 25^\circ$  ja b-kohdassa  $\gamma = 30^\circ$ . Muuttuja  $\theta$  riippuu valitusta lopputilasta  $|\psi_f\rangle = \cos(\theta)|H\rangle + \sin(\theta)|V\rangle$ . Heikkojen arvojen reaalisat esitetään kuvaajissa punaisilla ja imaginääriosat sinisillä neliöillä, missä neliöt ovat mittaustuloksia ja katkoviivat kuvastavat teoreettisia ennustuksia. Kuvaajiin merkätyt virherajat on arvioitu Poissonin jakauman avulla. [6]

Kuvassa 4 esiintyvät peräkkäisten heikkojen arvojen mittaukset kahdelle ja kolmelle epäkommutoivalle observaabelille. Kahden observaabelin peräkkäiset heikot arvot osuvat hyvin teoreettisiin ennustuksiin, mutta kolmelle observaabelille virherajat kasvavat, eivätkä täysin osu teoreettisiin ennustuksiin. Tämä johtuu siitä, että

mittausten tilastolliset virheet ja optisten elementtien epätäydellisyyksistä johtuva epätarkkuus kasaantuvat, kun suoritetaan kolme peräkkäistä mittausta verrattuna kahteen mittaukseen. [6]

## 2.3 Aaltofunktioiden tomografia

Lundeen et al. esittelevät artikkelissaan [5] keinon, jolla voidaan mitata yksittäisen fotonin spatiaalinen aaltofunktio heikkojen mittausten avulla. Aaltofunktio on matemaattinen abstrakti objekti, jonka avulla voidaan kuvata kvanttisysteemien tilaa ja laskea mittausten todennäköisyyksiä. Aaltofunktioita voidaan tutkia tomografisilla työkaluilla, mutta nämä ovat usein aikaa vieviä ja laskennallisesti haastavia. Käyttämällä heikkoja mittauksia voidaan aaltofunktioita kuvantaa ilman pitkiä numeerisia analyysejä. [5]



Kuva 5. Mittauksessa käytetty koejärjestely. Kuvan vasemmassa reunassa on fotonilähde, joka luo mittauksessa käytetyt fotonit, jotka on preparoitu alkutilaan  $\psi(x)$ . Kollimoivan linssin jälkeen fotonien polulle pisteeseen  $x$  on sijoitettu pieni puoliaaltolevy, joka muuttaa sen läpi kulkevan fotonin polarisaatiota. Fotoneille suoritetaan FT-linssin avulla Fourier-muunnos ja ne kollimoidaan kohti levyä, jossa on pieni rako  $z$ -akselilla. Levyn avulla voidaan valita lopputilaksi fotonit, joiden  $x$ -suuntainen liikemäärä  $p_x = 0$ . Fotonit ohjataan aaltolevyjen ja polarisoivan säteenjakajan läpi ilmaisimille, joiden signaaleista saadaan mittauksen tulokset. [5]

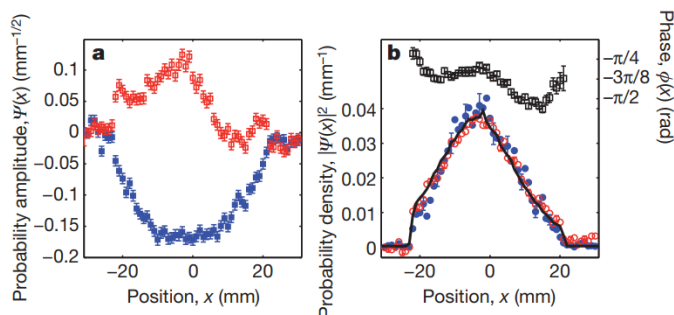
Mittauksessa tuotetaan yksittäisistä fotoneista koostuva fotonisuihku, joka liikkuu kuvan 5 mukaisesti  $z$ -suuntaan. Fotonien moodi on likimain Gaussinen. Saapuesaan mittausrakenteeseen fotonit kulkevat polarisaattorin läpi, jonka jälkeen kaikilla

fotoneilla on identtinen polarisaatio. Suihku kollimoidaan linssin avulla ja ohjataan neliömuotoisen aukon läpi, jonka pinta-ala on  $x \cdot y = 43 \text{ mm} \cdot 11 \text{ mm}$ . Sijoittamalla haluttuun pisteeseen x puoliaaltolevy, jonka mitat ovat  $x \cdot y \cdot z = 1 \text{ mm} \cdot 25 \text{ mm} \cdot 1 \text{ mm}$ , suoritetaan fotonien x-suuntaisen paikan heikko mittausta  $\hat{\pi}_x = |x\rangle \langle x|$ . Puoliaaltolevy muuttaa fotonin polarisaation lineaarista kulmaa siten, että voimme sen avulla erottaa pisteen x kautta kulkenneet fotonit muista fotoneista. Jos saapuvien fotonien polarisaatiokulmaksi valitaan  $\alpha = 90^\circ$ , ja puoliaaltolevy muuttaa kyseisen kulman  $\alpha \rightarrow 0^\circ$ , voidaan fotonit erottaa täydellisesti toisistaan. Heikko mittausta saadaan toteutettua pienentämällä puoliaaltolevyn aiheuttamaa kulman muutosta tarpeeksi pieneksi, ettei sen läpi kulkenutta fotonia voi enää erottaa muista. Heikon mittauksen jälkeen fotoneille suoritetaan optinen Fourier-muunnos linssin avulla. Fotonit ohjataan levyllä, jossa on z-akselilla  $15 \mu\text{m}$  levyinen rako. Levyn avulla voidaan valita mittauksen lopputilaksi fotonit, joiden x-suuntainen liikemäärä  $p_x = 0$ . Fotonit ohjataan joko puoli- tai neljännesaaltolevyn läpi polarisoivaan säteenjakajaan, jonka ulostuloporteista fotonit ohjataan vyörytyypisille ilmaisimille. Aaltofunktion reaali- ja imaginääriosat ovat verrannollisia ilmaisimien välisille signaaleille. Puoliaaltolevyn läpi kulkevat fotonit kuvaavat reaali-osaa ja neljännesaaltolevyn läpi kulkevat antavat imaginääriosan. Jos polarisaation alkutila on alaspäin osoittava spin-1/2 vektori, heikko arvo saadaan muotoon

$$\hat{\pi}_w = \frac{1}{\sin(\alpha)} (\langle s | \hat{\sigma}_x | s \rangle - i \langle s | \hat{\sigma}_y | s \rangle), \quad (15)$$

jossa  $|s\rangle$  on polarisaation lopputila.  $\hat{\sigma}_x$  ja  $\hat{\sigma}_y$  ovat x- ja y-komponentin Paulin matriisit, joiden odotusarvot mitattiin ohjaamalla fotonit puoliaaltolevyn ja polarisoivan säteenjakajan läpi. [5]

Kuvaan 6 on piirretty mittausdatasta saadut tulokset. Kuvaajassa **a** on merkitty aaltofunktion reaaliarvot sinisillä neliöillä ja imaginääriarvot punaisilla neliöillä. Kuvaajan **b** vasemmanpuoleiselle y-akselille on piirretty mitatun aaltofunktion todennäköisyysjakauma sinisillä ympyröillä. Punaisella on merkitty todennäköisyysjakau-



Kuva 6. Yksittäisen fotonin aaltofunktion arvojen mittaustulokset. Kuvaajaan **a** on merkitty aaltofunktion reaaliarvot  $\text{Re}\psi(x)$  sinisillä neliöillä ja imaginääriarvot  $\text{Im}\psi(x)$  punaisilla neliöillä. Kuvaajaan **b** on vasemmanpuoleisen datan avulla laskettu aaltofunktion todennäköisyysjakauma sinisillä ympyröillä ja oikean puoleiselle y-akselille aaltofunktion vaihe  $\phi(x) = \arctan(\text{Re}\psi(x)/\text{Im}\psi(x))$  läpinäkyvillä neliöillä. Todennäköisyysjakaumalle on laskettu myös vahvasta mittauksesta saatu  $x$ :n todennäköisyysjakauma, joka on merkitty kuvaajaan viivalla. Punaiset ympyrät vasemmanpuoleisella y-akselilla ovat mittauksia, kun raollinen levy poistettiin laitteistosta. [5]

ma, kun lopputilan valitseva raollinen levy poistetaan mittauksesta. Tällöin ei suoriteta lopputilan valintaa ja heikko arvo muuttuu perinteiseksi odotusarvoksi. Kuvaajaan piirretty viiva on tarkoilla mittauksilla saatu todennäköisyysjakauma. Mitatut arvot vaikuttavat sopivan hyvin toisiinsa. Kuvaajan **b** oikeanpuoleiselle y-akselille on piirretty läpinäkyvillä neliöillä aaltofunktion vaihe  $\phi(x) = \arctan(\text{Re}\psi(x)/\text{Im}\psi(x))$ . [5]

### 3 Tulkinta

Heikot arvot esiteltiin ensimmäistä kertaa Aharonovin, Albertin ja Vaidmanin kirjeessä [2] vuonna 1988. Tästä lähtien on käyty kiivasta keskustelua heikkojen arvojen tulkinnasta. Niiden erikoisen luonteen ansiosta tehtävä ei ole helppo. Pitkän keskustelun jälkeen ei ole vielä päästy täyteen yhteisymmärrykseen niiden fysikaalisesta tarkoituksesta. Esittelen tässä luvussa muutaman eri tulkinnan heikoille arvoille.

### 3.1 Odotusarvotulkinta

Eniten kannatusta heikkojen arvojen tulkinnasta on saanut niin sanottu odotusarvotulkinta. Heikot arvot siis ovat tietynlainen yleistetty odotusarvo mitattavalle systeemille, kun mittauksen systeemiin aiheuttama häiriö lähenee nollaa. Tästä seuraa kompleksiluonteen tulkinta, jota avasin tarkemmin alaluvussa 1.3, jonka mukaan heikkojen arvojen reaali-osa kuvaa mitattavan systeemin painotettua keskiarvoa, ja imaginääriosa kertoo mittauksen generoimasta aikakehityksestä. Tätä tulkintaa tukee heikkojen arvojen reaali-osan verrannollisuus klassiseen painotettuun keskiarvoon reaali-osan ollessa ominaisarvojen sisällä. [4]

Odotusarvotulkintaa kannattaa Vaidman, joka artikkelissaan [7] puolustaa tätä kantaa ja kritisoi muita tulkintoja. Artikkelissa Vaidman toteaa uskovansa heikkojen arvojen olevan yksittäisten kvanttisysteemien ominaisuus. Tämä väite on varsin rohkea, koska yleisesti kvanttimekaniikka kuvaa identtisten systeemien joukon käytöstä eikä yksittäisten systeemien ominaisuuksia. Kvanttitilat kuvataan toisten tilojen lineaarikombinaatioina ja niiden avulla saa laskettua mittaustodennäköisyyksiä, mutta ei voida varmaksi sanoa, miten ne kuvaavat yksittäistä systeemiä. Lisäksi heikkojen mittausten epätarkkuuden takia tarvitaan monta identtistä mittausta, jotta saadaan mitattua heikkoja arvoja. Ei ole siis mahdollista edes mitata yksittäiselle systeemille heikkoa arvoa.

### 3.2 Tilastollinen tulkinta

Artikkelissaan [8] Ferrie ja Combes esittelevät oman tulkintansa heikoista arvoista, jonka mukaan heikot arvot eivät liity kvanttimekaniikkaan, vaan ne ovat puhtaasti tilastollinen ilmiö. Ferrie ja Combes perustelevat kantaansa käyttämällä esimerkkinä klassista systeemiä ja osoittamalla, miten tietynlaisella tilastollisella menettelyllä voidaan klassiselle systeemille saada heikoille arvoille analogisia klassisia arvoja. Artikkelissa käytetään analogisena systeeminä kolikon heittoa ja osoitetaan, miten häi-

riön ja tilastollisen manipulaation avulla saadaan yksittäisen kolikon heiton arvoksi 100, kun kruuna ja klaava saavat arvot  $\pm 1$ . [8]

Ferrie ja Combes ovat saaneet paljon kritiikkiä esittelemästään tilastollisesta tulkinnasta. Sitä on kritisoitu muun muassa siitä, että artikkelissa [8] esitelty klassinen vastike kvanttimittaukselle ei vastaa kvanttitilannetta. Tämä johtuu siitä, että siihen on lisätty ylimääräinen mittausta, joka aiheuttaa systeemissä tarvittavan häiriön [7]. Vaidman artikkelissaan [7] epäilee, että osuvaa klassista tilastollista analogiaa ei löydy. Vaidman huomauttaa myös, että artikkelissa [8] saatu heikko arvo 100 yhdelle kolikon heitolle ei johdu alku- ja lopputilojen valinnoista, kuten kvanttimekaanisessa vastikkeessa, joka esiteltiin kirjeessä [2]. Käytetystä klassisesta systeemistä myös puuttuu tarvittava monimutkaisuus, jolloin mahdollisia alku- ja lopputilojen valintoja on vain neljä. Ferrie ja Combes saivat siis klassisessa tilanteessa arvon 100 vain manipuloimalla mittauksessa tapahtuvan häiriön käsitettä [7].

Yleisesti voidaan todeta, että tilastollinen tulkinta ei ole saanut suurta suosiota muilta alan asiantuntijoilta, vaikka ehdotuksena onkin mielenkiintoinen.

### 3.3 Amplitudien välinen suhde

Svensson kritisoi artikkelissaan [9] heikkojen arvojen odotusarvotulkintaa ja toteaa kyseisen tulkinnan esittämän realistisen ja suoraviivaisen tulkinnan (engl. realistic straightforward interpretation tai RSFI) olevan väärin. Heikoilla arvoilla on paljon todellisuudesta poikkeavia ominaisuuksia, joten niiden tulkitseminen "tavallisiksi" fysikaalisiksi suureiksi on kummallista. Svensson toteaa myös, ettei mahdollisuus mitata heikkoja arvoja myöskään anna oikeutta tulkita niitä tavallisiksi fysikaalisiksi suureiksi. [9]

Aharonov ja muut odotusarvotulkinnan kannattajat ovat käyttäneet heikkoja arvoja erilaisten kvanttimekaanisten paradoksien ratkomiseen. Tästä usein seuraa kummallisia tuloksia, kuten negatiivisia liike-energioita tai todennäköisyyksiä.

Svensson kokee heikkojen arvojen oikean tulkinnan olevan kahden amplitudin välinen suhde ja viittaa samalla Kastnerin artikkeliin [10], jossa käsitellään samaa aihetta. [9]

Kastner toteaa artikkelissa, että kvanttiparadoksien ratkaisuihin heikot arvot käyttäytyvät enemmän amplitudien lailla kuin odotusarvojen. Joidenkin paradoksien ratkaisua varten tarvitaan heikon arvon itseisarvon neliö, jotta saadaan sopiva todennäköisyys tai painoarvo. Lisäksi heikkojen arvojen negatiiviset ja kompleksiset arvot viittaavat siihen, että niitä pitäisi käsitellä amplitudeina eikä odotusarvoina. Amplituditulkinnasta seuraa se, etteivät heikot arvot anna mitään fysikaalista sisältöä systeemistä. Heikkojen arvojen pitäisi myös noudattaa matemaattista additiivisuusehtoa, mutta tästä seuraa omituisia lopputuloksia odotusarvotulkinnassa. Ajattelemalla heikkojen arvojen olevan amplitudeja ei niiden tarvitse reaaliarvoisia. [10]

Kastnerin ehdotus ratkaisee osan heikkojen arvojen ongelmista, koska tulkitsemalla heikot arvot amplitudien väliseksi suhteeksi ne eivät samalla tavalla riko kvanttimekaniikan sääntöjä. Tulkinta on kuitenkin hyvin keskeneräinen, koska Kastner tai Svensson eivät ole tarkentaneet kantaansa. He eivät artikkeleissaan tarkenna, minkä amplitudeista on kyse, ja miten kyseiset amplitudit pitäisi tulkita. Tästä tulkinnasta jää jäljelle siis enemmän kysymyksiä kuin mihin se voi vastata. Svensson ja Kastner kuitenkin esittävät artikkeleissaan perusteltua kritiikkiä odotusarvotulkinnalle.

## 4 Yhteenveto

Kvanttimekaaniset mittaukset kuvataan mitattavan systeemin ja mittalaitteen välisenä vuorovaikutuksena. Tarkoissa kvanttimitauksissa tuloksena voi saada vain systeemin ominaisarvojen mukaisia tuloksia. Tarkat mittaukset romahduttavat systeemin alkutilan mittaustulosta vastaavaan ominaistilaan. Pienentämällä systeemin ja mittalaitteen välistä vuorovaikutusta voidaan mitata systeemin suureita ilman tilan romahdusta. Heikkojen mittausten tulokset eli heikot arvot ovat erikoisia suureita, koska ne voivat saada ominaisarvoja suurempia arvoja sekä ne ovat yleisesti kompleksiarvoisia.

Heikkojen mittausten avulla voidaan suorittaa useita mittauksia peräkkäin, koska heikko vuorovaikutus ei romahduta systeemin tilaa. Heikkojen arvojen kompleksiluonteen ansiosta voidaan mitata muita kvanttimekaniikan kompleksisia suureita eli suureita, jotka eivät kommutoi keskenään. Tarkoilla kvanttimitauksilla ei pystytä mittaamaan ei-kommutoivia suureita Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen nojalla, koska mittaamalla yhden suureen arvon tarkasti toisen suureen epätarkkuus kasvaa.

Erikoisten ominaisuuksiensa takia heikot arvot ovat saaneet osakseen paljon kritiikkiä, koska ne rikkovat useaa kvanttimekaniikan sääntöä. Niiden tulkinta ei myöskään ole helppoa, eikä tulkinnasta olla päästy yhteisymmärrykseen. Tästä huolimatta heikot mittaukset ja arvot ovat tärkeä työkalu kvanttimekaanisten mittausten tutkimuksessa ja ne voivat tuoda meitä lähemmäs kvanttimekaniikan mittausingelman ratkaisua.

## Viitteet

- [1] M. Schlosshauer, *Reviews of Modern Physics* **76**, 1267 (2005).
- [2] Y. Aharonov, D. Z. Albert ja L. Vaidman, *Physical Review Letters* **60**, 1351 (1988).
- [3] Y. Aharonov ja L. Vaidman, *The Two-State Vector Formalism of Quantum Mechanics: an Updated Review*, 2007, arXiv:quant-ph/0105101.
- [4] J. Dressel ja A. N. Jordan, *Physical Review A* **85**, 012107 (2012).
- [5] J. S. Lundeen, B. Sutherland, A. Patel, C. Stewart ja C. Bamber, (2011).
- [6] J.-S. Chen, M.-J. Hu, X.-M. Hu, B.-H. Liu, Y.-F. Huang, C.-F. Li, C.-G. Guo ja Y.-S. Zhang, *Optics Express* **27**, 6089 (2019).
- [7] L. Vaidman, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **375**, 20160395 (2017).
- [8] C. Ferrie ja J. Combes, *Physical Review Letters* **113**, 120404 (2014).
- [9] B. E. Y. Svensson, *Foundations of Physics* **43**, 1193 (2013).
- [10] R. E. Kastner, *Weak Values and Consistent Histories in Quantum Theory*, 2003, arXiv:quant-ph/0207182.