Catalanin luvut

Vilja Vihervuori

LuK.-tutkielma
Toukokuu 2025

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

VILJA VIHERVUORI: Catalanin luvut
LuK.-tutkielma, 9 s.
Matematiikka
Toukokuu 2025

Tässä LuK.-tutkielmassa käsitellään kombinatoriikan alalle tärkeitä Catalanin lukuja. Työssä esitellään Catalanin luvuille useampi esitystapa ja sovelluksia.

Luvussa 1 kerrotaan lyhyesti Catalanin lukujen historiasta sekä sovelluskohteista. Luvussa 2 esitellään Catalanin lukujono sekä sen erilaisia esitysmuotoja ja yksi laajempi geometrinen esimerkki.

Sisällys

1 Johdanto

Monilla lukujonoilla on kombinatorisia käyttötarkoituksia. Tällaisia tunnettuja lukujonoja ovat esimerkiksi Fibonaccin luvut tai lukujono, joka osoittaa permutaatioiden määrän, kun joukossa on n alkiota. Yksi tällaisista diskreeteistä lukujonoista on Catalanin luvut [1].

Catalanin lukuja käytti tiettävästi ensimmäisenä mongolialainen matemaatikko Minggatu (joskus myös Mingantu, Antu Ming), kirjoittaessaan kirjaa Ge Yuan Mi Lü Jie Fa (The Quick Method for Obtaining the Precise Ratio of Division of a Circle, joskus Quick Methods for Trigonometry and for Determining the Precise Ratio of the Circle). Minggatu kirjoitti Catalanin luvuista kirjaansa 1730-luvulla, mutta kirjan viimeisteli hänen oppilaansa Chen Jixin monta kymmentä vuotta myöhemmin. Itse kirja ilmestyi [2] vasta 70 vuotta sen valmistumisen jälkeen.

Pitkälle 1900-luvun lopulle asti länsimaissa uskottiin Leonhard Eulerin löytäneen Catalanin luvut 1751. Jianjia Luo esitti kuitenkin artikkelissaan 1988 (Luo, Jianjia, *Antu Ming, the first inventor of Catalan numbers in the world*, Neimenggu Daxue Xuebao 19 (1988) 239-245), että Minggatua tulisi pitää lukujen todellisena löytäjänä, sillä Minggatu oli kirjoittanut niistä ennen Euleria, vaikka hänen kirjansa ilmestyikin vasta paljon myöhemmin. Suuremmalle länsimaalaiselle yleisölle asia valkeni 1990-luvulla, kun Luo julkaisi englanninkielisen tekstin aiheesta [3] ja myös britannialainen matemaatikko Peter Larcombe kiinnostui tästä kysymyksestä [2].

Euleria kiinnosti kuinka monella eri tavalla monikulmio voidaan jakaa kolmioiksi. Tämä Catalanin lukujonon käyttökohde esitellään tässä tutkielmassa esimerkkinä. Catalanin luvut on nimetty Eugène Charles Catalanin mukaan, sillä tämä löysi yhteyden lukujonon ja Hanoin torniongelman väliltä [2].

Catalanin luvut ovat hyvin käyttökelpoisia kombinatoriikan alalla. Lisäksi Catalanin luvuilla on nykyisin useita sovelluksia esimerkiksi geometrisessa mallinnuksessa, kryptografiassa ja geoinformatiikassa [4].

2 Catalanin luvut

Tässä luvussa määritellään Catalanin luku, Catalanin lukujono ja esitellään erilaisia esitystapoja Catalanin luvuille.

2.1 Catalanin lukujono

Catalanin luvut määritellään lukujonon jäseninä, joilla on tietyt jäsenen järjestysluvusta riippuvat ominaisuudet.

Määritelmä 1. Catalanin lukujono on joukko lukuja $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$, missä n on luonnollinen luku ja C_n Catalanin luku, missä

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Tapoja esittää Catalanin luvut on useita erilaisia. Toisinaan on mielekästä esittää luku kahden kombinaation erotuksena.

Lause 1. *Catalanin luku C_n voidaan esittää muodossa $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.*

Todistus. Väite seuraa, sillä

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(2n-(n-1))!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)(2n)! - n(2n)!}{n!n!(n+1)} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.
\end{aligned}$$

□

Lukujonojen tapauksessa on usein mielekästä määritellä jonon jäsen rekursiivisesti edellisen tai edellisten jäsenten avulla. Esimerkiksi aiemmin mainitun Fibonaccin lukujonon jäsen F_n, $n \geq 3$, saadaan sitä edeltävien kahden lukujonon jäsenen summana $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ [1]. Seuraavaksi esitellään rekursiivinen tapa esittää Catalanin luvut.

Lause 2. *Catalanin lukujonon jäsen C_n voidaan saada rekursiivisesti sitä edeltävästä jäsenestä seuraavasti:*

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1},$$

kun $n \geq 1$, ja

$$C_0 = 1.$$

Todistus. Olkoon n luonnollinen luku ja $n \geq 1$. Catalanin luku C_n voidaan määritelmän nojalla ilmaista muodossa

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}$$

ja samoin Catalanin luku C_{n-1} muodossa

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} = \frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}.$$

Voidaan nyt jakaa luku C_n luvulla C_{n-1}, sillä kaikki Catalanin lukujonon jäsenet ovat nollaa suurempia. Saadaan

$$\begin{aligned}\frac{C_n}{C_{n-1}} &= \frac{\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}}{\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}} \\ &= \frac{n(2n)!(n-1)!(n-1)!}{(n+1)(2n-2)!n!n!}.\end{aligned}$$

Kertoman määritelmän perusteella voimme supistaa tämän yhtälön muotoon

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{2n(2n-1)}{n(n+1)}$$

ja edelleen

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{4n-2}{n+1}.$$

Kertomalla puolittain luvulla C_{n-1} päädymme rekursiiviseen esitykseen

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}.$$

□

2.2 Esimerkkejä

Catalanin luvut ovat hyvin käyttökelpoisia kombinatoriikassa ja monet kombinatoriikan ongelmat, joissa pohditaan ratkaisujen lukumäärää, noudattavatkin Catalanin lukujonoa.

Seuraavaksi esitellään Catalanin lukujen yhteys erääseen geometriseen ongelmaan. Sitä varten tulee ensin esitellä konveksisuuden käsite.

Määritelmä 2. Monikulmio on *konveksi*, jos mitkä tahansa sen sisällä olevat kaksi pistettä voidaan yhdistää toisiinsa janalla niin, että jana kulkee kokonaan monikulmion sisäpuolella.

Lisäksi tarvitsemme tiedon siitä, kuinka monta lävistäjää monikulmiolla on.

Lause 3. *Konveksilla n-kulmaisella monikulmiolla M on $\frac{n(n-3)}{2}$ eri lävistäjää.*

Todistus. Monikulmion M kulmat voidaan yhdistää toisiinsa

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

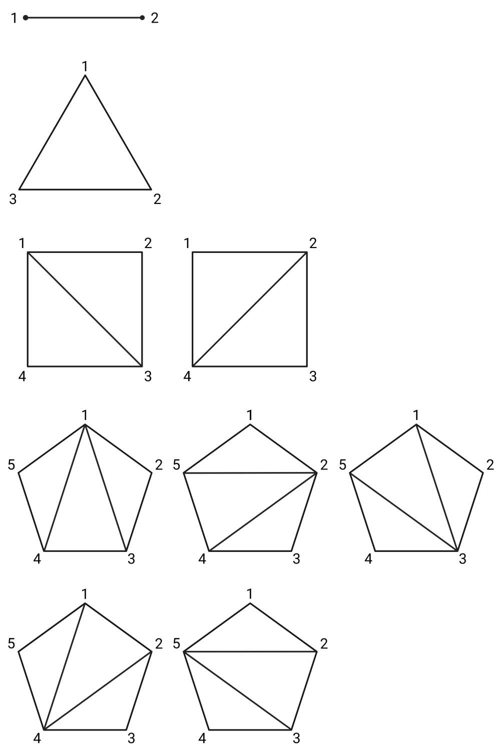
eri tavalla. Monikulmio M on n-kulmainen, joten sillä on myös n sivua. Lävistäjiä on siis

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

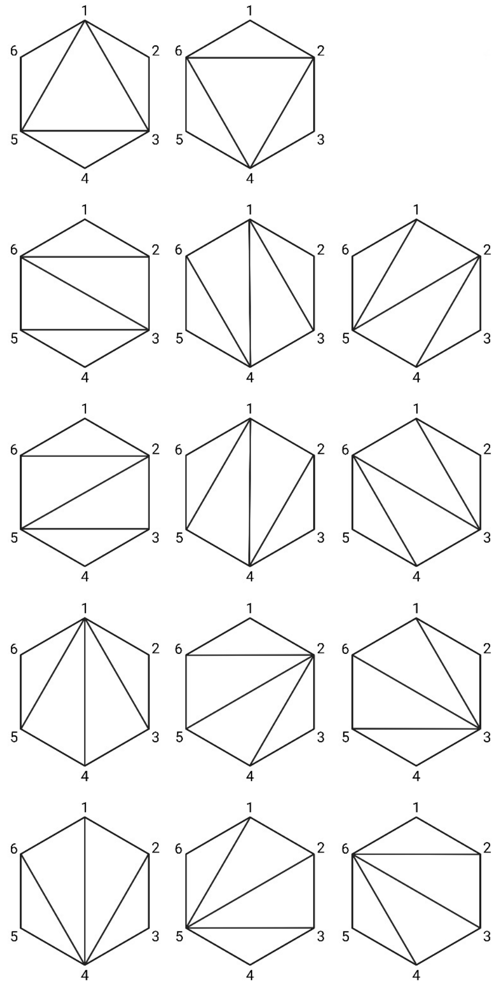
kappaletta. Koska monikulmio M on konveksi, sen kaikki lävistäjät sijaitsevat kokonaisuudessaan sen sisällä. □

Konveksi n-kulmainen monikulmio M voidaan siis jakaa millä tahansa lävistäjällään kahdeksi monikulmioksi, joista toisella on k sivua ja toisella $n-k+2$ sivua.

Alla olevissa kuvissa 2.2 ja 2.2 on esitetty, kuinka monella eri tavalla monikulmio voidaan jakaa kolmioiksi lävistäjien avulla, kun lävistäjät eivät saa leikata toisiaan ja monikulmion sivuja on kahdesta kuuteen. Jana voidaan tässä ajatella monikulmiona, jolla on kaksi sivua, mutta ei lainkaan pinta-alaa.



Kuva 1: Konveksit kaksikulmio (jana) ja kolmio voidaan jakaa kolmioiksi tasan yhdellä eri tavalla, kun jakamiseen käytetyt janat eivät leikkaa. Konveksi nelikulmio voidaan jakaa kolmioiksi kahdella eri tavalla samoilla ehdoilla. Konveksi viisikulmio taas voidaan jakaa kolmioiksi viidellä eri tavalla, kun jakamiseen käytetyt janat eivät leikkaa toisiaan.



Kuva 2: Konveksi kuusikulmio voidaan jakaa kolmioiksi 14 eri tavalla, kun jakamiseen käytetyt janat eivät leikkaa toisiaan.

Huomataan, että eri jakamistapojen määrä näyttäisi noudattavan Catalanin lukujonoa, jossa

$$C_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{2}{2} = 1$$

on kolmion jakamistapojen summa,

$$C_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{4!}{3 \cdot 2!2!} = \frac{4}{2} = 2$$

on neliön jakamistapojen summa,

$$C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{6!}{4 \cdot 3!3!} = 5$$

on viisikulmion jakamistapojen summa ja

$$C_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{8!}{5 \cdot 4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 14$$

on kuusikulmion jakamistapojen summa.

Merkitään seuraavaksi luvulla h_n sitä, kuinka monella tavalla $n+1$ kulmainen monikulmio voidaan jakaa kolmioiksi lävistäjillään, kun lävistäjät eivät saa leikata toisiaan monikulmion sisällä. Määritellään lisäksi, että $h_1 = 1$.

Esimerkki 1. Konveksi $(n+1)$-kulmainen monikulmio K voidaan jakaa kolmioiksi $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}$ eri tavalla, kun jakamiseen käytetyt janat eivät leikkaa toisiaan. Tapojen määrä voidaan lausua myös muodossa $h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_n h_{n-k}$.

Todistus. Voidaan ajatella jana monikulmiona, jolla on kaksi sivua eikä sisäosaa, ja määritellä, että se voidaan jakaa kolmioiksi yhdellä tavalla (h_1). Samoin kolmion tapauksessa jakamistapoja on selvästi vain yksi (h_2), sillä kolmiolla ei ole lävistäjiä. 2.2

Kun $n = 2$, niin lauseen jälkimmäinen yhtälö pitää paikkansa, sillä

$$\sum_{k=1}^{2-1} h_k h_{2-k} = h_1 h_1 = 1.$$

Olkoon seuraavaksi $n \geq 3$, jolloin valitulla monikulmiolla K on $n+1 \geq 4$ kulmaa ja sivua. Valitaan yksi sivuista monikulmion kannaksi. Kun jaetaan monikulmiota K kolmioiksi, valitaan aina monikulmion K kanta yhdeksi kolmion sivuksi. Nyt loput jäljelle jäävät konveksit monikulmiot ovat K_1, jolla on $k+1$ sivua ja K_2, jolla on siis $n-k+1$ sivua. Myöhemmät osajaot tehdään jakamalla monikulmioita K_1 ja K_2 samoin kuin edellä huomioiden kuitenkin, etteivät valitut lävistäjät saa leikata toisiaan.

Koska monikulmiolla K_1 on $k+1$ sivua, se voidaan jakaa kolmioiksi h_k tavalla ja K_2 taas h_{n-k} tavalla. Siis sillä erityisellä valinnalla, että monikulmion K kanta on yksi kolmion sivuista, voidaan jakaa K kolmioiksi $h_k h_{n-k}$ tavalla niin, etteivät valitut lävistäjät leikkaa toisiaan monikulmion K sisäpuolella. Siispä monikulmio K voidaan jakaa kolmioiksi yhteensä

$$h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$$

tavalla. Siispä lauseen jälkimmäinen yhtälö pitää paikkansa.

Tarkastellaan sitten lauseen yhtälöä alkuperäisellä ehdolla $h_1 = 1$. Tässä rekursiivisessa yhtälössä h_n arvo riippuu kaikista edellisistä $h_{n-1}, ..., h_2, h_1$. Siksi se on vaikea ratkaista tavalliseen tapaan ja apuna tulee käyttää funktiota.

Olkoon siis

$$f(x) = h_1 x + h_2 x^2 + ... + h_n x^n + ...$$

lukujonon $h_1, h_2, ..., h_n, ...$ generoiva funktio. Kertomalla $f(x)$ itsellään huomataan, että

$$(f(x))^2 = h_1^2x^2 + (h_1h_2 + h_2h_1)x^3 + (h_1h_3 + h_2h_2 + h_3h_1)x^4 + ...$$
$$+(h_1h_{n-1} + h_2h_{n-2} + ... + h_{n-1}h_1)x^n + ...$$

Tiedetään, että $h_1 = h_2 = 1$, joten

$$(g(x))^2 = h_1^2x^2 + h_3x^3 + h_4x^4 + ... + h_nx^n + ...$$

$$= h_2x^2 + h_3x^3 + h_4x^4 + ... + h_nx^n + ...$$

$$= f(x) - h_1x = g(x) - x.$$

Tästä seuraa, että funktion $f(x)$ toteuttaa yhtälön $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$. Tämän toisen asteen yhtälö voidaan ratkaista kuten toisen asteen yhtälöt yleensä. Eli

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot x}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Voidaan merkitä

$$f_1(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

ja

$$f_2(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Funktion $f(x)$ määritelmästä seuraa, että $f(0) = 0$.

Koska

$$f_1(0) = \frac{1 + \sqrt{1}}{2} = 1 \neq 0 = f(0)$$

ja

$$f_2(0) = \frac{1-\sqrt{1}}{2} = 0 = f(0),$$

vain $f_2(x)$ kelpaa ratkaisuksi ja siis

$$f(x) = f_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Huomataan, että funktio f(x) voidaan nyt esittää myös muodossa

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}.$$

Seuraavaksi sovelletaan Newtonin binomilausetta [1]. Brualdin mukaan

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} z^n,$$

missä $|z| < 1$.

Korvataan seuraavaksi z luvulla $4x$ huomioiden samalla, että tällöin tulee olla $|x| < \frac{1}{4}$. Siis

$$\begin{aligned}
(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} (-1)^n 4^n x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n 2^{2n}}{n \times 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n \\
&= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n
\end{aligned}$$

Siis

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n,
\end{aligned}
$$

jolloin funktion f(x) määritelmän mukaan $h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Huomataan, että $h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}$.

$\square$

Viitteet

[1] Brualdi, Richard A. (2018), *Introductory Combinatorics, fifth edition*, Pearson, s.125-149 ja s.253-273.

[2] Larcombe, P. P., (1999/2000) *The 18th Century Chinese Discovery of the Catalan numbers*, Mathematical Spectrum, vol.15:4, 311-331.

[3] Luo, J.-J. (1992), *Catalan Numbers in the History of Mathematics in China*, Combinatorics and Graph Theory - Proceedings of the Spring School and International Conference in Combinatorics, World Scientific s. 68-70

[4] Selimovic, F., Stanimivoric, P., Saračević, M., Pepić, S, (2020) *Encryption of 3D plane in GIS using Voronoi-Delaunay triangulations and Catalan numbers*, Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics, Vol.35:4