TURUN YLIOPISTO

MONSKYN LAUSE NELIÖN OSITTAMISESTA KOLMIOIKSI

Teemu Heino

Pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2020

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HEINO, TEEMU: Monskyn lause neliön osittamisesta kolmioiksi
Pro gradu -tutkielma, 31 s.
Matematiikka
Kesäkuu 2020

Monikulmion osittaminen tarkoittaa sen jakamista äärellisen moneksi monikulmioksi, jotka eivät ole päällekkäin mutta peittävät koko monikulmion. Osituksia hyödynnetään geometriassa ja niiden ominaisuuksia voidaan tutkia. Kaksi monikulmiota ovat yhteisositettavissa, jos toisen monikulmion osituksen osista voidaan koota toinen monikulmio. Tutkielmassa osoitetaan, että kaksi monikulmiota, joilla on sama pinta-ala, ovat aina yhteisositettavissa.

Monskyn lause vuodelta 1970 toteaa, että neliö voidaan aina osittaa parilliseksi määräksi kolmioita, joilla on yhtäsuuri pinta-ala, mutta ei koskaan parittomaksi määräksi kolmioita, joilla on yhtäsuuri pinta-ala. Ensimmäinen väite on triviaali ja näytetään jakamalla neliö yhteneviksi suorakulmioksi, joille piirretään lävistäjät. Tutkielman päätarkoituksena on esitellä Monskyn lauseen jälkimmäisen väitteen alkuperäinen todistus, joka vaatii tuloksia kombinatoriikasta ja algebrasta.

Spernerin lemman mukaan on olemassa sellainen tason $\mathbb{R}^2$ väritys kolmella värillä, että kun yksikköneliö $[0,1]\times[0,1]$ on väritetty tällä värityksellä ja ositettu kolmioiksi, ainakin yhdellä kolmiolla on kolme eriväristä kärkeä. Spernerin lemma todistetaan vahvistamalla, että eräs väritys toteuttaa ehdot.

Arvotus antaa kunnan nolla-alkiolle arvon 0 ja kaikille muille kunnan alkioille jonkin suuremman arvon kuin 0. Jos arvotus on epäarkhimedinen, niin kahden alkion summan arvotus ei voi olla suurempi kuin suurin näiden alkioiden arvotuksista. 2-adinen arvotus antaa rationaaliluvulle arvon 2^{-n}, kun rationaaliluku kirjoitetaan supistettuna muodossa $2^n \cdot \frac{m_1}{m_2}$. Todistetaan 2-adinen arvotus epäarkhimediseksi, vahvistetaan että se antaa luvulle $\frac{1}{2}$ arvon 2 ja todetaan, että 2-adinen arvotus voidaan antaa kaikille reaaliluvuille.

2-adisen arvotuksen avulla konstruoidaan Spernerin lemman mukainen väritys. Tiedetään, että kolmioiksi ositetulla yksikköneliöllä on tällöin kolmio, jonka kaikki kärjet ovat erivärisiä, ja oletetaan, että kolmion pinta-ala on $\frac{1}{n}$, missä n on pariton. Kolmion pinta-ala kaksinkertaisena saa suoraan laskemalla 2-adisen arvotuksen $\frac{1}{2}$. Toisaalta huomataan, että tällaisen kolmion kaksinkertaisen pinta-alan 2-adinen arvotus on suurempi kuin 1. Tämä ristiriita osoittaa Monskyn lauseen jälkimmäisen väitteen.

Asiasanat: Monskyn lause, ositus, yhteisositettavuus, väritys, Spernerin lemma, arvotus, epäarkhimedinen arvotus, dominointiperiaate, p-adinen arvotus.

Sisällys

1 Johdanto

Erilaisten alueiden ja kuvioiden jakaminen osiksi—joko äärellisen tai äärettömän moneksi—on osoittautunut hyödylliseksi menetelmäksi sekä geometriassa että sen ulkopuolella vuosituhansien ajan.

Esimerkiksi suunnikkaan pinta-ala voidaan johtaa piirtämällä sen sivulta korkeusjana kärjelle ja siirtämällä muodostunut kolmio sen toiseen päähän, jolloin saadaan suorakulmio. Jakamalla suunnikas taas kahdeksi yhteneväksi kolmioksi tai puolisuunnikkaaksi saadaan johdettua niiden pinta-alat.

Luvun π arvoa voidaan approksimoida jakamalla ympyrä mahdollisimman moneksi kolmioksi, kuten Arkhimedes teki [1]. Riemannin integraali taas perustuu mahdollisimman monen suorakulmion piirtämiseen käyrän ja x-akselin välille.

1800-luvulla, eli vasta suhteellisen myöhään todistettiin, että mikä tahansa monikulmio voidaan koota minkä tahansa monikulmion äärellisen monesta osasta, jos monikulmioilla on yhtäsuuri pinta-ala. Farkas Bolyain esitettyä kyseisen ongelman sekä William Wallace että Paul Gerwien ratkaisivat sen itsenäisesti [6].

Toinen merkittävä kysymys nousi esille vuonna 1965. Fred Richman päätti selvittää, voidaanko jollain parittomalla luvun n arvolla neliötä jakaa n kappaleeksi kolmioita, joista kaikilla on yhtäsuuri pinta-ala, $\frac{1}{n}$ neliön pinta-alasta. Koska yritys osoittautui luultua vaikeammaksi, Richman ja John Thomas esittivät ongelman lehdessä *American Mathematical Monthly* vuonna 1967.

Seuraavana vuonna Thomas onnistui osoittamaan, että vastaus on kielteinen, jos kolmioiden kärkien koordinaatit ovat rationaalilukuja. Vuonna 1970 Paul Monsky osoitti, että vastaus on kielteinen, olivatpa kolmioiden kärjet mitä tason $\mathbb{R}^2$ pisteitä tahansa. Tämä tulos nimettiin *Monskyn lauseeksi.*

Monskyn todistuksesta voi nähdä, miksi lausetta ei todistettu vuosisatoja aiemmin. Todistuksessa käytetään Spernerin lemmaa vuodelta 1928, joka liittyy tason pisteiden jakamiseen kolmeen tilaan eli väriin. Lisäksi tarvitaan fyysisessä maailmassa epäintuitiivisten epäarkhimedisten arvotusten ominaisuuksia. Monskyn todistus on myös lauseen ainoa todistus ainakin vuoteen 2018 mennessä [4, s. 1–2] [10].

Tässä tutkielmassa esitellään monikulmioiden osittamisen teoriaa ja käydään läpi Monskyn todistuksen vaiheet.

1.1 Geometrian peruskäsitteitä

Tutkielmassa oletetaan geometrian alkeellisimmat käsitteet tunnetuiksi. Käydään kuitenkin läpi varsinkin jatkossa käytettäviä käsitteitä ja merkintöjä. Monitulkintaisia käsitteitä ja merkintöjä määritellään tutkielman kannalta käytännöllisellä tavalla.

Tutkielmassa pisteet sekä muut tasogeometriset objektit ovat tasolla $\mathbb{R}^2$. Objektit sijaitsevat mielivaltaisessa kohdassa, ellei toisin mainita. Lisäksi pisteiden $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ välinen jana on $AB = BA$, jonka pituus eli pisteiden A ja B välinen etäisyys on

$$|AB| = |BA| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{1}$$

Objekti $\Diamond A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ on monikulmio, erityisesti n-kulmio, jonka sivujanat ovat $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_0$. Sivujanat eivät leikkaa toisiaan muualla kuin janojen yhteisessä päätepisteessä. Monikulmio on siis sama riippumatta siitä, mikä kärki valitaan kärjeksi A_0; toisin sanottuna, $\Diamond A_1 A_2 \ldots A_n = \Diamond A_m A_{1+m} \ldots A_{n-1+m}$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$, kun indeksin arvo lasketaan modulo n.

Kolmioilla voidaan käyttää symbolia $\triangle$ symbolin $\Diamond$ sijasta. Monikulmioon kuuluvat myös sen sisäpisteet.

Merkintä $\angle ABC$ tarkoittaa sekä monikulmion sisäkulmaa, joka on sen sivujanojen AB ja BC välissä, että sen suuruutta. Jos on epäselvää, minkä monikulmion sisäkulmaa tarkoitetaan, mainitaan se erikseen.

Monikulmiot $\Diamond = \Diamond A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ ja $\Diamond' = \Diamond A'_0 A'_1 \ldots A'_{n-1}$ ovat *yhtenevät*, merkitään $\Diamond \cong \Diamond'$, jos kaikilla $i = 0, \ldots, n-1$,

$$|A_i A_{i+1}| = \left|A'_{i+m} A'_{i+1+m}\right| \tag{2}$$

ja

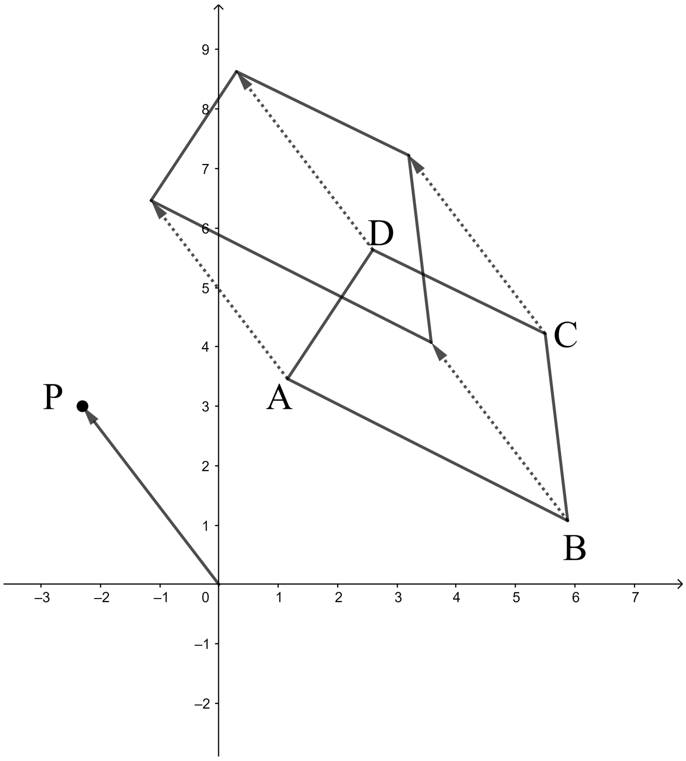
$$\angle A_i A_{i+1} A_{i+2} = \angle A'_{i+m} A'_{i+1+m} A'_{i+2+m} \tag{3}$$

jollakin $m \in \mathbb{Z}$, kun indeksit lasketaan modulo n. Toisin sanottuna: Luetaan monikulmion $\Diamond$ sivujanojen pituudet ja sisäkulmien suuruudet myötäpäivään alkaen mielivaltaisesta kohdasta. Monikulmiot $\Diamond$ ja $\Diamond'$ ovat yhtenevät, jos monikulmion $\Diamond'$ sivujanojen pituudet ja sisäkulmien suuruudet voidaan lukea siten myötä-tai vastapäivään alkaen jostakin kohdasta, että saadaan samat arvot samassa järjestyksessä kuin saatiin luettaessa vastaavat arvot monikulmiosta $\Diamond$.

Kolmioiden tapauksessa voidaan johtaa erityisesti seuraavat riittävät ehdot kolmioiden yhtenevyydelle:

- *Sivu-kulma-sivu*: kolmioilla on yhtä suuri kulma ja niiden viereisillä sivuilla on yhtäsuuret pituudet.
- *Kaksi kulmaa ja sivu*: kolmioilla on yhtä pitkä sivu ja kaksi pareittain yhtäsuurta kulmaa.
- *Sivu-sivu-sivu*: kolmioilla on kolme pareittain yhtä pitkää sivua [5, s. 10–11].

Monikulmion pinta-alan määritelmä oletetaan tarpeeksi hyvin tunnetuksi. Kuvion S pinta-alasta käytetään tarvittaessa merkintää $ala(S)$.



Kuva 1: Nelikulmiot $\Diamond ABCD$ ja $\tau_P(\Diamond ABCD)$.

1.2 Isometriat

Peilaus, siirtopeilaus, translaatio ja rotaatio ovat mahdolliset *isometriat*, eli sellaiset funktiot $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jotka pitävät kahden pisteen etäisyyden samana, siis

$$|\alpha(A)\alpha(B)| = |AB| \tag{4}$$

kaikilla $A, B \in \mathbb{R}^2$. Tutkielmassa käytetään kahta jälkimmäistä isometriaa.

Translaatio τ_P siirtää annettua pistettä pisteen eli vektorin $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ verran. Jos siis $A = (x, y)$, niin

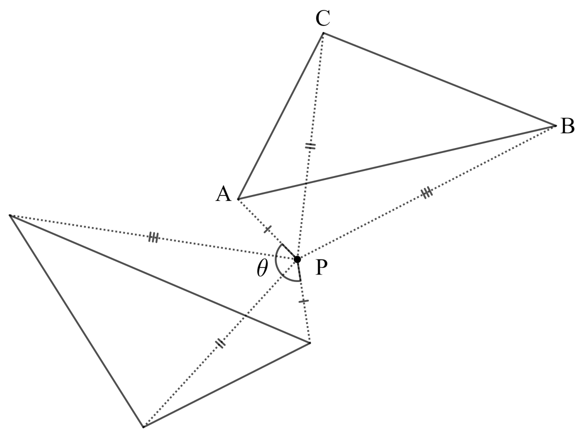
$$\tau_P(A) = A + P = (x + a, y + b). \tag{5}$$

Kuvassa 1 on esimerkki nelikulmion translaatiosta.

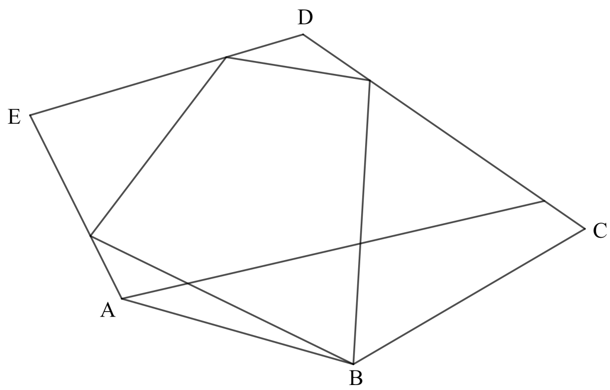
Rotaatio eli kierto $\rho_{P,\theta}(A) = A'$ kiertää pistettä A kulman $|\theta|$ verran (vastapäivään jos $\theta > 0$ ja myötäpäivään jos $\theta < 0$) pisteen P suhteen siten, että $|AP'| = |AP|$. Jos $A = (x, y)$, ja $P = (a, b)$, voidaan laskea pisteen A' koordinaatit:

$$A' = \rho_{P,\theta}(A) = (\cos(\theta)(x-a)-\sin(\theta)(y-b)+a, \cos(\theta)(y-b)+\sin(\theta)(x-a)+b). \tag{6}$$

Jos $P = (0, 0)$ ja $\theta \equiv 0^\circ \pmod{360^\circ}$, niin $\tau_P = \rho_{Q,\theta} = \iota$ on triviaali isometria eli identiteettikuvaus kaikilla pisteillä Q. Kuvassa 2 on esimerkki kolmion rotaatiosta [5, s. 33–35] [7, s. 1–3].



Kuva 2: Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\rho_{P,\theta}(\triangle ABC)$.



Kuva 3: Esimerkki viisikulmion $\Diamond ABCDE$ osituksesta.

2 Monikulmion ositus

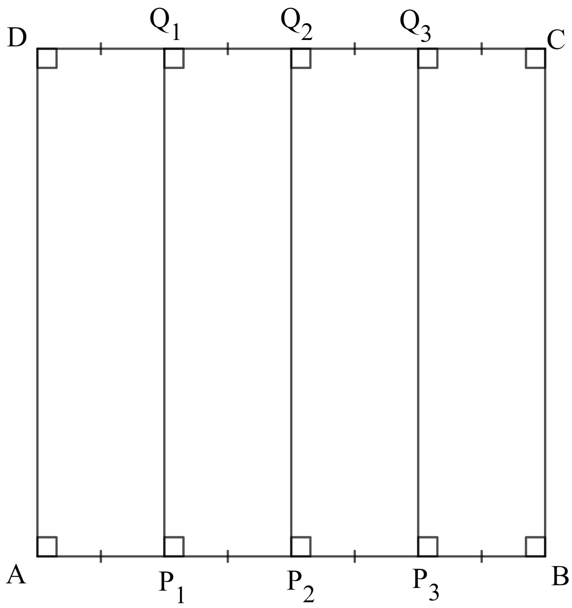
Jakamalla monikulmio $\Diamond$ ei-päällekkäisiksi monikulmioiksi, joita on äärellinen määrä, tehdään monikulmiolle $\Diamond$ *ositus*. Ositus voidaan siis toisin määritellä monikulmion $\Diamond$ lausumisena muodossa

$$\Diamond = \bigcup_{i=1}^{k} \Diamond_i, \tag{7}$$

missä $k \in \mathbb{Z}_+$, $\Diamond_i$ on monikulmio kaikilla i ja $\Diamond_i^\circ \cap \Diamond_j^\circ = \emptyset$ jos $i \neq j$, missä $\Diamond_i^\circ$ tarkoittaa monikulmion $\Diamond_i$ sisäpisteitä. Kuvassa 3 on esimerkki monikulmion osituksesta [5, s. 29].

Voidaan jo helposti todistaa, että myös käänteinen Monskyn lause on voimassa:

Lause 1. *Olkoon $\Diamond ABCD$ mielivaltainen neliö ja n mielivaltainen positiivinen ko-*



Kuva 4: Esimerkki neliön $\Diamond ABCD$ osituksesta neljäksi yhteneväksi suorakulmioksi.

konaisluku. Silloin on olemassa neliön $\Diamond ABCD$ ositus $2n$ kolmioksi siten, että jokaisen kolmion pinta-ala on yhtäsuuri.

Todistus. Jos väitteen mukainen ositus on olemassa, jokaisen kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2n} ala(\Diamond ABCD)$.

Olkoot $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ sellaiset janan AB pisteet, että

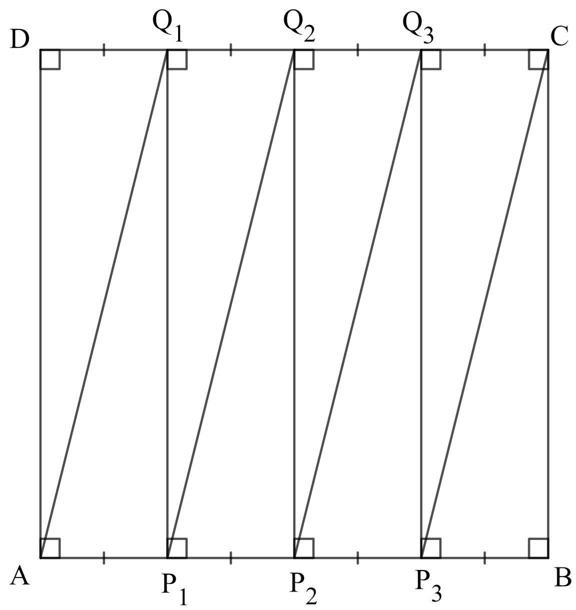
$$|AP_1| = |P_1P_2| = \cdots = |P_{n-1}B| = \frac{1}{n}|AB|, \tag{8}$$

eli pisteet jakavat janan AB n yhtä pitkään osaan. Vastaavasti, olkoot $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ sellaiset janan CD pisteet, että

$$|DQ_1| = |Q_1Q_2| = \cdots = |Q_{n-1}C| = \frac{1}{n}|CD|. \tag{9}$$

Piirretään neliölle $\Diamond ABCD$ janat P_iQ_i, missä $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Koska $|AP_1| = |DQ_1|$, janat AD ja P_1Q_1 ovat yhdensuuntaisia ja $\Diamond AP_1Q_1D$ on suorakulmio. Edelleen päätellään, että kaikki janat P_iQ_i ovat yhdensuuntaisia janan AD kanssa. Nyt neliö on ositettu n yhteneväksi suorakulmioksi, joista jokaisen pinta-ala on $\frac{1}{n} ala(\Diamond ABCD)$. Kuvassa 4 on esimerkki tällaisesta osituksesta tapauksessa $n = 4$.

Seuraavaksi piirretään neliölle janat $AQ_1, P_1Q_2, P_2Q_3 \ldots, P_{n-2}Q_{n-1}, P_{n-1}C$. Nyt neliö on ositettu $2n$ yhteneväksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Jokaisen kolmion pinta-ala on puolet suorakulmion pinta-alasta, siis $\frac{1}{2n} ala(\Diamond ABCD)$. Kuvassa 5 on edellä kuvattu ositus, kun $n = 4$ [4, s. 7]. $\square$



Kuva 5: Esimerkki neliön $\Diamond ABCD$ osituksesta kahdeksaksi yhteneväksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

2.1 Monikulmioiden yhteisositettavuus

Jos monikulmioilla $\Diamond_1$ ja $\Diamond_2$ on olemassa ositukset pareittain yhteneviksi monikulmioiksi, sanotaan, että $\Diamond_1$ ja $\Diamond_2$ ovat *yhteisositettavissa*. Tämä siis tarkoittaa, että leikkaamalla $\Diamond_1$ kyseisen osituksensa määräämiksi monikulmioiksi, monikulmioista voidaan koota monikulmion $\Diamond_2$ osituksen määräämät monikulmiot. Muodollisemmin, jos

$$\Diamond_1 = \bigcup_{i=1}^{k} \Diamond_{1i} \quad \text{ja} \quad \Diamond_2 = \bigcup_{i=1}^{k} \Diamond_{2i} \tag{10}$$

ovat osituksia, missä $\Diamond_{1i} \cong \Diamond_{2i}$ kaikilla i, niin kaikilla i on sellainen isometria α_i, että $\alpha_i(\Diamond_{1i}) = \Diamond_{2i}$. Siis

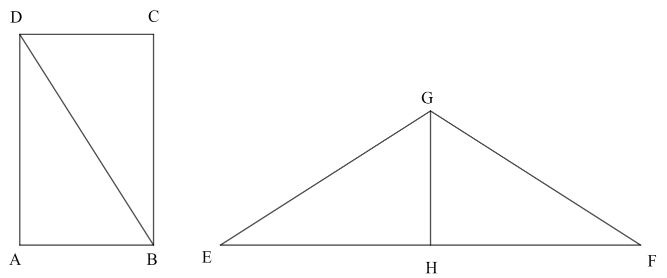
$$\bigcup_{i=1}^{k} \alpha_i(\Diamond_{1i}) = \Diamond_2. \tag{11}$$

[5, s. 29]

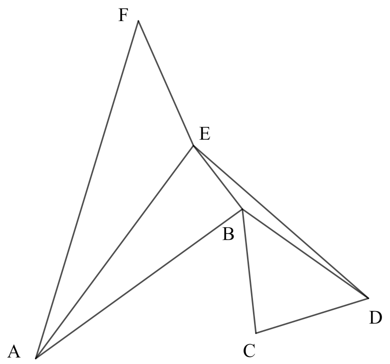
Kuvassa 6 näytetään osituksien avulla, miten kaksi monikulmiota ovat yhteisositettavissa.

Jos kaksi monikulmiota ovat yhteisositettavissa, niiden pinta-alat on oltava samat, sillä yhtenevien monikulmioiden pinta-alat ovat samat. Myös käänteinen tulos on voimassa, minkä toteaa seuraava lause.

Lause 2 (Wallace–Bolyain–Gerwien)**.** *Monikulmiot $\Diamond_1$ ja $\Diamond_2$ ovat yhteisositettavissa, jos niillä on yhtäsuuri pinta-ala.*



Kuva 6: Suorakulmio $\Diamond ABCD$ on yhteisositettavissa tasakylkisen kolmion $\triangle EFG$ kanssa, sillä $\triangle ABD \cong \triangle BCD \cong \triangle EHG \cong \triangle HFG$.



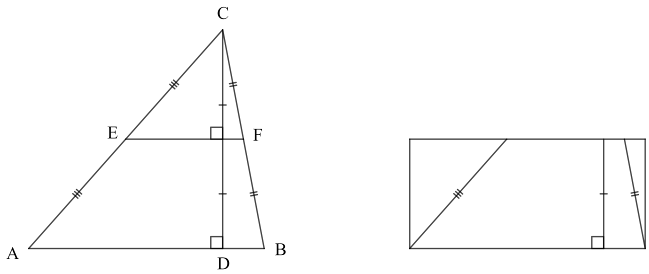
Kuva 7: Kuusikulmion $\Diamond ABCDEF$ ositus kolmioiksi piirtämällä lävistäjät järjestyksessä AE, BE, BD.

Todistus. Aluksi todetaan, että mikä tahansa n-kulmio, missä $n \geq 4$, voidaan osittaa pelkiksi kolmioiksi: n-kulmiolle voidaan piirtää sellainen sisäinen lävistäjä, että saadaan sen ositus kolmioksi ja $(n-1)$-kulmioksi. Sama toistetaan $(n-1)$-kulmiolle, kunnes lävistäjä piirretään nelikulmiolle. Esimerkki edellisestä toimenpiteestä näytetään kuvassa 7.

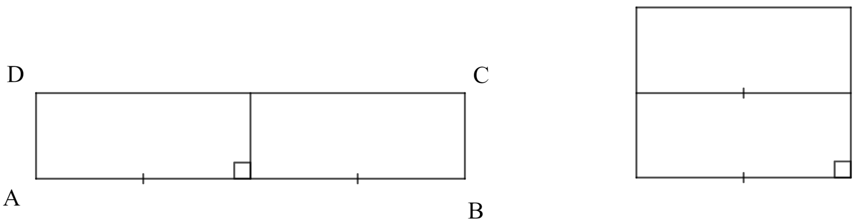
Seuraavaksi ositetaan jokainen edellä saatu kolmio: Nimetään kolmion $\triangle ABC$ kärjet sellaisessa järjestyksessä, että voidaan piirtää kolmiolle sellainen korkeusjana CD, joka on kolmion sisällä. Olkoon EF se janan CD puolittava jana, että $CD \perp EF$ ja pisteet E sekä F ovat kolmion sivuilla.

Janat CD ja EF osittavat kolmion kahdeksi kolmioksi ja kahdeksi nelikulmioksi. Kiertämällä 180 astetta toinen kolmio pisteen E ja toinen kolmio pisteen F suhteen saadaan suorakulmio, eli jokainen kolmio on yhteisositettavissa suorakulmion kanssa. Kuva 8 havainnollistaa toimenpidettä.

Jokainen suorakulmio eli myös jokainen kolmio on taas yhteisositettavissa sellaisen suorakulmion kanssa, jonka kannan pituus on välillä $[1, 2)$: Olkoon $\Diamond$ mielivaltainen



Kuva 8: Kolmio $\triangle ABC$ on yhteisositettavissa suorakulmion kanssa.

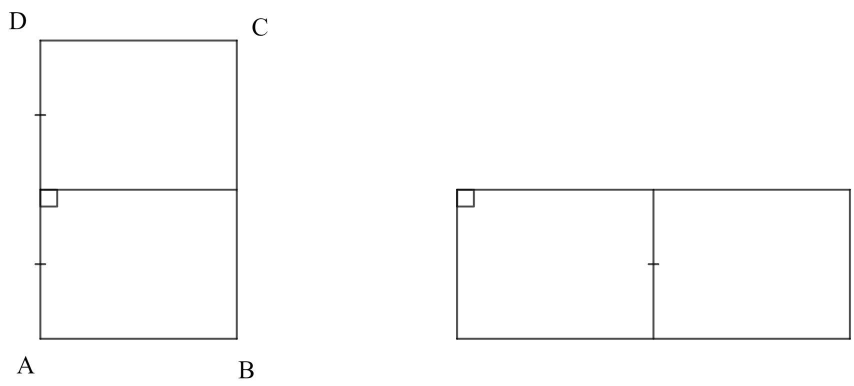


Kuva 9: Suorakulmion $\Diamond ABCD$ kannan pituuden puolitus.

suorakulmio. Jos suorakulmion $\Diamond$ kannan pituus a on vähintään 2, leikataan $\Diamond$ kannan keskinormaalin kohdalta ja siirretään toinen puolikas toisen päälle. Edellistä toistetaan kunnes muodostuneen suorakulmion kannan pituus on välillä $[1, 2)$. Vastaavasti, jos $a < 1$, toistetaan seuraavaa kunnes saadaan suorakulmio, jonka kannan pituus on välillä $[1, 2)$: Leikataan $\Diamond$ korkeuden keskinormaalin kohdalta ja siirretään toinen puolikas toisen viereen.

Lopulta saadaan suorakulmio, jonka kannan pituus on välillä $[1, 2)$, koska jos $a \in \mathbb{R}_+$, on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}$, että $2^n a \in [1, 2]$: Jos $2^x a = 1$, niin $x = -\log_2 a$ ja jos $2^x a = 2$, niin $x = -\log_2 a + 1$. Välillä $[-\log_2 a, -\log_2 a + 1)$ on jokin kokonaisluku n ja $2^x a$ on sekä jatkuva että aidosti kasvava muuttujan x suhteen. Menetelmät, joilla suorakulmio uudelleenkootaan suorakulmioksi, jonka kannan pituus on välillä $[1, 2)$, on esitetty kuvissa 9 ja 10.

Seuraavaksi näytetään, että suorakulmio $\Diamond_1 = \Diamond ABCD$, jonka kannan pituus $|AB|$ on välillä $[1, 2)$, on yhteisositettavissa sellaisen suorakulmion $\Diamond_2$ kanssa, jonka kan-



Kuva 10: Suorakulmion $\lozenge ABCD$ kannan pituuden muuttaminen kaksinkertaiseksi.

nan pituus on 1: Jos $|AB| = 1$, todetaan, että monikulmio on triviaalisti yhteisositettavissa itsensä kanssa. Jos $|AB| > 1$, tehdään kuvan 11 konstruktio: Olkoot $P \in AB$, $Q \in CD$ ne pisteet, että $|AP| = |CQ| = 1$. Olkoon l se suora, jolle $P \in l$ ja $l \perp AB$.

Koska $1 < |AB| < 2$, l leikkaa janan BQ pisteessä R. Olkoon A' se piste, jossa janojen DA ja BQ määräämät suorat leikkaavat. Lopuksi, olkoon P' on se suoran l piste, että $\lozenge APP'A'$ on suorakulmio. Nyt suorakulmiolle $\lozenge_1$ voidaan tehdä ositus

$$\triangle PBR \cup \triangle BCQ \cup \lozenge APRQD \tag{12}$$

ja suorakulmiolle $\lozenge APP'A'$ ositus

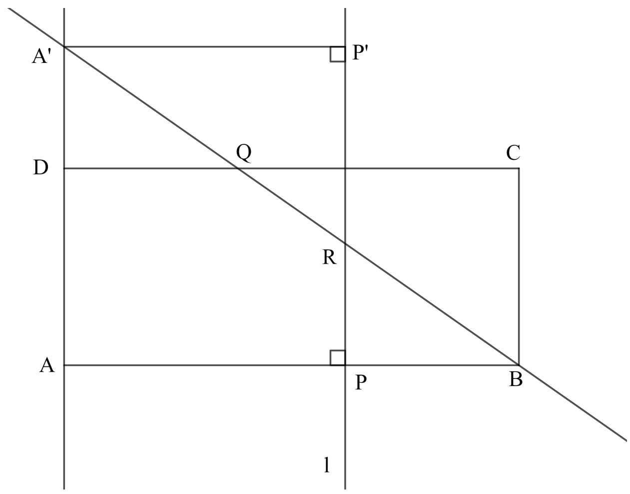
$$\triangle DQA' \cup \triangle RP'A' \cup \lozenge APRQD. \tag{13}$$

Koska $A'P' \parallel CD \parallel AB$,

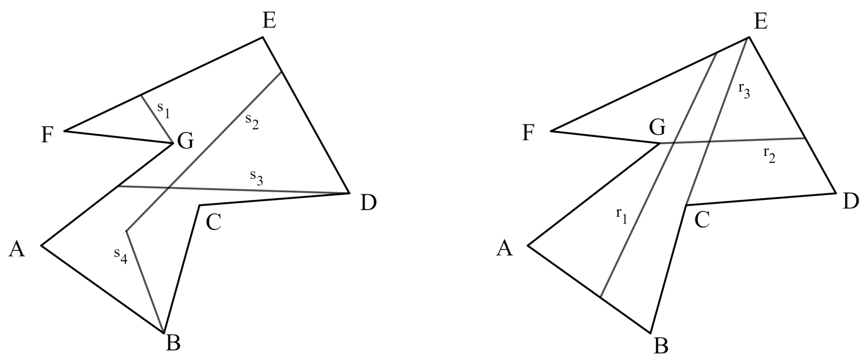
$$\angle RBP = \angle A'QD = \angle BQC = \angle RA'P'. \tag{14}$$

Koska lisäksi $|PB| = |DQ| = |AB| - 1$ ja $|CQ| = |A'P'| = 1$, kulma–sivu–kulma -säännön nojalla voidaan todeta, että $\triangle PBR \cong \triangle DQA'$ ja $\triangle BCQ \cong \triangle RP'A'$. Koska vielä viisikulmio $\lozenge APRQD$ on suorakulmioiden yhteinen osa, $\lozenge APP'A'$ on kysytty $\lozenge_2$, joka on yhteisositettavissa suorakulmion $\lozenge_1$ kanssa.

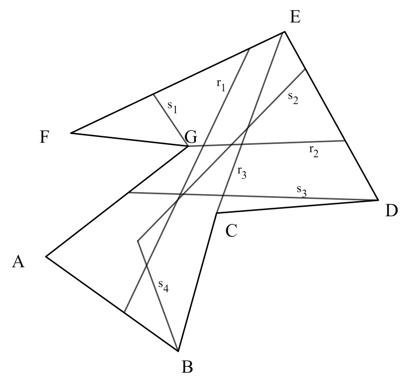
Nyt siis tiedetään, että mikä tahansa monikulmio $\lozenge$ voidaan leikata ja koota kolmioiksi, joista jokainen voidaan leikata ja koota suorakulmioksi, jonka kannan pituus on 1. Jos suorakulmiot kootaan päällekkäin, saadaan suorakulmio, jonka kannan pituus on 1 ja joka on yhteisositettavissa monikulmion $\lozenge$ kanssa. Erityisesti, jos monikulmioilla $\lozenge_1$ ja $\lozenge_2$ on yhtäsuuri pinta-ala, ne ovat yhteisositettavissa saman suorakulmion kanssa.



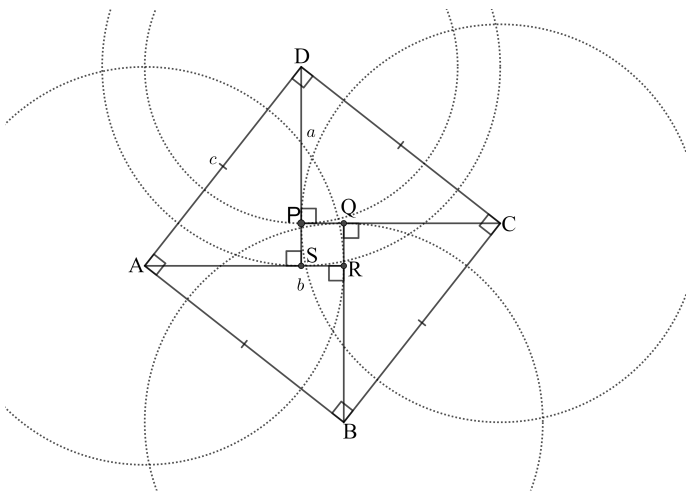
Kuva 11: Suorakulmio $\lozenge ABCD$, jonka kannan pituus on välillä $(1, 2)$, on yhteisositettavissa suorakulmion $\lozenge APP'A'$ kanssa, $|AP| = 1$.



Kuva 12: Seitsenkulmion $\lozenge ABCDEFG$ kaksi eri ositusta, jotka määräävät janat s_1, s_2, s_3, s_4 sekä janat r_1, r_3, r_3.



Kuva 13: Seitsenkulmion $\Diamond ABCDEFG$ ositus, jonka määräävät janat $s_1, s_2, s_3, s_4, r_1, r_3, r_3$.

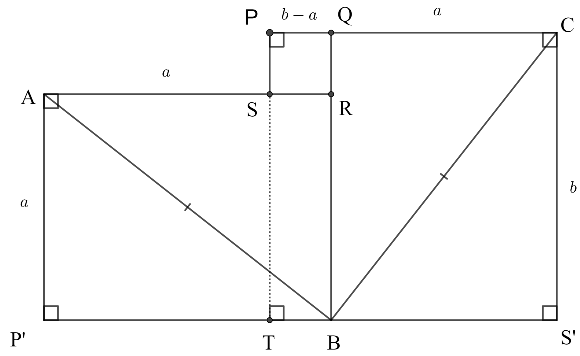


Kuva 14: Neliön $\Diamond ABCD$ ositus neljäksi yhteneväksi suorakulmaiseksi kolmioksi ja neliöksi, jonka sivun pituus on kateettien pituuksien erotus.

Lopuksi pitää siis näyttää, että jos $\Diamond_1$ ja $\Diamond_3$ sekä $\Diamond_2$ ja $\Diamond_3$ ovat yhteisositettavissa, niin myös $\Diamond_1$ ja $\Diamond_2$ ovat yhteisositettavissa. Olkoot $s_1, \ldots, s_n$ sellaiset monikulmion $\Diamond_3$ sisäiset janat, jotka määräävät sellaisen osituksen, että $\Diamond_3$ on yhteisositettavissa monikulmion $\Diamond_1$ kanssa. Vastaavasti olkoot $r_1, \ldots, r_m$ sellaiset monikulmion $\Diamond_3$ sisäiset janat, jotka määräävät sellaisen osituksen, että $\Diamond_3$ on yhteisositettavissa monikulmion $\Diamond_2$ kanssa.

Tällöin janat $s_1, \ldots, s_n, r_1, \ldots, r_m$ määräävät sellaisen monikulmion $\Diamond_3$ osituksen, että $\Diamond_3$ on yhteisositettavissa sekä monikulmion $\Diamond_1$ että $\Diamond_2$ kanssa. Monikulmio $\Diamond_3$ voidaan siis leikata sellaisiksi osiksi, joista voidaan koota sekä $\Diamond_1$ että $\Diamond_2$, eli $\Diamond_1$ voidaan suoraan leikata ja koota monikulmioksi $\Diamond_2$. Kuvissa 12 ja 13 on esimerkki edellä kuvailluista osituksista [5, s. 29–30] [6].

$\square$



Kuva 15: Ositetun neliön osat uudelleenkoottuna siten, että muodostuu kaksi neliötä, joiden sivujen pituudet ovat kateettien sivujen pituudet.

2.2 Yhteisositettavuuden sovelluksia

Esimerkki 1. Todistetaan Pythagoraan lause ositusten avulla käyttäen tietoa, että yhteisositettavien monikulmioiden pinta-alat ovat samat.

Olkoot suorakulmaisen kolmion $\triangle$ kateettien pituudet a ja b, $a \leq b$, ja hypotenuusan pituus c.

Piirretään neliö $\Diamond = \Diamond ABCD$, jonka sivun pituus on c. Ositetaan neliö neljäksi kolmioksi, jotka ovat yhteneviä kolmion $\triangle$ kanssa: Olkoon P se neliön $\Diamond$ sisäinen piste, että $|DP| = a$ ja $|CP| = b$. Tällöin sivu-sivu-sivu -säännön nojalla $\triangle CDP \cong \triangle$.

Olkoon sitten $Q \in CP$ se piste, että $|BQ| = b$. Koska kateettien vastaisten kulmien summa on $90°$, $\angle CBQ = \angle DCP$ ja sivu-kulma-sivu -säännön nojalla myös $\triangle BCQ \cong \triangle$. Samoin piirretään janalle BQ se piste R, että $|AR| = b$ ja janalle AR se piste S, että $|DS| = b$.

Nyt neliö $\Diamond$ on ositettu neljäksi kolmioksi, jotka ovat yhteneviä kolmion $\triangle$ kanssa, ja jos $b > a$, niin keskelle jää neliö $\Diamond PQRS$, jonka sivun pituus on $b - a$. Ositus on esitetty kuvassa 14.

Tehdään kolmiolle $\triangle ASD$ translaatio τ_{B-A} ja kolmiolle $\triangle CDP$ translaatio τ_{B-C}. Olkoon $S' = \tau_{B-A}(S)$ ja $P' = \tau_{B-C}(P)$.

Lopuksi, olkoon T pisteen S kohtisuora projektio janalle BP', jolloin saadaan kuvassa 15 esitetty konstruktio.

$\Diamond AP'TS$ on neliö, jonka sivun pituus on a ja pinta-ala a^2. $\Diamond CPTS'$ taas on neliö, jonka sivun pituus on b ja pinta-ala b^2. Koska kuusikulmio

$$\Diamond AP'S'CPS = \Diamond AP'TS \cup \Diamond CPTS' \tag{15}$$

Kuva 16: Neliö ositettuna Tangram-paloiksi.

on yhteisositettavissa neliön $\diamondsuit$ kanssa, ja neliön $\diamondsuit$ pinta-ala on c^2, saadaan

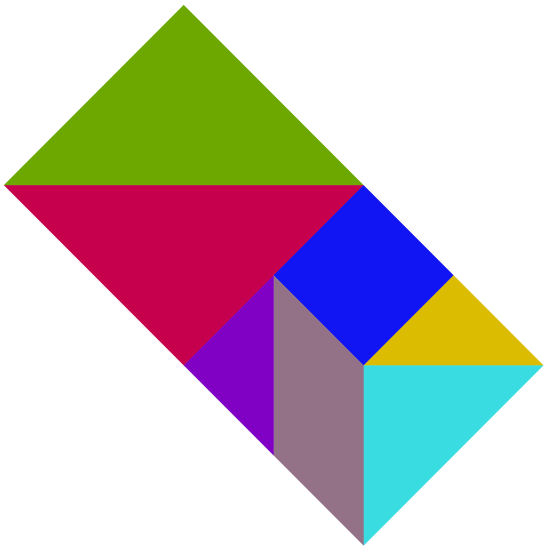
$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{16}$$

Esimerkki 2. *Tangram* on vanha kiinalainen palapeli, jota käytetään nykyisin varsinkin lasten geometrisen hahmottamiskyvyn harjaannuttamisessa ja tutkimisessa [2].

Tangram on neliö, joka on ositettu kuten kuvassa 16, eli seuraaviksi monikulmioiksi, jos neliön sivun pituus on 1:

- Kahdeksi suorakulmaiseksi tasakylkiseksi kolmioksi, joiden hypotenuusan pituus on 1.
- Kahdeksi suorakulmaiseksi tasakylkiseksi kolmioksi, joiden hypotenuusan pituus on $\frac{1}{2}$.
- Suorakulmaiseksi tasakylkiseksi kolmioksi, jonka hypotenuusan pituus on $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Neliöksi, jonka sivun pituus on $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
- Suunnikkaaksi, jonka viereisten sivujen pituudet ovat $\frac{1}{2}$ ja $\frac{\sqrt{2}}{4}$, sekä peräkkäisten sisäkulmien suuruudet $45°$ ja $135°$.

Tangramin ajatuksena on koota paloista neliö tai jokin muu monikulmio. Kuvissa 18 ja 17 on kaksi esimerkkiä Tangram-paloista kootuista konvekseista monikulmioista, jotka eivät ole yhteneviä.



Kuva 17: Tangram-paloista koottu suorakulmio, jonka viereisten sivujen pituuksien suhde on $2 : 1$.

Kuva 18: Tangram-paloista koottu symmetrinen viisikulmio, jolla on kolme suoraa kulmaa.

3 Tason $\mathbb{R}^2$ värittäminen

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to V$, missä V on äärellinen, liittää jokaiseen pisteeseen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ jonkin joukon V alkion. Kun joukon V alkiot ajatellaan väreiksi, voidaan sanoa, että f on tason $\mathbb{R}^2$ väritys. Jos taso on jaettu alueisiin, joiden kaikki pisteet saavat saman värin, tason väritystä voidaan helposti visualisoida kuten kuvassa 19. Eräänlainen tapa värittää taso $\mathbb{R}^2$ ja erityisesti sen yksikköneliö, antaa olennaisen tuloksen Monskyn lauseen todistamiseen.

3.1 Spernerin lemma

Yleinen Spernerin lemma koskee avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteiden värittämistä $n + 1$ värillä, missä $n \in \mathbb{Z}_+$. Lausutaan ja todistetaan vain Spernerin lemman erikoistapaus, jossa $n = 2$:

Lause 3. *Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to V$, missä $|V| = 3$, seuraavat ehdot toteuttava tason $\mathbb{R}^2$ väritys:*

- *Jokaisella suoralla esiintyy korkeintaan kaksi väriä.*
- *$f(0, 0) \neq f(0, 1) \neq f(1, 0) \neq f(0, 0)$, eli pisteet $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 0)$ ovat erivärisiä.*
- *Pisteet $(0, 0)$ ja $(1, 1)$ ovat erivärisiä.*

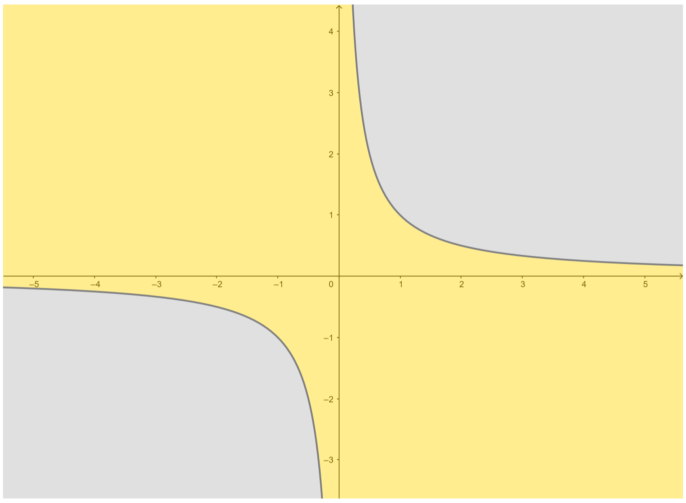
Jos yksikköneliö $S = [0, 1]^2$ ositetaan kolmioiksi, sellaisia kolmioita, jonka jokainen kärki on erivärinen, on pariton määrä.

Jatkossa sovitaan, että $V = \{s, v, p\}$, missä s tarkoittaa väriä sininen, v väriä vihreä ja p väriä punainen.

Todistus. Olkoon $\mathbb{R}^2$ väritetty lauseen ehtojen mukaisesti. Koska värien valinta on mielivaltainen, voidaan olettaa, että piste $(0, 0)$ on sininen, piste $(1, 0)$ on vihreä ja piste $(0, 1)$ on punainen. Voidaan siis todistaa lause tässä tapauksessa ja yleistää todistus mille tahansa ehdot toteutavalle väritykselle. Kuvassa 20 on esimerkki oletusten mukaisesta yksikköneliön värityksestä.

Olkoon yksikköneliö S ositettu kolmioiksi mielivaltaisesti. Määritellään, että kolmion sivujana on *sinivihreä jana*, jos sen toinen päätepiste on sininen ja toinen päätepiste on vihreä, ja määritellään vastaavasti *sinipunainen jana* sekä *punavihreä jana*. Määritellään myös vastaavasti *sininen, vihreä ja punainen jana*, joiden molemmat päätepisteet ovat samanväriset.

Ensin näytetään, että yksikköneliön pohjasivulla on pariton määrä sinivihreitä janoja: Ehtojen mukaan pohjasivun jokainen piste on joko sininen tai vihreä, ja sen



Kuva 19: Väritys $f(x,y) = k$, jos $xy < 1$ ja $f(x,y) = h$, jos $xy \geq 1$. Merkki k tarkoittaa keltaista ja h harmaata.

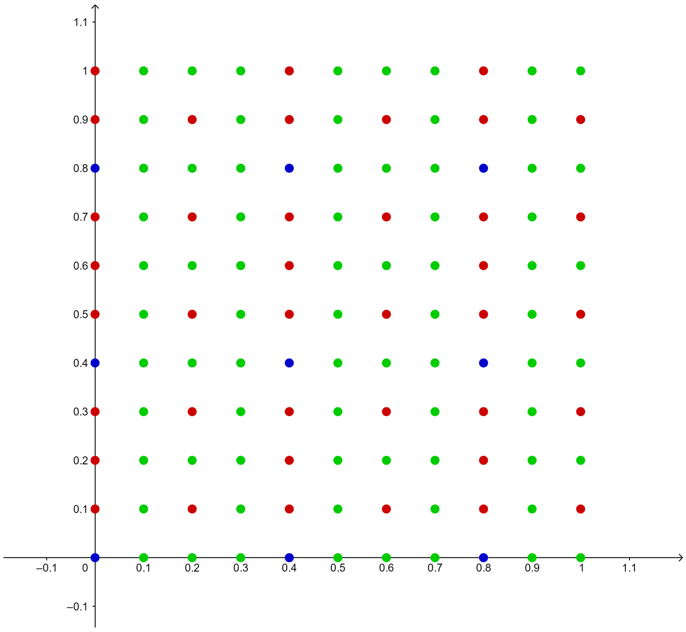
päätepisteet ovat erivärisiet. Pohjasivulla on ainakin yksi sinivihreä jana, sillä muuten pohjasivun vasen päätepiste määrää, että jokainen jana on sininen, ja pohjasivun oikea päätepiste taas määrää, että jokainen jana on vihreä. Kuvassa 21 demonstroidaan edellistä ristiriitaa.

Oletetaan sitten, että janat $s_1, \ldots, s_n$ ovat pohjasivun sinivihreät janat. Janan s_1 vasemmalla puolella voi olla vain sinisiä janoja, janojen s_1 ja s_2 välissä vain vihreitä janoja ja janojen s_2 ja s_3 välissä taas vain sinisiä janoja. Voidaan induktiivisesti päätellä, että jos i on pariton, janan s_i vasen päätepiste on sininen ja oikea päätepiste vihreä, ja jos i on parillinen, janan s_i vasen päätepiste on vihreä ja oikea päätepiste sininen. Koska lisäksi janan s_n oikealla puolella voi olla vain vihreitä janoja, n on pariton. Esimerkki osituksesta, jossa havainto toteutuu, on kuvassa 22.

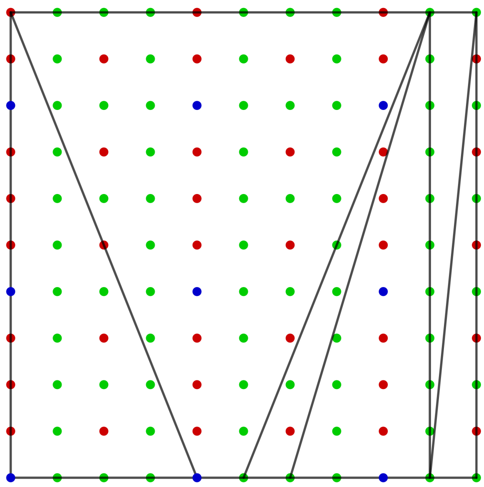
Sellaisella osituksen kolmiolla, jonka kaikki kärjet ovat erivärisiä, on selvästi aina yksi sinivihreä jana. Millä tahansa muunlaisella kolmiolla, eli sellaisella jolla on ainakin kaksi samanväristä kärkeä, on kaksi tai ei yhtään sinivihreää janaa, siis aina parillinen määrä.

Nyt voidaan laskea yhteen osituksen jokaisen kolmion sinivihreiden janojen lukumäärät kahdella tavalla. Ensin käydään läpi jokainen kolmio yksi kerrallaan ja käytetään edellä todettuja havaintoja. Jokainen sellainen kolmio, jonka kaikki kärjet ovat erivärisiä, kasvattaa summaa yhdellä, eli tällaiset kolmiot kasvattavat summaa yhdessä luvulla $m_1 \in \mathbb{N}$. Kaikki muut kolmiot kasvattavat summaa parillisella luvulla, eli yhteensä luvulla $2m_2$, $m_2 \in \mathbb{N}$. Summa on siis $M = m_1 + 2m_2$.

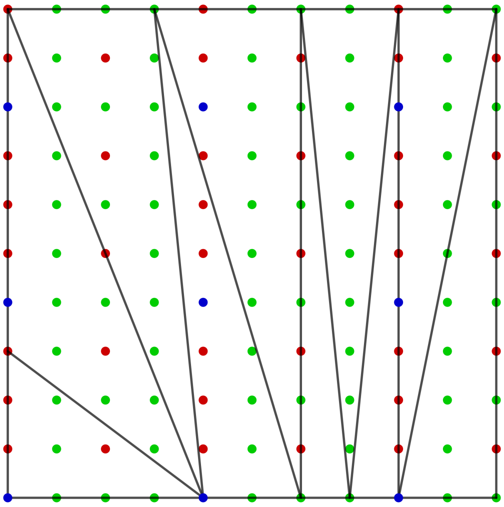
Toisella tavalla lasketaan jokainen yksikköneliön S sisäinen sinivihreä jana kahteen kertaan ja saadaan siis parillinen luku $2m_3$, $m_3 \in \mathbb{N}$. Koska yksikköneliön sivuista vain pohjasivu sisältää sekä sinisiä että vihreitä pisteitä, lisätään edelliseen pohjasivun sinivihreiden janojen lukumäärä, minkä todistettiin olevan jokin pariton luku



Kuva 20: Esimerkki Lauseen 3 ehdot täyttävästä värityksestä $\frac{1}{10}$ yksikön välein.



Kuva 21: Ei sinivihreitä janoja pohjasivulla: ristiriita.



Kuva 22: Pohjasivulla pariton määrä sinivihreitä janoja.

$2m_4 + 1$, $m_4 \in \mathbb{N}$. Summaksi saadaan siis pariton luku

$$M = 2m_3 + 2m_4 + 1 = 2(m_3 + m_4) + 1. \tag{17}$$

Lopuksi pitää näyttää, että m_1 eli sellaisten kolmioiden lukumäärä, jonka jokainen kärki on erivärinen, on pariton. Saadaan yhtälö

$$m_1 + 2m_2 = 2(m_3 + m_4) + 1, \tag{18}$$

josta m_1 ratkaistaan:

$$m_1 = 2(m_3 + m_4) + 1 - 2m_2 = 2(m_3 + m_4 - m_2) + 1, \tag{19}$$

siis m_1 on pariton [4, s. 6–7]. $\square$

4 Kunnan arvotus

4.1 Kunnat $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$

Edellisen värityksiin liittyvän tuloksen lisäksi Monskyn lauseen todistus vaatii perusteet ylittävää tietoa arvotuksista. Kerrataan ensin kunnan määritelmä:

Määritelmä 1. Olkoon K joukko, ja olkoot $a, b, c \in K$ mielivaltaisia. K varustettuna operaatioilla $+$ ja $\cdot$ on kunta, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

(K1) $a + b \in K$ ja $ab \in K$;

(K2) $a + b = b + a$ ja $ab = ba$;

(K3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ ja $(ab)c = a(bc)$;

(K4) $a(b + c) = ab + ac$;

(K5) joukossa K on nolla-alkio 0 ja ykkösalkio $1 \neq 0$, joille $0 + a = 1a = a$;

(K6) joukossa K on sellainen alkio $-a$, jolle $-a + a = 0$, ja jos $d \in K \backslash \{0\}$, joukossa K on sellainen alkio d^{-1}, jolle $d^{-1}d = 1$ [9, s. 1].

Vahvistetaan, että rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ varustettuna tavallisella yhteen-ja kertolaskulla on kunta. Olkoot $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ mielivaltaisia, siis $a, c, e \in \mathbb{Z}$ ja $b, d, f \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

(K1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ ja $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $ad + bc, ac \in \mathbb{Z}$ ja $bd \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

(K2) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{bc+ad}{bd} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ ja $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$.

(K3) $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{adf+bcf+bde}{bdf} = \frac{a}{b} + \frac{cf+de}{df} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$ ja $(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf} = \frac{a}{b} \cdot \frac{ce}{df} = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f})$.

(K4) $\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{cf+de}{df} = \frac{acf+ade}{bdf} = \frac{acf}{bdf} + \frac{ade}{bdf} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$.

(K5) Luonnollinen luku 0 on nolla-alkio ja luonnollinen luku 1 on ykkösalkio.

(K6) $\frac{-a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{-a+a}{b} = \frac{0}{b} = 0$ ja jos $\frac{g}{h} \neq 0$, niin $\frac{h}{g} \cdot \frac{g}{h} = \frac{gh}{gh} = 1$.

On hyvin tunnettua, että reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ toteuttaa kaikki ehdot yhteen-ja kertolaskun suhteen.

4.2 Arvotuksen määritelmä ja ominaisuuksia

Määritellään *arvotus* eli *valuaatio* seuraavasti:

Määritelmä 2. Funktio $v : K \to \mathbb{R}$, missä $(K, +, \cdot)$ on kunta, on arvotus jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(V1) $v(0) = 0$ ja $v(a) > 0$ jos $a \neq 0$;

(V2) $v(ab) = v(a)v(b)$;

(V3) $v(a + b) \leq v(a) + v(b)$.

Esimerkki 3. Reaalilukujen itseisarvo

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x < 0, \end{cases}$$

on arvotus:

(V1) $|0| = 0$ ja $|x| > 0$ jos $x \neq 0$, sillä negatiivisen luvun vastaluku on positiivinen.

(V2) Jos $x = 0$ tai $y = 0$, saadaan $|xy| = 0 = |x|\,|y|$. Jos $a, b > 0$, saadaan $|xy| = xy = |x|\,|y|$. Muutoin saadaan $|xy| = -xy = x(-y) = |x|\,|y|$.

(V3) Jos $y = 0$, saadaan $|x+y| = |x| = |x| + |y|$, ja jos $x = 0$, saadaan $|x+y| = |y| = |x| + |y|$. Jos $x, y > 0$, saadaan $|x+y| = x+y = |x| + |y|$, ja jos $x, y < 0$, saadaan $|x+y| = -x-y = |x| + |y|$. Jos x ja y ovat erimerkkiset ja $x+y = 0$, saadaan $|x+y| = 0 < |x| + |y|$. Jos $x > 0$, $y < 0$ ja $x+y > 0$, saadaan $|x+y| = x+y = |x| - |y| < |x| + |y|$. Jos $x > 0$, $y < 0$ ja $x+y < 0$, saadaan $|x+y| = -x-y = -|x| + |y| < |x| + |y|$. Tapaukset, joissa $x < 0$, $y > 0$ ja $x+y \neq 0$ osoitetaan kuten kahdessa edellisessä vaiheessa.

Esimerkki 4. Myös funktio $v : K \to \mathbb{R}$,

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = 0 \\ 1, & \text{jos } x \neq 0, \end{cases}$$

on arvotus, jota kutsutaan triviaaliksi arvotukseksi:

(V1) $v(0) = 0$ ja $v(a) = 1 > 0$ jos $a \neq 0$.

(V2) Jos $a = 0$ tai $b = 0$, $v(ab) = 0 = v(a)v(b)$. Jos $a, b \neq 0$, $v(ab) = 1 = v(a)v(b)$.

(V3) Jos $a = b = 0$, $v(a+b) = 0 = v(a) + v(b)$. Muutoin $v(a+b) \leq 1 \leq v(a) + v(b)$.

Kaikilla arvotuksilla $v : K \to \mathbb{R}$ on seuraavia ominaisuuksia:

(i) $v(1) = 1$, sillä $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1)^2$ ja $v(1) > 0$.

(ii) $v(-x) = v(x)$ kaikilla $x \in K$: Ensin saadaan $v(-x) = v(-1 \cdot x) = v(-1)v(x)$ ja ratkaistaan $v(-1)$. $v(-1)v(-1) = v(-1 \cdot (-1)) = v(1)$ joten $v(-1) = \pm 1$, mutta v ei saa negatiivisia arvoja.

(iii) $v(x^{-1}) = v(x)^{-1}$ kaikilla $x \neq 0$: Ensin saadaan $v(x^{-1})v(x) = v(x^{-1}x) = 1$. Jakamalla puolittain saadaan $v(x^{-1}) = \frac{1}{v(x)} = v(x)^{-1}$.

(iv) Jos $v(x) > 1$, niin $v(x^{-1}) < 1$: Kohdan (iii) nojalla $v(x^{-1}) = v(x)^{-1}$. Jos $v(x) > 1$, niin $v(x)^{-1} < 1$ [4, s. 2–3] [9, s. 15–16].

4.3 Arvotus järjestettyyn Abelin ryhmään

Edellä määritelty perinteinen arvotus ei ole riittävä Monskyn lauseen todistamista varten. Tarvittavan arvotuksen määrittelemiseksi tutkitaan ryhmäteoriaa.

Joukko G on Abelin eli kommutatiivinen ryhmä binäärioperaation $\cdot$ suhteen, jos kaikilla $a, b, c \in G$:

(A1) $ab \in G$;

(A2) $(ab)c = a(bc)$;

(A3) $ab = ba$;

(A4) joukossa G on ykkösalkio 1, eli $1a = a$;

(A5) alkiolla a on käänteisalkio $a^{-1} \in G$, eli $a^{-1}a = 1$ [11, s. 40].

Selvästi kunnat ovat Abelin ryhmiä operaation $+$ suhteen. Sekä reaaliluvut että rationaaliluvut varustettuna yhteenlaskulla ovat siis Abelin ryhmiä.

Positiivisten reaalilukujen joukko $\mathbb{R}_+$ taas on Abelin ryhmä kertolaskun suhteen, koska luvun 0 puuttumisen johdosta kaikilla alkioilla on käänteis- eli vasta-alkio. Abelin ryhmä $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ on erityisesti eräs *järjestetty Abelin ryhmä*, jotka määritellään seuraavasti:

Määritelmä 3. Abelin ryhmä $(G, \cdot)$ on järjestetty Abelin ryhmä totaalisen järjestysrelaation $<$ suhteen, jos kaikilla $a, b, c \in G$

$$a < b \implies ca < cb. \tag{20}$$

Totaalinen eli lineaarinen järjestys $<$ on relaatio, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) jos $a < b$ ja $b < c$, niin $a < c$;

(ii) tarkalleen yksi seuraavista on totta: $a < b$, $b < a$ tai $a = b$ [3, s. 62].

Merkintä $a \leq b$ tunnetusti tarkoittaa, että joko $a = b$ tai $a < b$.

Abelin ryhmät $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ ja $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ ovat kaikki järjestettyjä tavanoimaisen "pienempi kuin" -relaation $<$ suhteen.

Järjestettyihin Abelin ryhmiin G voidaan unionilla liittää sellainen alkio $0 \notin G$, että $0a = 0$ kaikilla $a \in G \cup \{0\}$ ja $0 < a$ kaikilla $a \in G$. Edellä mainituista järjestetyistä Abelin ryhmistä reaaliluku 0 voidaan liittää tällä tavoin vain ryhmään $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, sillä 0 sisältyy jo ryhmiin $(\mathbb{R}, +)$ ja $(\mathbb{Q}, +)$ [4, s. 3].

4.4 Epäarkhimedinen arvotus

Nyt voidaan määritellä *epäarkhimedinen eli ultrametrinen arvotus*:

Määritelmä 4. Olkoot $(K, +, *)$ kunta ja $(G, \cdot, <)$ järjestetty Abelin ryhmä. Funktio $v : K \to G \cup \{0\}$ on kunnan K epäarkhimedinen arvotus ryhmään G jos se toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $a, b \in K$:

(V1') $v(0) = 0$ ja $0 < v(a)$ jos $a \neq 0$;

(V2') $v(a * b) = v(a)v(b)$;

(V3') $v(a + b) \leq \max(v(a), v(b))$.

Esimerkki 5. Itseisarvo ei ole epäarkhimedinen, sillä esimerkiksi

$$|1 + 1| = 2 > 1 = |1|. \tag{21}$$

Toisin sanottuna itseisarvo on *arkhimedinen arvotus* [4, s. 2–3] [9, s. 15].

Epäarkhimedisilla arvotuksilla on seuraava ominaisuus, jota kutsutaan *dominointiperiaatteeksi* tai *tasakylkisen kolmion periaatteeksi*:

Lause 4. *Olkoon v epäarkhimedinen kunnan K arvotus. Jos $a_1, \ldots, a_n$ ovat sellaiset kunnan K alkiot, että $v(a_1) > v(a_i)$ kaikilla $i = 2, \ldots, n$, niin*

$$v\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) = v(a_1). \tag{22}$$

Todistus. Oletetaan, että $v(a_1) > v(a_i)$ kaikilla $i = 2, \ldots, n$. Käyttämällä ehtoa (V3') saadaan ketju

$$\begin{aligned}
v(a_2 + \cdots + a_n) &\leq \max(v(a_2), v(a_3 + \cdots + a_n)) \\
&\leq \max(v(a_2), v(a_3), v(a_4 + \cdots + a_n)) \\
&\vdots \\
&\leq \max_{i=2,\ldots,n} v(a_i) \\
&< v(a_1).
\end{aligned} \tag{23}$$

Näytetään sitten, että jos $v(a) < v(b)$, niin $v(a + b) = v(b)$: Ensinnäkin

$$v(b) = v(-a + a + b) \leq \max(v(a + b), v(a)). \tag{24}$$

Siis jos $v(a) < v(b)$, niin $v(b) \leq v(a + b)$.

Toisaalta tällöin myös

$$v(a + b) \leq \max(v(a), v(b)) = v(b). \tag{25}$$

Koska $v(b) \leq v(a+b)$ ja $v(a+b) \leq v(b)$, niin $v(a+b) = v(b)$.

Jos valitaan $a = a_2 + \cdots + a_n$ ja $b = a_1$, niin epäyhtälöstä (23) saadaan $v(a) < v(b)$ ja siis

$$v\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) = v(a+b) = v(b) = v(a_1). \tag{26}$$

□

Nimitys tasakylkisen kolmion periaate tulee ajatuksesta, että dominointiperiaatteen mukaan kaikki kunnan K "kolmiot" ovat tasakylkisiä epäarkhimedisen arvotuksen v suhteen. Erityisesti, jokaisella kolmiolla on aina vähintään kaksi "pisintä" sivua: Tehdään vastaoletus, että kolmiolla on tarkalleen yksi pisin sivu eli $v(a-b) > v(b-c)$ ja $v(a-b) > v(c-a)$, missä $a, b, c \in K$ ovat kolmion eri kärkipisteet. Tällöin

$$v(a-b) = v(a-b+b-c+c-a) = v(0) = 0 > v(b-c), \tag{27}$$

mikä on ristiriidassa ehdon $\forall x \in G : 0 < x$ kanssa. Kolmiolla on siis ainakin kaksi pisintä sivua [4, s. 3–4] [9, s. 19–20].

4.5 p-adinen arvotus

Tulevassa määritelmässä tarvitaan seuraavaa aputulosta:

Lemma 1. *Olkoot $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ mielivaltainen rationaaliluku ja $p \in \mathbb{P}$ mielivaltainen alkuluku. Jos*

$$q = p^n \cdot \frac{m_1}{m_2}, \tag{28}$$

missä $n \in \mathbb{Z}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ja $p \nmid m_1 m_2$, niin n on yksikäsitteinen.

Todistus. Olkoon $q > 0$ rationaaliluku. Luku q voidaan siis kirjoittaa muodossa $q = \frac{k_1}{k_2}$, missä $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+$ ja $syt(k_1, k_2) = 1$.

Aritmetiikan peruslauseen nojalla kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k on yksikäsitteinen *kanoninen esitys*

$$k = \prod_{i=1}^{j} {p_i}^{n_i}, \tag{29}$$

missä $p_1, p_2, \ldots, p_j$ ovat ne alkuluvut, joille $p_i \mid k$, ja $n_i \in \mathbb{Z}_+$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, j$ [12, s. 82].

Kirjoitetaan q nyt käyttäen lukujen k_1 ja k_2 kanonisia esityksiä:

$$q = \frac{k_1}{k_2} = \frac{{p_1}^{n_1}{p_2}^{n_2}\ldots{p_j}^{n_j}}{{p_1'}^{n_1'}{p_2'}^{n_2'}\ldots{p_{j'}'}^{n_{j'}'}}. \tag{30}$$

Jos $p \nmid k_1 k_2$, voidaan kirjoittaa

$$q = p^0 \frac{k_1}{k_2}, \tag{31}$$

eli $n = 0$ on yksikäsitteinen luvun n arvo (muilla luvun p potensseilla osoittaja tai nimittäjä on jaollinen luvulla p).

Jos $p \mid k_1 k_2$, joko $p \mid k_1$ tai $p \mid k_2$, sillä valittiin, että $syt(k_1, k_2) = 1$.

Jos $p \mid k_1$, niin $p = p_i$ jollakin $i = 1, 2, \ldots, j$. Siirtämällä p^{n_i} osamäärän eteen saadaan

$$q = p^{n_i} \frac{k_1 / p^{n_i}}{k_2}, \tag{32}$$

missä $n_i \in \mathbb{Z}_+$ ja $p \nmid k_1 k_2 / p^{n_i}$.

Jos $p \mid k_2$, niin $p = p'_i$ jollakin $i = 1, 2, \ldots, j'$. Siirtämällä p^{-n_i} osamäärän eteen saadaan

$$q = p^{-n_i} \frac{k_1}{k_2 / p^{n_i}}, \tag{33}$$

missä $-n_i \in \mathbb{Z}_-$ ja $p \nmid k_1 k_2 / p^{n_i}$.

Jos eksponentti n on yksikäsitteinen rationaaliluvulla $q > 0$, niin se on myös yksikäsitteinen rationaaliluvulla $-q$, sillä esityksessä

$$-q = p^n \cdot \frac{-m_1}{m_2} \tag{34}$$

$-m_1 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ ja $p \nmid -m_1$. Koska kaikki negatiiviset rationaaliluvut ovat muotoa $-q$, yksikäsitteisyys on osoitettu kaikille nollasta eroaville rationaaliluvuille. □

Nyt määritellään seuraava epäarkhimedinen arvotus:

Määritelmä 5. Kiinnitetään alkuluku p. Rationaalilukujen *p-adinen arvotus* on funktio $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, jolle

$$|q|_p = \begin{cases} 0, & \text{jos } q = 0 \\ p^{-n}, & \text{jos } q \neq 0, \end{cases}$$

missä $n \in \mathbb{Z}$ on se yksikäsitteinen kokonaisluku, että

$$q = p^n \cdot \frac{m_1}{m_2}, \tag{35}$$

missä $m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ ovat sellaisia kokonaislukuja, että $p \nmid m_1 m_2$ [4, s. 2] [9, s. 17].

Tässä p-adisen arvotuksen $|\cdot|_p$ nimi tulee siitä, että se on luonnollinen tapa antaa arvotus *p-adisille luvuille* $\mathbb{Q}_p$. p-adinen luku $q \in \mathbb{Q}_p$ on muotoa

$$q = \sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i, \tag{36}$$

missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ kaikilla i.

Tässä p-adisten lukujen arvotuksen arvo voidaan antaa seuraavasti:

$$|q|_p = \begin{cases} 0, & \text{jos } q = 0 \\ p^{-n}, & \text{jos } q \neq 0, \end{cases}$$

missä $n = \min\{i \geq k \mid a_i \neq 0\}$. Jos siis q kirjoitetaan muodossa

$$q = \ldots a_1 a_0, a_{-1} \ldots a_k, \tag{37}$$

niin n on oikeanpuoleisimman nollasta eroavan numeron indeksi [9, s. 35].

Todetaan uudestaan ja osoitetaan seuraava väite:

Lemma 2. $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *on epäarkhimedinen arvotus.*

Todistus. (V1') Suoraan määritelmästä saadaan $|0|_p = 0$. Jos $q \neq 0$, niin $|q|_p = p^{-n}$, missä $p \in \mathbb{Z}_+$ ja $n \in \mathbb{Z}$. Siis $p^{-n} \in \mathbb{R}_+$.

(V2') Jos $q = 0$ tai $r = 0$, niin $|qr|_p = |0|_p = |q|_p |r|_p$. Jos $q, r \neq 0$, niin luvulla q on esitys

$$q = p^n \cdot \frac{m_1}{m_2} \tag{38}$$

ja luvulla r esitys

$$r = p^{n'} \cdot \frac{m_1'}{m_2'}, \tag{39}$$

joissa $n, n' \in \mathbb{Z}$ ovat yksikäsitteiset, $m_1, m_2, m_1', m_2' \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, ja $p \nmid m_1 m_2$, $p \nmid m_1' m_2'$. Tällöin

$$|qr|_p = \left| p^{n+n'} \cdot \frac{m_1 m_1'}{m_2 m_2'} \right|_p = p^{-n-n'} \tag{40}$$

ja

$$|q|_p |r|_p = \left| p^n \cdot \frac{m_1}{m_2} \right|_p \left| p^{n'} \cdot \frac{m_1'}{m_2'} \right|_p = p^{-n} p^{-n'} = p^{-n-n'} = |qr|_p \,. \tag{41}$$

(V3') Jos $q = 0$, saadaan $\max(|q|_p, |r|_p) = \max(0, |r|_p) = |r|_p = |q + r|_p$. Symmetrisesti saadaan $\max(|q|_p, |r|_p) = \max(|q|_p, 0) = |q|_p = |q + r|_p$, kun $r = 0$. Jos $q, r \neq 0$, olkoon luvulla q esitys (38) ja luvulla r esitys (39). Koska $q + r = r + q$, riittää osoittaa ehdon toteutuminen tapauksessa $n > n'$:

$$\begin{aligned} |q + r|_p &= \left| \frac{p^n m_1}{m_2} + \frac{p^{n'} m_1'}{m_2'} \right|_p = \left| p^{n'} \right|_p \left| \frac{p^{n-n'} m_1 m_2' - m_1' m_2}{m_2 m_2'} \right|_p = p^{-n'} \cdot 1 = p^{-n'} \\ &\leq \max(p^{-n}, p^{-n'}) = \max(|q|_p, |r|_p), \end{aligned} \tag{42}$$

sillä osoittaja $p^{n-n'} m_1 m_2' - m_1' m_2$ on nollasta eroava kokonaisluku, joka ei ole jaollinen luvulla p [4, s. 2] [9, s. 17–18]. □

Viimeistä tulosta varten tarvitaan seuraavaa lausetta, jota ei todisteta:

Lause 5 (Chevalley)**.** *Olkoon v kunnan F epäarkhimedinen arvotus järjestettyyn renkaaseen $(R, +, \cdot)$, jonka ryhmä $(R, \cdot)$ on jaollinen. Tällöin v voidaan laajentaa kunnan K laajennuskuntaan L [4, s. 4–5].*

Rengas on kunta ilman kommutatiivisuus-ja käänteisalkioehtoja [11, s. 108]. Ei-negatiivisten reaalilukujen joukko $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ on siis rengas. Lisäksi $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \cdot)$ on jaollinen ryhmä eli kaikilla $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ $x = y^n$ jollakin $y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$ [8, s. 48].

Koska $\mathbb{R}$ on kunnan $\mathbb{Q}$ laajennuskunta, p-adinen arvotus voidaan siis laajentaa reaaliluvuille. Nyt seuraavan lauseen todistus on suoraviivainen:

Lause 6. *On olemassa sellainen kunnan $\mathbb{R}$ epäarkhimedinen arvotus v johonkin järjestettyyn Abelin ryhmään, että*

$$v\Big(\frac{1}{2}\Big) > 1. \tag{43}$$

Todistus. Jos v on reaaliluvuille laajennettu 2-adinen arvotus $|\cdot|_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, niin

$$\left|\frac{1}{2}\right|_2 = \left|2^{-1} \cdot \frac{1}{1}\right|_2 = 2^{-(-1)} = 2 > 1. \tag{44}$$

[4, s. 4] □

5 Monskyn lause

Nyt voidaan todistaa Monskyn lause:

Lause 7 (Monsky)**.** *Ei ole olemassa sellaista neliön ositusta parittomaksi määräksi kolmioita, että jokaisella kolmiolla on sama pinta-ala.*

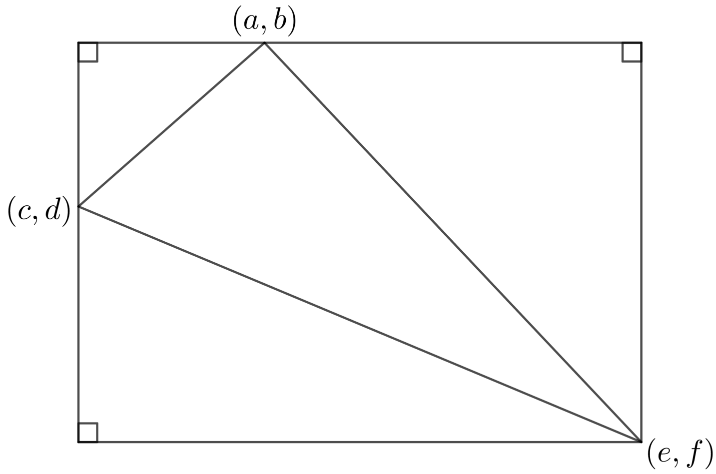
Todistus. Voidaan selvästi ensin todistaa lause yksikköneliölle $S = [0, 1]^2$ ja yleistää sitten tulos kaikille tason $\mathbb{R}^2$ neliöille koosta ja orientaatiosta riippumatta.

Olkoon $F : \mathbb{R}^2 \to \{s, v, p\}$ seuraava 2-adisen arvotuksen avulla määritetty väritys:

$$F(x, y) = \begin{cases} s, & \text{jos } |x|_2 < 1 \quad \text{ja } |y|_2 < 1 \\ v, & \text{jos } |x|_2 \geq |y|_2 \quad \text{ja } |x|_2 \geq 1 \\ p, & \text{jos } |x|_2 < |y|_2 \quad \text{ja } |y|_2 \geq 1 \end{cases}$$

Väritys F on hyvinmääritelty eli se määrää jokaiselle pisteelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ yksikäsitteisen värin: jos $|x|_2 < 1$ ja $|y|_2 < 1$, niin nähdään suoraan, että $F(x, y) = s$. Muutoin oletetaan, että $|x|_2 \geq 1$ tai $|y|_2 \geq 1$. Jos $|x|_2 \geq |y|_2$, niin $F(x, y) = v$. Jos taas $|x|_2 < |y|_2$, niin $F(x, y) = s$.

Lopuksi osoitetaan kaksi lemmaa väritykseen F liittyen:



Kuva 23: Esimerkki kolmiosta ja suorakulmiosta, joiden väliin jää kolme suorakulmaista kolmiota.

Lemma 3. *Jos tason $\mathbb{R}^2$ kolmion $\triangle = \triangle ABC$ kaikki kärkipisteet ovat erivärisiä värityksen F suhteen, niin kolmion $\triangle$ pinta-ala ei ole $\frac{1}{k}$, missä k on pariton kokonaisluku.*

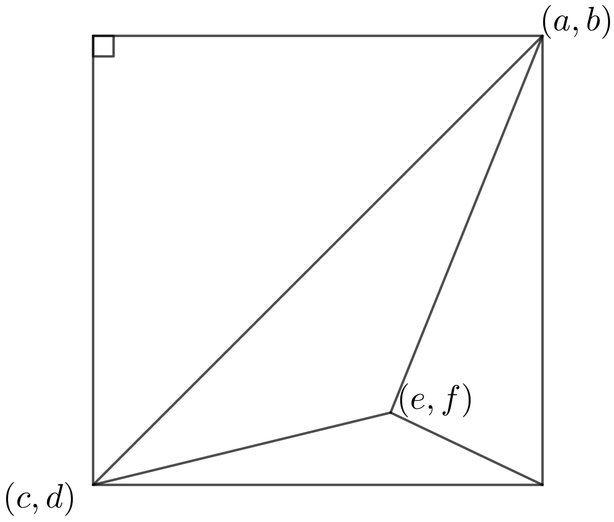
Todistus. Johdetaan kaava kolmion $\triangle$ pinta-alalle, kun kolmion kärkipisteiden koordinaatit ovat (a, b), (c, d) ja (e, f). Piirretään pienin sellainen suorakulmio, että sen sivut ovat akselien suuntaiset ja $\triangle$ on sen sisällä.

Useimmissa tapauksissa suorakulmion sisäinen ja kolmion ulkopuolinen alue jakautuu korkeintaan kolmeksi suorakulmaiseksi kolmioksi kuten kuvassa 23. Suorakulmaisten kolmioiden kateetit ovat akselien suuntaiset, joten niiden pituudet ja siten kolmioiden pinta-alat voidaan helposti laskea. Kolmion $\triangle$ pinta-ala saadaan vähentämällä suorakulmion pinta-alasta suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat (jos suorakulmaisia kolmioita on vähemmän kuin kolme, voidaan ajatella, että saadaan suorakulmaisia kolmioita, joiden pinta-ala on 0):

$$\begin{aligned} ala(\triangle) &= (e-c)(b-f) - \frac{1}{2}[(a-c)(b-d) + (e-c)(d-f) + (e-a)(b-f)] \\ &= eb - ef - cb + cf - \frac{1}{2}(-ad - cb + ed - ef + cf + eb - ef + af) \\ &= \frac{1}{2}(ad - af + cf - cb + eb - ed). \end{aligned} \tag{45}$$

Kolmion $\triangle$ ala voidaan siis kirjoittaa myös muodossa

$$ala(\triangle) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix} \tag{46}$$



Kuva 24: Esimerkki kolmion ja suorakulmion välisen alueen jakamisesta kolmioiksi.

Oletetaan nyt, että $\triangle$ on sellainen tylppäkulmainen kolmio, jonka tylppä kärki (e, f) on keskimmäinen kärki molemmilla akseleilla eli $e \neq \min(a, c, e)$, $e \neq \max(a, c, e)$, $f \neq \min(b, d, f)$ ja $f \neq \max(b, d, f)$. Nyt suorakulmion sisäiset ja kolmion $\triangle$ ulkopuoliset alueet eivät kaikki ole kolmioita. Voidaan kuitenkin jakaa suorakulmion sisäinen ja kolmion $\triangle$ ulkopuolinen alue kolmeksi kolmioksi kuten kuvassa 24. Kolmioiden korkeus ja kanta ovat taas akselien suuntaisia, joten saadaan laskettua kolmion $\triangle$ pinta-alaksi

$$\begin{aligned} ala(\triangle) &= (a-c)(b-d) - \frac{1}{2}[(a-c)(b-d) + (a-c)(f-d) + (a-e)(b-d)] \\ &= \frac{1}{2}(ad - af + cf - cb + eb - ed), \end{aligned} \tag{47}$$

mikä on sama kuin edellisessä tapauksessa.

Koska determinantin (46) kahden rivin paikkojen vaihtaminen voi korkeintaan muuttaa determinantin etumerkkiä, kolmion $\triangle$ pinta-ala on aina muotoa

$$ala(\triangle) = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix} \tag{48}$$

riippumatta siitä, missä järjestyksessä kolmion kärkipisteet valitaan.

Olkoot (x_v, y_v), (x_p, y_p), ja (x_s, y_s) kolmion $\triangle$ eriväriset kärkipisteet, joiden indeksit kertovat pisteen värin. Tutkitaan determinantin tulojen 2-adisia arvotuksia kolmion pinta-alan kaavassa

$$ala(\triangle) = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_v & y_v & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_s & y_s & 1 \end{vmatrix}. \tag{49}$$

Suurin arvotus on tulolla $x_v y_p$; tämä voidaan todeta vertaamalla sen arvotusta muiden tulojen arvotuksiin käyttämällä värityksen F sääntöjä ja arvotuksen ominaisuuksia:

- $|x_v|_2 |y_p|_2 > |x_v|_2 |y_s|_2$, sillä $|y_p|_2 \geq 1 > |y_s|_2$.
- $|x_v|_2 |y_p|_2 > |x_p|_2 |y_v|_2$, sillä $|x_v|_2 \geq |y_v|_2$ ja $|y_p|_2 > |x_p|_2$.
- $|x_v|_2 |y_p|_2 > |x_s|_2 |y_v|_2$, sillä $|x_v|_2 \geq |y_v|_2$ ja $|y_p|_2 \geq 1 > |x_s|_2$.
- $|x_v|_2 |y_p|_2 > |x_p|_2 |y_s|_2$, sillä $|x_v|_2 \geq 1 > |y_s|_2$ ja $|y_p|_2 > |x_p|_2$.
- $|x_v|_2 |y_p|_2 > |x_s|_2 |y_p|_2$, sillä $|x_v|_2 \geq 1 > |x_s|_2$.

Nyt dominointiperiaatetta käyttäen saadaan

$$|2 \cdot ala(\triangle)|_2 = |\pm x_v \cdot y_p|_2 = |x_v|_2 |y_p|_2 \geq 1. \tag{50}$$

Tehdään vastaoletus; $ala(\triangle) = \frac{1}{n}$, missä n on pariton. Tällöin

$$1 \leq |2 \cdot ala(\triangle)|_2 = \left|\frac{2}{n}\right|_2 = |2|_2 \left|\frac{1}{n}\right|_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, \tag{51}$$

mikä on ristiriita. $\square$

Lopuksi pitää osoittaa, että Spernerin lemmaa voidaan käyttää:

Lemma 4. *Väritys F toteuttaa lauseen 3 ehdot.*

Todistus. Käydään läpi lemman kolme ehtoa:

- Tehdään vastaoletus, että jollakin tason $\mathbb{R}^2$ suoralla on eriväriset pisteet P_s, P_v ja P_p. Voidaan ajatella, että pisteet muodostavat kolmion $\triangle$, jonka pinta-ala on 0. Lemman 3 nojalla

  $$1 \leq |2 \cdot ala(\triangle)|_2 = |2 \cdot 0|_2 = 0, \tag{52}$$

  mikä on ristiriita.
- Koska $|0|_2 = 0$ ja $|1|_2 = 1$, saadaan pisteille $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 0)$ eri värit $F(0, 0) = s$, $F(0, 1) = p$ ja $F(1, 0) = v$.
- $F(1, 1) = v$, joten $F(0, 0) \neq F(1, 1)$.

$\square$

Oletetaan nyt, että värityksen F mukaan väritetty yksikköneliö $[0,1]^2$ on ositettu k kolmioksi, joilla on yhtäsuuri pinta-ala ja $k \geq 3$ on pariton. Koska yksikköneliön pinta-ala on 1, jokaisen kolmion pinta-ala on $\frac{1}{k}$.

Spernerin lemman 3 nojalla ainakin yhdellä osituksen kolmioista on erivärisen kärkipisteet. Lemman 3 nojalla tällaisen kolmion pinta-ala ei voi olla $\frac{1}{k}$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että jokaisen osituksen kolmion pinta-ala on $\frac{1}{k}$ [4, s. 8] [10]. $\square$

Todistuksesta huomataan, että ilman lausetta 5 väite tulee todistettua tapauksille, joissa kolmioiden kärkipisteillä on rationaaliset koordinaatit. Olisi epäintuitiivista mutta mahdollista, että väite ei olisi voimassa irrationaalisilla koordinaateilla.

Monsky itse asiassa todisti samalla seuraavan vahvemman tuloksen: Jos yksikköneliö ositetaan m kolmioksi, joiden pinta-alat ovat $A_1, A_2, \ldots, A_m$, niin on olemassa sellainen kokonaislukukertoiminen polynomi $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, että $f(A_i) = \frac{1}{2}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, m$ [10].

Monskyn lause seuraa edellisestä tuloksesta: Jos m on pariton ja $A_i = \frac{1}{m}$ kaikilla i, niin kaikilla $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ $p(\frac{1}{m}) = \frac{n}{m^k}$, missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $k \in \mathbb{N}$. Koska m on pariton, lukua $\frac{n}{m^k}$ ei voida supistaa muotoon $\frac{1}{2}$.

Viitteet

[1] J. Bidwell: *Archimedes and Pi—Revisited*, School Science and Mathematics 94 (3), ProQuest, 1994, s. 127–128.

[2] I. Diaz, A. Supianto, H. Tolle: *Log Data Analysis of Player Behavior in Tangram Puzzle Learning Game*, International Journal of Interactive Mobile Technologies 12 (8), 2018, s. 123–129.

[3] H. Enderton: *Elements of Set Theory*, Elsevier Science & Technology, San Diego, 1977.

[4] O. Flynn-Connolly: *One square and an odd number of triangles*, "Proofs from the BOOK" seminar, Trinity College Dublin, 2018. https://www.maths.tcd.ie/~vdots/teaching/files/MA341C-1819/341CR6-2.pdf

[5] T. Harju: *Geometria*, Turun yliopisto, 2015.

[6] W. Jackson: *Wallace's Theorem Concerning Plane Polygons of the Same Area*, American Journal of Mathematics 34 (4), The John Hopkins University Press, 1912, s. 383–390.

[7] J. Kari: *Tilings and Patterns*, Turun yliopisto, 2019.

[8] P. Krylov, A. Tuganbaev: *Modules over Discrete Valuation Rings*, De Gruyter, Berliini, 2018.

[9] T. Metsänkylä: *p-adiset luvut*, Turun yliopisto, 2004.

[10] P. Monsky: *On Dividing a Square Into Triangles*, The American Mathematical Monthly 77 (2), Mathematical Association of America, 1970, s. 161–164.

[11] D. Robinson: *An Introduction to Abstract Algebra*, Walter de Gruyter, New York, 2003.

[12] J. Tattersall: *Elementary Number Theory in Nine Chapters*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.