TURUN YLIOPISTO

Pythagoraan kolmikot

Tara Toivola

LuK-tutkielma
Huhtikuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastaja:
FM, DI Mikko Jaskari

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LuK-tutkielma
Pääaine: Matematiikka
Tekijä: Tara Toivola
Otsikko: Pythagoraan kolmikot
Ohjaaja: FM, DI Mikko Jaskari
Sivumäärä: 10 sivua
Aika: Huhtikuu 2026

Pythagoraan kolmikko on kolmen positiivisen kokonaisluvun joukko, joka vastaa suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia Pythagoraan lauseen mukaisesti. Tässä tutkielmassa johdetaan neljä eri kaavaa Pythagoraan kolmikoiden generoimiselle. Tämän jälkeen tarkastellaan Pythagoraan kolmikoiden taustalla olevia lukuteoreettisia rakenteita, erityisesti Gaussin kokonaislukujen ja Fermat'n kahden neliön lauseen kautta.

Asiasanat: Pythagoraan kolmikko, kahden neliön summa, Gaussin kokonaisluvut, alkuluvut, lukuteoria

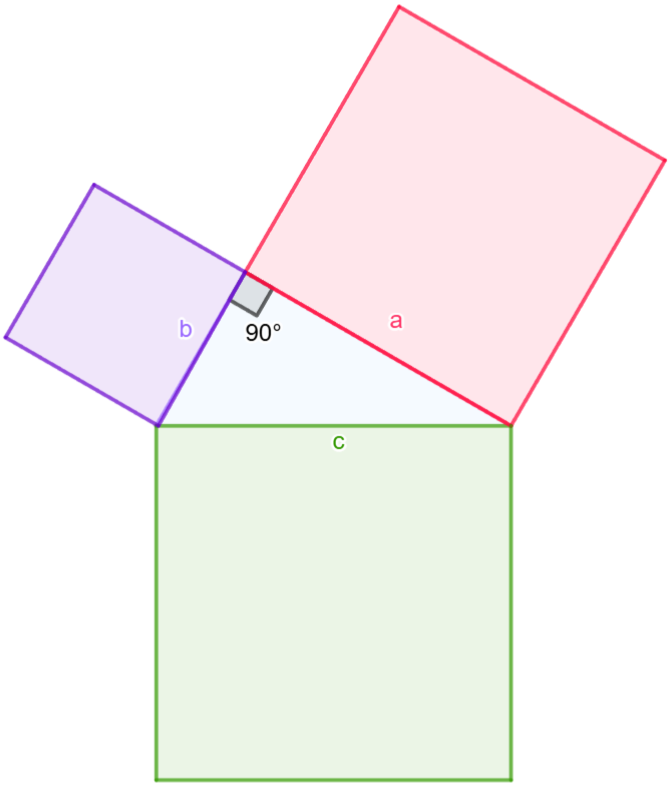
Sisällys

1 Johdanto

Pythagoraan lause on tuttu monelle jo peruskoulusta. Lauseen mukaan jokaisessa suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusan c neliö on yhtä suuri kuin kateettien a ja b neliöiden summa. Tämä kirjoitetaan muodossa $a^2+b^2=c^2$. Pythagoraan lauseelle on esitetty useita erilaisia todistuksia. Myös lauseen käänteislauseelle on esitetty todistus: Eukleides (n. 300 eaa) todisti, että kolmio, jonka sivut a, b ja c toteuttavat yhtälön

$$a^2+b^2=c^2,$$

on oltava suorakulmainen kolmio.



Kuva 1: Pythagoraan lauseen havainnollistus.

Positiiviset kokonaisluvut a, b ja c joille pätee $a^2+b^2=c^2$ kutsutaan Pythagoraan kolmikoksi. Pythagoraan kolmikoiden etsiminen, on siis sama asia kuin sellaisten suorakulmaisten kolmioiden etsiminen, joiden sivujen pituudet ovat kokonaislukuja. Pienin mahdollinen Pythagoraan kolmikko hyponetuusan pituuden suhteen on (3,4,5), sillä

$$3^2+4^2=5^2=25.$$

Tässä tutkielmassa tutkitaan Pythagoraan kolmikoita generoivia kaavoja ja niiden ominaisuuksia. Luvussa 2 todistetaan Eukleideen generoiva kaava, Pythagoraan kaava, Platonin kaava sekä Fibonaccin kaava. Tutkielman toisessa osassa, luvussa 3, tarkastellaan Pythagoraan kolmikoiden taustalla olevia lukuteoreettisia rakenteita. Keskeisessä roolissa ovat Gaussin kokonaisluvut sekä Fermat'n kahden neliön lause.

Työssä päälähteenä on lähde [6], jonka pohjalta on Eukleideen todistus, Gaussin kokonaisluvut sekä Fermat'n kahden neliön lause. Eukleideen generoivaa kaavaa on tarkasteltu myös lähteestä [7]. Fibonaccin kaavaa on tutkittu lähteessä [2]. Sekä Pythagoraan että Platonin generoivia kaavoja on tarkasteltu lähteen [1] pohjalta ja luku 3 on rakennettu lähteen [4] avulla.

2 Kolmikoita generoivia kaavoja

2.1 Eukleideen kaava

Eukleideen kaavalla voidaan muodostaa Pythagoraan kolmikoita mistä tahansa kahdesta positiivisesta kokonaisluvusta u ja v. Eukleideen kaavan mukaan kaikki primitiiviset Pythagoraan kolmikot (a, b, c), joissa b on parillinen, saadaan yhtälöstä

$$a = u^2 - v^2, \; b = 2uv, \; c = u^2 + v^2,$$

missä $u > v$ ja u ja v ovat keskenään suhteellisia alkulukuja. Primitiivinen kolmikko tarkoittaa sitä, että luvut ovat keskenään suhteellisia alkulukuja eli niiden suurin yhteinen tekijä on 1. Siis $\mathrm{syt}(a, b, c) = 1$. Tärkeä ominaisuus on se, että toinen luvuista u tai v on parillinen ja toinen pariton.

Lauseessa 1 todistetaan, että Eukleideen kaava generoi kaikki primitiiviset Pythagoraan kolmikot. Kaava ei kuitenkaan tuota kaikkia olemassa olevia kolmikoita [7]. Esimerkiksi kolmikkoa $(9, 12, 15)$ ei voida muodostaa Eukleideen menetelmällä, sillä se ei ole primitiivinen. Jotta myös nämä jäljelle jäävät, ei-primitiiviset, kolmikot voidaan muodostaa, täytyy kaavaan lisätä jokin kokonaisluku k. Tällöin kaava

$$a = k(u^2 - v^2), \; b = k(2uv), \; c = k(u^2 + v^2),$$

missä u, v ja k ovat positiivisia kokonaislukuja, $u > v$, sekä u ja v ovat keskenään suhteellisia ja eri pariteettia, tuottaa yksiselitteisesti kaikki Pythagoraan kolmikot.

Lause 1. *Yhtälön $a^2 + b^2 = c^2$, ratkaisu, joka toteuttaa ehdot*

$$a, b, c > 0, \; \mathrm{syt}(a, b) = 1 \textit{ ja } 2 \mid b,$$

on

$$a = u^2 - v^2, \; b = 2uv, \; c = u^2 + v^2,$$

missä u, v ovat kokonaislukuja ja eri pariteettia sekä $\mathrm{syt}(u, v) = 1$ *ja* $u > v > 0$.

Todistus. Ks. [6, lause 225] Oletetaan, että (a, b, c) on Pythagoraan kolmikko siten, että

$$a^2 + b^2 = c^2, \; a, b, c > 0, \; \mathrm{syt}(a, b) = 1 \text{ ja } 2 \mid b.$$

Koska $2 \mid b$ ja $\mathrm{syt}(a, b) = 1$, niin a ja c ovat parittomia ja $\mathrm{syt}(a, c) = 1$. Tällöin luvut

$$\frac{c + a}{2} \text{ ja } \frac{c - a}{2}$$

ovat kokonaislukuja ja

$$\mathrm{syt}\left(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}\right) = 1.$$

Yhtälöstä $a^2 + b^2 = c^2$ seuraa, että

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+a}{2}\right)\left(\frac{c-a}{2}\right).$$

Koska oikean puolen tekijät ovat keskenään suhteellisia alkulukuja, niiden täytyy molempien olla neliöitä. Siis

$$\frac{c+a}{2} = u^2,\ \frac{c-a}{2} = v^2,$$

missä

$$u > 0,\ v > 0,\ u > v,\ \mathrm{syt}(u, v) = 1.$$

Lisäksi

$$u + v \equiv u^2 + v^2 = c \equiv 1 \pmod 2,$$

eli u ja v ovat eri pariteettia. Näin saatiin luvun a muodoksi $u^2 - v^2$, luvun b muodoksi $2uv$ ja luvun c muodoksi $u^2 + v^2$.

Seuraavaksi oletetaan, että u ja v ovat positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat keskenään suhteellisia alkulukuja ja joilla on eri pariteetti. Tällöin

$$a^2 + b^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2 = c^2,$$

ja

$$a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ 2 \mid b.$$

Jos $(a, b) = d$, niin $d \mid c$, ja siis

$$d \mid a = u^2 - v^2,\ d \mid c = u^2 + v^2.$$

Koska $c + a$ sekä $c - a$ ovat molemmat jaollisia luvulla d, tästä seuraa

$$d \mid 2u^2,\ d \mid 2v^2.$$

Koska $\mathrm{syt}(u, v) = 1$, täytyy luvun d olla 1 tai 2 ja jälkimmäinen vaihtoehto suljetaan pois, koska a on pariton. Siis $\mathrm{syt}(a, b) = 1$. Lopuksi, jos a ja c ovat annettuja, niin u^2, v^2 ja siten myös u ja v, joten jokaista primitiivistä Pythagoraan kolmikkoa (a, b, c) kohden on olemassa yksikäsitteinen pari (u, v).

Näin on osoitettu, että kaikki primitiiviset Pythagoraan kolmikot, joissa b on parillinen, ovat täsmälleen muotoa

$$a = u^2 - v^2,\ b = 2uv,\ c = u^2 + v^2.$$

$\square$

2.2 Pythagoraan kaava

Seuraavaksi esitetään Pythagoraan kaava Pythagoraan kolmikoiden generoimiseksi.

Lause 2. *Jos $n \geq 3$ pariton kokonaisluku ja määritetään*

$$a = n,$$

$$b = \frac{n^2 - 1}{2},$$

$$c = \frac{n^2 + 1}{2},$$

niin (a, b, c) on Pythagoraan kolmikko.

Todistus. Olkoot $a = n,\ b = \frac{n^2-1}{2},\ c = \frac{n^2+1}{2}$.
Lasketaan

$$a^2 + b^2 = n^2 + \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2$$

$$= n^2 + \frac{n^4 - 2n^2 + 1}{4} = \frac{4n^2 + n^4 - 2n^2 + 1}{4}$$

$$= \frac{n^4 + 2n^2 + 1}{4} = \frac{(n^2 + 1)^2}{4} = \left(\frac{n^2 + 1}{2}\right)^2 = c^2$$

Siis

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

On kuitenkin huomioitava, että Pythagoraan menetelmä ei muodosta kaikkia Pythagoraan kolmikoita, vaan se on erikoistapaus Eukleideen kaavasta. Eukleideen kaavassa u ja v ovat mielivaltaisia kokonaislukuja, joille pätee $u > v$ ja $\mathrm{syt}(u, v) = 1$. Pythagoraan kaavassa $a \geq 3$ on pariton kokonaisluku. Lisäksi $c - b$ on aina 1, sillä $\frac{n^2+1}{2} - \frac{n^2-1}{2} = 1$. Kaava tuottaa siis vain kolmikoita, joissa hypotenuusan ja pidemmän kateetin pituuksien erotus on 1.

2.3 Platonin kaava

Platonin generoiva kaava Pythagoraan kolmikoille on vastaavantapainen kuin Pythagoraan, mutta parametrin n on oltava parillinen eikä pariton.

Lause 3. *Jos $n \geq 4$ parillinen kokonaisluku ja määritetään*

$$a = n,$$

$$b = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1,$$

$$c = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1,$$

niin (a, b, c) on Pythagoraan kolmikko.

Todistus. Olkoot $a = n$, $b = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$ ja $c = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$. Lasketaan

$$a^2 + b^2 = n^2 + \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1\right)^2 = n^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1.$$

Kirjoitetaan n^2 muodossa $4\left(\frac{n}{2}\right)^2$ ja sijoitetaan se yhtälöön.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1\right)^2 = c^2, \end{aligned}$$

jolloin

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

Myöskään Platonin kaava ei tuota kaikkia Pythagoraan kolmikoita vastaavantapaisista syistä kuin Pythagorankaan kaava. Platonin kaavassa $c - b = \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1\right) - \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1\right) = 2$, jolloin Platonin kaavassa hypotenuusan c ja toisen kateetin b pituuksien erotuksen tulee aina olla 2.

2.4 Fibonaccin kaava

Pythagoraan kolmikoilla on mielenkiintoinen yhteys Fibonaccin lukujonon lukuihin:

$$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, ..., f_n, ...$$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., f_{n-2} + f_{n-1}, ...$$

joissa jokainen termi on kahden edellisen termin summa. Fibonaccin luvuista voidaan kolmannesta termistä lähtien muodostaa Pythagoraan kolmikoita.

Lause 4. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin Fibonaccin luvuista f_n, f_{n+1}, f_{n+2} ja f_{n+3} saadaan Pythagoraan kolmikko $x^2 + y^2 = z^2$, kun*

$$x = f_n f_{n+3}$$

$$y = 2 f_{n+1} f_{n+2}$$

$$z = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2.$$

Todistus. Olkoon neljä peräkkäistä Fibonaccin lukua

$$a,\ b,\ a+b,\ a+2b.$$

Myös Fibonaccin kaava on Eukleideen kaavan erikoistapaus. Eukleideen kaavan mukaan kateetit ja hypotenuusa ovat

$$2uv,\ u^2 - v^2,\ u^2 + v^2.$$

Tällöin voidaan valita

$$u = a + b \text{ ja } v = b.$$

Nyt vastaavan suorakulmaisen kolmion kateetit ja hypotenuusa voidaan esittää muuttujien a ja b avulla. Ensimmäinen kateetti on $a(a + 2b) = a^2 + 2ab$ ja toinen $2b(a + b) = 2ab + 2b^2$. Tällöin

$$\begin{aligned}(a^2 + 2ab)^2 + (2ab + 2b^2)^2 &= a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2 + 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 8a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\ &= (a^2 + 2ab + 2b^2)^2.\end{aligned}$$

Siis hypotenuusa on

$$a^2 + 2ab + 2b^2.$$

Hypotenuusan lauseke voidaan esittää myös muodossa

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab + 2b^2 &= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 \\ &= (a + b)^2 + b^2 \\ &= b^2 + (a + b)^2.\end{aligned}$$

Koska valitut luvut ovat Fibonaccin lukujonon peräkkäisiä termejä $a = f_n$, $b = f_{n+1}$, $a + b = f_{n+2}$, $a + 2b = f_{n+3}$, saadaan

$$\begin{aligned}a(a + 2b) &= f_n f_{n+3} \\ 2b(a + b) &= 2f_{n+1} f_{n+2} \\ b^2 + (a + b)^2 &= f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 = f_{2n+3}^2,\end{aligned}$$

niin tulos voidaan esittää

$$(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 = (f_{2n+3})^2.$$

$\square$

Esimerkki 1. Valitaan Fibonaccin luvut, joille $a < b$. Valitaan esimerkiksi $a = f_6 = 5$ ja $b = f_7 = 8$. Nämä luvut voidaan muuntaa Eukleideen kaavan mukaisiksi valitsemalla

$$u = a + b,\ v = b, \text{ jolloin } u = 13 \text{ ja } v = 8.$$

Tällöin ensimmäiseksi kateetiksi saadaan

$$2uv = 2 \times 13 \times 8 = 208,$$

toiseksi kateetiksi

$$u^2 - v^2 = 13^2 - 8^2 = 105$$

ja lopulta hypotenuusaksi

$$u^2 + v^2 = 13^2 + 8^2 = 233.$$

Siis

$$105^2 + 208^2 = 233^2 = 54289.$$

3 Kahden neliön summa

3.1 Gaussin kokonaisluvut

Lukuteoriassa Gaussin kokonaisluku on kompleksiluku, jonka reaali- ja imaginääriosat ovat molemmat kokonaislukuja.

Määritelmä 1. Gaussin kokonaisluvut ovat joukko $\mathbb{Z}[i] = a + b,\ a, b \in \mathbb{Z}$, missä $i^2 = -1$, eli ne ovat kompleksilukuja, joiden reaali- ja imaginääriosat ovat kokonaislukuja.

Tutkielmassa oletetaan tiedetyksi, että $\mathbb{Z}[i]$ on UFD "*unique factorization domain*"eli kaikki Gaussin kokonaisluvut voidaan jakaa yksikäsitteisesti tekijöihin, kun tulon tekijöiden järjestyksellä tai yksiköillä kertomisella ei ole merkitystä. Yksikköjä Gaussin kokonaisluvuissa ovat 1, -1, i ja $-i$.

Määritelmä 2. Olkoon $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$. Sen normi määritellään tulona

$$N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Esimerkki 2. $N(1 + 4i)$ normi on:

$$N(1 + 4i) = 1^2 + 4^2 = 17$$

Lause 5. *Normi on multiplikatiivinen, eli jos α ja β kuuluvat joukkoon $\mathbb{Z}[i]$, niin*

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta).$$

Todistus. Kirjoitetaan $\alpha = a + bi$ ja $\beta = c + di$. Tällöin

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di)$$
$$= ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac = (ad)i + (bc)i - bd$$
$$(ac - bd) + (ad + bc)i,$$

jolloin

$$N(\alpha\beta) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$
$$(ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2$$
$$= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2$$

ja $N(\alpha)N(\beta)$

$$N\alpha)N(\beta) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$
$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$
$$= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2,$$

jolloin $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$. $\square$

3.2 Gaussin lukujen alkutekijähajotelma

Parittoman alkuluvun jakojäännös luvulla 4 jaettaessa on joko 1 tai 3. Näistä vain ensimmäistä tyyppiä oleva pariton alkuluku voidaan esittää kahden neliön summana.

Lause 6. *Jos pariton alkuluku p voidaan kirjoittaa kahden kokonaisluvun neliön summana, niin $p \equiv 1 \pmod 4$.*

Todistus. Ks. [3, lause 3(i)] Oletetaan, että $p = a^2 + b^2$. Kun p on pariton, niin joko a tai b on oltava pariton, sillä muuten neliöiden summa olisi parillinen. Valitaan, että a on pariton ja asetetaan $a = 2m+1$ ja $b = 2n$, kun m ja n ovat kokonaislukuja. Tällöin saamme

$$p = a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 \equiv 1 \pmod 4$$

□

Fermat'n kahden neliön lause

Tässä osassa tarkastellaan Fermat'n kahden neliön lausetta. Lauseen mukaan pariton alkuluku voidaan esittää kahden kokonaisluvun neliön summana jos ja vain jos jakojäännös on 1 modulo 4.

Lemma 1. *Eulerin kriteerin mukaan, jos p on pariton alkuluku, niin on olemassa luku m, jolle*

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \begin{cases} 1 \pmod p, & \textit{jos } \exists m \in \mathbb{Z} : m^2 \equiv a \pmod p, \\ -1 \pmod p, & \textit{jos } \forall m \in \mathbb{Z} : m^2 \not\equiv a \pmod p. \end{cases}$$

Todistus. Ks. [5, s. 56-57] □

Lause 7. *Pariton alkuluku p voidaan esittää kahden kokonaisluvun neliön summana jos ja vain jos*

$$p \equiv 1 \pmod 4.$$

Todistus. Lauseen 6 mukaan, jos pariton alkuluku p voidaan esittää kahden kokonaisluvun neliön summana, niin $p \equiv 1 \pmod 4$. Käänteisen suunnan todistamiseksi oletetaan, että

$$p \equiv 1 \pmod 4.$$

Tällöin $\frac{p-1}{2}$ on parillinen, joten

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p.$$

Eulerin kriteerin eli lemman 1, nojalla tästä seuraa, että p jakaa luvun $m^2 + 1$. Gaussin kokonaislukujen renkaassa $\mathbb{Z}[i]$ pätee $m^2 + 1 = (m+i)(m-i)$, joten $p \mid (m+i)(m-i)$. Koska $\mathbb{Z}[i]$ on UFD, p on alkuluku ja p ei jaa lukuja m eikä 1, niin tällöin p ei voi olla alkuluku renkaassa $\mathbb{Z}[i]$.

Soveltamalla normifunktiota eli lauseesta 5 saadaan $N(p) = p^2$. Koska p on alkuluku kokonaislukujen joukossa, niin tästä ja normifunktion multiplikatiivisuudesta seuraa, että luvulla p voi olla korkeintaan kaksi alkutekijää renkaassa $\mathbb{Z}[i]$. Tällöin

$$p = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

□

Fermat'n kahden neliön lause antaa näkökulman siihen, miten Pythagoraan kolmikoissa hypotenuusa c voi määräytytä. Seuraavassa lauseessa esitetään hypotenuusan c rakenteeseen liittyvä ehto.

Lause 8. *Olkoon c positiivinen kokonaisluku. Pythagoraan kolmikko (a, b, c), jossa a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, on olemassa jos ja vain jos luku c on jaollinen alkuluvulla p, jolle on voimassa $p \equiv 1 \pmod 4$.*

Todistus. Oletetaan, että $c = pk$, jossa k on jokin positiivinen kokonaisluku ja $p \equiv 1 \pmod 4$. Tällöin Fermat'n lauseen mukaan voidaan kirjoittaa

$$p = x^2 + y^2$$

joillekin x, y joille on voimassa $x, y > 0$ ja $x \neq y$. Koska kahden neliön summan neliö voidaan esittää kahden neliön summana, voidaan kirjoittaa

$$p^2 = n^2 + m^2$$

jossa $n = x^2 - y^2$ ja $m = 2xy$. Tästä seuraa, että

$$c^2 = p^2k^2 = (n^2 + m^2)k^2 = (kn)^2 + (km)^2.$$

Siis on olemassa kokonaisluvut $a = kn$ ja $b = km$, joille pätee

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

joten (a, b, c) on Pythagoraan kolmikko.

Jos luvun c alkutekijähajotelmassa ei esiinny yhtään alkulukua $p \equiv 1 \pmod 4$, ei tällaista Pythagoraan kolmikkoa ole olemassa. Tällöin luvun c^2 kanoninessa alkutekijähajotelmassa esiintyy ainoastaan luvun 2 parillisia potensseja, joita ei voi esittää kahden positiivisen kokonaisluvun neliön summana, sekä muotoa $q \equiv 3 \pmod 4$ olevien alkulukujen parillisia potensseja, joita ei myöskään voi Fermat'n kahden neliön lauseen 7 mukaan esittää kahden positiivisen kokonaisluvun neliön summana. Kun summausjärjestystä ei huomioida, niin ainoa mahdollinen esitys on siis muotoa $c^2 = 0^2 + c^2$, jossa toinen termeistä on nolla. Tämä ei kuitenkaan kelpaa Pythagoraan kolmikoksi, koska kaikkien kateettien pituuksien tulee olla positiivisia. □

Viitteet

[1] University of Alberta (2012). *Notes on Pythagorean Triples.* MATH 324: Elementary Number Theory. https://www.math.ualberta.ca/~isaac/math324/s12/pythag_triples.pdf (luettu 29.3.2026)

[2] Boulger, W. (1989). Pythagoras Meets Fibonacci. *The Mathematics Teacher*, 82(4), 277–282. https://www.jstor.org/stable/27966240 (luettu 31.3.2026)

[3] Butler, L. A. *A Classification of Gaussian Primes.* https://people.maths.bris.ac.uk/~malab/PDFs/2ndYearEssay.pdf (luettu 4.3.2026)

[4] Conrad, K. *The Gaussian Integers.* https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/Zinotes.pdf (luettu 4.3.2026)

[5] Davenport, H. (2008) *The Higher Arithmetic: An Introduction to the Theory of Numbers*, Cambridge University Press

[6] Hardy, G. H. & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers.* 6th ed. Oxford: Oxford University Press.

[7] Overmars A., Ntogramatzidis, L. & Venkatraman, S. (2019). A new approach to generate all Pythagorean triples. AIMS Mathematics, 4(2), 242–253. https://doi.org/10.3934/math.2019.2.242 (luettu 4.3.2026)