Optimaaliset kovariantit diskreetit suureet kvanttimekaniikassa

Pro gradu -tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikan ja tähtitieteen laitos
Teoreettinen Fysiikka
Heinäkuu 2019
LuK Wiljami Sillanpää
Tarkastajat:
Juha-Pekka Pellonpää
Teiko Heinosaari

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan ja tähtitieteen laitos

Sillanpää, Wiljami: Optimaaliset kovariantit diskreetit suureet kvanttimekaniikassa

Pro gradu -tutkielma, 75 sivua
Teoreettinen Fysiikka
Heinäkuu 2019

Kvanttimekaniikassa mittaustapahtuma on monimutkaisempi käsite kuin klassisessa fysiikassa, sillä tutkittavaan systeemiin tehtävät mittaukset täytyy mallintaa systeemin ja mittalaitteen välisenä vuorovaikutuksena. Todennäköisyysluonteensa vuoksi kvanttimekaniikassa erilaiset mitattavat suureet voivat vaikuttaa systeemin tilaan hyvin eri tavoilla. Suure voi esimerkiksi määrätä täysin systeemin tilan mittauksen jälkeen tai ennen mittausta. Tällaisten eroavaisuuksien johdosta suureille on määritelty erilaisia optimaalisuuskriteerejä, joiden avulla voidaan löytää kulloiseenkin mittaustilanteeseen parhaiten sopivia suureita. Kovarianssi puolestaan varmistaa, että positiivisina operaattorimittoina kuvattavat suureet muuntuvat systeemin symmetriamuunnoksissa samalla tavoin kuin mittaustulokset.

Tutkielmassa tarkastellaan diskreettien kvanttimekaanisten suureiden optimaalisuuskriteerejä ja kovarianssia sekä optimaalisten kovarianttien diskreettien suureiden olemassaoloa ja rakennetta.

Sisältö

Johdanto

Fysiikan voidaan viime kädessä sanoa olevan tieteenala, joka tutkii mitattavissa olevia asioita. Kvanttimekaniikassa mittaustapahtuman käsite on aina ollut ongelmallinen, sillä mittauksia täytyy käsitellä tutkittavan systeemin ja mittalaitteen välisenä vuorovaikutuksena [1, luku 10]. Systeemin tilojen ja mitattavien suureiden ominaisuuksia sekä näiden välisiä vuorovaikutuksia tutkiva kvanttimekaniikan osa-alue tunnetaan mittausteoriana.

Tutkielmassa tarkastellaan erästä mittausteorian osa-aluetta, optimaalisia kovariantteja suureita. Fysiikassa kovarianssilla tarkoitetaan fysiikan lakien tietynlaista muuntumista erilaisissa koordinaattimuunnoksissa. Käytännössä se tarkoittaa, että fysiikan lait ovat samanlaiset kaikille havaitsijoille, eikä mikään havaitsija ole erityisasemassa muihin nähden. Matemaattisessa mielessä se luo lisärajoitteita teorioiden teknisille yksityiskohdille. Mittausteoriassa kovarianssilla tarkoitetaan nimenomaan suureiden tietynlaista muuntumista systeemin symmetriaryhmän muunnoksissa. Koska suureita kuvataan kvanttimekaniikassa operaattoriarvoisina mittoina, täytyy kovarianssiehdot puolestaan ilmaista ryhmien esitysteorian ja operaattoriteorian avulla.

Käytännössä suoritettavien mittausten ja kokeiden kannalta satunnaisten kovarianttien suureiden rakentaminen ei kuitenkaan ole kovin mielekästä, sillä yleensä yhdet suureet sopivan tiettyyn tehtävään paremmin kuin toiset. Esimerkiksi suureet, joiden avulla systeemi voidaan muuntaa haluttuun tilaan eroavat matemaattiselta rakeenteeltaan huomattavasti suureista, joilla systeemin tuntematon tila voidaan määrittää kokonaan. Lisäksi tietyt suureet voidaan muodostaa muita suureita ”sekoittamalla”. Tällaisten ominaisuuksien ja eroavaisuuksien perusteella suureille on määritelty erilaisia optimaalisuuskriteerejä [2], joita toteuttavat suureet ovat teorian ja käytännön kannalta kiinnostavia tutkimuskohteita. Tässä tutkielmassa rajoitutaan diskreetteihin ja usein äärellisiin optimaalisiin suureisiin, joiden kovarianssia erilaisten symmetriaryhmien suhteen tarkastellaan. Kaikkien näiden liikkuvien osien sovittaminen yhteen vaaditulla tavalla ei ole itsestään selvä toimenpide, kuten myöhemmin tullaan näkemään.

Tutkielmassa käydään aluksi läpi fysikaalinen ja matemaattinen teoria, jota optimaalisten kovarianttien suureiden yhteydessä tarvitaan. Luvuissa 1 ja 2 esitellään kvanttimekaniikan nykyformalismin peruskäsitteitä ja määritelmiä. Lukijalta odotetaan perustietoja lineaarialgebrasta ja operaattoriteoriasta sekä Hilbertin avaruuksista. Luvussa 3 esitellään erilaisia kvanttimekaanisten suureiden optimaalisuuskriteerejä ja niiden suhteita toisiinsa. Luvussa 4 esitellään kovarianttien suureiden kannalta keskeisiä diskreettien ryhmien esitysteorian tuloksia. Pääpaino on projektiivisilla, indusoiduilla ja unitaariesityksillä. Luvussa 5 käydään läpi mittausteoreettisen kovarianssin matemaattinen muotoilu. Pääosaa näyttelevät imprimitiivisysteemeiksi kutsutut matemaattiset rakenteet ja George Mackeyn ensimmäisenä kehittämät menetelmät [3, luku 6.6], joilla ryhmän esityksiä voidaan analysoida aliryhmän indusoitujen esitysten avulla. Lopuksi luvussa 6 käsitellään optimaalisia kovariantteja suureita aiempien lukujen pohjalta ja lasketaan muutamia esimerkkejä.

Lukijalta ei vaadita kovinkaan kattavia esitietoja kvanttimekaniikasta tai matematiikasta, tavallisimpien algebrallisten rakenteiden (ryhmä, vektoriavaruus, algebra) tuntemus riittänee. Tutkielma on kirjoitettu mahdollisimman johdonmukaiseksi kokonaisuudeksi, jossa kulloiseenkin aiheeseen liittyvien matemaattisten olioiden määritelmät ja perusominaisuudet kerrataan ennen itse aiheeseen siirtymistä. Näin lukijan ei tarvitse tarkistaa määritelmiä muista lähteistä.

1 Kvanttimekaniikan matemaattiset perusteet

Kvanttimekaniikka rakentuu suurelta osin operaattoriteorian varaan. Kyseessä on laaja ja monipuolinen matematiikan ala, joka sisältää elementtejä muun muassa lineaarialgebrasta, analyysista, algebrasta ja topologiasta. Aloitetaan kertaamalla lyhyesti operaattoriteoriassa tarvittavia matemaattisia peruskäsitteitä.

1.1 Homomorfismeista

Erilaisten algebrallisten rakenteiden kanssa tulee vastaan useita erilaisia määritelmiä homomorfismeille eli rakenteen säilyttäville kuvauksille. Tässä kappaleessa selvennetään näiden eri määritelmien eroja. Usein on kuitenkin selvää kontekstista, mitä määritelmää kulloinkin tarkoitetaan. Tällaisissa tilanteissa kuvauksista käytetään yksinkertaisuuden vuoksi pelkästään nimitystä homomorfismi.

Määritelmä 1.1. *Olkoon A ja B ryhmiä. Ryhmähomomorfismi on kuvaus $f : A \to B$, jolle $f(xy) = f(x)f(y)$ kaikilla $x, y \in A$.*

Määritelmä 1.2. *Olkoon A ja B ryhmiä ja e ryhmän B identiteettialkio. Triviaali homomorfismi on kuvaus $f : A \to B$, jolle $f(a) = e$ kaikilla $a \in A$. Jos homomorfismi f ei ole triviaali, sitä sanotaan ei-triviaaliksi.*

Määritelmä 1.3. *Ryhmähomomorfismi $f : A \to B$ on endomorfismi, jos $A = B$.*

Määritelmä 1.4. *Olkoon id_A ryhmän A identiteettikuvaus. Ryhmähomomorfismi $f : A \to B$ on isomorfismi, jos on olemassa ryhmähomomorfismi $g : B \to A$, jolle $f \circ g = id_A = g \circ f$.*

Määritelmä 1.5. *Endomorfismi $f : A \to A$ on automorfismi, jos se on myös isomorfismi.*

Määritelmä 1.6. *Olkoon V ja W vektoriavaruuksia yli kunnan K. Vektoriavaruuksien välinen homomorfismi eli lineaarikuvaus on kuvaus $f : V \to W$, jolle $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ kaikilla $a, b \in K$ ja $x, y \in V$.*

Määritelmä 1.7. *Olkoon A ja B algebroja. Algebrojen välinen homomorfismi on lineaarikuvaus $f : A \to B$, jolle $f(xy) = f(x)f(y)$ kaikilla $x, y \in A$.*

Määritelmä 1.8. *Olkoon A ja B $*$-algebroja (määritelmä 1.10). Algebrojen välinen homomorfismi $f : A \to B$ on $*$-homomorfismi, jos $f(x^*) = f(x)^*$ kaikilla $x \in A$.*

Lisää yleisimpien algebrallisten rakenteiden välisistä homomorfismeista voi lukea esimerkiksi Grilletin kirjasta Abstract algebra [4].

1.2 C^*-algebroista ja niiden ominaisuuksista

Kvanttimekaanisen systeemin tilojen ja mittausten matemaattiseen kuvailuun tarvitaan C^*-algebroiksi kutsuttuja rakenteita. Tarkastellaan seuraavaksi lähemmin näiden ominaisuuksia. Notaatio ja määritelmien esitysasu mukailevat Follandin harmonista analyysia käsittelevää kirjaa [3, luku 1]. Tässä kappaleessa A on algebra.

Määritelmä 1.9. *Involuutio (kompleksisessa) algebrassa A on astetta 2 oleva antiautomorfismi $* : A \to A$ eli kuvaus, jolle $(x+y)^* = x^*+y^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$, $(xy)^* = y^*x^*$ ja $(x^*)^* = x$ kaikilla $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Määritelmä 1.10. *A on $*$-algebra, jos se on involuutiolla varustettu algebra.*

Määritelmä 1.11. *A on Banachin algebra, jos se on algebran lisäksi Banachin avaruus eli täydellinen normiavaruus.*

Määritelmä 1.12. *A on C^*-algebra, jos se on involuutiolla varustettu Banachin algebra ja lisäksi $||x||^2 = ||x^*x||$ kaikilla $x \in A$.*

Määritelmä 1.13. *Olkoon A C^*-algebra ja $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbertin avaruus. Kuvaus $f : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on algebran A $*$-esitys, jos se on algebrojen välinen homomorfismi ja $f(x^*) = f(x)^*$ kaikilla $x \in A$. f on unitaalinen jos lisäksi $f(e_A) = I_{\mathcal{H}}$ algebran A identiteettialkiolle e_A. f on degeneroitumaton, jos ei ole sellaista $0 \neq v \in \mathcal{H}$, jolla $f(x)v = 0$ kaikilla $x \in A$.*

Vektoriavaruuksien välisten lineaarikuvausten eli operaattorien ominaisarvoilla ja -vektoreilla on keskeinen rooli kvanttimekaniikassa. Tarkasteltavat avaruudet eivät kuitenkaan aina ole äärellisulotteisia, eikä tällöin voida oikeastaan puhua ominaisarvoista vaan tarvitaan yleisempi käsite. Tällaisissa tilanteissa puhutaankin operaattorin spektristä, joka voidaan määritellä yleisesti C^*-algebrojen alkioille.

Määritelmä 1.14. *Olkoon A identiteettialkiolla e varustettu C^*-algebra. Alkion $x \in A$ spektri on joukko* $s(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ ei ole kääntyvä}\}$.

Spektri voidaan määritellä myös kokonaiselle algebralle.

Määritelmä 1.15. *C^*-algebran A spektri $s(A)$ on joukko, joka koostuu kaikista jatkuvista funktioista $f : A \to \mathbb{C}$, joille $f(e) = 1$ ja $f(xy) = f(x)f(y)$ identiteettialkiolle $e \in A$ ja kaikille $x, y \in A$.*

Algebran spektrin avulla voidaan määritellä vielä yksi käsite, jota tullaan myöhemmin tarvitsemaan.

Määritelmä 1.16. *Olkoon A kuten edellisessä määritelmässä. Määritellään jokaista $x \in A$ kohti kuvaus $\hat{x} : s(A) \to \mathbb{C}$ kaavalla $\hat{x}(f) = f(x)$. Kuvausta $\Gamma(x) = \hat{x}$ sanotaan Gelfandin muunnokseksi.*

2 Kvanttimekaniikan formalismi

Kvanttimekaniikan matemaattisessa formalismissa keskeistä osaa näyttelevät Hilbertin avaruudet ja niiden väliset lineaarioperaattorit. Tässä luvussa kerrataan lyhyesti kvanttimekaniikan Hilbertin avaruus -formalismin peruskäsitteet ja määritelmät, joita myöhemmin tullaan tarvitsemaan. Luku etenee seuraten Buschin *et al.* mittausteoriaa käsittelevän kirjan [1, luvut 1 - 2, 7 ja 9] juonta.

2.1 Hilbertin avaruuden operaattoreista

Olkoon $\mathcal{H}$ ja $\mathcal{K}$ Hilbertin avaruuksia eli täydellisiä sisätuloavaruuksia. Avaruuden $\mathcal{H}$ identiteettioperaattoria merkitään $I_{\mathcal{H}}$ tai jos vaaraa epäselvyydestä ei ole, merkitään pelkästään I. Käydään ensiksi läpi tärkeimpien kvanttimekaniikassa esiintyvien operaattorijoukkojen määritelmät.

Määritelmä 2.1. *Lineaarikuvaus* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *on kompakti, jos joukon* $\{T\phi : ||\phi|| \leq 1\}$ *sulkeuma on kompakti.*

Määritelmä 2.2. *Lineaarikuvaus* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *on rajoitettu, jos on olemassa* $M > 0$, *jolle* $||T\phi|| \leq M||\phi||$ *kaikilla* $\phi \in \mathcal{H}$.

Määritelmä 2.3. *Lineaarikuvaus* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *on itseadjungoitu, jos* $T = T^*$.

Määritelmä 2.4. *Lineaarikuvaus* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *on unitaarinen, jos* $T^*T = I_{\mathcal{H}}$ *ja* $TT^* = I_{\mathcal{K}}$.

Määritelmä 2.5. *Lineaarikuvaus* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *on jälkiluokkaoperaattori, jos* $\mathrm{tr}[|T|] = \mathrm{tr}[\sqrt{T^*T}] < \infty$.

Määritelmä 2.6. *Jälkiluokkaoperaattori* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *on jäljen* 1 *operaattori, jos* $\mathrm{tr}[|T|] = 1$.

Määritelmä 2.7. *Lineaarikuvaus* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *on projektio, jos* $T^2 = T$ *ja* $T = T^*$.

Määritelmä 2.8. *Lineaarikuvaus $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ on Hilbert-Schmidt -operaattori, jos* $\mathrm{tr}[T^*T] < \infty$

Määritelmä 2.9. *Itseadjungoitu lineaarikuvaus $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ on positiivinen, jos $s(T) \subset [0, \infty)$. Operaattorin positiivisuutta merkitään $T \geq 0$.*

Edellinen määritelmä antaa myös keinon määritellä osittainen järjestys lineaarikuvausten välille.

Määritelmä 2.10. *Olkoon T, S lineaarikuvauksia $\mathcal{H} \to \mathcal{K}$. $T \geq S$ jos $T - S \geq 0$.*

Optimaalisten suureiden ja projektioiden yhteydessä puhutaan usein operaattorin asteesta. Selvennetään vielä, mitä tällä tarkoitetaan.

Määritelmä 2.11. *Operaattorin $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ aste on sen kuva-avaruuden dimensio* $\dim(T\mathcal{H})$.

Kompaktien lineaarikuvausten joukkoa merkitään $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Käytännössä kaikki tutkielmassa esiintyvät lineaarikuvaukset ovat kompakteja. Rajoitettujen lineaarikuvausten joukkoa merkitään $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Hilbertin avaruudet ovat normiavaruuksia, joten rajoitetut ja jatkuvat lineaarikuvaukset muodostavat täsmälleen saman kuvausten joukon. Unitaarioperaattoreita merkitään $\mathcal{U}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Unitaarioperaattorit ovat täsmälleen Hilbertin avaruuden isometriset surjektiot. Jälkiluokkaoperaattorien joukkoa merkitään vastaavasti $\mathcal{T}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, positiivisille jäljen 1 operaattoreille käytetään merkintää $\mathcal{S}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, projektioille merkintään $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ ja Hilbert-Schmidt -operaattoreille merkintää $\mathcal{HS}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Tilanteessa, jossa $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, käytetään mainituista operaattorijoukoista lyhyemmin merkintöjä $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$.

Hilbertin avaruuden sanotaan olevan separoituva, jos sillä on numeroituva ortonormaali kanta. Jatkossa kaikki Hilbertin avaruudet oletetaan separoituviksi ja avaruuksien skalaarikuntana on aina kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$.

2.2 Kvanttimekaaniset tilat ja suureet

Kvanttimekaniikassa täsmälleen saman mittauksen toistaminen täsmälleen samanlaiselle systeemille ei tuota aina samaa lopputulosta, jolloin tutkittavan systeemin tiloista ei voida puhua yksittäisinä mittaustuloksina. Kaikkien mahdollisten mittaustulosten tapahtuma-avaruutta eli arvoavaruutta merkitään symbolilla Ω. Kun Σ on sopiva joukon Ω σ-algebra ja $X \in \Sigma$, merkitään symbolilla $p_\rho^A(X)$ todennäköisyyttä saada mittaustulos joukosta $X \subset \Omega$ kun tilassa ρ olevasta systeemistä mitataan suure A. Jotta mittaustulosten todennäköisyyksille perustuva kuvailu olisi toimiva, vaaditaan lisäksi, että kaikille suureille A ja tiloille ρ funktio $p_\rho^A : \Sigma \to [0,1]$ muodostaa todennäköisyysmitan.

Kvanttimekaniikassa jokaiseen systeemiin liittyy systeemin ominaisuuksista määräytyvä Hilbertin avaruus $\mathcal{H}$. Myöhemmissä luvuissa selviää, että kyseinen avaruus on itse asiassa osa systeemin symmetriaryhmän (projektiivista) unitaariesitystä. Keskitytään kuitenkin vielä tässä vaiheessa tarkastelemaan systeemin tilojen matemaattista rakennetta.

Määritelmä 2.12. *Systeemin tila on positiivinen jäljen 1 jälkiluokkaoperaattori $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eli $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$.*

Eräs kvanttimekaniikan keskeisimmistä perustuloksista liittyy tapaan, jolla tilat ja muut lineaarioperaattorit voidaan hajottaa projektioiden summiksi. Tulos tunnetaan paremmin spektraalilauseena. Ennen lauseen ja sen todistuksen esittämistä tarvitaan kuitenkin muutama kompakteja itseadjungoituja operaattoreja koskeva aputulos.

Lemma 2.1. *Olkoon $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakti ja itseadjungoitu , $S = s(T)$ operaattorin T spektri ja N_λ ominaisarvoon λ liittyvä ominaisavaruus. Tällöin*

(i) Jokainen $\lambda \in S$ on reaalinen ja $\langle \phi | \psi \rangle = 0$ kun $(\lambda - T)\phi = 0,\ (\mu - T)\psi = 0$ ja $\lambda \neq \mu$

(ii) 0 on ainoa joukon S kasautumispiste

(iii) Jos $\lambda \in S \setminus \{0\}$, niin $\dim(N_\lambda) < \infty$

Todistus. (i) Olkoon $\lambda, \mu \in S$ sekä ϕ ominaisarvoon λ ja ψ ominaisarvoon μ liittyvä ominaisvektori. Nyt $\lambda \langle \phi | \phi \rangle = \langle \phi | T\phi \rangle \in \mathbb{R}$, joten $\lambda \in \mathbb{R}$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \lambda \langle \phi | \psi \rangle &= \langle T\phi | \psi \rangle \\ &= \langle \phi | T\psi \rangle \\ &= \mu \langle \phi | \psi \rangle, \end{aligned}$$

joten $\langle \phi | \psi \rangle = 0$ kun $\lambda \neq \mu$.

(ii) Olkoon $(\lambda_n)_n$ reaalilukujen ja $(\phi_n)_n \subset \mathcal{H}$ ortonormaalien vektorien jono, jotka toteuttavat ehdon $T\phi_n = \lambda_n \phi_n$ kaikilla n. Oletetaan $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \neq 0$. Vektorijonon ortonormaalisuudesta ja Pythagoraan lauseesta seuraa $||\lambda\phi_n - \lambda\phi_m||^2 = 2|\lambda|^2$, kun $m \neq n$, joten jonolla $(\lambda\phi_n)_n$ ei voi olla suppenevaa alijonoa. Toisaalta $\lambda\phi_n = \lambda_n\phi_n + (\lambda - \lambda_n)\phi_n$ ja $\lim_{n\to\infty}(\lambda - \lambda_n) = 0$, joten myöskään jonolla $(\lambda_n\phi_n)_n = (T\phi_n)_n$ ei voi olla suppenevaa alijonoa. Tämä on ristiriita, sillä operaattori T oletettiin kompaktiksi.

(iii) Oletetaan $\dim(N_\lambda) = \infty$ jollain $0 \neq \lambda \in S$. Nyt avaruuden N_λ vektoreista voidaan muodostaa numeroituvasti ääretön ortonormaali jono $(\phi_n)_n$, jolle $T\phi_n = \lambda\phi_n$ kaikilla n. Jono $(\phi_n)_n$ ei suppene, joten jonolla $(\lambda\phi_n)_n = (T\phi_n)_n$ ei voi olla suppenevaa osajonoa. Tämä on ristiriita, sillä operaattori T oletettiin kompaktiksi.

$\square$

Lause 2.2 (Spektraalilause)**.** *Olkoon $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kompakti itseadjungoitu operaattori. Tällöin T voidaan esittää muodossa $T = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n P_n$, missä $0 \neq \lambda_n \in \mathbb{R}$ ja $P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ kaikilla n. Lisäksi $\lambda_m \neq \lambda_n$ ja $P_m P_n = 0$ kun $m \neq n$*

Todistus. Edellisen lauseen kohtien (i) ja (ii) perustella operaattorin T ominaisarvot λ_n ovat reaalisia ja niitä on äärellinen lukumäärä jokaisen välin $(-1/m, 1/m)$, $m \in \mathbb{N}$ ulkopuolella. Tällöin joukko $S = \{\lambda_n\}_{n=1}^{k}$ on korkeintaan numeroituvasti ääretön ja ominaisarvot voidaan järjestää siten, että jono $(\lambda_n)_n$ suppenee kohti nollaa. Olkoon P_n projektio ominaisarvoa λ_n vastaavaan ominaisavaruuteen. Edellisen lauseen perusteella kaikkien tällaisten projektioiden aste on äärellinen, joten kaikille $m, n \in \mathbb{N}$ ja $\phi \in \mathcal{H}$, joille $m > n$ ja $||\phi|| < 1$, saadaan

$$
\begin{aligned}
||\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\right)\phi||^2 &= ||\left(\sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i P_i\right)\phi||^2 \\
&= \sum_{i=n+1}^{m} |\lambda_i|^2 ||P_i \phi||^2 \\
&\leq \max\nolimits_{n+1 \leq j \leq m} |\lambda_j|^2 \sum_{i=n+1}^{m} ||P_i \phi||^2 \\
&\leq \max\nolimits_{n+1 \leq j \leq m} |\lambda_j|^2
\end{aligned}
$$

Koska $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = 0$, muodostaa $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right)_n$ Cauhcyn jonon (operaattorinormin suhteen) ja suppenee kohti jotain operaattoria $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Todistetaan lopuksi $B = T$. Merkitään operaattorin T ominaisarvoon λ_n liittyvää ominaisavaruutta N_n. $BP_n = \lambda_n P_n$, joten $B\phi = \lambda_n \phi = T\phi$ kun $\phi \in N_n$ ja $\lambda_n \neq 0$. Toisaalta jos $\lambda_n = 0$, niin $T\phi = 0$ eli $\phi \perp N_m$ kaikilla m, joilla $\lambda_m \neq 0$. Tämä puolestaan on ekvivalentti ehdon $B\phi = 0$ kanssa, joten $B = T$. □

Seuraavan tärkeän lauseen fysikaalinen tulkinta on, että kvanttimekaniikassa kahden tilan sekoitus on myös tila. Näin ollen tunnetuista tiloista voidaan muodostaa uusia tiloja sekoittamalla ja tiettyjä tiloja voidaan myös hajottaa toisten tilojen summaksi.

Lause 2.3. *Systeemin tilat muodostavat konveksin joukon.*

Todistus. Olkoon $a \in (0,1)$ ja $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Olkoon tilojen ρ_1 ja ρ_2 konveksikombinaatio $\rho = a\rho_1 + (1-a)\rho_2$. Nyt $\langle\phi|\rho\phi\rangle = a\langle\phi|\rho_1\phi\rangle + (1-a)\langle\phi|\rho_2\phi\rangle$, missä $a\langle\phi|\rho_1\phi\rangle \geq 0$ ja $(1-a)\langle\phi|\rho_2\phi\rangle \geq 0$ kaikilla $\phi \in \mathcal{H}$, joten ρ on positiivinen. Lisäksi $\mathrm{tr}[\rho] = a\mathrm{tr}[\rho_1] + (1-a)\mathrm{tr}[\rho_2] = 1$, joten $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. □

Kaikkia systeemin tiloja ei kuitenkaan voida esittää muiden tilojen sekoituksena. Tällaisia tiloja kutsutaan systeemin puhtaiksi tiloiksi.

Määritelmä 2.13. *Olkoon ρ_1, ρ_2, ρ ja a kuten edellisessä todistuksessa. Tila ρ on puhdas, jos ehdosta $\rho = a\rho_1 + (1-a)\rho_2$ seuraa $\rho = \rho_1 = \rho_2$.*

Lause 2.4. *Systeemin puhtaat tilat vastaavat systeemin Hilbertin avaruuden asteen 1 projektioita.*

Todistus. Olkoon ρ puhdas tila. Kaikki joukon $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ operaattorit voidaan kirjoittaa hajotelmana $\sum_{i=1}^{\infty} a_i P_i$, missä $a_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$ ja operaattorit P_i ovat asteen 1 projektioita. Puhtaan tilan määritelmästä seuraa, että $P_i = P_1$ kaikilla i, joten ρ on asteen 1 projektio.

Olkoon ρ nyt asteen 1 projektio ja $\rho = a\rho_1 + (1-a)\rho_2$, missä $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja $a \in (0,1)$. $\rho \geq a\rho_1$ ja $\dim \rho(\mathcal{H}) = 1$, joten $a\rho_1 = b\rho$ jollekin $b > 0$. Kuitenkin $\mathrm{tr}[\rho_1] = \mathrm{tr}[\rho] = 1$, joten $a = b$ jolloin $\rho_1 = \rho$. Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa $\rho_2 = \rho$. Seuraa, että ρ on puhdas tila. □

Kvanttimekaaniset suureet ovat puolestaan sopivassa arvoavaruuden Ω σ-algebrassa Σ määriteltyjä kuvauksia $M : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Kun tilassa ρ olevasta systeemistä mitataan suuretta M, mittaustulosten todennäköisyydet saadaan kaavasta $p_\rho^M(X) = \mathrm{tr}[M(X)\rho]$. Jotta luvut $p_\rho^M(X)$ olisivat todennäköisyyksiä, täytyy operaattorien $M(X)$ toteuttaa ehtio $0 \leq M(X) \leq I$ kaikilla $X \in \Sigma$.

Määritelmä 2.14. *Operaattori $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on efekti jos $0 \leq A \leq I$. Efektien joukkoa merkitään $\mathcal{E}(\mathcal{H})$.*

Efektit kuvaavat systeemille tehtäviä yksittäisiä mittauksia. Tilojen tapaan nekin muodostavat konveksin joukon. Tilanteen fysikaalinen merkitys on, että sekoittamalla keskenään mittauksia saadaan aina jokin uusi mittaus. Efektin puhtaus määritellään analogisesti tilan puhtauden kanssa: efekti on puhdas jos sitä ei voida esittää kahden eri efektin koveksikombinaationa.

Lause 2.5. *Olkoon $A \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$. A on puhdas efekti jos ja vain jos $A \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$.*

Todistus. Efektin määritelmästä seuraa $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{H})$. Olkoon $A \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ ja $A = aA_1 + (1-a)A_2$ joillekin $A_1, A_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ ja $0 \leq a \leq 1$. Olkoon lisäksi $\phi \in \mathcal{H}$, $A\phi = 0$. Nyt $0 = \langle \phi | A\phi \rangle = \langle \phi | (aA_1 + (1-a)A_2)\phi \rangle \geq \langle \phi | aA_1\phi \rangle \geq 0$ joten $A_1\phi = 0$. Olkoon nyt $\psi \in \mathcal{H}$, $A\psi = \psi$. Tällöin $(I - A)\psi = 0$ ja samalla päättelyketjulla saadaan $(I - A_1)\psi = 0$. Toisaalta $\mathcal{H} = \mathrm{Ker(A)} \oplus A(\mathcal{H})$ joten $A_1 = A$ jolloin myös $A_2 = A$ eli A on puhdas efekti.

Oletetaan nyt, että A ei ole projektio. Tällöin on olemassa $a \in s(A), 0 < a < 1$. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio jolle $f(a) \neq 0, 0 \leq x \pm f(x) \leq 1$ kaikilla $x \in [0,1]$ ja $A_1 = A - f(A), A_2 = A + f(A)$. A_1 ja A_2 ovat efektejä ja $A \neq A_1, A \neq A_2$ mutta $A = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, joten A ei ole puhdas efekti. □

Se, että suure M saa arvoja efektien joukosta ei kuitenkaan yksin takaa kuvausten $p_\rho^M : \Sigma \to [0,1]$ olevan todennäköisyysmittoja. Tämän toteutumiseksi vaaditaan todennäköisyysmitan kaltainen rakenne myös suureelta M. Esitetään nyt kvanttimekaanisen suureen yleisin mahdollinen määritelmä.

Määritelmä 2.15. *Olkoon Σ kuten edellä ja $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$. Kuvaus $M : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on suure eli positiivioperaattorimitta jos $M(\emptyset) = 0, M(\Omega) = I$ ja $M(\cup_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} M(X_n)$, kun $X_n \cap X_m = \emptyset$ kaikilla $n \neq m$.*

Lisäksi jos operaattori (efekti) $M(X)$ on projektio kaikilla $X \in \Sigma$, sanotaan suuretta M projektiomitaksi. Positiivioperaattorimitoista käytetään lyhennystä POVM ja projektiomitoista lyhennystä PVM. Kaikkien tietylle σ-algebralle Σ ja Hilbertin avaruudelle $\mathcal{H}$ määriteltyjen suureiden joukkoa merkitään $\mathrm{Obs}(\Sigma, \mathcal{H})$.

2.3 Operaatiot, instrumentit, dilaatiot

Erilaiset operaattorimitat eivät suinkaan ole ainoita välttämättömiä matemaattisia työkaluja, joita mittausten tutkimiseen tarvitaan. Jos halutaan tietää suureen mittaustulostodennäköisyyksien lisäksi, miten tilat muuttuvat mittauksessa, tarvitaan instrumenteiksi kutsuttuja kuvauksia. Ennen instrumentteihin siirtymistä tarvitaan kuitenkin lisää operaattoriteorian käsitteitä, jotka täytyy määritellä. Tässä kappaleessa $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ ovat Hilbertin avaruuksia ja (Ω, Σ) on mitallinen avaruus.

Määritelmä 2.16. *Olkoon A $*$-algebra, $\mathcal{M}_n(A)$ alkioita joukosta A ottava $n \times n$-matriisien muodostama $*$-algebra ja I_n algebran $M_n(\mathbb{C})$ identiteettikuvaus. Lineaarikuvaus $\Phi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on n-positiivinen, jos lineaarikuvaukselle $\Phi_n = I_n \otimes \Phi : \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ pätee $\Phi_n(TT^*) \geq 0$ kaikilla $T \in \mathcal{M}_n(A)$.*

N-positiivisuus ei kuitenkaan aina riitä takaamaan kuvauksen soveltumista systeemin tilojen muuttumisen kuvailuun. Näin voi käydä esimerkiksi yhdistettyjen systeemien teoriassa, sillä kahden n-positiivisen kuvauksen tensoritulo ei välttämättä ole enää positiivinen. Tarvitaan vahvempi ehto.

Määritelmä 2.17. *Olkoon $A, \mathcal{M}_n(A)$ kuten edellisessä määritelmässä. Lineaarikuvaus $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ on täyspositiivinen, jos lineaarikuvaukselle $\Phi_n : \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ pätee $\Phi(TT^*) \geq 0$ kaikilla $T \in \mathcal{M}_n(A)$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

Määritelmä 2.18. *Olkoon $(a_i)_{i \in I} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nouseva tai laskeva jono itseadjungoituja operaattoreita. N-positiivinen kuvaus $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ on normaali, jos $\sup_{i \in I} \Phi(a_i) = \Phi(\sup_{i \in I}(a_i))$, mikäli $(a_i)_{i \in I}$ on nouseva ja $\inf_{i \in I} \Phi(a_i) = \Phi(\inf_{i \in I}(a_i))$, mikäli $(a_i)_{i \in I}$ on laskeva.*

Nyt voidaan määritellä kvanttimekaaninen operaatio. Operaatioiden merkitys instrumenteille on suunnilleen sama kuin efektien merkitys suureille.

Määritelmä 2.19. *Heisenberg-operaatio on normaali täyspositiivinen kuvaus* $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{K}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *jolle* $\Phi(I_{\mathcal{K}}) \leq I_{\mathcal{H}}$. *Jokaista Heisenberg-operaatiota kohti määritellään Schrödinger-operaatio kuvauksena* $\Phi_* : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}(\mathcal{K})$ *jolle* $\mathrm{tr}[\Phi_*(T)A] = \mathrm{tr}[T\Phi(A)]$ *kaikilla* $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}), A \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$.

Määritelmä 2.20. *Heisenberg-kanava on operaatio, jolle* $\Phi(I_{\mathcal{K}}) = I_{\mathcal{H}}$. *Vastaaavalle Schrödinger-kanavalle saadaan* $\mathrm{tr}[\Phi_*(T)] = \mathrm{tr}[T]$ *kaikilla* $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$.

Nyt päästään käsiksi instrumentteihin, jotka ovat suureiden ohella eräitä koko kvanttimekaniikan mittausteorian tärkeimmistä käsitteistä.

Määritelmä 2.21. *Heisenberg-instrumentti on kuvaus* $\mathfrak{I} : \mathcal{L}(\mathcal{K}) \times \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *jolle* $\mathfrak{I}(\cdot, X) : \mathcal{L}(\mathcal{K}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *on operaatio kaikilla* $X \in \Sigma$, $\mathfrak{I}(\cdot, \Omega)$ *on kanava ja* $\mathfrak{I}(A, \cup_j X_j) = \sum_j \mathfrak{I}(A, X_j)$ *ultraheikosti kun* $(X_j)_j \subset \Sigma$ *on jono pareittain alkiovieraita joukkoja. Schrödinger-instrumentti on kuvaus* $\mathfrak{I}_* : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \times \Sigma \to \mathcal{T}(\mathcal{K})$ *jolle* $\mathfrak{I}_*(T, X) = [\mathfrak{I}(\cdot, X)]_*(T)$.

Operaatioihin ja instrumentteihin liitetään Heisenberg- tai Schrödinger-etuliite historiallisista syistä. Heisenberg-operaatiot kuuluvat kvanttimekaniikan ns. ”Heisenberg-kuvaan”, jossa mittauksissa tilat pysyvät ennallaan, mutta suureet muuttuvat. ”Schrödinger-kuvassa”puolestaan tilat muuttuvat, mutta suureet pysyvät ennallaan. Nämä kuvat ovat duaalisia tapoja kuvailla kvanttimekaanisia mittauksia, joten jatkossa Heisenberg-operaatiosta käytetään yksinkertaisesti nimitystä operaatio ja Schrödinger-operaatiosta nimitystä esiduaalioperaatio.

Instrumenttien hyödyllisyys piilee niiden kyvyssä kuvata systeemin tilan muuntumisen lisäksi mittaustulostodennäköisyyksiä suureiden tapaan. Jokaista suuretta kohti voidaankin määritellä instrumentteja, joiden avulla voidaan tuottaa suureen kanssa identtinen todennäköisyysjakauma.

Määritelmä 2.22. *Suureeseen $M \in \mathrm{Obs}(\Sigma, \Omega)$ liittyvä instrumentti tai M-instrumentti on instrumentti $\mathfrak{I}$, jolle $M(X) = \mathfrak{I}(I_{\mathcal{K}}, X)$ kaikilla $X \in \Sigma$.*

Määritelmästä seuraa välittömästi $p_\rho^M(\cdot) = \mathrm{tr}[\rho M(\cdot)] = \mathrm{tr}[\rho \mathfrak{I}(I_{\mathcal{K}}, \cdot)] = \mathrm{tr}[\mathfrak{I}_*(\rho, \cdot)]$. Instrumentit ovat siis suureita laajempi tapa kuvailla mittauksia.

Instrumenttien hyödyllisyydestä huolimatta niitä on toisinaan vaikeaa ja epäkäytännöllistä käsitellä sellaisenaan. Tämän ongelman ratkaisemiseksi voidaan instrumentti hajottaa helppokäyttöisempään muotoon tai esittää se operoimassa alkuperäistä suurempaan Hilbertin avaruuteen. Nämä hyödylliset tekniikat tunnetaan erilaisina hajotelmina ja dilaatioina. Yksittäisten dilaatioteorian tulosten todistamisen sijaan todistetaan ensin yleisempi bilineaarinen dilaatiolause, josta Stinespringin ja Naimarkin dilaatiot saadaan erikoistapauksina. Näitä voidaan puolestaan käyttää kanavan Krausin hajotelman olemassaolon todistamiseen.

Lause 2.6. *Olkoon $A = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ on mitallinen ja } \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty\}$ ja B identiteettialkiolla varustettu C^*-algebra. Oletetaan lisäksi, että $\Psi : A \times B \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ positiivinen bilineaarikuvaus (eli kuvaus, jolle $\Psi(aa^*, bb^*) \geq 0$ kaikilla $a \in A, b \in B$), jolle $\Psi(\chi_X, \cdot) : B \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on täyspositiivinen kaikilla $X \in 2^\Omega$. Tällöin Ψ on rajoitettu. Lisäksi on olemassa Hilbertin avaruus $\mathcal{K}$, unitaaliset $*$-esitykset $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$, $\rho : B \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ ja operaattori $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, joille $\pi(x)\rho(y) = \rho(y)\pi(x)$ ja $\Psi(x, y) = V^*\pi(x)\rho(y)V$ kaikilla $x \in A, y \in B$.*

Todistus. Olkoon C identiteettialkiolla varustettu C^*-algebra ja $h : C \to \mathbb{R}$ positiivinen lineaarikuvaus. Tällöin kaikilla positiivisilla alkioilla $a, b \in C$ ehdosta $a \leq b$ seuraa $h(a) \leq h(b)$, joten $||f||_{\mathrm{sup}} = \sup_{a \leq 1_C} ||h(a)|| = h(1_C)$. $\langle \phi | \Psi(\cdot, \cdot)\phi \rangle$ on positiivinen bilineaarikuvaus $A \times B \to \mathbb{C}$ kaikilla $\phi \in \mathcal{H}$ ja A ja B ovat molemmat identiteettialkiolla varustettuja C^*-algebroja, joten $||\langle \phi | \Psi(\cdot, \cdot)\phi \rangle|| = \langle \phi | \Psi(1_A, 1_B)\phi \rangle < \infty$. Näin ollen Ψ on rajoitettu.

Konstruoidaan seuraavaksi sopiva avaruus $\mathcal{K}$. Olkoon $\mathcal{K}_0 = A \otimes B \otimes \mathcal{H}$, $u = \Sigma_{i=1}^m x_i \otimes y_i \otimes \xi_i$ ja $u = \Sigma_{j=1}^n x'_j \otimes y'_j \otimes \eta_j$. Nyt $\langle v | u \rangle_0 = \Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^n \langle \eta_j | \Psi(x'^*_j x_i, y'^*_j y_i)\xi_i \rangle$

muodostaa seskvilineaarimuodon (bilineaarikuvauksen, joka on antilineaarinen ensimmäisen ja lineaarinen toisen argumentin suhteen) vektoriavaruudessa $\mathcal{K}_0$. Osoitetaan seuraavaksi, että $\langle u|u\rangle_0 \geq 0$ kaikilla $u \in \mathcal{K}_0$. Olkoon $\{\xi_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{H}$, $\{y_i\}_{i=1}^n \subset B$ ja $\{f_i\}_{i=1}^n \subset A$, missä funktiot f_i ovat joukon Ω osajoukkojen karakterististen funktioiden lineaarikombinaatioita. Joukosta Ω voidaan valita erillisten osajoukkojen kokoelma $\{X_k\}_{k=1}^m$, jolle $f_i = \sum_{k=1}^m c_{ik} X_k$ joillain kompleksiluvuilla c_{ik}. Nyt

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=1}^n f_i \otimes y_i \otimes \xi_i \middle| \sum_{i=1}^n f_i \otimes y_i \otimes \xi_i \right\rangle_0 &= \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_i | \Psi(f_i^* f_j, y_i^* y_j) \xi_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m \langle \xi_i | \Psi(c_{ik}^* c_{jk} \chi_{X_k}, y_i^* y_j) \xi_j \rangle \\
&= \sum_{k=1}^m \left\langle \sum_{i=1}^n c_{ik} \xi_i \middle| \Psi(\chi_{X_k}, y_i^* y_j) \sum_{j=1}^n c_{jk} \xi_j \right\rangle \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

koska oletuksen mukaan kuvaus $\Psi(\chi_X, \cdot)$ on täyspositiivinen kaikilla $X \in 2^\Omega$. Alkiot ξ_i, y_i ja f_i olivat mielivaltaisia, joten $\langle u|u\rangle_0 \geq 0$ kaikilla $u \in \mathcal{K}_0$. Olkoon nyt $N = \{u \in \mathcal{K}_0 | \, \langle u|u\rangle_0 = 0\}$. Tällöin tekijäavaruus $\bar{\mathcal{K}}_0 = \mathcal{K}_0/N$ yhdessä binileaarikuvauksen $\langle u + N|v + N\rangle$ muodostaa sisätuloavaruuden. Tämän avaruuden sulkeuma on lauseessa tarvittava Hilbertin avaruus $\mathcal{K}$, kuten kohta nähdään.

Rakennetaan nyt sopivat esitykset ρ ja π. Määritellään jokaista $b \in B$ kohti operaattori $S_b : \mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}_0$, $S_b \, x \otimes y \otimes \xi = x \otimes by \otimes \xi$ sekä kuvaus $\omega : B \to \mathbb{C}$, $\omega(b) = \langle u|S_b u\rangle_0$. $\omega(b^*b) = \langle u|S_{b^*b} u\rangle_0 = \langle S_b u|S_b u\rangle_0 \geq 0$, joten ω on positiivinen lineaarimuoto. Tällöin $|\omega(a) - \omega(b)| \to 0$ kun $||a - b|| \to 0$ eli ω on myös jatkuva. Nyt $\omega(b^*b) = \langle S_b u|S_b u\rangle_0 \leq ||b^*b|| \cdot ||\omega|| = ||b||^2 \omega(1_B) = ||b||^2 \langle u|u\rangle_0$ eli S_b on rajoitettu. Tällöin avaruudessa $\bar{\mathcal{K}}_0$ määritelty lineaarikuvaus $\bar{S}_b : \bar{\mathcal{K}}_0 \to \bar{\mathcal{K}}_0$, $\bar{S}_b(u+N) = S_b u + N$ on rajoitettu. Määritellään $\rho(b) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ kuvauksen $\bar{S}_b$ jatkuvana ja lineaarisena laajennuksena. Tällä tavoin määriteltynä ρ on algebran B yksiköllinen $*$-esitys. Samalla tavoin voidaan konstruoida myös tarvittava algebran A esitys. Lopuksi kuvaus $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ voidaan valita olemaan esimerkiksi $V\xi = 1_A \otimes 1_B \otimes \xi + N$. $\square$

Määritelmä 2.23. *Olkoon A mitalliseten, sup-normin suhteen rajoitettujen kuvausten $F : \Omega \to \mathbb{C}$ joukko, $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ $*$-esitys, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ja $F : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ täyspositiivinen kuvaus. $(\mathcal{K}, \pi, V)$ on kuvauksen F Naimarkin dilaatio jos $F(x) = V^*\pi(x)V$ kaikilla $x \in A$. Dilaatio on minimaalinen, jos vektorien $\pi(x)V\phi$, $\phi \in \mathcal{H}$ lineaarikombinaatioiden joukko on tiheä avaruudessa $\mathcal{K}$.*

Seuraus 2.6.1. *Naimarkin dilaatio on olemassa kaikille edellisen lauseen algebroille A ja positiivisille lineaarikuvauksille $F : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (riittää valita $B = \mathbb{C}$ ja $\Psi(x, y) = yF(x)$).*

Määritelmä 2.24. *Olkoon B yksikköalkiolla varustettu C^*-algebra, $\Phi : B \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ täysin positiivinen kuvaus, $\rho : B \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ $*$-esitys ja $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. $(\mathcal{K}, \rho, V)$ on kuvauksen Φ Strinespringin dilaatio jos $\Phi(x) = V^*\rho(x)V$ kaikilla $x \in B$. Dilaatio on minimaalinen, jos vektorien $\rho(x)V\phi$, $\phi \in \mathcal{H}$ lineaarikombinaatioiden joukko on tiheä avaruudessa $\mathcal{K}$.*

Seuraus 2.6.2. *Stinespringin dilaatio on olemassa kaikille edellisen lauseen algebroille B ja täyspositiivisille lineaarikuvauksille $\Phi : B \to \mathcal{L}(\mathcal{H}$ (riittää valita $|\Omega| = 1$, jolloin $A \simeq \mathbb{C}$ ja $\Psi(x, y) = x\Phi(y)$).*

Määritelmä 2.25. *Operaattorit $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ muodostavat kanavan $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ Krausin hajotelman, jos $\Phi(S) = \Sigma_{i\in I} A_i^* S A_i$ kaikilla $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $\Sigma_{i\in I} A_i^* A_i$ suppenee heikosti.*

Kuten seuraava lause osoittaa, kaikilla kanavilla on olemassa Krausin hajotelma. Itse asiassa pelkkä Krausin hajotelman olemassaolo riittää todistamaan lineaarikuvauksen kanavaksi.

Lause 2.7. *Lineaarikuvaus $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ on kanava jos ja vain jos sillä on olemassa Krausin hajotelma.*

Todistus. Olkoon $(\mathcal{K}', \rho, V)$ kanavan Φ Stinespringin dilaatio, missä $\mathcal{K}' = \otimes_{i\in I} \mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}$ kaikilla $i \in I$ ja $\rho(S)(\eta_i)_{i\in I} = (S\eta_i)_{i\in I}$ kaikilla $(\eta_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}$. Olkoon lisäksi

$A_i = P_i V : \mathcal{K} \to \mathcal{H}_i$. Mille tahansa $\xi \in \mathcal{K}$ ja äärelliselle joukolle $J \in I$ saadaan $\Sigma_{i \in J} \langle \xi | A_i^* A_i \xi \rangle = \Sigma_{i \in J} \langle \xi | V^* P_i V \xi \rangle = \Sigma_{i \in J} \langle V \xi | P_i V \xi \rangle \leq ||V\xi||^2 \leq ||V||^2 \cdot ||\xi||^2$, joten $\Sigma_{i \in I} A_i^* A_i$ suppenee heikosti. Lisäksi kaikille $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\xi, \eta \in \mathcal{K}$ on voimassa $\langle \eta | \Phi(S) \xi \rangle = \Sigma_{i \in I} \langle \eta | V^* \rho(S) V \xi \rangle = \Sigma_{i \in I} \langle P_i V \eta | S P_i V \xi \rangle = \Sigma_{i \in I} \langle A_i \eta | A_i V \xi \rangle$, joten kanavalla Φ on olemassa Krausin hajotelma.

Muodostakoon nyt operaattorit $\{A_i\}_{i \in I}$ lineaarikuvauksen Φ Krausin hajotelman. Sarja $\Sigma_{i \in I} A_i^* A_i$ suppenee heikosti jos ja vain jos lineaarikuvaus Φ on normaali [1, prop. 7.4]. Mille tahansa joukoille $\{S_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\{\xi_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{K}$ saadaan $\Sigma_{k,l=1}^n \langle \xi_k | \Phi(S_k^* S_l) \xi_l \rangle = \Sigma_{k,l=1}^n \langle \xi_k | \Sigma_{i \in I} A_i^* S_k^* S_l A_i \xi_l \rangle = \Sigma_{i \in I} \Sigma_{k,l=1}^n \langle S_k A_i \xi_k | S_l A_i \xi_l \rangle = \Sigma_{i \in I} ||\Sigma_{k=1}^n S_k A_i \xi_k||^2 \geq 0$, joten Φ on myös täysin positiivinen ja näin ollen kanava. $\square$

2.4 Diskreetin tapauksen erityispiirteitä

Tutkielmassa käsitellään tilannetta, jossa mittaustulosten arvoavaruus Ω ja kvanttisysteemin symmetriaryhmä G ovat äärellisiä tai numeroituvasti äärettömiä. Tällä on useita etuja, sillä diskreettiä joukkoa tutkittaessa voidaan ongelmitta käyttää diskreettiä topologiaa. Tällöin joukon Borelin σ-algebra on täsmälleen sama kaikkien osajoukkojen kokoelma kuin topologiakin. Topologian ja σ-algebran sijaan puhutaankin jatkossa pelkästään tapahtuma-avaruuden tai symmetriaryhmän potenssijoukosta 2^Ω tai 2^G.

Diskreetissä topologiassa kaikki kuvaukset ovat jatkuvia ja kompaktit ja äärelliset joukot ovat sama asia. Näin ollen esimerkiksi kompaktisti tuettujen jatkuvien kuvausten sijaan voidaan käsitellä pelkästään äärellisesti tuettuja kuvauksia. Diskreetissä joukossa A määritellyistä äärellisesti tuetuista kuvauksista $f : A \to \mathbb{C}$ eli kuvauksista, joille joukko $\operatorname{supp} f = \{a \in A : f(a) \neq 0\}$ on äärellinen käytetään jatkossa merkintää $F_c(A)$. Myöskään mitta- ja integrointiteoriaa ei juuri tarvitse huomioida, sillä käytetyt mitat ovat aina painotettuja lukumäärämittoja, jolloin integraalit redusoituvat summiksi.

Yksinkertaisuudesta huolimatta tilanne on realistinen, sillä todellisuudessa mittalaitteet voivat rekisteröidä vain äärellisen määrän erilaisia mittaustuloksia. Jos mahdollisia mittaustuloksia on hyvin paljon, pystytään tilannetta approksimoimaan numeroituvasti äärettömällä arvoavaruudella.

3 Optimaaliset suureet

Kvanttimekaniikassa suureille voidaan asettaa useita erilaisia optimaalisuuskriteerejä, jotka liittyvät tutkittavasta kvanttisysteemistä mittauksessa saatavaan informaatioon. Suure voi esimerkiksi määrätä kokonaan systeemin menneisyyden tai tulevaisuuden tai voi olla ettei suuretta voida valmistaa muita suureita sekoittamalla. Ellei toisin mainita, luvun määritelmät ja tulokset perustuvat E. Haapasalon ja J. P. Pellonpään optimaalisia suureita käsittelevään paperiin [2]. Jatkossa suureiden yhteydessä käytetään merkintää $M(\{x_i\}) = M_i$ kun $\Omega = \cup_{i\in I}\{x_i\}$. Lisäksi tämän luvun ajaksi otetaan käyttöön merkinnät $N = |\Omega|$ ja $\dim M_i(\mathcal{H}) = m_i$.

3.1 Erilaisia optimaalisuuskriteerejä

Eräs yksinkertaisimmista suureelle asetettavista optimaalisuuskriteereistä on, että systeemin tila mittauksen jälkeen tiedetään varmuudella. Tällaiset suureet määräävät systeemin tulevaisuuden. Tulevaisuuden määräävien suureiden avulla voidaan valmistaa halutussa tilassa olevia kvanttisysteemejä esimerkiksi uusia mittauksia varten. Tällaisia suureita kutsutaankin myös preparointisuureiksi.

Määritelmä 3.1. *Olkoon* $N \in \mathbb{Z}_+$ *ja* $\sigma_i \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$ *kaikilla* $0 \leq i \leq N$. *Suure* M *on preparointisuure, jos jokaiselle* M*-instrumentille* $\mathcal{I}$ *on voimassa* $\mathcal{I}_{i*}(\rho) = \mathrm{tr}[M_i\rho]\sigma_i = p_i\sigma_i$ *kaikilla* $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Suure voi toimia myös päinvastaisella tavalla, jolloin mittauksessa saadaan kaikki mahdollinen informaatio systeemin tilasta ennen mittausta. Tällaiset suureet määräävät systeemin menneisyyden ja niitä sanotaan informatiivisesti täydellisiksi, tai lyhyemmin infotäydellisiksi. Infotäydelliset suureet ovat korvaamattomia kvanttitomografiassa, jossa tarkoituksena on tunnistaa annetun systeemin tila.

Määritelmä 3.2. *Suure* M *on infotäydellinen, jos* $\mathrm{tr}[\rho M(\cdot)] = \mathrm{tr}[\rho' M(\cdot)] \Rightarrow \rho = \rho'$ *kaikilla* $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Nämä eivät tietenkään ole ainoat mahdolliset optimaalisuuskriteerit. On myös luonnollista vaatia, että jokaista mittaustulosta kohti on olemassa tila, jossa mitattava suure saa kyseisen arvon varmasti. Tällöin päädytään ns. arvonsa määrääviin suureisiin.

Määritelmä 3.3. M *on arvonsa määräävä suure, jos* M_i *on normin 1 operaattori eli* $||M_i|| = 1$ *kaikilla* i. *Tämä tarkoittaa, että jokaista mittaustulosta* X_i *kohti on olemassa tila* $\rho_i \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, *jossa suureella* M *on arvo* x_i 100% *todennäköisyydellä.*

Kvanttimekaniikassa tilojen lisäksi myös suureet muodostavat konveksin joukon, jolloin on olemassa puhtaiden tilojen tapaan ekstremaalisia suureita. Nämä suureet vastaavat mittauksia, joissa ei esiinny klassista kohinaa.

Määritelmä 3.4. M *on ekstremaalinen suure, jos se ei ole minkään kahden eri suureen konveksikombinaatio, eli* $M = \frac{1}{2}M' + \frac{1}{2}M'' \Rightarrow M = M' = M''$.

Vielä voidaan määritellä ainakin kaksi mittauksesta saatavaan informaatioon liittyvää optimaalisuuskriteeriä. Näistä ensimmäinen on esiprosessointipuhtaus. Tätä varten täytyy ensin selventää, mitä suureen esiprosessoinnilla tarkoitetaan.

Määritelmä 3.5. *Suure* $M : 2^{\Omega} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *on suureen* $M' : 2^{\Omega} \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ *esiprosessointi, jos kaikilla* i *on voimassa* $M_i = \Phi(M_i')$ *jollekin kanavalle* $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{K}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Määritelmästä seuraa $p_i = \mathrm{tr}[\rho M_i] = \mathrm{tr}[\rho\Phi(M_i')] = \mathrm{tr}[\Phi_*(\rho)M_i']$, eli suureen M mittaamisen tilassa ρ sijaan voidaan mitata M' tilassa $\Phi_*(\rho)$.

Määritelmä 3.6. *Olkoon* M *ja* M' *kuten edellisessä määritelmässä.* M *on esiprosessointipuhdas/ -maksimaalinen, jos* $M_i = \Phi(M_i') \Rightarrow M_i' = \Theta(M_i)$ *joillekin kanaville* $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{K}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *ja* $\Theta : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$.

Viimeisenä käsiteltävänä optimaalisuuskriteerinä on jälkiprosessointipuhtaus. Jälkiprosessoinnilla tarkoitetaan mittaustulosten todennäköisyysjakauman käsittelyä mittausten suorittamisen jälkeen.

Määritelmä 3.7. *Suure* $M : 2^{\Omega} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *on suureen* $M' : 2^{\Omega'} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *jälkiprosessointi, jos kaikilla* i *on voimassa* $M_i = \sum_{j=1}^{N'} p'_{ji} M'_j$, *missä* (p'_{ji}) *on* $N' \times N$ *todennäköisyysmatriisi eli matriisi, jolle* $p_{ji} \geq 0$ *kaikilla* j, i *ja* $\sum_{i=1}^{N} p_{ji} = i$ *kaikilla* i.

Määritelmä 3.8. M *on jälkiprosessointipuhdas/-maksimaalinen, jos*
$M_i = \sum_{j=1}^{N'} p'_{ji} M'_j \Rightarrow M'_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ji} M_j$.

Jatkossa tullaan huomaamaan, että diskreetissä tapauksessa iso osa edellä määriteltyistä optimaalisuuskriteereistä toteutuu niin sanotuille asteen 1 suureille. Selvennetään vielä, mitä tällä termillä tarkoitetaan.

Määritelmä 3.9. *Suure* M *on asteen 1 suure jos* $\dim M_i(\mathcal{H}) \leq 1$ *kaikilla* i.

3.2 Optimaalisten suureiden luokittelu

Varsinkaan diskreetissä tapauksessa edellä esitellyt optimaalisuuskriteerit eivät ole toisensa poissulkevia, vaan vaihtoehtoisia tapoja luokitella hyviä ominaisuuksia omaavia suureita. Tämän kappaleen tarkoituksena on selventää optimaalisuuskriteerien suhtautumista toisiinsa. Osoittautuu, että diskreetissä tapauksessa preparointi- ja jälkiprosessointipuhtaat suureet muodostavat saman suurejoukon. Vastaavuutta avataan lisää kahden seuraavan lauseen todistuksissa.

Lause 3.1. *M on preparointisuure, jos ja vain jos se on asteen 1 suure.*

Todistus. ([5, Prop. 8]) Oletetaan ensin, että M on asteen 1 suure. Olkoon M-instrumenttia vastaavan esiduaalikanavan Kraus-hajotelma $\mathcal{I}_{i*}(\rho) = \sum_j K_{ji}\rho K_{ji}^*$, jolloin $M_i = \mathcal{I}_i(I) = \sum_j K_{ji}^* K_{ji}$. M oletettiin asteen 1 suureeksi, joten jokaista indeksiä j kohti täytyy olla $K_{ji}^* K_{ji} = k_j M_i$ jollekin $0 < k_j \leq 1$ siten, että $\sum_j k_j = 1$. Käyttämällä polaarihajotelmaa $K_{ji} = S_{ji}|K_{ji}|$ saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{i*}(\rho) &= \sum_j K_{ji}\rho K_{ji}^* \\
&= \sum_j S_{ji}|K_{ji}|\rho|K_{ji}|^* S_{ji}^* \\
&= \sum_j S_{ji}\sqrt{K_{ji}^* K_{ji}}\rho\sqrt{K_{ji}^* K_{ji}}^* S_{ji}^* \\
&= \sum_j S_{ji}\sqrt{k_{ji} M_i}\rho\sqrt{k_{ji} M_i}^* S_{ji}^* \\
&= \sum_j S_{ji}\sqrt{k_j \lambda_i P_i}\rho\sqrt{k_j \lambda_i P_i}^* S_{ji}^* \\
&= \sum_j k_j \lambda S_{ji} P_i \rho P_i S_{ji}^* \\
&= \sum_j k_j \lambda \mathrm{tr}\left[\rho P_i\right] S_{ji} P_i S_{ji}^*,
\end{aligned}$$

missä λ_i on operaattorin M_i ominaisarvo ja P_i projektio vastaavaan ominaisavaruuteen. M oletettiin asteen 1 suureeksi, joten laskun jokaisella $M_i > 0$ on täsmälleen yksi nollasta poikkeava ominaisarvo λ_i. Lisäksi summan jokainen termi on positiivinen operaattori ja $\mathrm{tr}[S_j P_i S_j^*] = \mathrm{tr}[P_i] = 1$, joten M on preparointisuure.

Olkoon nyt M preparointisuure. Oletetaan, että suureen M aste on suurempi kuin 1. Tällöin on olemassa operaattori M_i, jonka ominaisavaruuden dimensio on suurempi kuin 1. Olkoon $M_i = \sum_{s(M_i)} \lambda_i P_i$ tämän operaattorin spektraalihajotelma. Spektri $s(M_i)$ voidaan hajottaa kahteen epätyhjään osaan $s_1(M_i)$, $s_2(M_i)$, joita vastaavat operaattorit $M_{ij} = \sum_{s_j(M_i)} \lambda_i P_i > 0$. Selvästi $M_{i1} + M_{i2} = M_i$, $s(M_{i1}) = s_1(M_i)$ ja $s(M_{i2}) = s_2(M_i)$. Määritellään vielä operaatiot $\Phi_{ij*} = \mathrm{tr}[\cdot M_{ij}]\xi_j$, missä $j = 1, 2$ ja ξ_1, ξ_2 ovat lineaarisesti riippumattomia tiloja. Nyt $\mathrm{tr}[\rho(\Phi_{i1}(I) + \Phi_{i2}(I))] = \mathrm{tr}[\mathrm{tr}[\rho M_{i1}]\xi_1 + \mathrm{tr}[\rho M_{i2}]\xi_2] = \mathrm{tr}[\rho M_i]$ kaikilla $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ joten $\Phi_i(I) = \Phi_{i1}(I) + \Phi_{i2}(I) = M_i$. Toisaalta oletuksen perusteella on olemassa tila $\sigma_i \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, jolle $\mathrm{tr}[\rho(M_{i1} + M_{i2})]\sigma_i = \Phi_{i*}(\rho) = \Phi_{i1*}(\rho) + \Phi_{i2*}(\rho) = \mathrm{tr}[\rho M_{i1}]\xi_1 + \mathrm{tr}[\rho M_{i2}]\xi_2$, joten $\sigma_i = \xi_1 = \xi_2$. Tämä on ristiriita, joten suureen M asteen täytyy olla 1. $\square$

Lause 3.2. *M on jälkiprosessointipuhdas, jos ja vain jos M on asteen 1 suure.*

Todistus. Oletetaan, että M on asteen 1 suure ja suureen M' jälkiprosessointi. Koska M on diskreetti, on olemassa yksikkövektorien joukko $\{\phi_i\}_{i=0}^N \subset \mathcal{H}$ ja reaalilukujen joukko $\{c_i\}_{i=0}^N$, joille $c_i \in (0, 1]$ ja $M_i = c_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$. Nyt $c_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i| = M_i = \sum_{j=1}^{N'} p'_{ji} M'_j$, mutta $p'_{ji} \geq 0$ kaikilla j, i, joten $M_i = \sum_{j=1}^{N'} p'_{ji} M'_j = b_i M'_i$ jollain $b_i \geq 0$. Toisaalta nyt M' on suureen M jälkiprosessointi, eli M on jälkiprosessointipuhdas.

Olkoon nyt M jälkiprosessointipuhdas. Jokainen operaattori $M_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ voidaan kirjoittaa muodossa $M_i = \sum_{k=1}^{m_i} |d_{ik}\rangle\langle d_{ik}| = \sum_{k=1}^{m_i} \lambda_{ik}|\phi_{ik}\rangle\langle\phi_{ik}|$, missä $\{\phi_{ik}\}_{k=1}^{m_i}$ muodostaa avaruuden $M_i(\mathcal{H})$ ortonormaalin kannan ja λ_{ik} ovat operaattorin M_i ominaisarvot. Nyt voidaan muodostaa uusi suure M^1 kaavalla $M^1_{ik} = |d_{ik}\rangle\langle d_{ik}|$. Määritelmästä seuraa, että suure M on suureen M^1 jälkiprosessointi. Toisaalta M oletettiin jälkiprosessointipuhtaaksi, joten M^1 on suureen M jälkiprosessointi, jolloin $M^1_{ik} = \sum_{j=1}^N p_{jl} M_j$, missä (p_{jl}) muodostaa $N \times (\sum_{i=1}^N m_i)$-todennäköisyysmatriisin ja $l = k + \sum_{a=1}^i m_a$. Koska $p_{jl} \geq 0$ kaikilla j, l, saadaan $M^1_{ik} = M_i$ eli $\dim M_i(\mathcal{H}) =$

$m_i = 1$ kaikilla i. Näin ollen M on asteen 1 suure.

□

Jälkiprosessointipuhtaat, preparointi- ja asteen 1 suureet muodostavat saman suurejoukon, joten tästä eteenpäin voidaan näitä suureita käsiteltäessä käyttää pelkästään termiä asteen 1 suure.

Lause 3.3. *M on infotäydellinen suure jos ja vain jos operaattorien M_i (kompleksisten) lineaarikombinaatioiden ultraheikko sulkeuma on $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Todistus. ([1, Prop. 18.1]) Olkoon M infotäydellinen suure. Jokainen itseadjungoitu jälkiluokkaoperaattori $T \in \mathcal{T}_s(\mathcal{H})$ voidaan esittää tilojen $\rho_j \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ lineaarikombinaationa $T = \sum_{j=1}^{n} c_j \rho_j$, missä $0 \neq c_j \in \mathbb{C}$ kaikilla j. Suureen M infotäydellisyydestä seuraa, että jos $\mathrm{tr}[TM_i] = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{tr}[\rho_j M_i] = 0$ kaikilla i, niin $T = \sum_{j=1}^{n} c_j \rho_j = 0$. Jokainen operaattori $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ voidaan kirjoittaa itseadjungoitujen jälkiluokkaoperaattorien summana $T = \sum_{j=1}^{m} b_j T_j$, missä $b_j \in \mathbb{C}$ kaikilla j, joten jos $\mathrm{tr}[TM_i] = 0$ kaikilla i, niin $T = 0$. Toisaalta $T = 0$ jos ja vain jos $\mathrm{tr}[TA] = 0$ kaikilla $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Näin ollen jokainen operaattori $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ voidaan kirjoittaa operaattorien M_i kompleksisena lineaarikombinaationa eli $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ on operaattorien M_i lineaarikombinaatioiden ultraheikko sulkeuma.

Olkoon nyt $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ operaattorien M_i lineaarikombinaatioiden ultraheikko sulkeuma, $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja $\mathrm{tr}[TM_i] = 0$ kaikilla i. Tällöin $\mathrm{tr}[TA] = 0$ kaikilla $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, joten $T = 0$. Nyt kaikille tiloille $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ pätee $\rho_1 = \rho_2$ kun $\mathrm{tr}[\rho_1 M_i] = \mathrm{tr}[\rho_2 M_i]$ kaikilla i, eli M on infotäydellinen suure. □

Lause 3.4. *Olkoon $M_i = \sum_{k=1}^{m_i} |d_{ik}\rangle\langle d_{ik}|$ määritelty kuten lauseen 3.2 todistuksessa. Suure M on ekstremaalinen jos ja vain jos operaattorit $|d_{ik}\rangle\langle d_{il}|$ $(1 \leq i < N+1$, $1 \leq k, l < m_i + 1)$ ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Todistus. ([6, lause 2]) M ei ole ekstremaalinen suure jos ja vain jos on olemassa itseadjungoitu operaattorimitta D ja reaaliluku $\epsilon > 0$ siten, että $M \pm \epsilon D$ ovat molemmat suureita. Ekvivalentisti yhtälöllä $M(\Omega) = I = M(\Omega) \pm \epsilon D(\Omega) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} D_i = 0$ on ei-triviaaleja ratkaisuja. Koska $M \pm \epsilon D$ ovat molemmat suureita, täytyy olla $M \pm \epsilon D \geq 0 \Leftrightarrow \epsilon |D| \leq M$. Tästä seuraa $\mathrm{supp}(D_i) \subset \mathrm{supp}(M_i)$, joten jokainen operaattori D_i voidaan esittää operaattorien $|d_{ik}\rangle\langle d_{il}|$ lineaarikombinaationa, jolloin yhtälöllä $\sum_{i=1}^{N} \sum_{i,k=1}^{m_i} D_{ikl} |d_{ik}\rangle\langle d_{il}| = 0$ on ei-triviaaleja ratkaisuja, eli operaattorit $|d_{ik}\rangle\langle d_{il}|$ ovat lineaarisesti riippuvia. □

Lause 3.5. *Jos M on ekstremaalinen infotäydellinen suure, se on asteen 1 suure.*

Todistus. Ekstremaalisen ja infotäydellisen suureen määritelmien seurauksena $|\{M_i\}_{i=1}^{|\Omega|}| = d^2$, operaattorit M_i ovat lineaarisesti riippumattomia ja mikä tahansa $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ voidaan esittää näiden operaattorien lineaarikombinaationa. Toisin sanoen $\{M_i\}_{i=1}^{|\Omega|}$ on vektoriavaruuden $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kanta. Oletetaan, että on olemassa operaattori M_i, jolle $\dim(M_i\mathcal{H}) \geq 2$. Valitaan avaruuden $M_i(\mathcal{H})$ ortonormaaliksi kannaksi $\{\phi_i\}_{i=1}^{\dim(M_i\mathcal{H})}$, jolloin operaattorit $|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ ovat ortogonaalisia ja $\{M_j\}_{j=1,\, j\neq i}^{|\Omega|} \cup \{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\}_{i=1}^{\dim(M_i\mathcal{H})}$ on myös avaruuden $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kanta. Toisaalta oletuksen mukaan $\dim(M_i\mathcal{H}) \geq 2$, joten nämä kaksi avaruuden $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kantaa sisältävät eri määrän alkioita, mikä on ristiriita. Siis $\dim(M_i\mathcal{H}) = 1$ kaikilla i. □

Lause 3.6. *M on esiprosessointipuhdas, jos ja vain jos se on arvonsa määräävä suure.*

Todistus. Olkoon M esiprosessointipuhdas ja μ todennäköisyysmitta avaruudella $(\Omega, 2^\Omega)$, jolle $M \sim \mu$. Määritellään projektiomitta $P_\mu : 2^\Omega \to \mathcal{L}(L^2(\mu))$, $(P_\mu(X)\psi)(x) = \chi_X \psi(x)$. $L^2(\mu)$ on separoituva Hilbertin avaruus, joten $P_\mu = \Phi(M)$ jollekin kanavalle $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(l^2(\mu))$ [7, lause 3b] . Tällöin kaikille $\rho \in \mathcal{S}(L^2(\mu))$, $X \in 2^\Omega$ on $\mathrm{tr}[\rho P_\mu(X)] = \mathrm{tr}[\rho\Phi(M(X))] = \mathrm{tr}[\Phi_*(\rho)M(X)]$. Olkoon $\rho_X = \mu(X)^{-2}|\chi_X\rangle\langle\chi_X|$ kun $M(X) \neq 0$. Selvästi $\rho_X \in \mathcal{S}(L^2(\mu))$. Olkoon vielä tilan $\Phi_*(\rho)$ spektraalihajotelma $\Phi_*(\rho) = \sum_{n=1}^{r} \lambda_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$, missä siis $\lambda_n > 0$ kaikilla $n < r+1$, $\sum_{n=1}^{r} \lambda_n = 1$ ja $\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{nm}$. Nyt $1 = \mathrm{tr}[\rho P_\mu(X)] = \sum_{n=1}^{r} \lambda_n \langle\phi_n|M(X)\phi_n\rangle$, jolloin $\langle\phi_n|M(X)\phi_n\rangle = 1$ ja $M\phi_n = \phi_n$ kaikille $n < r+1$.

Oletetaan nyt, että jokaista $M(X) \neq 0$ kohti on olemassa vähintään yksi yksikkövektori $\phi \in \mathcal{H}$, jolle $M(X)\phi = \phi$. Merkitään projektiota joukkoa X vastaavaan ominaisavaruuteen symbolilla P_X. Valitaan nyt jokaiselle $i < N+1$ yksikkövektori $\phi_i \in P_{x_i}(\mathcal{H})$. Määritellään operaattori $R = \sum_{i=1}^{N} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ ja kanava $\Psi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(R\mathcal{H})$, $\Psi(A) = RAR$. Nyt $\Psi(M_i) = RM_iR = \sum_{j=1}^{N} |\phi_j\rangle\langle\phi_j|M_i\phi_j\rangle\langle\phi_j| = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i| = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$. Tästä voidaan identifioida uusi projektiomitta $P = \Psi(M) : 2^{\Omega} \to \mathcal{L}(R(\mathcal{H}))$, $P(\{x_i\}) = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$. Selvästi $M \ll P$, jolloin on olemassa kanava Ψ', jolle $M = \Psi'(P)$ [7, lause 3b]. Oletetaan nyt, että M on jonkin suureen M' esiprosessointi, eli $M = \Phi(M')$ kanavalle Φ. Tällöin $P = \Psi \circ \Phi(M')$ ja $M' \ll P$, joten $M' = \Phi'(P)$ jollekin kanavalle Φ' [7, lause 3b]. Toisaalta tästä seuraa $M' = \Phi'(P) = \Phi' \circ \Psi(M)$, eli M on esiprosessointipuhdas. □

Lause 3.7. *Suure $M : 2^{\Omega} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on esiprosessointipuhdas, jos ja vain jos on olemassa suljettu aliavaruus $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$, PVM $P : 2^{\Omega} \to \mathcal{L}(\mathcal{M})$ ja POVM $F : 2^{\Omega} \to \mathcal{L}(\mathcal{M}^{\perp})$ joille $M(X) = 0 \Leftrightarrow P(X) = 0$ ja $M(X) = P(X) \oplus F(X)$ kaikilla $X \in 2^{\Omega}$.*

Todistus. Olkoon $L^2(\mu)$ kuten edellisen lauseen todistuksessa. Oletetaan, että M on esiprosessointipuhdas. Tällöin se voidaan esiprosessoida kanavan $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(L^2(\mu))$ avulla suureeksi P_μ, $P_\mu \sim M$. Todistuksessa tarvitaan seuraavaa aputulosta.

Lemma 3.8. *Olkoon $\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ kanava ja R kanavan tukiprojektio. Jos $A \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ ja $\Phi(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$, niin $RAR \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, $RA = AR$ ja $A = RAR + R^{\perp}AR^{\perp}$.*

Todistus. Olkoon $A \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$, $\Phi(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$. Nyt $\Phi(A) = \Phi(RAR)$ joten $\Phi(RAR) = \Phi(RAR)^2 \leq \Phi(RARAR)$ eli $\Phi(RAR - RARAR) \leq 0$. Toisaalta $RAR \geq RARAR$, joten $\Phi(RAR - RARAR) = 0$. Oletuksen mukaan $ARA \leq A \leq I_{\mathcal{H}}$ eli $RARAR \leq RAR$, joten $RAR = RARAR$. Tästä puolestaan seuraa $(RAR)^2 = RARAR = RAR$, jolloin $RAR \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Voidaan lisäksi päätellä $((I-R)AR)^*((I-R)AR) = RA(I-R)AR = 0$ jolloin $AR = RAR = (RAR)^* = (AR)^* = RA$. Lopuksi kommutatiivisuudesta seuraa $A = (R + R^{\perp})A(R + R^{\perp}) = RAR + R^{\perp}AR^{\perp}$. □

Aputuloksen perusteella on olemassa $R \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, jolle $\Phi(R) = I_{L^2(\mu)}$ ja $M(X) = RM(X)R + R^{\perp}M(X)R^{\perp}$ kaikilla $X \in 2^{\Omega}$. $M(X) = 0$, niin selvästi $RM(X)R = 0$. Toisaalta jos $RM(X)R = 0$, niin $P_{\mu}(X) = \Phi(RM(X)R) = 0$ joten $\mu(X) = 0$ ja $M(X) = 0$. M on haluttua muotoa, sillä voidaan valita $\mathcal{M} = R(\mathcal{H})$, $P(\cdot) = RM(\cdot)R$ ja $F(\cdot) = R^{\perp}M(\cdot)R^{\perp}$.

Olkoon nyt M lauseessa väitettyä muotoa. P on suureen M esiprosessointi, kanavaksi kelpaa esimerkiksi projektio aliavaruuteen $\mathcal{M}$. Olkoon suure $M' : 2^{\Omega} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}')$ suureen M esiprosessointi, jolle $M' \sim M \sim P$. Tällöin M' on suureen P esiprosessointi [7, lause 3b]. Koska kahden kanavan yhdiste on aina kanava, M' on myös suureen M esiprosessointi.

$\square$

Tämän kappaleen tulosten perusteella voidaan erottaa kaksi alkiovierasta, useita optimaalisuuskriteerejä täyttävää suurejoukkoa. Ensimmäisen joukon muodostavat esiprosessointipuhtaat asteen 1 suureet, jotka ovat itse asiassa asteen 1 projektiomittoja (koska tällöin lauseen 3.7. merkintöjä käyttäen $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ ja $\mathcal{M}^{\perp} = \{0\}$). Toinen mielenkiintoinen suurejoukko koostuu ekstremaalisista infotäydellisistä suureista, jotka ovat aina myös asteen 1 suureita. Nämä kaksi joukkoa ovat alkiovieraita, sillä suure ei voi olla sekä esiprosessointipuhdas että infotäydellinen.

Suureiden optimaalisuuteen palataan luvussa 6, jossa tarkastellaan kovarianssin aiheuttamia lisärajoitteita optimaalisten suureiden muodolle ja olemassaololle. Ensin täytyy kuitenkin käydä läpi kovarianssin matemaattinen muotoilu mittausteoriassa sekä ryhmien esitysteoriaa, jolle tämä muotoilu perustuu.

4 Diskreettien ryhmien esitysteoriaa

Ryhmien esitysteoria on matematiikan haara, joka tutkii ryhmien toimintaa ja rakennetta lineaarialgebran keinoin. Se on keskeinen osa kvanttimekaniikkaa ja etenkin kovarianttien suureiden tutkimusta. Erityisen tärkeitä ovat fysikaalisen systeemin symmetriaryhmän unitaariesitykset, indusoidut esitykset ja imprimitiivisysteemit. Tässä luvussa käydään läpi diskreettien ryhmien esitysteorian perustuloksia, joita tarvitaan suureiden kovarianssin yhteydessä. Lähdetään liikkeelle ryhmäteorian ja ryhmien esitysteorian määritelmistä, jotka löytyvät esimerkiksi edellä mainitusta Grilletin kirjasta [4, luvut 1.2 ja 2.3]. Tämän luvun ajan G on diskreetti ryhmä ja Ω on tuttuun tapaan diskreetti joukko.

4.1 Ryhmäteorian määritelmiä

Määritelmä 4.1. *Ryhmän G keskus on joukko*

$Z(G) = \{g \in G : \ gh = hg \text{ kaikilla } h \in G\}.$

Määritelmä 4.2. *Alkion $g \in G$ sentralisaattori on joukko $Z_g = \{h \in G : gh = hg\}$.*

Määritelmä 4.3. *G on kommutatiivinen eli Abelin ryhmä, jos $Z(G) = G$.*

Määritelmä 4.4. *Alkion $g \in G$ konjugaattiluokka on joukko $C_g = \{hgh^{-1} : h \in G\}$.*

Määritelmä 4.5. *Ryhmän G aliryhmän H vasemmat (oikeat) sivuluokat ovat joukkoja $gH = \{gh : \ h \in H\}$ $(Hg = \{hg : \ h \in H\})$.*

Määritelmä 4.6. *Ryhmän G aliryhmä H on normaali, jos $gH = Hg$ kaikilla $g \in G$. Normaalia aliryhmää merkitään $H \trianglelefteq G$.*

4.2 Ryhmän operointi joukossa

Määritelmä 4.7. *Ryhmän G operointi joukossa Ω on kuvaus $f : G \times \Omega \to \Omega$, jolle $ex = x$ identiteettialkiolla $e \in G$ ja $(gh)x = g(hx)$ kaikilla $g, h \in G$. Jos ryhmälle G voidaan määritellä toiminta joukossa Ω sanotaan, että G operoi joukossa Ω ja Ω on G-avaruus.*

Määritelmä 4.8. *Alkion $x \in \Omega$ rata on joukko $O_G(x) = \{gx \,:\, g \in G\}$.*

Määritelmä 4.9. *Alkion $x \in \Omega$ stabilisaattori on joukko $G_x = \{g \in G \,:\, gx = x\}$.*

Lause 4.1. *Oletetaan, että ryhmä G operoi joukossa Ω. Olkoon $x_0 \in \Omega$ ja $g_x \in G$ alkio, jolle $x = g_x x_0$. Tällöin $G_x = g_x G_{x_0} g_x^{-1}$ kaikilla $x \in O_G(x_0)$.*

Todistus. $gx = x$ jos ja vain jos $g g_x x_0 = g_x x_0$ eli $g_x^{-1} g g_x x_0 = x_0$, joten $g \in G_x$ jos ja vain jos $g_x^{-1} g g_x \in G_{x_0}$. Siis $G_x = g_x G_{x_0} g_x^{-1}$ kaikilla $x \in O_G(x_0)$. □

Lause 4.2. *Oletetaan, että ryhmä G toimii joukossa Ω ja valitaan jokaiselta radalta alkio $x_o \in \Omega$. Radat $O_g(x_o)$ voidaan samaistaa sivuluokkien gG_{x_o} kanssa.*

Todistus. Olkoon $g \in G$ ja $h \in G_{x_o}$. Tällöin $(gh)x_o = g(hx_o) = gx$, joten kuvaus $gx_o \mapsto gG_{x_o}$ on bijektio. □

Määritelmä 4.10. *G toimii joukossa Ω transitiivisesti, jos kaikille $x, y \in \Omega$ on olemassa $g \in G$, jolle $gx = y$.*

4.3 Yleistä esitysteoriaa

Ryhmien esitysteorian tarkoituksena on tutkia ryhmien toimintaa vektoriavaruuksissa. Tällä tavoin useita ryhmäteorian ongelmia voidaan käsitellä lineaarialgebran keinoin. Menetelmästä on usein hyötyä, sillä lineaarialgebra on monilta osin paremmin tunnettua kuin ryhmäteoria. Tämä ja seuraava kappale perustuvat Etingofin *et al.* esitysteoriaa käsittelevään oppikirjaan [8, luvut 2.3, 4.2 - 4.7].

Määritelmä 4.11. *Ryhmän G esitys on järjestetty pari (V, σ), missä V on vektoriavaruus, $\sigma : G \to \mathrm{End}(V)$ on homomorfismi ja $\mathrm{End}(V)$ on vektoriavaruuden V endomorfismien muodostama ryhmä.*

Jos esityksessä käytetty homomorfismi σ on selvä konstekstista tai sen eksplisiittisellä rakenteella ei ole tilanteen kannalta merkitystä, merkitään esitystä lyhyesti pelkkänä vektoriavaruuena V. Toisinaan saatetaan esityksestä käyttää myös alaindeksimerkintää V_σ. Seuraavissa määritelmissä G on ryhmä ja (V, σ) sen esitys.

Määritelmä 4.12. *Esityksen V aliesitys on (vektori)aliavaruus $W \subset V$, jolle $\sigma(g)(W) = W$ kaikilla $g \in G$.*

Määritelmä 4.13. *V on redusoitumaton esitys, jos sillä ei ole aitoja ei-triviaaleja aliesitysiä eli jos sen ainoat aliesitykset ovat $\{0\}$ ja V. Esitys on redusoituva, jos se ei ole redusoitumaton ja täysin redusoituva, jos se hajoaa redusoitumattomien esitysten suoraksi summaksi.*

Määritelmä 4.14. *V on hajoamaton esitys, jos $V \not\cong V_1 \oplus V_2$ millekään ei-triviaaleille esityksille $V_1, V_2 \subset V$. Esitys on hajoava, jos se ei ole hajoamaton.*

On selvää, että redusoitumattomat esitykset ovat myös hajoamattomia. Huomattakoon kuitenkin, että sama ei päde toisinpäin. Esitys voi nimittäin olla tietyissä tilanteissa hajoamaton, mutta redusoituva [8, esim. 2.3.14.]. Tällaisiin tilanteisiin ei kuitenkaan törmätä tämän tutkielman aihepiirissä. Jatkossa jokaisen esityksen vektoriavaruudeksi oletetaan separoituva kompleksinen Hilbertin avaruus, ellei toisin mainita.

Määritelmä 4.15. *Ryhmän G esitysten (V_1, σ_1) ja (V_2, σ_2) välinen homomorfismi on rajoitettu lineaarikuvaus $\phi : V_1 \to V_2$, jolle $\phi\sigma_1(g) = \sigma_2(g)\phi$ kaikilla $g \in G$. Esitysten (V_1, σ_1) ja (V_2, σ_2) välisten homomorfismien joukkoa merkitään $\mathfrak{C}(\sigma_1, \sigma_2)$ tai $\mathfrak{C}(\sigma_1)$ kun $\sigma_1 = \sigma_2$.*

Määritelmä 4.16. *Olkoon G ryhmä. Luokkafunktio on funktio $f : G \to \mathbb{C}$, jonka arvo riippuu vain konjugaattiluokasta, eli $f(aga^{-1}) = f(g)$ kaikille $g, a \in G$.*

Ryhmän G luokkafunktioiden $f : G \to \mathbb{C}$ joukkoa merkitään tästä eteenpäin symbolilla $C(G, \mathbb{C})$. Luokkafunktioiden hyödyllisen osajoukon muodostavat esityksen karakterit.

Määritelmä 4.17. *Esityksen $(\mathcal{H}, \sigma)$ karakteri on kuvaus $\chi_{\mathcal{H}} : G \to \mathbb{C}$,*
$\chi_{\mathcal{H}}(g) = \mathrm{tr}[\sigma(g)]$.

Seuraava Schurin lauseena tunnettu perustulos kertoo, miten redusoitumattomat esitykset vaikuttavat esitysten välisten homomorfismien rakenteeseen.

Lause 4.3. *(Schur) Olkoon $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ ryhmän G esityksiä ja $\phi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ei-triviaali homomorfismi. Jos $\mathcal{H}_1$ on redusoitumaton, niin ϕ on injektiivinen ja jos $\mathcal{H}_2$ on redusoitumaton, niin ϕ on surjektiivinen.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{H}_1$ redusoitumaton. $\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathcal{H}_1$ on esityksen $\mathcal{H}_1$ aliesitys, mutta $\mathrm{Ker}\phi \neq \mathcal{H}_1$ koska ϕ on ei-triviaali, joten redusoitumattomuudesta seuraa $\mathrm{Ker}\,\phi = 0$ eli ϕ on injektiivinen.

Olkoon nyt $\mathcal{H}_2$ redusoitumaton. Selvästi $\mathrm{Im}\phi \subset \mathcal{H}_2$ on esityksen $\mathcal{H}_2$ aliesitys ja $\mathrm{Im}\,\phi \neq 0$, joten $\mathrm{Im}\,\phi = \mathcal{H}_2$ eli ϕ on surjektiivinen. □

Tässä tutkielmassa käytettyjen esitysten skalaarikuntana on aina $\mathbb{C}$, joka on algebrallisesti suljettu. Tällaisille esityksille saadaan Schurin lemmasta hieman vahvempi versio.

Seuraus 4.3.1. *Olkoon $\mathcal{H}$ ryhmän G redusoitumaton äärellisulotteinen esitys ja $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ homomorfismi. Tällöin $\phi = \lambda I$, missä $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Todistus. Olkoon λ kuvauksen ϕ ominaisarvo. Se on olemassa, koska $\mathcal{H}$ on äärellisulotteinen ja $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu. Nyt $\mathrm{Ker}(\phi - \lambda I) \neq \{0\}$, joten Schurin lauseen perusteella $\mathrm{Ker}(\phi - \lambda I) = \mathcal{H}$. □

Äärellisten ryhmien esityksille ja luokkafunktioille on olemassa useita esitysten analysoinnin kannalta hyödyllisiä tuloksia. Seuraavassa esitellään karakterien ja esitysten ortogonaalisuusrelaatioita sekä ryhmän kertaluvun ja redusoitumattoman esityksen dimension välistä suhdetta.

Lause 4.4. *Määritellään sisätulo avaruudessa $C(G, \mathbb{C})$ kaavalla $(f_1, f_2)_G = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}_1(g) f_2(g)$. Jos $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ ovat redusoitumattomia esityksiä, niin $(\chi_{\mathcal{H}}, \chi_{\mathcal{K}})_G = 1$ kun $\mathcal{H} \cong \mathcal{K}$ ja $(\chi_{\mathcal{H}}, \chi_{\mathcal{K}})_G = 0$ kun $\mathcal{H} \ncong \mathcal{K}$.*

Todistus. ([9, lause 5.3]) Määritellään homomorfismi $f^* : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ kaavalla $f^* = \sum_{x \in G} \sigma_{\mathcal{K}}(x^{-1}) f \sigma_{\mathcal{H}}(x)$, missä $f : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ on homomorfismi.

Olkoon $\mathcal{H} \ncong \mathcal{K}$, $\{\phi_i\}_i$ avaruuden $\mathcal{H}$ ja $\{\psi_i\}_i$ avaruuden $\mathcal{K}$ ortonormaali kanta. Schurin lauseen perusteella f^* on triviaali kuvaus kaikilla homomorfismeilla f. Valitaan homomorfismiksi $f = \sum_{i,j} f_{ij} = \sum_{i,j} |\psi_i\rangle\langle\phi_j|$ jolloin $f^*_{ij} = \sum_{x \in G} \sigma_{\mathcal{K}}(x^{-1}) f_{ij} \sigma_{\mathcal{H}}(x)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in G} \overline{\chi_{\mathcal{H}}}(x) \chi_{\mathcal{K}}(x) &= \sum_{x \in G} \sum_{i,j} \langle \psi_i | \sigma_{\mathcal{K}}(x^{-1}) \psi_i \rangle \langle \phi_j | \sigma_{\mathcal{H}}(x) \phi_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \psi_i | f^*_{ij} \phi_j \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Olkoon nyt $\mathcal{H} \cong \mathcal{K}$. Isomorfisille esityksille on voimassa $\sigma_{\mathcal{H}} = M^{-1} \sigma_{\mathcal{K}} M$, missä $M \in GL_{\dim \mathcal{H}}(\mathbb{C})$. Näin ollen isomorfisilla esityksillä on täsmälleen samat karakterit. Nyt $\sum_{x \in G} \overline{\chi_{\mathcal{H}}}(x) \chi_{\mathcal{K}}(x) = \sum_{x \in G} \chi_{\mathcal{H}}(x^{-1}) \chi_{\mathcal{H}}(x)$. Schurin lauseen perusteella $f^* = \lambda I$ kaikilla homomorfismeilla f. Kuvaukset f_{ij} ja f^*_{ij} voidaan siis määritellä kuten edellä, mutta kuvauksina $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Voidaan vieläpä valita $f = f_{ij}$, jolloin

$$\begin{aligned}
\lambda \dim \mathcal{H} &= \mathrm{tr}[f^*] \\
&= \sum_{x \in G} \sum_k \langle \phi_k | \sigma_{\mathcal{H}}(x^{-1}) | \phi_i \rangle \langle \phi_j | \sigma_{\mathcal{H}}(x) \phi_k \rangle \\
&= |G| \mathrm{tr}[|\phi_i\rangle\langle\phi_j|] \\
&= |G| \delta_{ij}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in G} \chi_{\mathcal{H}}(x^{-1}) \chi_{\mathcal{H}}(x) &= \sum_{x \in G} \sum_{i,j} \langle \phi_i | \sigma_{\mathcal{H}}(x^{-1}) | \phi_i \rangle \langle \phi_j | \sigma_{\mathcal{H}}(x) \phi_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \phi_i | f^*_{ij} \phi_j \rangle \\
&= \sum_i \langle \phi_i | \frac{|G|}{\dim \mathcal{H}} \phi_i \rangle \\
&= |G|
\end{aligned}$$

□

Lause 4.5. *Olkoon G ryhmä ja $Z_g \subset G$ alkion $g \in G$ sentralisaattori. Olkoon lisäksi $h \in G$ ja $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in I}$ ryhmän G redusoitumattomien esitysten joukko. Tällöin $\sum_{i \in I} \overline{\chi_{\mathcal{H}_i}(g)} \chi_{\mathcal{H}_i}(h) = |Z_g|$ kun g ja h kuuluvat samaan konjugaattiluokkaan ja 0 muulloin.*

Todistus. ([9, lause 5.3 ja 8, huomio 4.5.5]) Olkoon $\{g_j\}_{j=1}^n$ jokin ryhmän G konjugaattiluokkien edustajisto. Edellisen lauseen perusteella

$$\begin{aligned}
&\sum_{g \in G} \overline{\chi_{\mathcal{H}_i}(g)} \chi_{\mathcal{H}_k}(g) = |G| \\
\Leftrightarrow &\sum_{j=1}^n \overline{\chi_{\mathcal{H}_i}(g_j)} \chi_{\mathcal{H}_k}(g_j) |G| / |Z_{g_j}| = |G| \\
\Leftrightarrow &\sum_{j=1}^n \overline{\chi_{\mathcal{H}_i}(g_j)} \chi_{\mathcal{H}_k}(g_j) / |Z_{g_j}| = 1,
\end{aligned}$$

kun $\mathcal{H}_i \cong \mathcal{H}_k$ ja $\sum_{g\in G} \overline{\chi_{\mathcal{H}_i}(g)}\chi_{\mathcal{H}_k}(g) = 0$ kun $\mathcal{H}_i \ncong \mathcal{H}_k$. Olkoon nyt $U = (\chi_{\mathcal{H}_i}(g_j) / \sqrt{|Z_{g_j}|})_{ij}$ matriisi, jonka rivejä luettelevat ryhmän G keskenään ei-isomorfiset redusoitumattomat esitykset ja sarakkeita luettelevat konjugaattiluokkien edustajat g_j. Edellä olevan laskun perusteella matriisin U rivit ovat ortonormaalit. Koska tarkasteltava ryhmä on äärellinen, ovat redusoitumattomat esitykset äärellisulotteisia, joten U on itse asiassa unitaarinen matriisi. Tällöin myös matriisin U sarakkeet ovat ortonormaalit, mistä väite seuraa. □

Seuraavan lauseen todistuksessa tarvitaan ykkösenjuuren ja algebrallisen kokonaisluvun käsitteitä. Menemättä sen syvemmin algebrallisten lukujen teoriaan todetaan, että algebrallinen kokonaisluku on jonkin kokonaislukukertoimisen pääpolynomin (polynomi, jonka johtavan termin kerroin on 1) juuri. Kertalukua n oleva ykkösenjuuri on mikä tahansa luku $x \in \mathbb{C}$, jolle $x^n = 1$. Kunnan $\mathbb{C}$ karakteristika on 0 ja se on algebrallisesti suljettu, joten kertaluvun n ykkösenjuuria on aina n kappaletta.

Lause 4.6. *Olkoon G äärellinen ryhmä, $Z(G)$ sen keskus ja $(\mathcal{H}, \sigma)$ äärellisulotteinen redusoitumaton esitys. Tällöin* $\dim \mathcal{H}$ *jakaa luvun* $|G : Z(G)|$.

Todistus. ([9, lause 22.1]) Olkoot $C_1, \ldots, C_h$ ryhmän G konjugaattiluokat ja $x_i \in C_i, |C_i| = h_i$ kaikilla $1 \leq i \leq h$. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ konjugaattiluokille seuraavasti: $C_i \sim C_j$ jos ja vain jos $C_i = zC_j$ jollekin $z \in Z(G)$. Olkoon t niiden ekvivalenssiluokkien lukumäärä, joissa on $|Z|$ konjugaattiluokkaa ja olkoon σ injektiivinen. Nyt kaikille ekvivalenssiluokille $[C_k]$, joissa on vähemmän kuin $|Z(G)|$ alkiota, täytyy olla $C_m = zC_n$ jollain $z \in Z(G), z \neq 1$. Tällöin myös $\sigma(z) = \lambda_z I$ jollain $\lambda_z \in \mathbb{C}$, joten $\chi(x_i) = \chi(zx_i) = \lambda_z\chi(x_i)$. Toisaalta kuvauksen σ injektiivisyydestä seuraa $\lambda_z \neq 1$, joten $\chi(x_i) = 0$. Yhdistämällä tämä ehto ortogonaalisuusrelaatioihin (lauseet 4.4 ja 4.5) saadaan $|G| = \sum_{x\in G} |\chi(x)|^2 = \sum_{i=1}^{h} h_i|\chi(x_i)|^2 = \sum_{i=1}^{t|Z(G)|} h_i|\chi(x_i)|^2 = \sum_{i=1}^{t} |Z(G)|h_{i|Z(G)|}\chi(x_{i|Z(G)|})\overline{\chi(x_{i|Z(G)|})}$. Lauseen [viite] perusteella $h_{i|Z(G)|}\chi(x_{i|Z(G)|}) = \dim \mathcal{H}\alpha_i$, missä luvut α_i ovat algebrallisia kokonaislukuja.

Tällöin myös $\sum_{i=1}^{t} |Z(G)|\alpha_i \overline{\chi(x_{i|Z(G)|})} = |G|/(|Z|\dim \mathcal{H}) = |G : Z|/\dim \mathcal{H}$ on algebrallinen kokonaisluku. Se on myös rationaaliluku, joten $\dim \mathcal{H} \mid |G : Z|$.

Oletetaan nyt, että σ ei ole injektiivinen. Jos $\operatorname{Ker} \sigma = K$, niin $\dim \mathcal{H} \mid |G/K : Z(G/K)|$. $(Z(G)K)/K \leq Z(G/K)$ joten $\dim \mathcal{H} \mid |G/K : Z(G)K/K)|$, $|G/K : Z(G)K/K)| \mid |G : Z(G)K|$ ja $|G : Z(G) \times K| \mid |G : Z(G)|$ eli $\dim \mathcal{H} \mid |G : Z(G)|$. □

4.4 Unitaariesitykset

Määritelmä 4.18. $(\mathcal{H}, \sigma)$ *on unitaariesitys, jos kuvaukset* $\sigma(g)$ *ovat unitaarisia eli* $\langle \sigma(g)v|\sigma(g)w\rangle = \langle v|w\rangle$ *kaikilla* $v, w \in \mathcal{H}, g \in G$.

Lause 4.7. *Äärellisulotteinen unitaariesitys on täysin redusoituva.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{H}$ ryhmän G äärellisulotteinen unitaariesitys. Jos $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ on aliesitys, niin esityksen unitaarisuuden perusteella myös $\mathcal{K}^{\perp} \subset \mathcal{H}$ on aliesitys ja $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^{\perp}$. Aliesitys $\mathcal{K}$ oli mielivaltainen, joten väite seuraa. □

Unitaariesitykset ovat tärkeitä kvanttimekaniikassa, sillä Hilbertin avaruuden rajoitetut unitaarioperaattorit ovat täsmälleen avaruuden isometriset surjektiot. Tästä seuraa, että systeemin symmetriaryhmän unitaariesityksissä systeemin tilat kuvautuvat aina tiloiksi ja jokaisen tilan alkukuva on aina tila. Toisin sanoen, kvanttimekaniikan matemaattinen todennäköisyysrakenne ei rikkoudu.

4.5 Projektiiviset esitykset

Usein kvanttimekaanisen systeemin symmetriaryhmän esityksiä tutkittaessa ollaan kiinnostuttu operaattorien yleisestä rakenteesta, eikä operaattorien skalaarikertoimilla ole juurikaan väliä. Jättämällä huomiotta operaattorien mahdolliset kompleksilukukertoimet päädytään projektiivisiin esityksiin.

Lauseen 4.6 heikompi, mutta silti varsin hyödyllinen versio $\dim \mathcal{H} \mid |G|$ on voimassa myös projektiivisille esityksille, mutta niille edellä esitetty todistus ei yksin riitä, sillä kuvaus $\sigma : G \to \text{End}(\mathcal{H})$ ei välttämättä ole homomorfismi. Lausetta 4.6 tarvitaan aputuloksena, mutta todistus on kokonaisuudessaan pidempi ja työläämpi. Tämän kappaleen päätarkoituksena onkin yleistää redusoitumattomien esitysten dimension ja ryhmän kertaluvun välinen suhde projektiivisille esityksille. Kappaleessa seurataan Dornhoffin esitysteoriaa käsittelevän kirjan [9] lukua 25.

Määritelmä 4.19. *$(\mathcal{H}, \sigma)$ on projektiivinen esitys, jos kaikilla $x, y \in G$ on voimassa $\sigma(x)\sigma(y) = \alpha(x, y)\sigma(xy)$ jollekin $\alpha(x, y) \in \mathbb{C}$.*

Lause 4.8. *Olkoon $\mathcal{H}$ ryhmän G projektiivinen esitys. Tällöin $\alpha(x, yz)\alpha(y, z) = \alpha(x, y)\alpha(xy, z)$*

Todistus.

$$\begin{aligned}
\alpha(x, yz)\alpha(y, z)I &= \sigma(x)\sigma(yz)\sigma(xyz)^{-1}\alpha(y, z) \\
&= \sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)\sigma(xyz)^{-1} \\
&= \alpha(x, y)\sigma(xy)\sigma(z)\sigma(xyz)^{-1} \\
&= \alpha(x, y)\alpha(xy, z)I
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 4.20. *Projektiiviset esitykset $\mathcal{H}_1$ ja $\mathcal{H}_2$ ovat ekvivalentit, jos on olemassa unitaarikuvaus $f : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ja funktio $c : G \to \mathbb{C}$, joille $\sigma_1(x) = c(x)f^{-1}\sigma_2(x)f$ kaikilla $x \in G$.*

Lause 4.9. *Olkoon $\mathcal{H}_1$ ja $\mathcal{H}_2$ ekvivalentteja projektiivisia esityksiä. Tällöin $\alpha_1(x, y) = c(x)c(y)c(xy)^{-1}\alpha_2(x, y)$.*

Todistus.

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x, y)I &= \sigma_1(x)\sigma_1(y)\sigma_1(xy)^{-1} \\
&= c(x)f^{-1}\sigma_2(x)fc(y)f^{-1}\sigma_2(y)fc(xy)^{-1}f^{-1}\sigma_2(xy)^{-1}f \\
&= c(x)c(y)c(xy)^{-1}f^{-1}\alpha_2(x, y)f \\
&= c(x)c(y)c(xy)^{-1}\alpha_2(x, y)I
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 4.21. *Funktio* $\alpha : G \times G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *on kertojafunktio, jos se toteuttaa lauseen 4.8 kaavan. Kaksi ryhmän* G *kertojafunktiota* α *ja* β *ovat ekvivalentit, jos ne toteuttavat lauseen 4.9 kaavan jollain* $c : G \to \mathbb{C}$.

Määritelmä 4.22. *Ryhmän* G *Schur-kertoja on ekvivalenssiluokkien* $[\alpha]$ *muodostama Abelin ryhmä.*

Edellisen määritelmän mukainen ryhmä on hyvin määritelty, kun tulo-operaatioksi valitaan $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta]$, missä $(\alpha\beta)(x, y) = \alpha(x, y)\beta(x, y)$.

Lause 4.10. *Olkoon* $(\mathcal{H}, \sigma)$ *äärellisen ryhmän* G *redusoitumaton projektiivinen esitys. Tällöin* $\dim \mathcal{H}$ *jakaa ryhmän kertaluvun* $|G|$.

Todistus. Olkoon M ryhmän G Schur-kertoja. M on äärellinen Abelin ryhmä, joten $M = \langle [\alpha_1] \rangle \ldots \langle [\alpha_d] \rangle$ ja jokaisella alkiolla $[\alpha_i]$ on äärellinen kertaluku e_i. Todistuksessa tarvitaan seuraavaa aputulosta.

Lemma 4.11. *Olkoon* M *kuten edellä ja ekvivalenssiluokan* $[\alpha] \in M$ *kertaluku* e. *Tällöin on olemassa* $\alpha' \in [\alpha]$ *jolle kaikilla* $x, y \in G$ *luvut* $\alpha(x, y)$ *ovat kertaluvun* e *ykkösenjuuria.*

Todistus. Olkoon ekvivalenssiluokan $[\alpha] \in M$ kertaluku e. Tällöin on olemassa funktio $a : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jolle $\alpha(x, y)^e = a(x)a(y)a(xy)^{-1}$. Olkoon lisäksi $b : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funktio jolle $a(x)b(x)^e = 1$. Nyt $\alpha(x, y)b(x)b(y)b(xy)^{-1} \in [\alpha]$ ja $(\alpha(x, y)b(x)b(y)b(xy)^{-1})^e = a(x)b(x)^e a(y)b(y)^e a(xy)^{-1}b(xy)^{-e} = 1$ eli ekvivalenssiluokasta $[\alpha]$ voidaan valita α', jonka arvot $\alpha'(x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ovat kertaluvun e ykkösenjuuria kaikilla $x, y \in G$. □

Lemmasta seuraa, että kaikilla i funktioiden α_i arvojen voidaan olettaa koostuvan pelkästään kertaluvun e_i ykkösenjuurista. Arvot ovat siis muotoa $\alpha_i(x, y) =$

$\gamma_i^{\eta_i(x,y)}$, missä γ_i on primitiivinen ykkösenjuuri ja $0 \leq \eta_i(x,y) < e_i$. Lisäksi voidaan olettaa, että $\alpha_i(1,1) = 1$ kaikilla i.

Määritellään uusi funktio $a : G \times G \to \mathbb{C}$ kaavalla $a(x,y) = \prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{\eta_i(x,y)}$. Määritelmästä seuraa $a \in M$ ja

$$\begin{aligned} a(x,yz)a(x,y) &= \prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{\eta_i(x,yz)+\eta_i(y,z)} \\ &= \prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{\eta_i(x,y)+\eta_i(xy,z)} \\ &= a(x,y)a(xy,z) \end{aligned}$$

Lisäksi $1 = \alpha_i(1,1) = \gamma_i^{\eta_i(1,1)}$, joten $\eta_i(1,1) = 0$ kaikilla i. Tästä puolestaan seuraa $a(1,1) = 1$ jolloin $a(x,1) = a(x,1)a(x,1)$, $a(1,x)a(1,x) = a(1,x)$ ja $a(x,1)a(x^{-1},x) = a(x,x^{-1})a(1,x)$. Toisaalta M on Abelin ryhmä, joten $a(x,1) = a(1,x) = 1$ ja $a(x^{-1},x) = a(x,x^{-1})$.

Joukko $H = \{(x,m) : x \in G, m \in M\}$ muodostaa ryhmän tulo-operaation $(x,m)(y,n) = (xy, a(x,y)mn)$ suhteen. Tämän ryhmän neutraalialkio on $(1,1)$. Lisäksi $N = \{(1,m) : m \in M\}$ on ryhmän H keskuksen aliryhmä ($N \leq Z(H)$), joten M ja N ovat isomorfiset. Jos $h_x = (x,1)$, niin $h_x h_y = (xy, a(x,y)) = (xy,1)(1,a(x,y)) = h_{xy}(1,a(x,y))$ eli $\phi(x) = h_x N$ on isomorfismi $\phi : G \to H/N$ ja H on ryhmän G niin sanottu keskuslaajennus.

Olkoon nyt $(\mathcal{H}, \sigma_0)$ mikä tahansa ryhmän G redusoitumaton projektiivinen esitys. Määritellään esityksen $(\mathcal{H}, \sigma_0)$ kanssa ekvivalentti projektiivinen esitys $(\mathcal{H}, \sigma)$ kaavalla $\sigma(x) = c(x)^{-1}\sigma(x)_0$, missä $c : G \to \mathbb{C}$. Esityksellä $(\mathcal{H}, \sigma_0)$ on kertojafunktiona $\prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{l_i}$ joillain kokonaisluvuilla l_i. Määritellään vielä kuvaus $\bar{\sigma} : H \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$

kaavalla $\bar{\sigma}((x, \prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{u_i})) = \prod_{i=1}^d \gamma_i^{u_i l_i} \sigma(x)$. Nyt

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}((x, \prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{u_i}))\bar{\sigma}((y, \prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{v_i})) &= \prod_{i=1}^d \gamma_i^{(u_i+v_i)l_i} \sigma(x)\sigma(y) \\
&= \prod_{i=1}^d \gamma_i^{(u_i+v_i)l_i} c(x)^{-1} c(y)^{-1} \sigma_0(x)\sigma_0(y) \\
&= \prod_{i=1}^d \gamma_i^{(u_i+v_i)l_i} c(x)^{-1} c(y)^{-1} \prod_{j=1}^d [\alpha_j]^{l_j} c(x)c(y)c(xy)^{-1}\sigma_0(xy) \\
&= \prod_{i=1}^d \gamma_i^{(u_i+v_i+\eta_i(x,y))l_i} \sigma(xy) \\
&= \bar{\sigma}((xy, \prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{u_i+v_i+\eta_i(x,y)})) \\
&= \bar{\sigma}((xy, a(x,y) \prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{u_i+v_i})),
\end{aligned}$$

joten $(\mathcal{H}, \bar{\sigma})$ on ryhmän H (tavallinen) redusoitumaton esitys. Lisäksi $\sigma(1)\sigma(1) = \prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{l_i} \sigma(1)$, $\bar{\sigma}((1, \prod_{i=1}^d [\alpha_i]^{u_i})) = \prod_{i=1}^d \gamma_i^{u_i l_i} \sigma(1)$ ja $\bar{\sigma}((x,1)) = \sigma(x)$, joten $\bar{\sigma}$ saadaan itse asiassa "nostamalla"esitys σ ryhmän H esitykseksi. Lauseen 4.4 nojalla esitykselle $(\mathcal{H}, \bar{\sigma})$ on voimassa $\dim \mathcal{H} \mid |H : Z(H)|$. Toisaalta edellä osoitettiin $G \cong H/N$, missä $N \leq Z(H)$, joten $|H : Z(H)| \mid |G|$ ja lopuksi $\dim \mathcal{H} \mid |G|$. □

Projektiiviset esitykset tulevat käyttöön kovariantteja suureita tutkittaessa. Ne ovat luonnollinen tapa kuvailla systeemin symmetriaryhmän ei-kommutatiivisen aliryhmän indusoituja esityksiä. Kvanttimekaniikassa yleisin tällainen esitys on Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ projektiivisten unitaarioperaattorien ryhmä $\mathcal{PU}(\mathcal{H}) = \mathcal{U}(\mathcal{H})/U(1)$.

4.6 Rajoittuma ja indusoidut esitykset

Imprimitiivisysteemien yhteydessä tärkeäksi menetelmäksi muodostuu ryhmän esityksen konstruoiminen jonkin aliryhmän esityksestä. Tällaisia tilanteita varten määritellään esityksen rajoittuma ja indusoitu esitys [8, luku 5.8].

Määritelmä 4.23. *Esityksen $(\mathcal{H}, \sigma)$ rajoittuma aliryhmään $H \leq G$ on* $\mathrm{Res}_H^G \mathcal{H} = (\mathcal{H}, \sigma|_H)$.

Määritelmä 4.24. *Aliryhmän $H \leq G$ esityksen $(\mathcal{H}, \sigma)$indusoima ryhmän G esitys on* $\mathrm{Ind}_H^G \mathcal{H} = (\{f : G \to \mathcal{H} : f(hx) = \sigma(h)f(x) \text{ kaikilla } x \in G, h \in H\}, \rho)$*, missä* $\rho(g)f(x) = f(xg)$ *kaikille* $g \in G$.

Seuraava lause liittää yhteen luokkafunktioiden rajoitetut ja indusoidut versiot [8, lause 5.9.1].

Lause 4.12. *(Frobenius-kaava) Olkoon G äärellinen ryhmä, $H \leq G$ ja $(\mathcal{H}, \sigma)$ ryhmän H redusoitumaton esitys. Indusoidun esityksen karakteri saadaan kaavasta* $\mathrm{Ind}_H^G \chi_{\mathcal{H}}(g) = \dfrac{1}{|H|} \sum_{a \in G, aga^{-1} \in H} \chi_{\mathcal{H}}(aga^{-1})$.

Todistus. Olkoon $|G : H| = t$, $\{\tau_i\}_{i=1}^t$ ryhmän H (oikeiden) sivuluokkien joukko, $\{x_i\}_{i=1}^t$ jokin sivuluokkien τ_i edustajisto ja $\mathcal{H}_i = \{f \in \mathrm{Ind}_H^G \mathcal{H} : f(g) = 0 \,\mathrm{kun}\, g \notin \tau_i\}$. Selvästi $\mathrm{Ind}_H^G \mathcal{H} = \oplus_{i=1}^t \mathcal{H}_i$ joten $\mathrm{Ind}_H^G \chi_{\mathcal{H}}(g) = \chi_{\mathrm{Ind}_H^G \mathcal{H}}(g) = \sum_{i=1}^t \chi_{\mathcal{H}_i}(g)$. Sivuluokat ovat alkiovieraita, joten $\chi_{\mathcal{H}_i}(g) = 0$ kun $\tau_i g \neq \tau_i$ ja toisaalta $x_i g x_i^{-1} \in H$, kun $x_i \in \tau_i$ ja $\tau_i g = \tau_i$. Indusoidun esityksen määritelmästä seuraa, että arvot $f(x_i)$ määräävät kuvauksen $f \in \mathrm{Ind}_H^G$ kokonaan. Näin ollen voidaan määritellä isomorfismi $\alpha : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}$ kaavalla $\alpha(f) = f(x_i)$. Nyt $\alpha(\rho(g)f) = f(x_i g) = \sigma(x_i g x_i^{-1})\alpha(f)$, joten

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{H}_i}(g) &= \mathrm{tr}|_{\mathcal{H}_i} [\rho(g)] \\
&= \mathrm{tr}|_{\mathcal{H}_i} [\alpha^{-1}\rho(g)\alpha] \\
&= \mathrm{tr}|_{\mathcal{H}} [\sigma(x_i g x_i^{-1})] \\
&= \chi_{\mathcal{H}}(x_i g x_i^{-1})
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_H^G \chi_{\mathcal{H}}(g) &= \sum_{i=1, x_i g x_i^{-1} \in H}^{t} \chi_{\mathcal{H}}(x_i g x_i^{-1}) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{t} \sum_{h, x_i g x_i^{-1} \in H} \chi_{\mathcal{H}}(h x_i g x_i^{-1} h^{-1}) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{a \in G, aga^{-1} \in H} \chi_{\mathcal{H}}(aga^{-1})
\end{aligned}
$$

□

Lause 4.13. *(Frobenius-vastaavuus) [9, lause 9.4c] Olkoon G äärellinen ryhmä, $H \leq G$ ja $\alpha \in C(H, \mathbb{C}), \beta \in C(G, \mathbb{C})$. Tällöin* $(\mathrm{Ind}_H^G \alpha, \beta)_G = (\alpha, \mathrm{Res}_H^G \beta)_H$.

Todistus. Edellä määritellyn luokkafunktioiden sisätulon lineaarisuus- ja antilineaarisuusominaisuuksien sekä karakterien ortogonaalisuuden perusteella riittää todistaa väite redusoitumattomien esitysten karaktereille. Olkoon siis $\mathcal{H}_1$ ryhmän H ja $\mathcal{H}_2$ ryhmän G redusoitumaton esitys. Nyt

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ind}_H^G \chi_{\mathcal{H}_1}, \chi_{\mathcal{H}_2})_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Ind}_H^G \chi_{\mathcal{H}_1}(g) \chi_{\mathcal{H}_2}(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{|H|} \sum_{h \in G, hgh^{-1} \in H} \chi_{\mathcal{H}_1}(hgh^{-1}) \chi_{\mathcal{H}_2}(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G||H|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G, hgh^{-1} \in H} \chi_{\mathcal{H}_1}(hgh^{-1}) \chi_{\mathcal{H}_2}((hgh^{-1})^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G||H|} \sum_{g \in G} \sum_{a \in H} \chi_{\mathcal{H}_1}(a) \chi_{\mathcal{H}_2}(a^{-1}) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{a \in H} \chi_{\mathcal{H}_1}(a) \mathrm{Res}_H^G \chi_{\mathcal{H}_2}(a^{-1}) \\
&= (\chi_{\mathcal{H}_1}, \mathrm{Res}_H^G \chi_{\mathcal{H}_2})_H
\end{aligned}$$

□

5 Suureiden kovarianssi

Luvussa tarkastellaan kovarianssin merkitystä fysikaalisen teorian järkevyyden kannalta ja esitellään diskreettien suureiden kovarianssin tutkimisessa tarvittava matemaattinen koneisto. Tämän koneiston keskiössä ovat ryhmien indusoidut unitaariesitykset ja imprimitiivisysteemeiksi kutsutut rakenteet, joita koskevia perustuloksia luvussa myös esitetään. Ellei toisin mainita, koko tämän luvun ajan G on diskreetti (ei välttämättä äärellinen) ryhmä, $H \leq G$ sen aliryhmä ja Ω kvanttimekaaniseen systeemiin liittyvä mittaustulosten arvoavaruus, jossa G operoi. Lisäksi kaikki esitykset oletetaan unitaarisiksi, joten unitaariesitysten sijaan puhutaan pelkästään esityksistä.

5.1 Fysikaalinen lähtökohta

Fysiikan teorioissa kovarianssi tarkoittaa käytännössä oletusta, jonka mukaan fysiikan lait ovat kaikille havaitsijoille samat, eikä mikään koordinaatisto ole erityisasemassa. Teoria on esimerkiksi Galilei-kovariantti, mikäli sen ennustamat mittaustulokset eivät riipu havaitsijan paikasta, asennosta tai nopeudesta. Matemaattisessa mielessä kovarianssi redusoituu eräisiin sääntöihin, joiden mukaan fysiikan lait muuntuvat koordinaatiston muunnoksissa.

Mittausteoriassa kovarianssissa on kyse mittaustuloksia kuvaavien todennäköisyysmittojen tietynlaisesta muuntumisesta tutkittavan systeemin symmetriamuunnoksissa. Symmetriamuunnokset voidaan puolestaan nähdä systeemin puhtaiden tilojen automorfismeina eli kuvauksina, jotka permutoivat puhtaita tiloja keskenään ja säilyttävät tilojen väliset ehdolliset todennäköisyydet [10]. Wignerin lauseena tunnettu tulos kertoo, millä tavalla systeemin tilat muuntuvat tällaisissa automorfismeissa.

Lause 5.1 (Wigner)**.** *Olkoon* $\mathbf{P}$ *systeemin puhtaiden tilojen ja* $Aut(\mathbf{P})$ *puhtaiden tilojen automorfismien joukko. Puhtaiden tilojen automorfismeilla tarkoitetaan bijektioita* $\Phi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$*, joille* $\mathrm{tr}[\Phi(\rho_1)\Phi(\rho_2)] = \mathrm{tr}[\rho_1\rho_2]$ *kaikilla* $\rho_1,\ \rho_2 \in \mathbf{P}$*. Tällöin jokainen* $\Phi \in Aut(\mathbf{P})$ *on muotoa* $\Phi(\rho) = U\rho U^*$ *jollain ryhmän* $U(1)$ *muunnoksia vaille yksikäsitteisellä unitaari- tai antiunitaarioperaattorilla* $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$*.*

Todistus. ([10, lause 3.1]) Olkoon $\Phi \in Aut(\mathbf{P})$, $0 \neq \omega \in \mathcal{H}$ ja $O_\omega = \{\phi \in \mathcal{H} : \langle\omega|\phi\rangle > 0\}$. Selvästi $\phi_1 + \phi_2 \in O_\omega$ ja $\lambda\phi_1 \in O_\omega$ kun $\phi_1,\ \phi_2 \in O_\omega$ ja $\lambda > 0$. Olkoon $\rho_\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ projektio vektorin ω virittämälle yksidimensioselle aliavaruudelle ja olkoon ω' vektori projektion $\Phi(\rho_\omega)$ ominaisavaruudessa, jolle $||\omega'|| = ||\omega||$.

Rakennetaan seuraavaksi autoformismin Φ kanssa samankaltaisen rakenteen omaava normin säilyttävä lineaarioperaattori $T_\omega : O_\omega \to O_{\omega'}$. Kaikille $\phi \in O_\omega$ on olemassa yksikäsitteinen $\psi \in O_{\omega'}$, jolle $\Phi(\rho_\phi) = \rho_\psi$ ja $||\phi|| = ||\psi||$. Määritellään kuvaus $T_\omega : O_\omega \to O_{\omega'}$ kaavalla $T_\omega\phi = \psi$. Erityisesti $T_\omega\omega = \omega'$. Määritelmästä seuraa välittömästi, että T_ω on normin säilyttävä ja (positiivisten reaalilukujen) suhteen homogeeninen kuvaus sekä $\rho_{T_\omega\phi} = \Phi(\rho_\phi)$.

Todistetaan vielä kuvauksen T_ω additiivisuus. Olkoon $\phi_1,\ \phi_2 \in O_\omega$. Oletetaan ensin vektorit ϕ_i (missä $i = 1, 2$) lineaarisesti riippuvaisiksi toisistaan. Tällöin joukon O_ω määritelmästä seuraa $\phi_1 = \lambda\phi_2$ jollekin $\lambda \in \mathbb{R}$, jolloin

$$
\begin{aligned}
T_\omega(\phi_1 + \phi_2) &= T_\omega((\lambda + 1)\phi_2) \\
&= (\lambda + 1)T_\omega\phi_2 \\
&= T_\omega\phi_1 + T_\omega\phi_2
\end{aligned}
$$

Oletetaan nyt vektorit ϕ_i lineaarisesti riippumattomiksi. $\langle T_\omega\phi_i|\psi\rangle = 0$ jollain $\psi \in \mathcal{H}$ jos ja vain jos $\langle\phi_i|\psi'\rangle$ kaikilla $\psi' \in \Phi^{-1}(\rho_\psi)$. Toisaalta tällöin myös $\langle T_\omega(\phi_1 + \phi_2)|\psi\rangle = 0$, joten $T_\omega(\phi_1 + \phi_2) = z_1T_\omega\phi_1 + z_2T_\omega\phi_2$ joillakin $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.

Vektorien ϕ_i virittämästä avaruudesta voidaan valita kaksi yksikäsitteistä vektoria θ_i, joille $\langle\theta_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$. Vektorit ovat

$$\theta_i = \frac{\langle\phi_j|\phi_j\rangle\phi_i - \langle\phi_j|\phi_i\rangle\phi_j}{\langle\phi_j|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\phi_i\rangle - \langle\phi_j|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi_j\rangle}$$

Olkoon $\theta_i' \in \mathcal{H}$ kaksi vektoria, joille $||\theta_i'|| = ||\theta_i||$ ja $\rho_{\theta_i'} = \Phi(\rho_{\theta_i})$. Merkitään vielä $\phi = \phi_1 + \phi_2$, jolloin

$$\begin{aligned} 1 &= \langle\phi|\theta_i\rangle \\ &= |\langle\phi|\theta_i\rangle|^2 \\ &= |\langle T_\omega\phi|\theta_i'\rangle|^2 \\ &= |z_i|^2, \end{aligned}$$

joten $z_i \in U(1)$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \langle\omega|\phi_1\rangle + \langle\omega|\phi_2\rangle &= |\langle\omega|\phi\rangle| \\ &= |\langle\omega'|T_\omega\phi\rangle| \\ &= z_1\langle\omega'|T_\omega\phi_1\rangle + z_2\langle\omega'|T_\omega\phi_2\rangle \\ &= z_1\langle\omega|\phi_1\rangle + z_2\langle\omega|\phi_2\rangle \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \langle\omega|\phi_1\rangle + \langle\omega|\phi_2\rangle &= |z_1\langle\omega|\phi_1\rangle + z_2\langle\omega|\phi_2\rangle| \\ &\leq |z_1\langle\omega|\phi_1\rangle| + |z_2\langle\omega|\phi_2\rangle| \\ &= \langle\omega|\phi_1\rangle + \langle\omega|\phi_2\rangle \end{aligned}$$

jolloin $z_1\langle\omega|\phi_1\rangle = \lambda z_2\langle\omega|\phi_2\rangle$ jollain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nyt $0 < z_1\langle\omega|\phi_1\rangle + z_2\langle\omega|\phi_2\rangle = (\lambda + 1)z_2\langle\omega|\phi_2\rangle$, joten $\mathrm{Im}(z_2) = 0$. Vektorit ϕ_i olivat mielivaltaisia, joten ehdosta $\langle\omega|\phi_1\rangle + \langle\omega|\phi_2\rangle = z_1\langle\omega|\phi_1\rangle + z_2\langle\omega|\phi_2\rangle$ seuraa nyt $z_1 = z_2 = 1$, mikä todistaa operaattorin T_ω lineaarisuuden.

Osoitetaan seuraavaksi, että mille tahansa vektorille $0 \neq \psi \in \mathcal{H}$ pätee $T_\psi = zT_\omega$ (missä $z \in U(1)$) kaikilla $\phi \in O_\omega \cap O_\psi$. Olkoon $\phi \in O_\omega \cap O_\psi$. Ehdosta $\rho_{T_\omega\phi} = \Phi(\rho_\phi)$

seuraa $T_\psi \phi = f(\phi) T_\omega \phi$, missä $f : \mathcal{H} \to U(1)$. Riittää siis todistaa kuvauksen f olevan vakio joukossa $O_\omega \cap O_\psi$.

Olkoon $\lambda > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} \lambda f(\lambda\phi) T_\omega \phi &= f(\lambda\phi) T_\omega(\lambda\phi) \\ &= T_\psi(\lambda\phi) \\ &= \lambda T_\psi \phi \\ &= \lambda f(\phi) T_\omega \phi, \end{aligned}$$

joten $f(\lambda\phi) = f(\phi)$ kaikilla $\lambda > 0$. Olkoon nyt ϕ_1, $\phi_2 \in O_\omega \cap O_\psi$ kaksi lineaarisesti riippumatonta vektoria ja vektorit θ_i, θ_i' määritelty kuten edellä. Nyt

$$\begin{aligned} f(\phi_1) &= \langle f(\phi_1) T_\omega \phi_1 + f(\phi_2) T_\omega \phi_2 | \theta_1' \rangle \\ &= \langle T_\psi(\phi_1 + \phi_2) | \theta_1' \rangle \\ &= \langle f(\phi_1 + \phi_2) T_\omega(\phi_1 + \phi_2) | \theta_1' \rangle \\ &= f(\phi_1 + \phi_2), \end{aligned}$$

eli $f(\phi_1 + \phi_2) = f(\phi_1)$ mille tahansa lineaarisesti riippumattomille ϕ_1, $\phi_2 \in O_\omega \cap O_\psi$. Kuvaus $f : \mathcal{H} \to U(1)$ on siis vakio joukossa $O_\omega \cap O_\psi$.

Muodostetaan seuraavaksi unitaari- tai antiunitaarioperaattori kuvauksen T_ω avulla. Olkoon $M = \langle \omega \rangle^\perp$, $M' = \langle \omega' \rangle^\perp$ ja kuvaus $S : M \to M'$ määritelty kaavalla $S\phi = T_{\omega+\phi}\phi$, kun $\phi \neq 0$ ja $S\phi = 0$, kun $\phi = 0$. Todistuksen edellisen osan perusteella voidaan olettaa $T_{\omega+\phi}\omega = \omega'$. Operaattori S on hyvin määritelty, sillä $\phi \in O_{\omega+\phi}$ kaikilla $0 \neq \phi \in M$ ja kaikilla ϕ, $\psi \in M$ pätee $T_{\omega+\phi} = T_{\omega+\psi}$ joukossa $O_{\omega+\phi} \cap O_{\omega+\psi}$.

Tehdään lyhyt välihuomio. Jos ϕ_1, $\phi_2 \in O_\omega$, niin $||T_\omega(\phi_1 + \phi_2)||^2 = ||\phi_1 + \phi_2||^2$ eli $\langle T_\omega\phi_1 | T_\omega\phi_2 \rangle + \langle T_\omega\phi_2 | T_\omega\phi_1 \rangle = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle + \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle$, joten joko $\langle T_\omega\phi_1 | T_\omega\phi_2 \rangle = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$ tai $\langle T_\omega\phi_1 | T_\omega\phi_2 \rangle = \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle$.

Jatketaan todistusta. Osoitetaan, että jos $\langle T_\omega\phi_1 | T_\omega\phi_2 \rangle = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$, niin S on unitaarinen ja jos $\langle T_\omega \phi_1 | T_\omega \phi_2 \rangle = \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle$, niin S on antiunitaarinen. Todistukset etenevät samalla tavoin, joten pelkästään unitaarisen tapauksen todistaminen riittää.

Aloitetaan operaattorin S homogeenisuudesta. Olkoon $\phi \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Jos $\lambda\phi = 0$, niin selvästi $S(\lambda\phi) = \lambda S\phi$. Oletetaan siis $\lambda\phi \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned}
||\omega||^2 + \lambda^* ||\phi||^2 &= \langle \omega + \lambda\phi | \omega + \phi \rangle \\
&= \langle T_\omega(\omega + \lambda\phi) | T_\omega(\omega + \phi) \rangle \\
&= \langle T_{\omega+\lambda\phi}(\omega + \lambda\phi) | T_{\omega+\phi}(\omega + \phi) \rangle \\
&= \langle \omega' + S(\lambda\phi) | \omega' + S\phi \rangle \\
&= ||\omega'||^2 + \langle S(\lambda\phi) | S\phi \rangle
\end{aligned}$$

ja koska oletuksen perusteella $||\omega'|| = ||\omega||$, niin $\lambda^* ||\phi||^2 = \langle S(\lambda\phi) | S\phi \rangle$. Toisaalta $\rho_{S(\lambda\phi)} = \rho_{T_{\omega+\lambda\phi}(\lambda\phi)} = \Phi(\rho_{\lambda\phi}) = \Phi(\rho_\phi)$, joten $S(\lambda\phi) = zS\phi$ jollain $z \in \mathbb{C}$. Nyt $\lambda^* ||\phi||^2 = \langle S(\lambda\phi) | S\phi \rangle = z^* ||S\phi||^2 = z^* ||\phi||^2$, joten S on homogeeninen.

Todistetaan seuraavaksi additiivisuus. Olkoon $\phi_1,\ \phi_2 \in M$ lineaarisesti riippumattomat (lineaarisesti toisistaan riippuville vektoreille additiivisuus seuraa homogeenisuudestä) ja olkoon $\theta_1,\ \theta_2$ kuten edellä.

$$\begin{aligned}
S(\phi_1 + \phi_2) &= T_{\omega+\phi_1+\phi_2}(\phi_1 + \phi_2) \\
&= T_{\omega+\theta_1+\theta_2}(\phi_1 + \phi_2) \\
&= T_{\omega+\theta_1+\theta_2}\phi_1 + T_{\omega+\theta_1+\theta_2}\phi_2 \\
&= T_{\omega+\theta_1}\phi_1 + T_{\omega+\theta_2}\phi_2 \\
&= S\phi_1 + S\phi_2,
\end{aligned}$$

joten S on additiivinen.

Tähän mennessä on osoitettu kuvauksen S olevan lineaarioperaattori. Se on myös isometria, sillä $||S\phi||^2 = ||T_{\omega+\phi}\phi||^2 = ||T_\phi\phi||^2 = ||\phi||^2$ kaikilla $\phi \in M$. Todistetaan vielä surjektiivisuus. Olkoon $0 \neq \psi \in M'$. Automorfismina Φ on surjektio, joten on olemassa yksikkövektori $\phi \in M$, jolle $\Phi(\rho_\phi) = \rho_\psi$. Seuraa $S\phi = \lambda\psi$ jollekin $\lambda \in \mathbb{C}$. Toisaalta $||\phi|| = 1$ joten myös $||S\phi|| = 1$ ja $\lambda \neq 0$, joten $S(\lambda^{-1}\phi) = \psi$.

$\mathcal{H} = \langle\omega\rangle \oplus M = \langle\omega'\rangle \oplus M'$, joten jos S on unitaarinen, voidaan määritellä unitaarioperaattori $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kaavalla $U(\lambda\omega + \phi) = \lambda\omega' + S\phi$, missä $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $\phi \in M$. Jos S on antiunitaarinen, voidaan U määritellä antiunitaarioperaattorina $U(\lambda\omega + \phi) = \lambda^*\omega' + S\phi$. Huolimatta siitä, onko U unitaarinen vai antiunitaarinen, operaattorien U ja S määritelmistä seuraa $\Phi(\rho) = U\rho U^*$ kaikille puhtaille tiloille ρ.

Todistetaan lopuksi operaattorin U yksikäsitteisyys ryhmän $U(1)$ muunnoksia lukuunottamatta. Olkoon $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operaattorista U riippuen joko unitaari- tai antiunitaarioperaattori, $\Phi(\rho) = V\rho V^*$ ja $\phi \in M$. Todistuksen edellisten kohtien perusteella $V|_{O_{\omega+\phi}} = zT_{\omega+\phi}$ jollain $z \in U(1)$ ja voidaan olettaa $V\omega = \omega'$. Nyt $V\omega = \omega' = zT_{\omega+\phi}\omega = z\omega'$, joten $V|_{O_{\omega+\phi}} = zT_{\omega+\phi}$ kaikilla $\phi \in M$ eli $V|_M = S|_M = U|_M$. U on siis ryhmän $U(1)$ muunnoksia vaille yksikäsitteinen. $\square$

Wignerin lause on erittäin hyödyllinen systeemin tilojen muuntumista tutkittaessa. Lisäksi lause selventää, miksi juuri ryhmien projektiiviset unitaariesitykset tulevat esiin kovarianttien suureiden yhteydessä.

Suureita tutkittaessa jokaiseen systeemin symmetriaryhmän alkioon $g \in G$ liitetään projektiivinen unitaarioperaattori $\sigma(g)$, joka operoi tutkittavan systeemin Hilbertin avaruudessa $\mathcal{H}$. Tällöin $(\mathcal{H}, \sigma)$ on ryhmän G projektiivinen unitaariesitys ja suureen kovarianssi tarkoittaa matemaattista ehtoa, joka liittää yhteen systeemin tilojen muuntumisen mainitussa esityksessä sekä symmetriaryhmän operoinnin arvoavaruudessa.

Määritelmä 5.1. *Suure M on G-kovariantti, jos* $\mathrm{tr}[\sigma(g)\rho\sigma(g^{-1})M(X)] = \mathrm{tr}[\rho M(g^{-1}X)]$ *kaikilla* $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $g \in G, X \in 2^\Omega$.

Määritelmässä merkintä $g^{-1}X$ tarkoittaa ryhmän G operointia joukossa $X \in 2^\Omega$. Annettu määritelmä on yhtäpitävä ehdon $\sigma(g)M(X)\sigma(g^{-1}) = M(gX)$ kanssa, joka on usein käytännöllisempi kovariantteja suureita tutkittaessa.

Lause 5.2. *Oletetaan, että ryhmä G operoi äärellisessä joukossa Ω. Olkoon $\{x_o\}_{o=1}^k$ joukon Ω ratojen edustajisto ja olkoon $g_x \in G$ alkio, jolle $x = g_x x_o$. Suure M on G-kovariantti, jos ja vain jos jokaista rataa kohti on olemassa yksikäsitteinen positiivinen operaattori $K_o \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, jolle $\sigma(h)K_o\sigma(h^{-1}) = K_o$ kaikilla $h \in G_{x_o}$ ja $M(X) = \sum_{o=1}^k \sum_{x \in X \cap O_G(x_o)} \sigma(g_x)K_o\sigma(g_x^{-1})$ kaikilla $X \in 2^\Omega$.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että operaattorit K_o ovat olemassa. Tällöin

$$
\begin{aligned}
M(gX) &= \sum_{o=1}^{k} \sum_{x \in gX \cap O_G(x_o)} \sigma(g_x)K_o\sigma(g_x^{-1}) \\
&= \sum_{o=1}^{k} \sum_{x \in X \cap O_G(x_o)} \sigma(g_{gx})K_o\sigma(g_{gx}^{-1}) \\
&= \sum_{o=1}^{k} \sum_{x \in X \cap O_G(x_o)} \sigma(gg_x)K_o\sigma(g_x^{-1}g^{-1}) \\
&= \sigma(g)M(X)\sigma(g^{-1})
\end{aligned}
$$

Olkoon nyt M G-kovariantti suure. Jokaista rataa kohden voidaan valita yksikäsitteinen positiivinen operaattori $K_o = M(\{x_o\}) = M_{x_o}$. Kovarianssista seuraa $M_x = \sigma(g_x)K_o\sigma(g_x^{-1})$ kaikilla $x \in O_G(x_o)$, joten $M(X) = \sum_{o=1}^k \sum_{x \in X \cap O_G(x_o)} \sigma(g_x)K_o\sigma(g_x^{-1})$. Lisäksi $\sigma(h)K_o\sigma(h^{-1}) = M_{hx_o} = K_o$. □

Lauseen perusteella diskreettejä kovariantteja suureita voidaan rakentaa valitsemalla ensin systeemiä kuvaava arvoavaruus Ω ja symmetriaryhmä G. Tämän jälkeen selvitetään ryhmän G radat avaruudessa Ω, ja valitaan jokaiselta radalta alkio $x_o \in \Omega$. Jokaista alkiota x_o kohden etsitään positiivinen operaattori $K_o = M_{x_o}$, joka toteuttaa ehdon $\sigma(h)K_o\sigma(h^{-1}) = K_o$ kaikilla $h \in G_{x_o}$ jossain (projektiivisessa) unitaariesityksessä $\sigma : G \to \mathcal{PU}(\mathcal{H})$. Loput suureen operaattorit M_x saadaan laskettua kaavalla $\sigma(g)K_o\sigma(g^{-1})$, kun käydään läpi kaikki radat ja ryhmän G alkiot.

Huomattakoon, että tällä tavoin rakennettu kokoelma operaattoreita ei välttämättä toteuta normitusehtoa $M(\Omega) = I$ eikä näin ollen täytä kokonaan suureen määritelmää 2.15. M voidaan kuitenkin muuntaa kyseisen määritelmän mukaiseksi (normitetuksi) suureeksi M' kertomalla jokainen operaattori M_x puolittain operaattorilla $M(\Omega)^{-1/2}$, jolloin

$$\begin{aligned} M'(\Omega) &= M(\Omega)^{-1/2} \sum_{x\in\Omega} M_x M(\Omega)^{-1/2} \\ &= M(\Omega)^{-1/2} M(\Omega) M(\Omega)^{-1/2} \\ &= I \end{aligned}$$

5.2 Imprimitiivisysteemit

Imprimitiivisysteemit ovat esitysteoriaa ja operaattorimittoja yhdisteleviä rakenteita, joiden avulla kvanttimekaanista kovarianssia voidaan tutkia matemaattisesti. Tässä kappaleessa esitellään imprimitiivisysteemien rakennetta koskevia perustuloksia. Kappaleen juoni mukailee Follandin kirjan [3] lukuja 6.4 - 6.5.

Määritelmä 5.2. *(Diskreetti) Imprimitiivisysteemi on järjestetty kolmikko* (π, Ω, P)*, missä* Ω *on diskreetti* G*-avaruus,* π *on unitaariesitys* $G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$*,* P *on PVM* $2^\Omega \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_\pi)$ *sekä esitys ja projektiomitta toteuttavat lisäksi ehdon*
$\pi(g)P(X)\pi^{-1}(g) = P(gX)$ *kaikilla* $g \in G, X \in 2^\Omega$*.*

Imprimitiivisysteemi voidaan määritellä myös toisella tavalla.

Määritelmä 5.3. *Imprimitiivisysteemi on järjestetty kolmikko* (π, Ω, M)*, missä* Ω *ja* π *ovat kuten edellisessä määritelmässä, mutta* M *on äärellisesti tuettujen funktioiden* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *joukon* $F_c(\Omega)$ **-esitys Hilbertin avaruudessa* $\mathcal{H}_\pi$*.*

Lemma 5.3. *Määritelmät 5.2 ja 5.3 ovat ekvivalentit.*

Todistus. Olkoon (π, Ω, P) määritelmän 5.2 imprimitiivisysteemi. Tällöin $M(\{\phi\}) = \sum_{y\in\Omega} \phi(y)P(\{y\})$ on *-esitys kaikilla $\phi \in F_c(\Omega)$ ja

$$\begin{aligned}\pi(g)M(\{\phi\})\pi(g)^{-1} &= \sum_{y\in\Omega}\phi(y)\pi(g)P(\{y\})\pi(g)^{-1}\\ &= \sum_{y\in\Omega}\phi(y)P(\{gy\})\\ &= \sum_{y\in\Omega}\phi(g^{-1}y)P(\{y\})\\ &= M(\{L_g\phi\}),\end{aligned}$$

missä ryhmän G operointi joukossa $F_c(\Omega)$ on määritelty kaavan $g\phi = L_g\phi, L_g\phi(y) = \phi(g^{-1}y)$ mukaisesti. Olkoon nyt (π, Ω, M) määritelmän 5.3 imprimitiivisysteemi. M määrää yksikäsitteisen projektiomitan $P : \Omega \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_\pi)$ kaavan $M(\{\phi\}) = \sum_{y\in\Omega}\phi(y)P(\{y\})$ mukaisesti. $Q : E \mapsto \pi(g)P(E)\pi(g)^{-1}$ on *-esityksen $\pi(g)M(\{\phi\})\pi(g)^{-1}$ määräämä ja $R : E \mapsto P(gE)$ *-esityksen $M(\{L_g\phi\})$ määräämä projektiomitta. Yksikäsitteisyydestä seuraa $\pi(g)P(E)\pi(g)^{-1} = P(gE)$ kaikilla $g \in G, E \in 2^\Omega$. □

Määritelmä 5.4. *Esitys $(\mathcal{H}, \pi)$ on imprimitiivinen, jos π kuuluu johonkin imprimitiivisysteemiin (π, Ω, M), missä $|\Omega| > 1$. Esitys on primitiivinen, jos $|\Omega| = 1$.*

Lause 5.4. *Jokainen redusoituva esitys on imprimitiivinen.*

Todistus. Olkoon ryhmän G esitys $(\mathcal{H}, \pi)$ redusoituva. Tällöin on olemassa ei-triviaali kommutatiivinen $C*$-alialgebra $A \subset \mathfrak{C}(\pi)$. Olkoon $\Omega = s(A)$ tämän alialgebran spektri ja $M : F_c(\Omega) \to A$ Gelfandin muunnoksen käänteismuunnos. Tällöin $M(\{\phi\}) \in \mathfrak{C}(\pi)$ kaikilla $\phi \in F_c(\Omega)$ jolloin $\pi(g)M(\{\phi\})\pi(g)^{-1} = M(\{\phi\})$ kaikilla $g \in G$, joten (π, Ω, M) on imprimitiivisysteemi, kun ryhmä G operoi joukossa Ω triviaalisti eli $gx = x$ kaikilla $g \in G$, $x \in \Omega$. Lisäksi $|\Omega| > 1$, koska A ei ole triviaali algebra. □

Lause 5.5. *Jokainen indusoitu esitys on imprimitiivinen.*

Todistus. Olkoon $H \leq G$, $q : G \to G/H$ projektiokuvaus ryhmän G alkiolta omaan sivuluokkaansa ja $(\mathcal{H}, \sigma)$ ryhmän H unitaariesitys. Olkoon $\mathcal{F}_c = \{\phi \in F_c(G, \mathcal{H}) :$

$f(hg) = \sigma(h)\phi(g)$ kaikilla $g \in G, h \in H$ ja $|q(\text{supp}\,\phi)| < \infty\}$. Indusoidun esityksen $\Phi = \text{Ind}_H^G\sigma$ Hilbertin avaruus on $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}_c$. Avaruuden $\mathcal{F}$ määritelmästä seuraa $(\phi \circ q)f \in \mathcal{F}_c$ kaikille $\phi \in F_c(G/H), f \in \mathcal{F}_c$. Lisäksi $||(\phi \circ q)f|| \leq ||\phi||_{\text{sup}}||f||_{\mathcal{F}}$, joten jos $M(\{\phi\})f = (\phi \circ q)f$, niin M on $F_c(G/H)$ *-esitys avaruudessa $\mathcal{F}$. Seuraa myös

$$\begin{aligned}\sigma(h)^{-1}M(\{\phi\})\sigma(h)f(g) &= M(\{\phi\})\sigma(h)f(h^{-1}g)\\ &= \phi(q(h^{-1}g))f(g)\\ &= M(\{L_h g\})f(g),\end{aligned}$$

joten $(\Phi, G/H, M)$ on imprimitiivisysteemi, mistä väite seuraa. □

Todistuksessa konstruoituja avaruuksia $\mathcal{F}_c$ ja $\mathcal{F}$ tarvitaan myös tulevissa todistuksissa. Jatkossa symboleilla $\mathcal{F}_c$, $\mathcal{F}$ tarkoitetaan juuri edellisen todistuksen mukaisia avaruuksia.

Määritelmä 5.5. $(\text{Ind}_H^G\sigma, G/H, M)$ *on ryhmän* H *esitykseen* $(\mathcal{H}, \sigma)$ *liittyvä kanoninen imprimitiivisysteemi.*

Määritelmä 5.6. *Imprimitiivisysteemit* (π, Ω, M) *ja* (π', Ω, M') *ovat unitaariekvivalentit, jos on olemassa unitaarinen kuvaus* $U : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_{\pi'}$*, jolle* $U\pi(g)U^{-1} = \pi'(g)$ *kaikilla* $g \in G$ *ja* $UM(\{\phi\})U^{-1} = M'(\{\phi\})$ *kaikilla* $\phi \in F_c(\Omega)$.

Lause 5.6. *Jokainen imprimitiivisysteemi* $\Sigma = (\pi, \Omega, M)$ *on syklisten imprimitiivisysteemien suorasumma.*

Todistus. Funktioavaruus $l^1(\Omega \times G)$ muodostaa C*-algebran, kun tulo-operaatioksi määritellään $(f * g)(s, x) = \sum_{h \in G} f(s, h)g(h^{-1}s, h^{-1}x)$ ja involuutioksi $f^*(s, x) = \overline{f(x^{-1}s, x^{-1})}$. Todistuksessa tarvitaan erästä algebran $l^1(\Omega \times G)$ *-esitystä, joka täytyy ensin konstruoida. Määritellään kuvaus $T_\Sigma : l^1(\Omega \times G) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ kaavalla $T_\Sigma(f) = \sum_{x \in G} M[f(\cdot, x)]\pi(x)$. Määritelmä toimii, sillä funktion $f \in l^1(\Omega \times G)$ tuen projektio (merkitään tässä symbolilla A) joukkoon G on äärellinen. Tämän seurauksena kaikille $\phi \in \mathcal{H}_\pi$ pätee $||T_\Sigma(f)|| \leq |A|\max_{g\in G}||M[f(\cdot,g)]|| \cdot ||\phi|| \leq |A| \cdot ||f||_{sup}||\phi|| < \infty$, joten todellakin $T_\Sigma(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$. Nyt voidaan esittää lauseen todistuksessa tarvittava aputulos.

Lemma 5.7. *$(\mathcal{H}_\pi, T_\Sigma)$ on algebran $l^1(\Omega \times G)$ *-esitys.*

Todistus. Riittää osoittaa, että T_Σ on *-homomorfismi. Kuvauksen ja kyseessä olevan algebran määritelmistä seuraa

$$\begin{aligned}
T_\Sigma(f * g) &= \sum_{x,y\in G, s\in\Omega} f(s,y)g(y^{-1}s, y^{-1}x)P(\{s\})\pi(x) \\
&= \sum_{x,y\in G, s\in\Omega} f(ys,y)g(s,x)P(\{ys\})\pi(yx) \\
&= \sum_{x,y\in G, s\in\Omega} \pi(y)f(ys,y)g(s,x)P(\{s\})\pi(x) \\
&= \sum_{x,y\in G} \pi(y)\left[\sum_{s\in\Omega} f(ys,y)P(\{s\})\right]\left[\sum_{t\in\Omega} g(t,x)P(\{t\})\right]\pi(x) \\
&= T_\Sigma(f)T_\Sigma(g)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
T_\Sigma(f^*) &= \sum_{x\in G, s\in\Omega} f^*(s,x)P(\{s\})\pi(x) \\
&= \sum_{x\in G, s\in\Omega} \pi(x)f^*(xs,x)P(\{s\}) \\
&= \sum_{x\in G, s\in\Omega} \pi(x^{-1})\overline{f(s,x)}P(\{s\}) \\
&= \sum_{x\in G} \pi(x)^* M[f(\cdot,x)]^* \\
&= T_\Sigma(f)^*,
\end{aligned}$$

joten kuvaus T_Σ on *-homomorfismi. $\square$

Jatketaan päätodistusta. T_Σ on algebran $l^1(\Omega \times G)$ *-esitys, joten jos aliavaruus $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}_\pi$ on invariantti kaikkien operaattorien $T_\Sigma(f)$ suhteen, niin myös avaruuden ortogonaalikomplementti $\mathcal{K}^\perp$ on invariantti. Zornin lemmasta seuraa, että on olemassa maksimaalinen kokoelma yksikkövektoreita $\{\phi_i\} \subset \mathcal{H}_\pi$, joille avaruudet $B_i = \overline{\{T_\Sigma(f)\phi_i : f \in l^1(\Omega \times G)\}}$ ovat ortogonaalisia. Tällöin tietysti $\mathcal{H}_\pi = \oplus_i B_i$. Avaruudet B_i ovat invariantteja operaattorien $\pi(x)$ ja $M(\alpha)$ suhteen (missä $x \in G$ ja $\alpha \in F_c(\Omega)$), sillä

$$\begin{aligned}
\pi(x)T_\Sigma(f) &= \pi(x) \sum_{y \in G, s \in \Omega} \pi(y) f(ys, y) P(\{s\}) \\
&= \sum_{y \in G, s \in \Omega} \pi(xy) f(ys, y) P(\{s\}) \\
&= \sum_{y \in G, s \in \Omega} \pi(y) f(x^{-1}ys, x^{-1}y) P(\{s\})
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
M(\alpha)T_\Sigma(f) &= \sum_{x \in G} M(\alpha) M[f(\cdot, x)] \pi(x) \\
&= \sum_{x \in G} M[\alpha(\cdot) f(\cdot, x)] \pi(x),
\end{aligned}$$

Selvästi $f(x^{-1}ys, x^{-1}y), \alpha(\cdot)f(\cdot, x) \in l^1(\Omega \times G)$, joten $\pi(x)B_i = B_i$ ja $M(\alpha)B_i = B_i$. Avaruus $\mathcal{H}_\pi$ hajoaa syklisten, invarianttien aliavaruuksien B_i suoraksi summaksi, mistä väite seuraa. $\square$

Seuraavaa teknistä lausetta tarvitaan apuna luvun päätuloksen, imprimitiiviteoreeman todistuksessa.

Lause 5.8. *Olkoon* $(\mathcal{H}, \sigma)$ *ryhmän* H *esitys ja* $(\mathcal{F}, \pi)$ *ryhmän* G *esitys* ($H \trianglelefteq G$), $T \in \mathfrak{C}(\sigma)$, $f \in \mathcal{F}_c$ *ja määritellään kuvaus* $\bar{T} : \mathcal{F}_c \to \mathcal{F}_c$ *kaavalla* $(\bar{T}f)(x) = T(f(x))$. *Tällöin kuvaus* $O : \mathfrak{C}(\sigma) \to \mathfrak{C}(\pi)$, $O(T) = \bar{T}$ *on isometrinen *-isomorfismi.*

Todistus. Tarkasteltava kuvaus on *-homomorfismi, sillä määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}(\overline{ST}f)(x) &= ST[f(x)] \\ &= S[(\bar{T}f)(x)] \\ &= (\bar{S}\bar{T}f)(x)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}(\bar{T}^*f)(x) &= T^*(f(x)) \\ &= T(f^*(x)) \\ &= (\overline{T^*}f)(x)\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}||\bar{T}||_{\mathcal{F}} &= \sup_{||f||_{\mathcal{F}} \leq 1} ||\bar{T}f||_{\mathcal{F}} \\ &\leq \sup_{||f(x)||_{\mathcal{H}_\sigma} \leq 1} ||Tf(x)||_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &= ||T||_{\mathcal{H}_\sigma}\end{aligned}$$

Isometrian todistamiseen riittää nyt osoittaa $||T||_{\mathcal{H}_\sigma} \leq ||\bar{T}||_{\mathcal{F}}$.

Hilbertin avaruuden täydellisyydestä seuraa, että jokaista $\epsilon > 0$ kohti voidaan valita $v \in \mathcal{H}_\sigma$ siten, että $||Tv||_{\mathcal{H}_\sigma} \geq |1 - \epsilon| \cdot ||T||$. Kaikille $x_0 \in G$ vektorit $f_{\phi,v}(x_0) = \sum_{\eta \in H} \phi(x\eta)\sigma(\eta)v$ ovat tiheässä avaruudessa $\mathcal{H}_\sigma$, kun $\phi \in F_c(G)$ ja v kuuluu johonkin tiheään aliavaruuteen $D \subset \mathcal{H}_\sigma$ [3, Prop. 6.8a], joten voidaan edelleen valita $f \in \mathcal{F}_c$ jolle $||f(1_G)||_{\mathcal{H}_\sigma} \leq 1$ ja $||f(1_G) - v||_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \epsilon$. Valitaan vielä alkion 1_G ympäristö $U \subset G$, jolle $||f(x)||_{\mathcal{H}_\sigma} \leq 1$ ja $||f(x) - f(1_G)||_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \epsilon$ kun $x \in U$ ja funktio $\psi \in F_c(G/H)$, jolle supp $\psi \subset q(U)$. Nyt kaikille $x \in U$, joille $g(x) = \psi(q(x))f(x) \neq 0$, on olemassa $y \in U$ ja $\xi \in H$ siten, että $x = y\xi$ ja

$$\begin{aligned}||f(y) - v||_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq ||f(y) - f(1_G)||_{\mathcal{H}_\sigma} + ||f(1_G) - v||_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &\leq 2\epsilon\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}||Tv||_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq ||Tf(y)||_{\mathcal{H}_\sigma} + ||Tv - Tf(y)||_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &\leq ||T||_{\mathcal{H}_\sigma} \cdot ||f(y) - v||_{\mathcal{H}_\sigma} + ||Tf(y)||_{\mathcal{H}_\sigma},\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}||Tf(y)||_{\mathcal{H}_\sigma} &\geq ||Tv||_{\mathcal{H}_\sigma} - ||T||_{\mathcal{H}_\sigma} \cdot ||f(y) - v||_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &\geq (1 - 3\epsilon)||T||_{\mathcal{H}_\sigma} \cdot ||f(y)||_{\mathcal{H}_\sigma}\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}||Tg(x)||_{\mathcal{H}_\sigma} &= ||Tg(y)||_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &\geq (1 - 3\epsilon)||T||_{\mathcal{H}_\sigma} \cdot ||g(y)||_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &= (1 - 3\epsilon)||T||_{\mathcal{H}_\sigma} \cdot ||g(x)||_{\mathcal{H}_\sigma}\end{aligned}$$

kaikilla $x \in G$ ja mielivaltaisen pienellä $\epsilon > 0$, joten $||\bar{T}g||_{\mathcal{F}} \geq (1 - 3\epsilon)||T||_{\mathcal{H}_\sigma} \cdot ||g||_{\mathcal{F}}$ eli $||T||_{\mathcal{H}_\sigma} \leq ||\bar{T}||_{\mathcal{F}}$.

Vielä täytyy todistaa kuvauksen olevan isomorfismi. Operaattorien $||T||$ ja $||\tilde{T}||$ tarkastelu palautuu projektioiden ja sen myötä esitysten suhteen invarianttien aliavaruuksien tarkasteluun. Aloitetaan osoittamalla, että $\mathcal{F}_c$ on tiheä mielivaltaisessa suljetussa π-invariantissa aliavaruudessa $\mathcal{N} \in \mathcal{F}$. Minkä tahansa äärellisen joukon $K \subset G/H$ karakteristinen funktio χ_K kuuluu joukkoon $F_c(G/H)$, joten myös $M(\chi_K)g = \sum_{x \in K} P(x)g = P_K g \in F_c(G/H)$ kaikille $g \in \mathcal{N}$. Jokaiselle $g \in \mathcal{N}$ ja mielivaltaisen pienelle $\epsilon > 0$ voidaan joukko K voidaan valita siten, että $||M(\chi_K)g - g|| < \epsilon$, joten $\mathcal{F}_c$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{N}$.

Olkoon nyt aliavaruus $M \subset \mathcal{H}_\sigma$ σ-invariantti ja suljettu ja $\bar{M} \subset \mathcal{F}$ joukon $\{f \in \mathcal{F}_c : f(x) \in M \text{ kaikilla } x \in G\}$ sulkeuma. $\bar{M}$ on suljettu, π-invariantti ja itse asiassa $\bar{M} = \mathcal{H}_{Ind_H^G \sigma}$. Edetään todistamalla kuvauksen $M \mapsto \bar{M}$ bijektiivisyys, joka voidaan lopulta laajentaa alkuperäisen kuvauksen $T \mapsto \bar{T}$ isomorfisuudeksi.

Olkoon $M_1, M_2 \subset \mathcal{H}_\sigma, M_1 \neq M_2$ kaksi σ-invarianttia aliavaruutta. Tällöin on olemassa vektori $v \in M_1 \setminus M_2$ ja $f \in \tilde{M}_1$, joille $||f(1_G) - v||_{\mathcal{H}_\sigma} < \epsilon$ mielivaltaisella $\epsilon > 0$, jolloin $f(x) \notin M_2$ jossain alkion 1_G ympäristössä. Tästä seuraa $f \in \bar{M}_1 \setminus \bar{M}_2$, joten kuvaus $M \mapsto \bar{M}$ on injektio. Osoitetaan nyt surjektiivisuus. Olkoon $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$ kuten edellä, $f \in \mathcal{N}, \phi \in F_c(G), v_{f,\phi} = \sum_{x \in G} \phi(x) f(x)$ ja $M = \langle \{v_{f,\phi}\} \rangle \subset \mathcal{H}_\sigma$. Kaikilla $\xi \in H, x \in G$ on voimassa $L_\xi \phi \in F_c(G)$, joten

$$\begin{aligned}
\sigma(\xi) v_{f,\phi} &= \sum_{x \in G} \phi(x) f(\xi x) \\
&= \sum_{x \in G} \phi(\xi^{-1} x) f(x) \\
&= \sum_{x \in G} L_\xi \phi(x) f(x) \in A
\end{aligned}$$

eli M on σ-invariantti.

Surjektiivisuuden todistamiseksi riittää enää osoittaa $\mathcal{N} = \bar{M}$ jollekin M. Jos $f \in \mathcal{F}_c \cap \mathcal{N}, w \in M^\perp$, niin $0 = \langle v_{f,\phi}, w \rangle = \sum_{x \in G} \phi(x) \langle f(x), w \rangle$ kaikilla $\phi \in F_c(G)$, joten $\langle f(x), w \rangle = 0$ kaikilla $x \in G$ eli $f \in \bar{M}$. $\mathcal{F}_c$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{N}$, joten $\mathcal{N} \subset \bar{M}$. Toisaalta jos $f \in \mathcal{N}, \phi, \psi \in F_c(G)$, muodostavat kaavalla $g_{f,\phi,\psi}(x) = \sum_{\xi \in H} \psi(x\xi) \sigma(\xi) v_{f,\phi}$ määritellyt funktiot tiheän avaruuden $\bar{M}$ osajoukon. Toisaalta

$$\begin{aligned}
g_{f,\phi,\psi}(x) &= \sum_{\xi \in H, y \in G} \psi(x\xi) \sigma(\xi) \phi(y^{-1}) f(y^{-1}) \\
&= \sum_{\xi \in H, y \in G} \psi(x\xi) \phi(y^{-1} x \xi) f(y^{-1} x) \\
&= (T_\Sigma f)(x)
\end{aligned}$$

ja $T_\Sigma f \in \mathcal{N}$, joten $\tilde{M} \subset \mathcal{N}$.

Nyt voidaan viimeistellä lauseen todistus. Koska kuvaus $M \mapsto \bar{M}$ on bijektio, pätee näiden avaruuksien projektioille $(\overline{P_M}f)(x) = P_M(f(x)) = (P_{\bar{M}}f)(x)$ kaikilla $x \in G$, joten $\overline{P_M} = P_{\bar{M}}$. Seuraa, että jokainen algebran $\mathfrak{C}(\pi)$ projektio on muotoa $\bar{P}$ jollekin $P \in \mathfrak{C}(\sigma)$. Spektraaliteoreemasta ja kuvauksen $T \mapsto \bar{T}$ isometrisyydestä seuraa, että $O(\mathfrak{C}(\sigma))$ on normitopologiassa suljettu. Tämä tarkoittaa, että kaikki algebran $\mathfrak{C}(\pi)$ itsedjungoidut operaattorit kuuluvat myös algebraan $O(\mathfrak{C}(\sigma))$. Toisaalta kaikki operaattorit $T \in \mathfrak{C}(\pi)$ voidaan esittää itseadjungoitujen operaattorien lineaarikombinaatioina, joten lopulta saadaan tulokseksi $\mathfrak{C}(\pi) \subset O(\mathfrak{C}(\sigma))$, mikä todistaa väitteen.

□

Lause 5.9. *(Imprimitiiviteoreema) Olkoon* $\Omega = G/H$ *ja* $\Sigma = (\pi, \Omega, M)$ *imprimitiivisysteemi. Tällöin on olemassa (unitaarikuvausta vaille) yksikäsitteinen ryhmän* H *esitys* σ*, jolle* $(\mathrm{Ind}_H^G \sigma, \Omega, M)$ *ja* Σ *ovat ekvivalentit.*

Todistus. Osoitetaan ensin esityksen σ olemassaolo. Ω on diskreetti, joten $P(\{s\}) \neq 0$ kaikilla $s \in \Omega$. Olkoon $\iota = eH$ ryhmän H vasen sivuluokka identiteettialkion $e \in G$ suhteen. Tällöin $\pi(\xi)P(\{\iota\})\pi(\xi)^{-1} = P(\{\xi\iota\}) = P(\{\iota\})$ kaikille $\xi \in H$, joten $P(\{\iota\})\mathcal{H}_\sigma$ on $\pi|_H$-invariantti ja näin ollen $\sigma = \pi|_H$ on ryhmän H eräs unitaariesitys Hilbertin avaruudessa $P(\{\iota\})\mathcal{H}_\sigma$. Määritellään jokaiselle $v \in \mathcal{H}_\pi$ funktio $f_v : G \to P(\{\iota\})\mathcal{H}_\sigma$ kaavalla $f_v(x) = P(\{\iota\})\pi(x)v = \pi(x)P(\{x\iota\})v$. Nyt kaikille $\xi \in H$ on voimassa $f_v(\xi x) = \pi(\xi x)P(\{x\xi\iota\})v = \pi(\xi)\pi(x)P(\{x\iota\})v = \sigma(\xi)f_v(x)$. Lisäksi koska $\mathcal{H}_\pi = \oplus_{x\iota \in G/H} P(\{x\iota\})\mathcal{H}_\pi$, niin $\sum_{x\iota \in G/H} ||f_v(x)||^2 = \sum_{x\iota \in G/H} ||P(\{x\iota\})v||^2 = ||v||^2$ mistä seuraa, että $v \mapsto f_v$ on rajoitettu isometrinen surjektio eli unitaarikuvaus $\mathcal{H}_\pi \to \mathcal{F}$. Tämä kuvaus määrää unitaarekvivalenssin imprimitiivisysteemien Σ ja $(\mathrm{Ind}_H^G \sigma, \Omega, M)$ välille.

Todistetaan seuraavaksi esityksen σ yksikäsitteisyys. Olkoon σ_1, σ_2 ryhmän H unitaariesityksiä, $\Pi_j = \mathrm{Ind}_H^G \sigma_j$ näihin liittyvät indusoidut esitykset avaruuksissa $\mathcal{F}_j$ ja $U : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ unitaarikuvaus, joka määrä ekvivalenssin imprimitiivisysteemien $\Sigma_j = (\Pi_j, \Omega, M_j)$ välille. Tarkastellaan operaattoria $V \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$ jolle

$V(f_1, f_2) = (0, Uf_1), V^*(f_1, f_2) = (U^* f_2, 0)$. Kuvauksen U unitaarisuudesta seuraa $V^*V = P_{\mathcal{F}_1}, VV^* = P_{\mathcal{F}_2}$. Toisaalta $V \in \mathfrak{C}(\Pi_1 \oplus \Pi_2)$, joten lauseen 5.6 nojalla on olemassa kuvaus $T \in \mathfrak{C}(\sigma_1 \oplus \sigma_2)$ siten, että $V = \bar{T}$ ja $T \mapsto \bar{T}$ on isometrinen *-isomorfismi. Tästä puolestaan seuraa $T^*T = P_{\mathcal{H}_{\sigma_1}}, TT^* = P_{\mathcal{H}_{\sigma_2}}$, jolloin $T|_{\mathcal{H}_{\sigma_1}}$ on unitaarinen isomorfismi $\mathcal{H}_{\sigma_1} \to \mathcal{H}_{\sigma_2}$ ja $T|_{\mathcal{H}_{\sigma_1}} \in \mathfrak{C}(\sigma_1, \sigma_2)$ eli esitykset σ_1, σ_2 ovat unitaariekvivalentit. □

Imprimitiiviteoreemasta on olemassa vaihtoehtoisia esitysmuotoja ja laajennuksia. Mackey itse on laajentanut lauseen koskemaan myös projektiivisa esityksiä [11, lause 6.6]. Esitetään vielä Cattaneolta peräisin oleva lause, joka käsittelee kovariantin Naimarkin dilaation olemassaoloa ja hyödyntää imprimitiiviteoreemaa todistuksessaan [12, prop. 1]. Tämäkin tulos yleistyy projektiivisille imprimitiivisysteemeille [12, prop. 3].

Lause 5.10 (Cattaneo)**.** *Olkoon (σ, Ω, M) yleistetty imprimitiivisysteemi eli imprimitiivisysteemi, missä M on G-kovariantti suure, Ω on diskreetti G-avaruus ja $\sigma : G \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on esitys, jonka suhteen M on kovariantti. Tällöin on olemassa Hilbertin avaruus $\mathcal{K}$, isometria $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, ryhmän G esitys $\pi : G \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ ja PVM P, joille (π, Ω, P) on imprimitiivisysteemi, $\sigma(g) = V^*\pi(g)V$ kaikilla $g \in G$ ja $M(X) = V^*P(X)V$ kaikilla $X \in 2^\Omega$. Lisäksi vektorit $P(X)V\phi$, $X \in 2^\Omega$, $\phi \in \mathcal{H}$ ovat tiheässä avaruudessa $\mathcal{K}$.*

6 Optimaaliset kovariantit suureet

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan optimaalisten kovarianttien suureiden rakenteita. Tässä luvussa esityksellä tarkoitetaan projektiivistä unitaariesitystä, G on jälleen diskreetti ryhmä ja Ω diskreetti G-avaruus. Aloitetaan tilanteesta, jossa sekä G että Ω ovat äärellisiä. Tällöin G:n alkioiden täytyy vastata bijektioita $g : \Omega \to \Omega$ eli $G \leq S_n$, missä $\dim \mathcal{H} = n$ ja $\mathcal{H}$ on systeemin Hilbertin avaruus.

6.1 Asteen 1 projektiomitat

Lause 6.1. *Olkoon G ja Ω äärellisiä. Tällöin on olemassa sellainen ryhmän G projektiivinen unitaariesitys σ ja asteen 1 PVM P, joille P on σ-kovariantti.*

Todistus. Olkoon $|\Omega| = n$. Tällöin asteen 1 PVM P voidaan antaa muodossa $P(\{x\}) = |\phi_x\rangle\langle\phi_x|$, missä $\{\phi_x\}_{x\in\Omega}$ muodostaa n-dimensioisen Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ ortonormaalin kannan. Olkoon $\tau : S_n \to \mathcal{PU}(\mathcal{H})$ ryhmän S_n projektiivinen unitaariesitys, jolle $\tau(h) = \sum_{x\in\Omega} |\phi_{h(x)}\rangle\langle\phi_x|$ kaikilla $h \in S_n$. Nyt P on τ-kovariantti, sillä

$$\begin{aligned}
\tau(h)P(\{y\})\tau(h)^* &= \left(\sum_{x\in\Omega} |\phi_{h(x)}\rangle\langle\phi_x|\right) |\phi_y\rangle\langle\phi_y| \left(\sum_{x\in\Omega} |\phi_x\rangle\langle\phi_{h(x)}|\right) \\
&= |\phi_{h(y)}\rangle\langle\phi_{h(y)}| \\
&= P(\{hy\})),
\end{aligned}$$

Tämä pätee kaikille ryhmän S_n alkioille, joten sen täytyy päteä kaikille ryhmän S_n aliryhmille.

□

6.2 Ekstremaaliset infotäydelliset suureet

Ekstremaalisten infotäydellisten suureiden rakenteen selvittäminen on hieman haastavampaa. Lauseista 3.3 - 3.5 nähdään, että jos M on ekstremaalinen infotäydellinen suure, täytyy asteen 1 operaattorien $M(\{x\})$ muodostaa vektoriavaruuden $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kanta, jolle lisäksi $\sum_{x\in\Omega} M(\{x\}) = I$.

Esimerkiksi systeemillä, jolla $|\Omega| = 4$ ja $G = S_2$, on olemassa ekstremaalinen infotäydellinen suure

$$\left\{ \frac{2}{7}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \frac{2}{7}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ -1-i & 2 \end{bmatrix} \right\},$$

joka on kovariantti esityksen

$$\sigma(S_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\} / U(1)$$

suhteen. Tämä voidaan todeta yksinkertaisilla laskuilla:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix} * \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix}^* = \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix} * \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix}^* = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ -1-i & 2 \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

Huomattakoon, että viimeisellä rivillä tuloksena ei ole identiteettimatriisi, vaan identiteettimatriisi kerrottuna imaginaariyksiköllä. Nämä kaksi vastaavat kuitenkin samaa operaattoria, sillä symmetriaryhmän esitys on oletuksen mukaan projektiivinen. Lisäksi käytetyssä esityksessä ryhmällä S_2 on kaksi rataa joukossa Ω.

Annetaan seuraavaksi yleisempi esimerkki ekstremaalisesta infotäydellisestä suureesta, joka on kovariantti mielivaltaisen (fysikaalisesti mahdollisen) äärellisen symmetriaryhmän suhteen. Esimerkki perustuu Haapasalon ja Pellonpään esimerkkiin diskreetistä ekstremaalisesta infotäydellisestä suureesta [2, esim. 3].

Oletetaan aluksi $\dim \mathcal{H} = d < \infty$. Tarkastellaan yleisintä mahdollista tapausta, jossa systeemin symmetriaryhmä on d alkion permutaatioryhmä S_d. Ekstemaalisen infotäydellisen suureen konstruoimiseksi oletetaan $|\Omega| = d^2$. Merkitään jatkossa yksittäisiä avaruuden Ω pisteitä (i, j), missä $1 \leq i, j \leq d$, jolloin symmetriaryhmän S_d alkiot g operoivat avaruudessa Ω kaavan $g(i, j) = (g(i), g(j))$ mukaisesti.

Olkoon $\{|i\rangle\}_{i=1}^d$ avaruuden $\mathcal{H}$ ortonormaali kanta ja

$$\begin{aligned} f_{mm} &= |m\rangle \\ f_{mn} &= |m\rangle + |n\rangle \\ f_{nm} &= |m\rangle - i|n\rangle, \end{aligned}$$

missä $m < n$. Määritelmistä seuraa

$$\begin{aligned} |m\rangle\langle m| &= |f_{mm}\rangle\langle f_{mm}| \\ 2|m\rangle\langle n| &= (|f_{mn}\rangle\langle f_{mn}| - |f_{mm}\rangle\langle f_{mm}| - |f_{nn}\rangle\langle f_{nn}|) \\ &\quad - i(|f_{nm}\rangle\langle f_{nm}| - |f_{mm}\rangle\langle f_{mm}| - |f_{nn}\rangle\langle f_{nn}|) \\ |n\rangle\langle m| &= (|f_{mn}\rangle\langle f_{mn}| - |f_{mm}\rangle\langle f_{mm}| - |f_{nn}\rangle\langle f_{nn}|) \\ &\quad + i(|f_{nm}\rangle\langle f_{nm}| - |f_{mm}\rangle\langle f_{mm}| - |f_{nn}\rangle\langle f_{nn}|), \end{aligned}$$

joten joukossa $\mathcal{B}_d = \{p_{mn}|f_{mm}\rangle\langle f_{mm}| \mid 1 \leq m, n \leq d\}$ on d^2 alkiota ja se muodostaa vektoriavaruuden $\mathcal{L}(\mathcal{H}_d)$ kannan, kun reaaliluvut p_{mn} valitaan siten, että $p_{mn} > 0$ kaikilla m, n. Valinnasta seuraa myös, että kaavalla

$$S = \sum_{m,n=1}^{d} p_{mn}|f_{mm}\rangle\langle f_{mm}|$$

määritelty itseadjungoitu operaattori $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_d)$ on kääntyvä. Ekstremaalisen infotäydellisen suureen $M : 2^\Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operaattorit $M(\{(m,n)\}) = M_{mn}$ voidaan nyt konstruoida kaavan

$$M_{mn} = |\sqrt{p_{mn}}S^{-1/2}f_{mn}\rangle\langle\sqrt{p_{mn}}S^{-1/2}f_{mn}| \tag{1}$$

avulla. Suure M on ekstremaalinen, koska operaattorit M_{mn} ovat lineaarisesti riippumattomia ($c_{mn} \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} &\sum_{m,n=1}^{d} c_{mn}M_{mn} = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{m,n=1}^{d} c_{mn}p_{mn}|f_{mm}\rangle\langle f_{mm}| = 0 \\ &\Leftrightarrow c_{mn} = 0 \text{ kaikilla } 1 \leq m, n \leq d \end{aligned}$$

Infotäydellisyys puolestaan seuraa siitä, että riippumattomuuden lisäksi operaattorit M_{mn} ovat kaikki astetta 1 ja niitä on d^2 kappaletta. Tarkastellaan seuraavaksi suureen M kovarianssia ryhmän S_d esityksen suhteen.

Lause 6.2. *Olkoon $\sigma : S_d \to \mathcal{U}(\mathcal{H})/U(1)$ ryhmän S_d projektiivinen unitaariesitys. (σ, Ω, M) on imprimitiivisysteemi, jos ja vain jos $S^{-1/2}$ on esityksen σ automorfismi ($S \in \mathfrak{C}(\sigma)$) ja luvut p_{ij} ovat vakioita jokaisella imprimitiivisysteemin radalla.*

Todistus. (σ, Ω, M) imprimitiivisysteemi jos ja vain jos kaikille $g \in S_d$ $1 \leq m, n \leq d$ on voimassa

$$\begin{aligned}\sigma(g) M_{mn} \sigma(g)^{-1} &= p_{mn} |\sigma(g) S^{-1/2} f_{mn}\rangle\langle\sigma(g) S^{-1/2} f_{mn}| \\ &= p_{mn} |S'^{-1/2} \sigma(g) f_{mn}\rangle\langle S'^{-1/2} \sigma(g) f_{mn}| \\ &= p_{mn} S'^{-1/2} \sigma(g) |f_{mn}\rangle\langle f_{mn}| \sigma(g)^{-1} S'^{-1/2} \\ &= p_{mn} S'^{-1/2} |f_{kl}\rangle\langle f_{kl}| S'^{-1/2} \\ &= p_{kl} S^{-1/2} |f_{kl}\rangle\langle f_{kl}| S^{-1/2}\end{aligned}$$

joillain $1 \leq k, l \leq d$. Toisaalta operaattori $S^{-1/2}$ on sama jokaiselle M_{mn}, joten edellisestä laskusta saadaan

$$S'^{-1/2} = e^{i\alpha} \sqrt{\frac{p_{kl}}{p_{mn}}} S^{-1/2}$$

Yhtälön täytyy toteutua kaikilla samalla radalla esityksen σ suhteen olevilla operaattoreilla M_{kl}, joten lukujen p_{kl} täytyy olla vakioita kyseisillä radoilla. Tällöin $S'^{-1/2} = S^{-1/2}$ eli $\sigma(g) S^{-1/2} = S^{-1/2} \sigma(g)$, joten $S^{-1/2}$ on esityksen σ automorfismi. $\square$

Edellisen lauseen perusteella ekstremaalisten infotäydellisten suureiden etsiminen voidaan äärellisessä tapauksessa redusoida systeemin symmetriaryhmän projektiivisen unitaariesityksen positiivisten itseadjungoitujen automorfismien etsimiseen. Tehtävää voidaan vielä yksinkertaistaa hieman toteamalla, ettei operaattorin $S^{-1/2}$ kommutatiivisuutta tarvitse tarkastella esityksen σ kaikkien operaattorien suhteen vaan riittää, että $S^{-1/2}$ kommutoi symmetriaryhmän generaattorien $g \in S_d$ kuvien $\sigma(g)$ kanssa. Lisäksi mikä tahansa äärellisen monen alkion permutaatioryhmä voidaan generoida kuvausten avulla, jotka vaihtavat kahden alkion paikkaa keskenään, mutta pitävät kaikki muut paikallaan.

Lause 6.3. *Olkoon*

$$S^{-1/2} = \sum_{i=1}^{d} |i\rangle\langle i|a + \sum_{j=1}^{d-1}\sum_{i=1}^{d-j}\left(|i\rangle\langle i+j|b\prod_{h=i}^{i+j-1}\gamma_h + |i+j\rangle\langle i|b\prod_{h=i}^{i+j-1}\gamma_h^*\right)$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$ *ja* $\gamma_h \in U(1)$ *kaikilla* $1 \leq h \leq d-1$ *sekä määritellään projektiivinen unitaariesitys* $\sigma : S_d \to \mathcal{U}(\mathcal{H})/U(1)$ *kaavalla*

$$\sigma(g_{ij}) = |i\rangle\langle j| + |j\rangle\langle i|\prod_{h=i}^{j-1}(\gamma_h^*)^2 + \sum_{l=1, l\neq i,j}^{d} |l\rangle\langle l|\prod_{h=i}^{j-1}\gamma_h^*$$

missä $i < j$ *ja* $g_{ij} \in S_d$ *vaihtaa ainostaan alkioiden* i *ja* j *paikkoja keskenään. Tällöin* $S^{-1/2}$ *on esityksen* σ *automorfismi.*

Todistus. Tarkistetaan aluksi, että σ on hyvin määritelty. $\sigma(g_{ij})\sigma(g_{ij})^* = I_{\mathcal{H}}$ ja $\sigma(g_{ij}) = \alpha\sigma(g_{ij})^*$, missä $\alpha \in U(1)$, joten $\sigma(g_{ij})^2 = \alpha I_{\mathcal{H}}$. Näin ollen operaattoreilla $\sigma(g_{ij})$ on sama rakenne kuin kuvauksilla $g_{ij} \in S_d$, joten σ on projektiivinen unitaariesitys. Operaattorin S ominaisarvot ovat positiivisia (ja reaalisia), joten se on vektoriavaruuden $\mathcal{H}$ automorfismi. Suora lasku osoittaa, että S kommutoi kaikkien operaattoriryhmän $\sigma(S_d)$ generaattorien $\sigma(g_{ij})$ kanssa, joten se on esityksen σ automorfismi:

$$
\begin{aligned}
\sigma(g_{mn})S\sigma(g_{mn})^* &= |m\rangle\langle n|S\sigma(g_{mn})^* + |n\rangle\langle m|S\sigma(g_{mn})^* \prod_{h=m}^{n-1}(\gamma_h^*)^2 \\
&+ \sum_{l=1,l\neq m,n}^{d} |l\rangle\langle l|S\sigma(g_{mn})^* \prod_{h=m}^{n-1}\gamma_h^* \\
&= \left(|m\rangle\langle n|a + \sum_{j=1}^{d-n}|m\rangle\langle n+j|b \prod_{h=n}^{n+j-1}\gamma_h + \sum_{j=1}^{n-1}|m\rangle\langle n-j|b \prod_{h=n-j}^{n-1}\gamma_h^*\right)\sigma(g_{mn})^* \\
&+ \left(|n\rangle\langle m|a \prod_{h=m}^{n-1}(\gamma_h^*)^2 + \sum_{j=1}^{d-m}|n\rangle\langle m+j|b \left(\prod_{h=m}^{n-1}(\gamma_h^*)^2\right)\left(\prod_{h=m}^{m+j-1}\gamma_h\right)\right)\sigma(g_{mn})^* \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1}|n\rangle\langle m-j|b \left(\prod_{h=m}^{n-1}(\gamma_h^*)^2\right)\left(\prod_{h=m-j}^{m-1}\gamma_h^*\right)\sigma(g_{mn})^* \\
&+ \sum_{l=1,l\neq m,n}^{d}\left(\prod_{h=m}^{n-1}\gamma_h^*\right)|l\rangle\langle l|a\sigma(g_{mn})^* \\
&+ \sum_{l=1,l\neq m,n}^{d}\left(\prod_{h=m}^{n-1}\gamma_h^*\right)\left(\sum_{j=1}^{d-l}|l\rangle\langle l+j|b\prod_{h=l}^{l+j-1}\gamma_h + \sum_{j=1}^{l-1}|l\rangle\langle l-j|b\prod_{h=l-j}^{l-1}\gamma_h^*\right)\sigma(g_{mn})^* \\
&= |m\rangle\langle m|a + |m\rangle\langle n|b\prod_{h=m}^{n-1}\gamma_h + \sum_{k=m+1,k\neq n}^{d}|m\rangle\langle k|b\prod_{h=m}^{k-1}\gamma_h + \sum_{k=1}^{m-1}|m\rangle\langle k|b\prod_{h=k}^{m-1}\gamma_h^* \\
&+ |n\rangle\langle m|b\prod_{h=m}^{n-1}\gamma_h^* + |n\rangle\langle n|a + \sum_{k=1,k\neq m}^{n-1}|n\rangle\langle k|b\prod_{h=k}^{n-1}\gamma_h^* + \sum_{k=n+1}^{d}|n\rangle\langle k|b\prod_{h=n}^{k-1}\gamma_h \\
&+ \sum_{l=1,l\neq m,n}^{d}|l\rangle\langle l|a + \sum_{l,k=1\ l,k\neq m,n\ l<k}^{d}|l\rangle\langle k|b\prod_{h=l}^{k-1}\gamma_h + \sum_{l,k=1\ l,k\neq m,n\ l>k}^{d}|l\rangle\langle k|b\prod_{h=l}^{k-1}\gamma_h^* \\
&+ \sum_{l=1}^{m-1}|l\rangle\langle m|b\prod_{h=l}^{m-1}\gamma_h + \sum_{l=m+1,l\neq n}^{d}|l\rangle\langle m|b\prod_{h=m}^{l-1}\gamma_h^* + \sum_{l=1,l\neq m}^{n-1}|l\rangle\langle n|b\prod_{h=l}^{n-1}\gamma_h \\
&+ \sum_{l=n+1}^{d}|l\rangle\langle n|b\prod_{h=n}^{l-1}\gamma_h^* \\
&= \sum_{i=1}^{d}|i\rangle\langle i|a + \sum_{j=1}^{d-1}\sum_{i=1}^{d-j}\left(|i\rangle\langle i+j|b\prod_{h=i}^{i+j-1}\gamma_h + |i+j\rangle\langle i|b\prod_{h=i}^{i+j-1}\gamma_h^*\right) \\
&= S
\end{aligned}
$$

$\square$

Suure M voitaisiin nyt muodostaa suorilla laskuilla kaavan (1) mukaisesti. Laskut ja lopputulokset ovat kuitenkin niin pitkiä, että on käytännöllisempää tutkia pelkästään ominaisvektoreita. Tämä voidaan tehdä vähentämättä tulosten yleisyyttä, sillä kaikki tutkittavat operaattorit ovat astetta 1.

Merkitään tästä eteenpäin $\phi_{mn} = S^{-1/2} f_{mn}$. Kun $i < j$, $i, j \neq m$ operaattorit $\sigma(g_{ij})$ operoivat vektoreihin ϕ_{nn} kaavojen

$$\begin{aligned}
\sigma(g_{ij})\phi_{ii} &= \sigma(g_{ij}) S^{-1/2} f_{ii} \\
&= \sigma(g_{ij}) \left(|i\rangle a + \sum_{l=1}^{i-1} |l\rangle b \prod_{h=l}^{i-1} \gamma_h + \sum_{l=i+1}^{d} |l\rangle b \prod_{h=i}^{l-1} \gamma_h^* \right) \\
&= |j\rangle a \prod_{h=i}^{j-1} \gamma_h^* + \sum_{l=1}^{i-1} |l\rangle b \prod_{h=l}^{i-1} \gamma_h + \sum_{l=i+1,\, l\neq j}^{d} |l\rangle b \prod_{h=i}^{l-1} \gamma_h^* + |i\rangle b \\
&= \left(\prod_{h=i}^{j-1} \gamma_h^* \right) \phi_{jj} \\
&= \phi_{jj}, \\
\sigma(g_{ij})\phi_{jj} &= \left(\prod_{h=i}^{j-1} \gamma_h \right) \sigma(g_{ij})^2 \phi_{ii} \\
&= \phi_{ii}, \\
\sigma(g_{ij})\phi_{mm} &= \sigma(g_{ij}) S^{-1/2} f_{mm} \\
&= \sigma(g_{ij}) \left(|m\rangle a + \sum_{l=1}^{m-1} |l\rangle b \prod_{h=l}^{m-1} \gamma_h + \sum_{l=m+1}^{d} |l\rangle b \prod_{h=m}^{l-1} \gamma_h^* \right) \\
&= |m\rangle a + \sum_{l=1}^{m-1} |l\rangle b \prod_{h=l}^{m-1} \gamma_h + \sum_{l=m+1}^{d} |l\rangle b \prod_{h=m}^{l-1} \gamma_h^* \\
&= \phi_{mm}
\end{aligned}$$

mukaisesti. Kahden ensimmäisen laskun viimeiset välivaiheet seuraavat esityksen σ projektiivisyydestä. Saatuja kaavoja sekä relaatioita

$$\phi_{mn} = \phi_{mm} + \phi_{nn}$$

$$\phi_{nm} = \phi_{mm} - i\phi_{nn}$$

käyttämällä saadaan selville operaattorin $\sigma(g_{ij})$ operointi kaikille vektoreille ϕ_{mn}:

$$\sigma(g_{ij})\phi_{mn} = \phi_{mn}$$

$$\sigma(g_{ij})\phi_{nm} = \phi_{nm}$$

$$\sigma(g_{ij})\phi_{ij} = \phi_{ij}$$

$$\sigma(g_{ij})\phi_{ji} = \phi_{ij}$$

$$\sigma(g_{ij})\phi_{im} = \phi_{jm}$$

$$\sigma(g_{ij})\phi_{jm} = \phi_{im}$$

$$\sigma(g_{ij})\phi_{mi} = \phi_{mj}$$

$$\sigma(g_{ij})\phi_{mj} = \phi_{mi}$$

Näin ollen imprimitiivisysteemin (σ, Ω, M) radat ovat $\{M_{mm}\}_{m=1}^{d}$ ja $\{M_{mn}\}_{m,n=1,\, m\neq n}^{d}$.

6.2.1 Symmetrisyydestä

Eräs matematiikan näkökulmasta kiinnostusta herättänyt kvanttimekaanisten suureiden luokka ovat niin sanotut (asteen 1) symmetriset infotäydelliset suureet,joista käytetään myös lyhyempää nimitystä SIC-POVM [13]. Tällaisen suureen kaikki operaattorit M_x ovat astetta 1 ja niille pätee

$$\mathrm{tr}\,[M_x M_y] = \frac{1 + \delta_{xy} d}{d^2(d+1)}$$

Lähes kaikki tunnetut esimerkit asteen 1 SIC-POVM -suureista ovat kovariantteja tiettyjen ryhmien suhteen [14], joten tarkistetaan seuraavaksi, onko edellisessä kappaleessa konstruoitu kovariantti infotäydellinen suure symmetrinen jollain avaruuden $\mathcal{H}$ dimensioilla d.

Lukujen p_{mn} täytyy olla vakioita esityksen σ radoilla, jotka selvitettiin edellisessä kappaleessa. Merkitään jatkossa $p_{mn} = p$, kun $m = n$ ja $p_{mn} = q$, kun $m \neq n$. Symmetrisyydestä saadaan yhtälöt, jotka vektorien ϕ_{mn} sisätulojen täytyy toteuttaa:

$$
\begin{aligned}
p_{mn}\langle\phi_{mn}|\phi_{mn}\rangle &= \frac{1}{d} \\
p_{mn}p_{ij}|\langle\phi_{mn}|\phi_{ij}\rangle|^2 &= \frac{1}{d^2(d+1)}
\end{aligned}
$$

Lasketaan vektorien ϕ_{mm} väliset sisätulot:

$$
\begin{aligned}
\langle\phi_{mm}|\phi_{mm}\rangle = &\left(\langle m|a + \sum_{l=1}^{m-1}\langle l|b\prod_{h=l}^{m-1}\gamma_h^* + \sum_{l=m+1}^{d}\langle l|b\prod_{h=m}^{l-1}\gamma_h\right) \\
&\left(|m\rangle a + \sum_{l=1}^{m-1}|l\rangle b\prod_{h=l}^{m-1}\gamma_h + \sum_{l=m+1}^{d}|l\rangle b\prod_{h=m}^{l-1}\gamma_h^*\right) \\
&= a^2 + (d-1)b^2, \\
\langle\phi_{mm}|\phi_{nn}\rangle = &\left(\langle m|a + \sum_{l=1}^{m-1}\langle l|b\prod_{h=l}^{m-1}\gamma_h^* + \sum_{l=m+1}^{d}\langle l|b\prod_{h=m}^{l-1}\gamma_h\right) \\
&\left(|n\rangle a + \sum_{l=1}^{n-1}|l\rangle b\prod_{h=l}^{n-1}\gamma_h + \sum_{l=n+1}^{d}|l\rangle b\prod_{h=n}^{l-1}\gamma_h^*\right) \\
&= (2ab + (d-2)b^2)\prod_{h=m}^{n-1}\gamma_h
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä sisätuloja koskevat ehdot saadaan

$$
\begin{aligned}
p\langle\phi_{mm}|\phi_{mm}\rangle &= \frac{1}{d} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{d(a^2 + (d-1)b^2)} &= p,
\end{aligned}
$$

sekä

$$
\begin{aligned}
q\langle\phi_{mn}|\phi_{mn}\rangle &= \frac{1}{d} \\
\Leftrightarrow q(\langle\phi_{mm}|\phi_{mm}\rangle + \langle\phi_{nn}|\phi_{nn}\rangle + 2\mathrm{Re}(\langle\phi_{mm}|\phi_{nn}\rangle))) &= \frac{1}{d} \\
\Leftrightarrow q\left(a^2 + (d-1)b^2 + \mathrm{Re}\left((2ab + (d-2)b^2)\prod_{h=m}^{n-1}\gamma_h\right)\right) &= \frac{1}{2d} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2d(a^2 + (d-1)b^2 + \cos(\sum_{h=m}^{n-1}\arg(\gamma_h))(2ab + (d-2)b^2)} &= q
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
q\langle\phi_{nm}|\phi_{nm}\rangle &= \frac{1}{d} \\
\Leftrightarrow q(\langle\phi_{mm}|\phi_{mm}\rangle + \langle\phi_{nn}|\phi_{nn}\rangle + 2\mathrm{Im}(\langle\phi_{mm}|\phi_{nn}\rangle))) &= \frac{1}{d} \\
\Leftrightarrow q\left(a^2 + (d-1)b^2 + \mathrm{Im}\left((2ab + (d-2)b^2)\prod_{h=m}^{n-1}\gamma_h\right)\right) &= \frac{1}{2d} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2d(a^2 + (d-1)b^2 + \sin(\sum_{h=m}^{n-1}\arg(\gamma_h))(2ab + (d-2)b^2)} &= q,
\end{aligned}
$$

joten vähentämällä kaksi edellistä yhtälöä toisistaan saadaan

$$
\begin{aligned}
\cos(\sum_{h=m}^{n-1}\arg(\gamma_h)) &= \sin(\sum_{h=m}^{n-1}\arg(\gamma_h)) \\
\Leftrightarrow \tan(\sum_{h=m}^{n-1}\arg(\gamma_h)) &= 1 \\
\Leftrightarrow \sum_{h=m}^{n-1}\arg(\gamma_h) &= \frac{\pi}{4} + k\pi,
\end{aligned}
$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. Jos $\arg(\gamma_1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ja $\arg(\gamma_2) = \frac{\pi}{4} + k'\pi$, niin $\arg(\gamma_1\gamma_2) = \arg(\gamma_1) + \arg(\gamma_2) = \frac{\pi}{2} + (k+k')\pi$, joten M ei voi olla symmetrinen suure kun $\dim(\mathcal{H}) = d > 2$.

Olkoon nyt $d = 2$. Esityksen operaattorit ovat

$$
\left\{\sigma(id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma(g_{12}) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_1^* & 1 \end{bmatrix}\right\}/U(1)
$$

ja automorfismina

$$
S = \begin{bmatrix} a & b\gamma_1 \\ b\gamma_1^* & a \end{bmatrix}
$$

Suureen M ominaisvektorit ovat

$$
\begin{aligned}
\sqrt{p}\phi_{11} &= |1\rangle a + |2\rangle b\gamma_1^* \\
\sqrt{p}\phi_{22} &= |2\rangle a + |1\rangle b\gamma_1 \\
\sqrt{q}\phi_{12} &= \sqrt{q}(\phi_{11} + \phi_{22}) \\
\sqrt{q}\phi_{21} &= \sqrt{q}(\phi_{11} - i\phi_{22}),
\end{aligned}
$$

$\arg(\gamma_1) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, joten voidaan valita $\gamma_1 = e^{i\pi/4}$. Nyt

$$p = \frac{1}{2(a^2 + b^2)}$$

ja

$$q = \frac{1}{4(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)},$$

joten

$$p|\langle \phi_{11}|\phi_{22}\rangle| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}ab = a^2 + b^2$$

ja

$$\sqrt{pq}|\langle\phi_{12}|\phi_{11}\rangle| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{pq}|a^2 + b^2 + 2ab\gamma_1^*| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{pq}ab|2\sqrt{3} + 2\gamma_1^*| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ab\sqrt{(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{8(a^2+b^2)(a^2+b^2+\sqrt{2}ab)}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab\sqrt{(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{4\sqrt{3}a^2b^2(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3+1+\sqrt{6}}}{4\sqrt{6+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

joka on ristiriita. Näin ollen suure ei voi olla symmetrinen millään dimension d arvolla.

6.3 Kovarianttien suureiden yleinen konstruktio

Esitellään lopuksi yksityiskohtaisemmin ja esimerkkien kanssa luvussa 5 mainittu menetelmä kovarianttien suureiden konstruoimiselle. Mainittakoon kertauksen vuoksi, että $\mathcal{H}$ on tutkittavan systeemin Hilbertin avaruus ja Ω (kiinnitetty) mittaustulosten arvoavaruus. Numeroidaan arvoavaruuden alkiot siten, että $\Omega = \{1, \ldots, d\}$, missä $d = \dim \mathcal{H}$. Nyt bra-ket -notaatiota käyttäen avaruuden $\mathcal{H}$ ortonormaaliksi kannaksi voidaan valita $\{|i\rangle\}_{i=1}^{d}$.

Lauseen 6.1 perusteella kaikille symmetriaryhmille $g \leq S_d$ voidaan määritellä projektiivinen unitaariesitys $\sigma : G \to \mathcal{PU}(\mathcal{H})$ ja asteen 1 PVM $P : 2^{\Omega} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ siten, että (σ, Ω, P) on imprimitiivisysteemi.

Voidaan myös määritellä uusi arvoavaruus $\Omega' = \Omega \times \Omega$, johon symmetriaryhmän $G \leq S_d$ operointi voidaan laajentaa luonnollisella tavalla $g((i,j)) = (g(i), g(j))$. Mikäli symmetriaryhmänä on S_d, jakautuu arvoavaruus Ω' (alkiovieraisiin) ratoihin $\Omega'_1 = \{(i,i) : 1 \leq i \leq d\}$ ja $\Omega'_2 = \{(i,j) : i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq d\}$. Ratojen edustajiksi voidaan valita esimerkiksi alkiot $(1,1)$ ja $(1,2)$, joiden stabilisaattorit ovat $G_{(1,1)} = \{g \in S_d : g(1) = 1\}$ ja $G_{(1,2)} = \{g \in S_d : g(1) = 1,\ g(2) = 2\}$.

Seuraavaksi suureen $M : 2^{\Omega'} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ konstruoimiseksi täytyy lauseen 5.2 mukaisesti löytää esitys $\sigma : S_d \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ ja ratoja Ω'_1, Ω'_2 vastaavat (itseadjungoidut) operaattorit $M(\{(1,1)\}) = K_1 \geq 0$ ja $M(\{(1,2)\}) = K_2 \geq 0$, joille $\sigma(h)K_1\sigma(h^{-1}) = K_1$ kaikilla $h \in G_{(1,1)}$ ja $\sigma(h)K_2\sigma(h^{-1}) = K_2$ kaikilla $h \in G_{(1,2)}$.

Yksinkertaisin vaihtoehto esitykselle σ on $\sigma(g) = \sum_{i=1}^{d} |g(i)\rangle\langle i|$. Tällöin operaattoreiksi K_1 ja K_2 saadaan

$$K_1 = A|1\rangle\langle 1| + \sum_{i=2}^{d} (B|1\rangle\langle i| + B^*|i\rangle\langle 1|) + \sum_{i,j=2}^{d} C|i\rangle\langle j|$$

ja

$$K_2 = D|1\rangle\langle 1| + E|1\rangle\langle 2| + E^*|2\rangle\langle 1| + F|2\rangle\langle 2| + \sum_{i=3}^{d} (G|1\rangle\langle i| + G^*|i\rangle\langle 1|)$$
$$+ \sum_{i=3}^{d} (H|2\rangle\langle i| + H^*|i\rangle\langle 2|) + \sum_{i,j=3}^{d} (I|i\rangle\langle j|)\,,$$

missä A, C, D, F, $I \in \mathbb{R}$ ja B, E, G, $H \in \mathbb{C}$. Loput suureen M operaattorit saadaan laskettua kaavan $\sigma(g)K_i\sigma(g^{-1})$ (missä i=1,2) avulla kun käydään läpi kaikki alkiot $g \in G$.

Operaattorien K_1, K_2 ominaisuuksia vaihtelemalla saadaan erilaisia erikoistapauksia suureesta M. Koska unitaariesityksen operaattorit ovat kaikki isometrisia surjektioita, on M asteen 1 suure jos ja vain jos operaattorit K_1 ja K_2 ovat astetta 1. Erityisesti jos K_1 ja K_2 ovat asteen 1 operaattoreita ja operaattorit $\sigma(g)K_i\sigma(g^{-1})$ ovat lineearisesti riippumattomia kaikilla $g \in S_d$ ja $i = 1, 2$, on M määritelmän mukaan ekstremaalinen infotäydellinen suure. Jos taas valitaan $K_2 = 0$ ja operaattorin K_1 normiksi 1 (jolloin operaattorista K_1 tulee asteen 1 projektio), saadaan M muutettua asteen 1 projektiomitaksi.

7 Yhteenveto

Tutkielmassa käsiteltiin kvanttimekaniikan mittausteorian matemaattisia erityispiirteitä ja ongelmia, jotka liittyvät optimaalisten kovarianttien suureiden luokitteluun ja rakenteeseen. Useimmat esitetyistä tuloksista soveltuvat tilanteeseen, jossa tutkittavan systeemin mittaustulosavaruus on äärellinen. Pelkistyksestä huolimatta tilanne on realistinen, sillä oikeat mittalaitteet voivat rekisteröidä ainoastaan äärellisen määrän erilaisia mittaustuloksia.

Ensimmäisissä luvuissa käytiin läpi kvanttimekaniikan matemaattinen muotoilu ja yleisimmät suureiden optimaalisuuskriteerit. Näiden lisäksi esiteltiin kovarianttien suureiden yhteydessä tarvittavaa diskreettien ryhmien esitysteoriaa. Tutkielman loppupuolella keskityttiin kovarianttien suureiden teoriaan ja optimaalisten kovarianttien suureiden olemassaoloon ja rakenteeseen. Kovariantin infotäydellisen suureen olemassaolo todistettiin esimerkin avulla mielivaltaiselle äärellisen arvoavaruuden omaavalle kvanttimekaaniselle systeemille. Lisäksi tarkasteltiin löydetyn esimerkin yhteyttä symmetrisiin suureisiin, joilla on enemmän sovelluksia matematiikan kuin fysiikan parissa. Esimerkkisuure ei kuitenkaan täyttänyt symmetriaehtoja. Lopuksi tarkasteltiin esimerkkien avulla menetelmää, jolla kovariantteja suureita voidaan muodostaa symmetriaryhmän ratojen ja niiden edustajistoa vastaavien operaattorien avulla.

Viitteet

[1] P. Busch, P. Lahti, J. P. Pellonpää, K. Ylinen, *Quantum measurement* (Springer 2016).

[2] E. Haapasalo, J. P. Pellonpää, *Optimal quantum observables*, Journal of Mathematical Physics 58, 122104 (2017).

[3] G. B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis* (CRC Press 1995).

[4] P. A. Grillet, *Abstract algebra* (Springer 2007).

[5] T. Heinosaari, M. M. Wolf, *Non-disturbing quantum measurements*, Journal of Mathematical Physics 51, 092201 (2010).

[6] G. M. D'Ariano, P. L. Presti, P. Perinotti, *Classical randomness in quantum measurements*, J. Phys. A: Math. Gen. 38 5979 (2005).

[7] J. P. Pellonpää, *Complete characterization of extreme quantum observables in infinite dimensions*, J. Phys. A: Math. Theor. 44 085304 (2011).

[8] P. Etingof, O. Goldberg, S. Hensel, T. Liu, A. Schwender, D. Vaintrob, E. Yudovina, S. Gerovitch, *Introduction to representation theory*, (American mathematical society 2011).

[9] L. Dornhoff, *Group renpresentation theory, part A* (Marcel Dekker 1971).

[10] G. Cassinelli, E. De Vito, P. Lahti, A. Levrero, *Symmetry groups in quantum mechanics and the theorem of Wigner on the symmetry transformations*, Reviews in Mathematical Physics 09, No. 08, 921-941 (1997).

[11] G. W. Mackey, *Unitary representations of group extensions. I*, Acta Math. 99, 265-311 (1958).

[12] U. Cattaneo, *On Mackey's imprimitivity theorem*, Comment. Math. Helvetici 54, 629-641 (1979).

[13] A. E. Rastegin, *Notes on general SIC-POVMs*, Phys. Scr. 89, 085101 (2014).

[14] H. Zhu, *SIC-POVMs and Clifford groups in prime dimensions*, J. Phys. A: Math. Theor. 43 305305 (2010).