TURUN YLIOPISTO

Greenin identiteetit ja funktiot

Valter Olin

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Valter Olin: Greenin identiteetit ja funktiot
LuK -tutkielma, 14 s.
Matematiikka
Toukokuu 2025

Tutkielmassa tutkitaan Greenin identiteettejä ja funktioita sekä niiden soveltamista harmonisten funktioiden analysointiin. Erityisesti tutkitaan, miten nämä mahdollistavat raja-arvo-ongelmien, kuten Dirichletin ja Poissonin ongelmien, ratkaisemisen. Tutkielmassa esitellään Greenin ensimmäinen ja toinen identiteetti, joita hyödynnetään keskiarvo-ominaisuuden, maksimiperiaatteen ja Dirichletin periaatteen johtamisessa. Toisessa osassa tutkitaan Greenin funktioiden rakennetta, symmetriaa ja erityistapauksia puolitilassa ja pallossa. Esitetyt menetelmät perustuvat klassisiin analyyttisiin tekniikoihin ja edellyttävät lukijalta ymmärrystä osittaisdifferentiaaliyhtälöistä, integraalilaskennasta sekä harmonisten funktioiden ominaisuuksista.

Asiasanat: Greenin identiteetti, Greenin funktio, Dirichletin ongelma, osittaisdifferentiaaliyhtälö

Sisällys

1 Johdanto **1**

2 Greenin identiteetit **2**
2.1 Greenin ensimmäinen identiteetti 2
2.2 Greenin toinen identiteetti 2

3 Ensimmäisen identiteetin sovellukset **3**
3.1 Keskiarvo ominaisuus 3
3.2 Maksimiperiaate 4
3.3 Dirichletin periaate 5

4 Toisen identiteetin sovellukset **6**

5 Greenin funktio **7**
5.1 Teoreema 1 8
5.2 Greenin funktion symmetria 8
5.3 Teoreema 2 9

6 Puolitila ja pallo **10**
6.1 Puolitilassa 10
6.2 Pallossa 11

7 Yhteenveto **14**

Symboli	**Tarkoitus**
x, y, z	Reaalimuuttujat, koordinaatit
$f(x)$	Funktio
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
∂D	Alueen D reuna
dS	Pinnalla ∂D oleva pinta-elementti normaalisuuntaan
Δu	Laplacen operaattori
∇u	Gradientti eli $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$
$\frac{\partial u}{\partial n}$	Normaaliderivaatta, suuntaan $\mathbf{n}$
$\iint\limits_{\partial D}$, $\iiint\limits_{D}$	Pinta- ja tilaintegraalit
v, u	Yleiset funktiot esimerkiksi testifunktioita identiteeteissä
$\equiv$	Identtinen yhtäsuuruus
$\in$	Kuuluu joukkoon
$\lvert x \rvert$	Vektorin normi eli etäisyys origosta
θ, ϕ	Pallokoordinaattien kulmamuuttujat
$C(n)$	Dimensioon riippuva vakio
$E[w]$	Energiafunktio Dirichletin periaatteessa

Taulukko 1: Symbolit ja niiden merkitys

1 Johdanto

Osittaisdifferentiaaliyhtälöillä on perustavanlaatuinen rooli monien fysikaalisten ja teknisten ilmiöiden mallintamisessa. Näiden joukossa on harmoniset funktiot eli funktiot, joiden reali ja imaginääri ovat vähintään kahdesti derivoituvia. Tämä johtaa siihen funktion reali ja imaginääriset osat ovat molemmat harmonisia [1]. Harmoniset funktiot muodostavat tärkeän luokan, analyyttisten ominaisuuksiensa ja raja-arvo ongelmiin soveltuvuuden vuoksi. Tällaisten ongelmien tutkimiseen käytetään usein integraali identiteettiä ydinpohjaisia ratkaisumenetelmiä. Greenin identiteetit ja -funktiot ovat keskeisiä työkaluja näissä menetelmissä.

Tyypillisesti funktiot kuvataan lausekkeen avulla hyödyntäen parametreja kuten x joka vaihtelee määrätyn joukon yli. Tätä kutsutaan funktion alueeksi esimerkiksi $f(x) := 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$, jossa määritelty alue on R. [2]

Tutkielmassa keskitytään Greenin ensimmäiseen ja toiseen identiteettiin ja niiden sovelluksiin, jotka yhdistävät funktioiden differentiaalisia ilmaisuja integraaleihin alueeseen ja sen rajojen yli. Näitä identiteettejä käytetään johtamaan perustuloksia harmonisille funktioille, kuten keskiarvon ominaisuus, maksimiperiaate ja Dirichletin periaate. Nämä tulokset tarjoavat työkaluja raja-arvo ongelmien ratkaisujen analysoimiseen.

Greenin funktiot on myös keskeinen käsite tutkielmassa. Greenin funktioita voidaan hyödyntää osittaisdifferentiaalifunktioiden ratkaisujen esittämiseen rajaintegraaleina, sillä on myös keskeinen osa klassisten Dirichletin ongelmien ratkaisemisessa. Tutkielmassa käsitellään Greenin funktion rakennetta ja ominaisuuksia, kuten symmetria ja ainutlaatuisuus. Tutkielmassa käsitellään myös Greenin funktioita tietyissä geometrioissa kuten puolitilassa ja pallossa. Vaikka yleinen teoria on muotoiltu n ulotteisessa avaruudessa niin esimerkit on esitetty kolmiulotteisena selvyyden vuoksi.

Luvussa kaksi esitellään ja todistetaan Greenin ensimmäinen sekä toinen identiteetti. Luvussa kolme keskitytään ensimmäisen identiteetin sovelluksia kuten keskiarvo ominaisuus, maksimiperiaate ja Dirichletin periaate, toisen identiteetin sovellus esityskaava esitellään neljännessä luvussa. Luvussa viisi esitellään Greenin funktio ja osoitetaan sen keskeiset ominaisuudet, kuten mukaan lukien symmetria ja sen rooli Dirichlet-ongelmien ratkaisemisessa. Lopuksi luvussa 6 esitetään eksplisiittiset rakenteet Greenin funktiosta puolitilassa ja pallossa, ja sovelletaan niitä ratkaisemaan raja-arvoongelmia näillä alueilla.

2 Greenin identiteetit

Greenin identiteetit muodostavat analyyttisen perustan harmonisten funktioiden tutkimukselle. Ensimmäinen identiteetti yhdistää funktion ja sen derivaattojen integraaleja alueella ja sen reunalla, kun taas toinen identiteetti tuo esiin näiden suhteen vaihtuvuuden ja toimii johdantona useille klassisille sovelluksille. Seuraavissa alaluvuissa esitellään nämä identiteetit yksityiskohtaisesti.

2.1 Greenin ensimmäinen identiteetti

Aloitetaan säännöstä

$$(vu_x)_x = v_x u_x v u_{xx}.$$

Sama toistetaan derivaatoille y ja x, kun tulokset summataan saadaan identiteetti

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u.$$

Saatu identiteetti integroidaan ja käyttämällä divergenssiteoreemaa [3] funktion vasemmalle puolelle saadaan

$$\iint\limits_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} d\, S = \iiint\limits_{D} \nabla v \ \cdot \nabla u \ d\mathbf{x} \ + \iiint\limits_{D} v \nabla u \ d\mathbf{x}, \tag{1}$$

missä $\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla u$ on suuntaderivaatta ulospäin normaaliin suuntaan. Tämä on *Greenin ensimminen identiteetti*. Se on voimassa jokaiselle alueelle D ja jokaiselle funktioparille, kuten u ja v.

Esimerkki 2.1. Jos $v \equiv 1$ saadaan

$$\iint\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial v} d\, S = \iiint\limits_{D} \Delta u \ dx. \tag{2}$$

Tämä osoittaa että Laplacen integraali yli alueesta D riippu vain funktion u normaalista derivaatoista alueen D reunalla.

2.2 Greenin toinen identiteetti

Greenin toinen identiteetti on korkeamman ulottuvuuden identiteetti, ja se johtaa perustavaan esityskaavaan harmonisille funktioille. Keskimmäinen termi ensimmäisessä identiteetissä ei muutu jos u ja v vaihtavat paikkaa. Jos kirjoitetaan esimmäisen identiteetin u ja v, ja uudestaan niiden paikat vaihdettuina ja otammalla niiden erotuksen, saadaan

$$\iiint\limits_{D} (u \ \Delta v - v \Delta u) dx = \iint\limits_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \tag{3}$$

Kaava 2 tunnetaan Greenin toisena identiteettinä, ja se on pätevä jokaiselle funktioparille u ja v. Se johtaa seuraavaan luonnolliseen määritelmään. Rajaehtoa kutsutaan symmetriaksi operaattorille Δ, jos toisen identiteetin oikea puoli katoaa kaikilla u ja v pareilla jotka täyttävät rajaehdon. Jokainen kolmesta klassisesta rajaehdosta – Dirichlet'n, Neumannin ja Robinin ehto – on symmetrinen.

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan tilannetta jossa $u(x) = 1$ ja $v(x) = 1$ suljetulla alueella D. koska $\Delta u = 0$ ja $\Delta v = 0$ greenin toinen identiteetti supistuu muotoon

$$\iint_{\partial D} (1 \cdot \frac{\partial 1}{\partial n} - 1 \cdot \frac{\partial 1}{\partial n}) dS = 0$$

tämä pätee koska $\frac{\partial 1}{\partial n}$=0. Tulos havainnollistaa että Greenin toinen identiteetti toimii triviaalilla tavalla kun u ja v ovat vakioita, sillä reunaderivaatat häviävät ja $\Delta u = \Delta v = 0$.

3 Ensimmäisen identiteetin sovellukset

3.1 Keskiarvo ominaisuus

Kolmannessa ulottuvuudessa keskiarvo-ominaisuus määrittelee, että minkä tahansa alueen ylittävän harmonisen funktion keskiarvo on sama kuin alueen keskipisteen arvo.

Todistus. Olkoon D pallo, $|\mathbf{x}| < a$, jossa $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$. Jolloin D raja on pallo $\{|\mathbf{x}| = a\}$. Olkoon $\Delta u = 0$ jokaisella alueella joka sisältää D ja D raja-arvon. Koska u on harmoninen, $u \in C^{\infty(D)}$ ja derivaattojen raja-arvot ovat olemassa. Pallon tapauksessa $\mathbf{n}$ osoittaa suoraan poispäin alkuperästä, niin että

$$\tfrac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla u = \tfrac{\mathbf{x}}{r} \cdot \nabla u = \tfrac{x}{r} u_x + \tfrac{y}{r} u_y + \tfrac{z}{r} u_z = \tfrac{\partial u}{\partial r},$$

missä $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = |x|$ on pallon kordinaatti ja pisteen (x, y, z) etäisyys pallon keskipisteestä. Funktiosta (2) tulee

$$\iint\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial r} d\ S = 0, \tag{4}$$

Kun integroidaan pallon kordinaatteja (r, θ, ϕ). Funktio (4) saadaan muotoon

$$\textstyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u_r(a, \theta, \phi) a^2 \sin\theta \ d\theta \ d\phi = 0,$$

koska r=a D rajalla. Jakamalla sen vakiolla $4\pi a^2$ joka on D:n rajan pinta-ala. Tulos on pätevä kaikilla $a > 0$, joten voidaan ajatella sitä muuttujana r. Kun $\partial / \partial r$ otetaan integraalin ulkopuolelle saadaan

$$\tfrac{\partial}{\partial r} \left[\tfrac{1}{4\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u_r(a, \theta, \phi) a^2 \sin\theta \ d\theta \ d\phi \right] = 0,$$

joten

$$\tfrac{1}{4\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u_r(a, \theta, \phi) a^2 \sin\theta \ d\theta \ d\phi$$

on riippumaton r:stä. Tämä funktio on u keskiarvo pallolla $\{|x| = r\}$. Erityisesti kun r lähestyy nollaa, saadaan

$$\tfrac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(\mathbf{0})\sin\theta\ d\theta\ d\phi = (\mathbf{0}),$$

joka on

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{|x|=r} u(x)\ dS = u(\mathbf{0}).$$

Tämä tulos todistaa keskiarvo ominaisuuden kolmannessa ulottuvuudessa, mutta sama perjaate toimii n ulottuvuudessa. □

3.2 Maksimiperiaate

Maksimiperiaate tunnetaan myös Hopfin maksimi periaatteena [4]. Hopfin lemmassa oletetaan, että $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ on harmoninen funktio, ja että u saavuttaa maksimiarvon reunan pisteessä $x_0 \in \partial D$. Maksimipiste ei voi sijaita alueen sisällä vaan se esiintyy aina alueen reunalla ∂D.

Todistus. Tarkastellaan ensin tilannetta jossa $r = 1$. Olkoon $v(x) =^{-a|x|^2} -e^{-\alpha}$, jolloin $v = 0$ D reunalla ja $v > 0$ alueella D. Määritellään

$$w : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\ w(x) = |x|^2$$

ja

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ f(t) = e^{-\alpha t} - e^{-\alpha}$$

niin että $v = f(w)$. Nyt tarkastellaan funktiota

$$\Delta f(w) = f''(w)|\nabla w|^2 + f'(w)\Delta w = 4\alpha^2 e^{-\alpha|x|^2}|x|^2 - 2n\alpha e^{-a|x|^2}.$$

Kun valitaan $\alpha = 4n$ ja v rajoitetaan $1 \geq |x| \geq 1/2$, saadaan

$$\Delta v \geq 8n^2 e^{-4n}$$

Nyt sovelletaan tätä u. Renkaassa $D_1/D_{1/2}$

$$\Delta(u + \epsilon v) = \epsilon\Delta v > 0,$$

niin että $u + \epsilon v$ on subharmoninen ja maksimiperiaate pätee. Siten funktion $u + \epsilon v$ maksimi renkaassa $D_1/D_{1/2}$ saavutetaan reunalla. u on tarkka maksimi ulkoreunalla, joten jos ϵ määritellään erittäin pieneksi, voidaan järjestää niin että myös $u + \epsilon v$ saavuttaa maksimin ulkoreunalla. Tämän määrittelemiseen tarvitaan

$$u(x_0) + \epsilon v(x_0) \geq \max_{\partial D_{1/2}}(u(x) + \epsilon v(x))$$

niin että

$$u(x_0) \geq \max_{\partial D_{1/2}} u(x) + \epsilon(e^{-n} - e^{-4n}).$$

Voidaan siis valita

$$\epsilon = \frac{u(x_0)\max_{\partial D_{1/2}} u(x)}{2(e^{-n}) - e^{-4n}}.$$

Tiedetään että $u + \epsilon v$ maksimiarvo on D rajalla, joten sen pitää olla x_0, koska $v = 0$ D rajalla. Siitä seuraa

$$\frac{\partial(u + \epsilon v)}{\partial n} \geq 0$$

siten että

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Laskemalla $\frac{\epsilon v}{\epsilon n}$ ja sijoittamalla ϵ saadaan

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq \frac{8ne^{-4n}}{2(e^{-n} - e^{-4n})}(u(x_0) - \max_{\partial D_{\frac{1}{2}}} u(x)). \tag{5}$$

Lopuksi sovelletaan Harnackin epätasa-arvoa jotta saadaan tämän -$u(0)$ termein. Määritellään $w(x)$ seuraavasti $w(x) = u(x_0) - u(x)$. Huomataan, että w on harmoninen ja epänegatiivinen, joten Harnackin epätasa-arvo pätee. Tällöin saadaan

$$w(0) \leq \max_{D_{1/2}(0)} w(x) \leq C(n) \min_{D_{1/2}(0)} w(x)$$

sopivilla dimensioiden vakiona $C(n)$. Siten

$$\frac{u(cx_0 - u(0))}{C(n)} \leq (u(x_0)) - \max_{D_{1/2}(0)} w(x).$$

Sijoittamalla tämän yhtälöön (5) saadaan

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq \frac{8ne^{-4n}}{2C(n)(e^{-n} - e^{-4n})}(u(x_0) - u(0)).$$

Tämä päättää todistuksen tapaukselle $r = 1$. □

Yleisen tapauksen saa skaalaamalla. Jos funktio u on harmoninen alueella $D_r(0)$ ja määritellään $\bar{u}(y) = u(ry)$ niin $\bar{u}$ on harmoninen alueella $D_1(0)$. Jos $x_0 \in \partial D_r(0)$ on funktion u tarkka maksimi, niin $\bar{x_0} = x_0/r$ on $\bar{u}$ tarkka maksimi alueen D reunalla

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq \frac{1}{r}\frac{8ne^{-4n}}{2C(n)(e^{-n} - e^{-4n})}(u(x_0) - u(0)).$$

3.3 Dirichletin periaate

Dirichletin periaate perustuu ideaan fyysikaalisesta energiasta. Sen mukaan jokaisessa funktiossa $w(x)$ joukossa D, funktiot $w(x)$ täyttävät Dirichletin rajaehdon

$$w = h(x) \ \in \ \partial D \tag{6}$$

Matalin energia esiintyy harmonisilla funktioilla jotka täyttävät ehdon (6). Jolloin energia on määritelty

$$E[w] = \frac{1}{2} \iiint\limits_{D} |\nabla w|^2 dx. \tag{7}$$

Dirichletin periaate määritellään siten että $u(x)$ on uniikki harmoninen funktio joka täyttää ehdon (5) alueella D, ja $w(x)$ on funktio alueella D joka täyttää ehdon (5). Jolloin

$$E[w] \geq E[u].$$

Todistus. Asetetaan $v = u - w$ ja lajenetaan neliön intgraalissa

$$E[w] = \frac{1}{2} \iiint\limits_{D} |\nabla (u - v)|^2 dx = E[u] - \iiint\limits_{D} \nabla u \cdot \nabla v \; dx + E[v]. \tag{8}$$

Seuraavaksi käytätään Greenin ensimmäistä identiteettiä (1) funktiopariin u ja v. Identiteetissä (1) kaksi kolmesta termistä saa arvon 0, koska $v = 0$ alueen D rajalla ja $\delta u = 0$ alueella D. Tästä seuraa että keskimmäinen termi kohdassa (8) saa myös arvon 0. Joten

$$E[w] = E[u] + E[v].$$

Koska E[v]$\geq$ 0, voidaan päätellä että E[w] $\geq$ E[u]. Tämä tarkoittaa että energia on pienimmillään kun w=v mikä todistaa Dirichletin periaatteen. $\square$

4 Toisen identiteetin sovellukset

Esityskaava

Tämä kaava esittää minkä tahansa harmonisen funktion integraalina yli reunan. Sen mukaan, jos Δ u = 0 alueella D, niin

$$u(x_0) = \iint\limits_{\partial D} \left[-u(x) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x - x_0|} \right) + \frac{1}{x - x_0} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \frac{dS}{4\pi} \tag{9}$$

Todistus. Esityskaava (9) on erityistilanne toisesta identiteetistä (3) jossa $v(x) = (-4\pi|x - x_o|)^{-1}$. Identiteetin (3) Oikea puoli vastaa yhtälöä (9). Lisäksi $\Delta u = 0$ $\Delta v = 0$, jolloin (3) vasemman puolen arvo on nolla. Funktion (9) vasen puoli syntyy siitä että funktio $v(x)$ on ääretön pisteessä x_0. Tällöin kaavaa (3) ei voi soveltaa koko alueella D, ja siksi otetaan pyöreä leikkaus pisteen x_0 ympäriltä. Olkoon D_ϵ olla alue josta on poistettu leikkaus jonka säde on ϵ ja keskipiste x_0. Yksinkertaisuuden vuoksi olkoon x_0 origossa. Silloin $v(x) = -1/(4\pi r)$, missä $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = |x|$. Tällä v valinnalla ja lisäksi koska $\Delta u = 0 = \Delta v$ alueella D_ϵ saadaan (3) joka on muotoa,

$$-\iint\limits_{\partial D_\epsilon} \left[u \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r} \right] dS = 0.$$

Koska D_ϵ raja koostuu kahdesta osasta, jotka ovat D alkuperäinen raja ja x_0 ympyröivän alueen poiston luoma raja jossa $r = \epsilon$, leikkauksen luomalla rajalla $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$. Näin ollen pinta integraali jakautuu kahteen osaan.

$$-\iint_{\partial D_\epsilon} \left[u \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r}\right] dS = -\iint_{r=\epsilon} \left[u \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{1}{r}\right] dS. \qquad (10)$$

Tämä identiteetti (10) on voimassa kaikilla pienillä $\epsilon > 0$. Esityskaava (9) seuraisi, edellyttäen että voidaan osoittaa, että yhtälön (10) oikea puoli lähenee arvoa $4\pi u(0)$ kun $\epsilon \to 0$.
Nyt leikkauksen rajalle $\{r = \epsilon\}$ saadaan,

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{\epsilon^2},$$

niin että funktion (10) oikea puoli on yhtä kuin

$$\frac{1}{\epsilon^2}\iint_{r=\epsilon} u\ dS + \frac{1}{\epsilon}\iint_{r=\epsilon} \frac{\partial u}{\partial r} dS = 4\pi\bar{u} + \pi\epsilon\frac{\bar{\partial u}}{\partial r} \qquad (11)$$

Missä $\bar{u}$ tarkoittaa $u(x)$ keskiarvoa leikkaus rajalla $|x| = r = \epsilon$, ja $\overline{\partial u/\partial r}$ tarkoittaa $\partial u/\partial n$ keskiarvoa leikkauksen rajalla. Kun $\epsilon \to 0$ lauseke (11) lähestyy

$$4\pi u(0) + 4\pi \cdot 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(0) = 4\pi u(0)$$

koska u on jatkuva ja $\partial u/\partial r$ on rajoitettu. Niin lauseke (10) muuttuu lausekkeeksi (9).

□

5 Greenin funktio

Greenin identiteettiä voidaan käyttää Dirichletin ongelman tutkimiseen. Esityskaava käyttää kahta funktion $v(x) = (-4\pi|x - x_0|)^{-1}$ ominaisuutta jotka ovat harmonisuus pisteessä x_0 ja funktiolla on tietty singulariteetti samassa pisteessä. Tarkoituksena on muokata esityskaavaa niin että että yksi termeistä katoaa. Muokattua funktiota kutsutaan Greenin funktioksi D.

Määritelmä 5.1. Greenin funktio $G(x)$ operaattorille $-\Delta$ ja alueella D pisteessä $x_0 \in D$ on funktio joka on määritelty $x \in D$ seuraavasti:

(i) $G(x)$ omaa jatkuvat toiset derivaatat ja $\Delta = 0$ alueella D, poislukien pisteen $x = x_0$.

(ii) $G(x) = 0$ kun $x \in$ D rajalla.

(iii) Funktio $G(x) + \frac{1}{4\pi|x - x_0}$ on äärellinen ja harmoninen kohdassa x_0 ja sen toiset derivaatat ovat kaikkialla jatkuvia.

Voidaan myös osoittaa, että Greenin funktio on olemassa. Greenin funktio on myös uniikki jos homogeenisillä raja-arvo ongelmilla on vain triviaaleja vastauksia [5].

Todistus. Ks. [5] □

5.1 Teoreema 1

Jos $G(x, x_0)$ on Greenin funktio, silloin ratkaisu Diricletin ongelmaan saadaan käyttämällä kaavaa

$$u(x_0) = \iint\limits_{\partial D} u(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial n} dS. \tag{12}$$

Todistus. Palataan takaisin esityskaavaan

$$u(x_0) = \iint\limits_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v \right) dS, \tag{13}$$

missä $v(x) = -(4\pi|x - x_0|)^{-1}$. Nyt voidaan kirjoittaa $G(x, x_0) = v(x) + H(x)$. Kohtien (iii) ja (i) mukaan $H(x)$ on harmoninen funktio koko alueella D. Käytämällä Greenin toista idestiteettiä (3) harmoniseen funktiopariin $u(x)$ ja $H(x)$ saadaan:

$$u(x_0) = \iint\limits_{\partial D} \left(u \frac{\partial H}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} H \right) dS. \tag{14}$$

Yhdistamällä (13) ja (14), saadaan

$$u(x_0) = \iint\limits_{\partial D} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} G \right) dS.$$

Mutta kohdan (ii) mukaan G häviää D reunalla joten viimeinen termi häviää ja päädytään kaavaan (12). □

5.2 Greenin funktion symmetria

Kaikille alueille D on olemassa Greenin funktio $G(x, x_0)$. Tämä funktio on aina symmetrinen

$$G(x, x_0) = G(x_0, x) \ , kun \ x \neq x_0$$

Todistus. Kun käytetään Greenin toista identiteettiä (3) funktiopariin $u(x) = G(x, a)$ ja $v(x) = G(x, b)$ alueella D_ϵ. Merkitään D_ϵ aluetta D, josta on leikattu kaksi ϵ säteistä palloa, pisteiden a ja b ympäriltä. Joten alueen D_ϵ rajat koostuu kolmesta osasta, jotka ovat alueen D alkuperäinen raja ja kaksi palloa $|x - a| = \epsilon$ ja $|x - b| = \epsilon$. Joten

$$\iiint\limits_{D_\epsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \iint\limits_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + A_\epsilon + B_\epsilon, \tag{15}$$

missä

$$A_\epsilon = \iint\limits_{|x-a|=\epsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

$$B_\epsilon = \iint\limits_{|x-b|=\epsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

Koska molemmat funktiot u ja v ovat harmonisia alueella D_ϵ, kaavan (15) vasen puoli katoaa. Koska molemmat u ja v katoavat D:n rajalla, myös integraali D rajan yli katoaa. Siksi

$$A_\epsilon + B_\epsilon = 0 \text{ jokaiselle } \epsilon.$$

Lasketaan rajaarvo kun $\epsilon \to 0$. Siten saadaan $\lim A_\epsilon + \lim B_\epsilon = 0$. Olkoon A_ϵ $r = |x - a|$.

$$\lim_{\epsilon\to 0} A_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0} \iint\limits_{r=\epsilon} \left\{ \left(-\frac{1}{4\pi r} + H\right) \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n} \left(-\frac{1}{4\pi r} + H\right) \right\} r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\phi$$

missä θ ja ϕ ovat pallokordinaattien kulmat $x - a$, ja H on jatkuva funktio. Nyt $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$ pallolle. Viimeisen integraalin neljästä termistä vain kolmas tuottaa nollasta poikkeavan ilmaisun raja-arvolle. Näin ollen

$$\lim_{\epsilon\to 0} A_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} v \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \epsilon^2 \sin\theta \; d\theta \; d\phi = v(\mathbf{a})$$

ϵ^2 supistumisen vuoksi. Hyvin samanlainen lasku osoittaa, että $\lim B_\epsilon = -u(\mathbf{b})$. Siksi

$$0 = \lim(A_\epsilon + B_\epsilon) = v(\mathbf{a}) - u(\mathbf{b}) = G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - G(\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

□

5.3 Teoreema 2

Voidaan ratkaista ongelman

$$\Delta u = f \text{ D ja } u = h \text{ D rajalla}$$

käyttämällä kaavaa

$$u(x_0) = \iint\limits_{\partial D} h(\mathbf{x}) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial n} dS + \iiint\limits_{D} f(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dx.$$

Todistus. Aloitetaan Greenin toisella identiteetillä kahdella funktiolla $u(x)$ ja $G(x, x_0)$.

$$\int_D (u\Delta G - G\Delta u) dx = \int_{\partial D} (u\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial u}{\partial n}) dS$$

Koska $u(x)$ täyttää poissonin funktion kriteerit, voidaan sijoittaa funktioon $\Delta u = f(x)$ ja $\Delta G = -\delta(x - x_0)$. Tällöin saadaan

$$\int_D (u(-\delta(x - x_0)) G f) dx = \int_{\partial D} (u\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial u}{\partial n}) dS.$$

Jos käytetään deltafunktion ominaisuuksia, saadaan:

$$\int_D u(x)((-\delta)(x - x_0)) dx = -u(x),$$

jonka sieventämällä saadaan

$$-u(x) + \int_D Gf(x)dx = \int_{\partial D} (u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}).$$

Koska Greenin funktio $G(x, x_0)$ täyttää Dirichlet ehdot tiedätään että

- $G(x, x_0) = 0$ D rajalla joten termi $G\frac{\partial u}{\partial n}$ katoaa.
- $u(x) = h(x)$ D rajalla joten se voidaan korvata $u(x)$.

Tämä yksinkertaistaa funktion muotoon

$$-u(x_0) + \int_D Gf(x)dx = \int_{\partial D} h(x)\frac{\partial G}{\partial n}dS.$$

Tämä voidaan järjestää uudelleen muotoon

$$u(x_0) = \iint\limits_{\partial D} h(\mathbf{x})\frac{\partial G(x, x_0)}{\partial n}dS + \iiint\limits_{D} f(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)dx.$$

□

6 Puolitila ja pallo

Yhdistämällä Greenin funktion ja heijastusmetodi voidaan ratkaista harmonisia funktioita puolitilassa ja pallossa.

6.1 Puolitilassa

Ensin määrittellään Greenin funktion puolitalalle. Puolitila on alue, joka sijaitsee yhdellä puolella tasossa. Vaikka tämä alue on ääretön, kaikki Greenin funktion sovellukset ovat voimassa jos asetetaan rajaehto äärettömyydessä siten että kaikki funktiot suppenevat 0 kun $|x| \to \infty$.
Kirjoitetaan kordinaatti muodossa $x = (x, y, z)$. Olkoon puolitila $D = z > 0$, alue joka sijaitsee xy-tason yläpuolella. Jokaisella pisteellä $x = (x, y, z)$ on heijastuspiste $x = (x, y - z)$ joka ei ole alueella D. Tiedetään että funktio $1/4\pi|x - x_0|$ täyttää kaksi kolmesta ehdosta (i ja iii) jota Greenin funktio vaatii. Muokata sitä niin että se täyttäisi myös kolmannes ehdon (ii). Greenin funktio alueelle D on

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi|x - x_o|} + \frac{1}{4\pi|x - x_o^*|}. \tag{16}$$

Kordinaateissa se voidaan ilmaita seuraavasti,

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4\pi}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Huomataan että termien ainoa ero on tekijät $(z \pm z_0)$. Tarkistetaan väite (16) tarkistamalla kukin kolmesta G:n ominaisuudesta.

(i) G on selkeästi äärellinen ja derivoituva poislukien x_0. Lisäksi $\Delta G = 0$

(ii) Olkoon $x \in \partial D$ jolloin $z = 0$. $|x - x_0| = |x - x *_0|$ Näin ollen $G(x, x_0) = 0$.

(iii) Koska x_0^* on alueen D ulkopuolella, funktiolla $-1/4\pi|x - x_0^*$ ei ole singulariteettia alueen sisällä, joten G on oikea singulariteetti kohdassa x_0.

Nämä kolme ominaisuutta todistavat että $G(x, x_0)$ on Greenin funktio tälle alueelle. Voidaan käyttää sitä ratkaisemaan Dirichletin ongelman

$$\Delta u = 0z > 0,\ u(x, y, 0) = h(x, y) \tag{17}$$

käyttämällä Greenin teoreemaa 1. huomataan että $\partial G/\partial n = -\partial G/\partial z|_{z=0}$ koska n osoittaa alaspäin alueesta. Lisäksi

$$-\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{z + z_0}{|x - x_0^*|^3} - \frac{z + z_0}{|x - x_0|^3}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{|x - x_0|^3}$$

kun z=0. Siksi määritelmän (17) ratkaisun on

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\iint [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_0)^2]^{-\frac{3}{2}} h(x, y) dx\ dy \tag{18}$$

missä molempien integraalien rajat ovat $(-\infty, \infty)$, huomaten että $z = 0$ integrointifunktiossa. Vektorimuodossa (18) saa muodon

$$u(x_0) = \frac{z_0}{2}\iint_{\partial D} \frac{h(x)}{|x - x_0|^3} dS.$$

Tämä on kaava, joka ratkaisee Dirichletin ongelman puolitilalle.

6.2 Pallossa

Greenin funktio pallolle $D = |x| < a$ säteellä a voidaan myös löytää käyttämällä heijastusmenetelmää. Tässä tilanteessa kuitenkin heijastus pallon lävitse $|x| = a$, mikä on pallon D raja.
Kiinnitä mikätahansa nollasta poikkeava piste x_0 palloon (eli $0 < x_0 <$ a). Heijastettu piste x_0^* määritellään kahdella ominaisuudella. Se on kollineaarinen origon ja pisteen x_0 kanssa. Sen etäisyys origosta määräytyy kaavalla $|x_0||x_0^*| = a^2$. Näin ollen

$$x_0^* = \frac{a^2 x_0}{|x_0|^2}.$$

jos **x** on mikä tahansa piste, merkitään $|x - x_0| = p$ ja $|x - x_0^*| = p^*$. Sitten Greenin funktio pallolle on

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi\rho} + \frac{a}{|x_0|}\frac{1}{4\pi\rho^*} \tag{19}$$

jos $x_0 \neq 0$. Kaavan vahvistamiseksi tulee tarkistaa kolme ehtoa (i),(ii) ja (iii). Tarkastellaan erikseen tapausta $x_0 = 0$. Ensinnäkin, G ei ole singulariteettia paitsi kohdassa $x = x_0$ koska x_0^* sijaitsee pallon ulkopuolella. Funktiot $1/\rho$ ja $1/\rho^*$ ovat

harmonisia alueella D paitsi pisteessä x_0 koska ne ovat $1/r$ siirroksia. Joten ehdot (i) ja (iii) pitävät paikkansa.
Todistetaan ehto (ii), osoitetaan, että ρ^* on verrannollinen ρ kaikissa pisteissä x, jotka ovat pallon D pinnalla $|x| = a$. Tehdäkseen tämän huomataan että hyödyntämällä yhteneviä kolmioita pallon sisällä

$$|\frac{r_0}{a}x - \frac{a}{r_0}x_0| = |x - x_0|. \tag{20}$$

Tämä seuraa siitä että pisteet $0,\ x,\ x_0$ ja x_0^* muodostavat kaksi yhtenevää kolmiota pallon D sisälle. Koska kolmiot $(0, x, x_0)$ ja $(0, x, x_0^*)$ jakavat kärjen 0, sivun $|x| = a$ ja koska pisteet x_0 ja x_0^* skaalautuvat vastakkaisille puolille niiin kolmiot ovat yhteneväisiä.

Olkoon $r_0 = |x_0|$, niin funktion (20) vasen puoli on yhtä kuin

$$\frac{r_0}{a}\left|\mathbf{x} - \frac{a^2}{r_0^2}x_0\right| = \frac{r_0}{a}\rho^*$$

näin ollen

$$\tfrac{r_0}{a}\rho^* = \rho \text{ kaikille } |x| = a.$$

Jolloin funktio

$$-\frac{1}{4\pi\rho} + \frac{a}{|x_0|}\frac{1}{4\pi\rho^*},$$

Kuten yllä määritelty, nolla on pallon $|x| = a$ pinnalla. Tämä täyttää viimeisen ehdon (ii), ja todistaa kaavan (19).
Voidaan myös kirjoittaa kaavan (19) muodossa

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi|x - x_0|} + \frac{1}{4\pi|\frac{r_0 x}{a} - \frac{a x_0}{r_0}|}.$$

Käytetään nyt kaavaa (19) kirjoittaakseen ratkaisun Diricletin ongelmalle pallossa

$$\Delta u = 0 \ kun \ |x| < a,\ u = h \ kun \ |x| = a. \tag{21}$$

Tiädetään että $u(0)$ on $h(x)$ keskiarvo pallolla, joten tarkastellaan $x_0 \neq 0$. Sovelletaan Greenin ensimmäistä teoreemaa meidän tulee laskea $\partial G/\partial n$ kun $|x| = a$. Huomataan, että $\rho^2 = |x - x_0|$. Derivoimalla saadaan $2\rho \nabla \rho = 2(x - x_0)$. Joten $\nabla\rho = \frac{x - x_0}{\rho}$ ja $\nabla\rho^* = \frac{(x - x_0^*)}{\rho^*}$.Näin ollen, derivoimalla (19) saadaan

$$\delta G = \frac{x - x_0}{4\pi\rho^3} - \frac{a}{r_0}\frac{x - x_0^*}{4\pi\rho^{*3}}.$$

Koska $x_0^* = (a/r_0)^2 x_0$, jos $|x| = a$, yllä osoitettiin että $\rho^* = (\frac{a}{r_0})\rho$. Korvaamalla nämä ilmaisut ∇G viimeiseen termiin, saadaan

$$\nabla G = \frac{1}{4\pi\rho^3}\left[x - x_0 - \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 x + x_0\right]$$

pinnalla, niin että

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{x}{a} \cdot \delta = \frac{a^2 - r_0^2}{4\pi a \rho^3}.$$

Jolloin teoreema 1 saa muodon

$$u(x_0) = \frac{a^2 - |x_0|^2}{4\pi a} \iint\limits_{|x|=0} \frac{h(x)}{|x - x_0|^3} dS.$$

Tämä on yhtälön (21) ratkaisu. Se on kolmiulotteinen versio Poissonin kaavasta. Se voidaan myös kirjoittaa pallokordinaateilla seuraavasti

$$u(r_0, \theta_0, \phi_0) = \frac{a(a^2 r_0^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{h(\theta, \phi)}{(a^2 + r_0^2) - 2ar_0 \cos\psi} \sin\theta \; d\theta \; d\phi$$

missä ψ tarkoittaa kulmaa x_0 ja x välillä.

Greenin funktio pallolla kun $x_0 = 0$.

Todistaakseen kaavan $G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi|x|} + \frac{1}{4\pi a}$ olevan Greenin funktio $G(x, x_0)$ kohdalla, kun toinen argumenteistä on pallon keskipisteessä.
Greenin funktio pallolla on muotoa

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi|x - x_0|} + \frac{a}{|x_0|} \frac{1}{4\pi|x - x_0^*|}.$$

Pisteen x_0 ollessa 0 Greenin funktio on

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi|x - 0|} + \frac{a}{|0|} \frac{1}{4\pi|x - 0|}$$

joka on määrittelemätön. Rajaehdon mukaan $|x| = a$ jolloin Saadaan edellisestä funktiosta

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi|x|} + \frac{1}{4\pi a}$$

joka on Greenin funktio pallolla jossa toinen argumenteista on pallon keskipisteessä.

Poissonin esityskaava: Dirichletin ongelma pallolla

Olkoon $\varphi : \partial B(0, R) \to \mathbb{R}$ jatkuva jolloin u on määritelty

$$u(y) := \begin{cases} \frac{R^2 - |y|^2}{d\omega_d R} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(x)}{|x-y|^d} do(x) & \text{,kun } y \in B^\circ(0,R) \\ \varphi(y) & \text{,kun } y \in \partial B(0,R) \end{cases}$$

joka on avoin pallolla $B^\circ(0, R)$ ja on jatkuva suljetulla pallolla $B(0, R)$.

Todistus. Ks. [6] □

Esimerkki 6.1. Olkoon φ jatkuva funktio joka on määritelty yksikköympyrän ∂B reunalla. Määritellään ratkaisu Dirichletin ongelmaan:

$$\Delta u = 0 \text{ alueella } \partial B(0,1)$$

kun u täyttää reunaehdon $u(x) = \varphi(x)$ kaikilla $x \in \partial B(0,1)$ ja φ on jatkuva. Käyttämällä Poissonin esityskaavaa jotta saadaan ratkaisun funktiolle u Dirichletin ongelmassa. Poissonin esityskaava yksikköympyrässä on

$$u(y) = \int_{\partial B(0,1)} \frac{1-|y|^2}{|x-y|^2}\varphi(x)d\sigma(x), \ y \in B(0,1),$$

missä φ on reunaehto ja $d\sigma$ on pinta-alamittaus yksikköympyrän reunalla. kun $y \in \partial B(0,1)$ niin $u(y) = \varphi(y)$. Olkoon φ muotoa

$$\varphi(x) = cos(\theta) \text{ missä } x = (cos(\theta), sin(\theta)) \in \partial B(0,1).$$

Näin poissonin esityskaava antaa ratkaisun

$$u(y) = \int_{\partial B(0,1)} \frac{1-|y|^2}{|x-y|^2} cos(\theta)d\sigma(x).$$

7 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa esiteltiin Greenin identiteetit ja funktiot sekä niiden rooli harmonisten funktioiden teorian kontekstissa. ensimmäisessä osassa esiteltiin Greenin ensimmäinen ja toinen identiteetti, jotka luovat yhteyksiä funktioiden derivaattojen ja integraalien välillä alueelle ja sen rajan yli. Näitä identiteettejä hyödyntämällä johdettiin tuloksia, kuten keskiarvo-ominaisuus, maksimiperiaate ja Dirichletin periaate. Nämä tulokset ovat keskeisiä raja-arvo-ongelmien ratkaisussa ja tarjoavat vahvan teoreettisen pohjan niiden analysointiin.

Toisessa osassa tutkielma keskittyi Greenin funktioihin, niiden olemassaoloon, symmetriaan ja ominaisuuksien tarkasteluun. Erityisesti tarkasteltiin, kuinka Greenin funktiot soveltuvat Poissonin ja Dirichletin ongelmien ratkaisuun. Lisäksi tutkielmassa käsiteltiin Greenin funktion eksplisiittisiä muotoja kahdessa erityistapauksessa: puolitilassa ja pallossa, joissa hyödynnettiin heijastusmenetelmää. Näiden menetelmien avulla on mahdollista ratkaista raja-arvo- ongelmia tehokkaasti ja analysoida harmonisten funktioiden käyttäytymistä eri alueilla ja erityisesti esiteltiin Poissonin esityskaava: Dirichletin ongelma pallolla.

Tutkielman päätuloksena on esitetty, miten Greenin identiteetit ja funktiot tarjoavat matemaattiset työkalut harmonisten funktioiden analysointiin, raja-arvo- ongelmien ratkaisujen löytämiseen ja erityisesti Dirichletin ongelmaan. Ne luovat tehokkaan teoreettisen kehyksen, joka mahdollistaa esimerkiksi erilaisten optimointitehtävien ja rajojen tutkimisen.

Viitteet

[1] Complex Analysis, Eberhard Freitag, Rolf Busam, Springer Berlin, Heidelberg, 2005

[2] A Course in Calculus and Real Analysis, Sudhir R. Ghorpade, Balmohan V. Limaye, Springer Cham, 2018

[3] Partial Differential Equations: An Introduction, 2nd Edition, WALTER A. STRAUSS, Brown University

[4] Introduction to Partial Differential Equations, Luento kolme, Prof. Tobias Colding MIT, Fall 2005

[5] Green's functions : construction and applications, Melnikov, Yu. A.; Melnikov, Max Y ,2012; 1st ed. (s.11-13)

[6] Partial Differential Equations, Jürgen Jost,2007. (s. 14-15)