Paikan ja liikemäärän yhteismittaukset ja niihin liittyvät epätarkkuusrelaatiot

Pro gradu
Turun yliopisto
Fysiikan laitos
Teoreettinen fysiikka
2008
Fil. yo. Jussi Schultz
Tarkastajat:
FM Jukka Kiukas
dos. Pekka Lahti

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan laitos

Schultz, Jussi Paikan ja liikemäärän yhteismittaukset ja niihin liittyvät epätarkkuusrelaatiot

Pro Gradu, 101 s.
Teoreettinen fysiikka
Kesäkuu 2008

Perinteisessä kvanttimekaniikassa fysikaaliset suureet samaistetaan Hilbertin avaruuden itseadjungoitujen operaattorien, tai yhtäpitävästi niitä vastaavien spektraalimittojen kanssa. Suureet ovat samanaikaisesti mitattavissa silloin, kun on olemassa kolmas suure, ns. yhdistetty suure, jonka marginaaleina nämä saadaan. Paikka- ja liikemääräsuureiden tapauksessa tällaista yhdistetty suuretta ei ole, ja Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen eräs muotoilu onkin, että paikka ja liikemäärä voidaan mitata samanaikaisesti vain, jos mittauksessa sallitaan tietty epätarkkuus.

Onkin mahdollista konstruoida mittaus, jossa tarkan paikan ja liikemäärän sijaan mitataan niiden sumeita eli epätarkkoja versioita siten, että yhteismittaus on mahdollinen. Tällöin fysikaalinen suure pitää määritellä yleisempänä normoituna positiivioperaattorina eli semispektraalimittana. Tämän lisäksi pitää olla jokin keino karakterisoida sitä, miten hyvin nämä sumeat suureet kuvaavat vastaavia tarkkoja suureita.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan paikan ja liikemäärän yhteismittausten problematiikkaa. Approksimaatiosta johtuvaa virhettä kuvaamaan annetaan kolme mittaa: standardimitta, geometrinen mitta ja virheen kaistanleveys. Pääpaino on geometrisen mitan matemaattisessa tarkastelussa. Geometrisen mitan ja virheen kaistanleveyden tapauksessa johdetaan epäyhtälöt kuvaamaan rajoja, joiden puitteissa tarkkaa paikkaa ja liikemäärää voidaan approksimatiivisesti mitata samanaikaisesti.

Asiasanat: epätarkkuusperiaate, epätarkkuusrelaatio, yhteismittaus

Sisältö

Johdanto

Heisenbergin epätarkkuusperiaate on ehkä tunnetuin yksittäinen kvanttimekaniikkaan liittyvä käsite. Epätarkkuusperiaatetta voidaan intuitiivisesti luonnehtia kolmella lauseella:

1. Paikalla ja liikemäärällä ei voi samanaikaisesti olla mielivaltaisen tarkkoja arvoja.

2. Paikkaa ja liikemäärää ei voida samanaikaisesti mitata.

3. Paikan mittaus muuntaa välttämättä systeemin liikemäärää, ja päinvastoin.

Vaikka perinteisesti näillä lauseilla kuvataankin rajoituksia, joita paikan ja liikemäärän mittaukset sisältävät, niin niille voidaan antaa myös positiivinen tulkinta. Vuoden 1927 artikkelissaan [1] Werner Heisenberg keksi epäyhtälön

$$\Delta q \cdot \Delta p \gtrsim \hbar \tag{1}$$

kuvaamaan mahdollisuuksia, joita kvanttimekaniikka näistä rajoituksista huolimatta pitää sisällään.

Ensimmäinen lause liittyy kysymykseen systeemin preparoimisesta. Koska paikka ja liikemäärä ovat jatkuvia suureita, niin niillä ei voida sanoa olevan tarkkoja arvoja. Systeemi voidaan kuitenkin preparoida tilaan, jossa esimerkiksi paikan todennäköisyyden keskiarvo on haluttu luku ja hajonta ΔQ mielivaltaisen pieni. Paikan ja liikemäärän Fourier'n-Plancherelin yhteydestä seuraa, että tällöin liikemäärän todennäköisyyden hajonta ΔP on suuri. Tarkemmin sanottuna paikan ja liikemäärän hajonnat toteuttavat epäyhtälön

$$\Delta Q \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{2}$$

Tämä preparoiteja koskeva epäyhtälö viittaa erikseen suoritettuihin paikan ja liikemäärän mittauksiin. Tilannetta voidaan ajatella niin, että suuri joukko identtisiä, toisistaan riippumattomia kvanttiobjekteja preparoidaan samalla tavalla. Tämän jälkeen puolelle objekteista suoritetaan paikan mittaus ja toiselle puolelle liikemäärän mittaus, jolloin epäyhtälö (2) sitoo mittaustulostilastot toisiinsa.

Toinen lause koskee paikan ja liikemäärän yhteismittauksia. Tällaisen mittauksen mahdottomuus on seurausta siitä, että ei ole olemassa faasiavaruussuuretta, jonka marginaaleina saataisiin paikka- ja liikemääräsuureet E^Q ja E^P. On kuitenkin mahdollista konstruoida mittaustilanne, jossa tarkan paikan ja liikemäärän sijaan mitataankin näiden suureiden approksimaatioita. Approksimaatiosta johtuvaa virhettä voidaan karakterisoida usealla eri tavalla. Jos Δq ja Δp ovat paikkaan ja liikemäärään liittyvien virheiden mittoja, niin epäyhtälö (1) kuvaa rajaa, jonka puitteissa paikkaa ja liikemäärää voidaan approksimatiivisesti mitata yhdessä.

Kolmas lause liittyy jonomittauksiin, eli tilanteisiin, joissa esimerkiksi paikan mittausta seuraa välittömästi liikemäärän mittaus. Kvanttimekaniikan mittausteorian mukaan jokainen epätriviaali mittaus muuntaa systeemin tilaa. Esimerkiksi mitattaessa tarkkaa paikkaa menetetään kaikki informaatio systeemin liikemääräjakaumasta ennen mittausta. Jonomittaus voidaan kuitenkin suorittaa, kun ensin mitattava suure on paikan approksimaatio. Tällöin epäyhtälö (1) kuvaa jonomittauksessa esiintyvää virherajaa, kun Δq kuvaa paikan approksimaatiosta aiheutuvaa virhettä ja Δp paikan mittauksen liikemäärälle aiheuttamaa häiriötä.

Tämä tutkielma käsittelee paikan ja liikemäärän likimääräisiä yhteismittauksia. Pääpaino on virheen geometrisen mitan matemaattisessa tarkastelussa.

Luvussa 1 luodaan matemaattiset perusteet tutkielman loppuosalle. Luku koostuu neljästä osasta. Ensimmäisessä osassa esitetään tässä esityksessä tarvittavia Hilbertin avaruuden operaattoriteorian määritelmiä ja tuloksia ilman todistuksia. Toisessa osassa tarkastellaan lineaarisia funktionaaleja. Kolmas osa käsittelee itseadjungoitujen operaattorien spektraaliteoriaa. Neljännen osan päätulos on lause, joka antaa riittävät ehdot rajoitetun operaattorin kompaktiudelle.

Luvussa 2 määritellään tarvittavat fysikaaliset suureet niiden symmetriaominaisuuksien avulla. Paikkasuureen eksplisiittistä muotoa tarkastellaan, ja erityisesti todistetaan siitä seuraava dilaatiosymmetriaa koskeva lause. Luvun lopussa esitellään lyhyesti kaksi karakterisointia fysikaalisen suureen sisäiselle epätarkkuudelle.

Luku 3 käsittelee tunnettua systeemin preparointia koskevaa epätarkkuusrelaatiota. Relaatiota tarkastellaan Hilbertin avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$:ssa paikka- ja liikemääräsuureita vastaavien multiplikatiivi- ja differentiaalioperaattorien avulla, sekä abstraktissa Hilbertin avaruudessa nosto- ja laskuoperaattorien avulla. Molemmissa tapauksissa tarkastellaan lisäksi minimiepätarkkuustiloja.

Luku 4 käsittelee paikan ja liikemäärän samanaikaista mitattavuutta. Luvun tärkein tulos on lause, jonka mukaan (sumeat) paikka- ja liikemääräsuureet ovat samanaikaisesti mitattavissa tarkalleen silloin, kun niillä on yhdistetty suure, joka on kovariantti faasiavaruussuure.

Luvussa 5 tarkastellaan kolmea eri karakterisointia paikan ja liikemäärän yhteismittauksissa esiintyvälle virheelle. Kussakin tapauksessa johdetaan epätarkkuusrelaatio mittaustarkkuuksille. Luvun pääpaino on virheen geometrisen mitan tarkastelussa.

1 Matemaattisia perusteita

1.1 Hilbertin avaruus -esityksen perusta

Esitetään aluksi tarvittavia määritelmiä ja tunnettuja tuloksia ilman todistuksia. Tämä osio perustuu pääosin kirjaan [2].

Kvanttimekaniikan Hilbertin avaruus -esityksessä fysikaaliseen systeemiin $\mathcal{S}$ liitetään kompleksinen, separoituva Hilbertin avaruus $\mathcal{H}$. Separoituvuus on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathcal{H}$:llä on korkeintaan numeroituva ortonormaali kanta $\mathcal{K}$. Tässä esityksessä tarkastellaan epärelativistista spin-0 hiukkasta yksiulotteisessa tapauksessa, jolloin Hilbertin avaruus on neliöllisesti integoituvien funktioiden muodostama vektoriavaruus, Lebesquen funktioavaruus

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty\}.$$

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi tässä esityksessä on valittu $\hbar = 1$.

Merkitään $\mathcal{L}(\mathcal{H})$:lla rajoitettujen lineaarioperaattorien $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ joukkoa. Operaattorin $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ adjungaatti on rajoitettu lineaarioperaattori T^*, jolle $\langle T^*\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|T\psi\rangle$ kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Operaattori $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on itseadjungoitu, jos $T^* = T$ ja unitaarinen, jos $T^*T = TT^* = I$. Itseadjungoitujen operaattorien joukolle käytetään merkintää $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on positiivinen, merkitään $T \geq 0$, jos $\langle\varphi|T\varphi\rangle \geq 0$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$. Positiivisten operaattorien joukolle käytetään merkintää $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})^+$. Operaattoreille $S, T \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ merkitään $S \leq T$ jos ja vain jos $T - S \geq 0$. Näin tulee määriteltyä osittainen järjestys $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$:ssa. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ on vektoriavaruus, jossa on määritelty normi

$$\|T\| = \sup\{\|T\varphi\| \big| \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| \leq 1\},$$

kaikilla $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Hilbertin avaruuden yksikkövektorien $\varphi \in \mathcal{H}$, $\|\varphi\| = 1$ joukkoa merkitään $\mathcal{H}_1$:llä. Olkoon $\mathcal{K}$ Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ ortonormaali kanta. Jokaiselle

$T \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})^+$ merkitään

$$\mathrm{tr}[T] = \sum_{\xi \in \mathcal{K}} \langle \xi | T\xi \rangle.$$

Jokaiselle $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operaattoria $(T^*T)^{\frac{1}{2}} = |T|$ sanotaan T:n itseisarvoksi ja joukkoa $\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) | \mathrm{tr}[|T|] < \infty\}$ kutsutaan jälkiluokaksi. Jos $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, niin (ortonormaalin kannan valinnasta riippumatonta) lukua $\mathrm{tr}[T] = \sum_{\xi \in \mathcal{K}} \langle \xi | T\xi \rangle$ sanotaan T:n jäljeksi. Projektioiden $P : \mathcal{H} \to M$, missä $M \subset \mathcal{H}$ on suljettu aliavaruus, joukkoa merkitään $\mathcal{P}(\mathcal{H})$:llä. Kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ määritellään kuvaus $|\varphi\rangle\langle\psi| : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $|\varphi\rangle\langle\psi|\xi = \langle\psi|\xi\rangle\varphi$, kaikilla $\xi \in \mathcal{H}$, jolloin $|\varphi\rangle\langle\varphi|$, $\varphi \in \mathcal{H}_1$ on projektio yksiulotteiselle aliavaruudelle.

Yleisemmin operaattoriksi kutsutaan jokaista lineaarikuvausta T, jonka määrittelyjoukko $\mathcal{D}(T)$ on $\mathcal{H}$:n lineaarinen aliavaruus ja jolle $\mathcal{R}(T) = \{T\varphi | \varphi \in \mathcal{D}(T)\} \subset \mathcal{H}$. Operaattorin T kuvaaja on $\mathcal{G}(T) = \{(\varphi, T\varphi) | \varphi \in \mathcal{D}(T)\}$. Operaattoreille T ja S merkitään $T \subset S$ jos ja vain jos $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$. T on tiheästi määritelty, jos $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$. Tiheästi määritellyn operaattorin T adjungaatti on operaattori T^*, jolle $\mathcal{D}(T^*)$ on niiden $\psi \in \mathcal{H}$ joukko, joille lineaarifunktionaali $\varphi \mapsto \langle\psi|T\varphi\rangle$ on jatkuva $\mathcal{D}(T)$:ssä ja aina, kun $\psi \in \mathcal{D}(T^*)$, niin $T^*\psi$ on $\mathcal{H}$:n vektori, jolle $\langle\psi|T\varphi\rangle = \langle T^*\psi|\varphi\rangle$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(T)$. T on symmetrinen jos $T \subset T^*$ ja itseadjungoitu jos $T = T^*$.

Operaattorin T resolventtijoukoksi sanotaan niiden lukujen $\lambda \in \mathbb{C}$ joukkoa, joita kohti on olemassa sellainen $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, että $S(T - \lambda I) = I|\mathcal{D}(T)$ ja $(T - \lambda I)S = I$. T:n resolventtijoukolle käytetään merkintää $\rho(T)$. Jokaista $\lambda \in \rho(T)$ kohti on siis määritelty operaattori $(T - \lambda I)^{-1} = (T - \lambda)^{-1}$, jota kutsutaan T:n resolventtioperaattoriksi. Jos $\lambda, \mu \in \rho(T)$, niin niitä vastaavat resolventtioperaattorit toteuttavat ns. resolventtiyhtälön [3, Theorem VIII.2, s.254]

$$(K - \lambda)^{-1} - (K - \mu)^{-1} = -(\lambda - \mu)(K - \lambda)^{-1}(K - \mu)^{-1}. \tag{3}$$

T:n resolventtijoukon komplementtia kutsutaan T:n spektriksi, jota merkitään $\sigma(T)$:llä. Niiden $\lambda \in \sigma(T)$ joukkoa, joille $(T - \lambda I)\varphi = 0$ vektorille $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ vain, jos $\varphi = 0$, kutsutaan T:n pistespektriksi $\sigma_p(T)$, ja sen alkioita T:n ominaisarvoiksi. Vektoreita $\varphi \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}$, joille $(T - \lambda I) = 0$, sanotaan ominaisarvoon λ liittyviksi ominaisvektoreiksi, jotka yhdessä 0:n kanssa muodostavat λ:aan liittyvän ominaisavaruuden. Ominaisavaruuden dimensiota sanotaan ominaisarvon kertaluvuksi eli degeneraatioksi. Joukkoa $\sigma(T) \setminus \sigma_p(T) = \sigma_c(T)$ sanotaan T:n jatkuvaksi spektriksi. T:n oleellinen spektri $\sigma_{ess}(T)$ koostuu jatkuvasta spektristä sekä ominaisarvoista, joiden kertaluku on ääretön. Itseadjungoitua operaattoria T sanotaan positiiviseksi, merkitään $T \geq 0$, jos $\langle \varphi | T\varphi \rangle \geq 0$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(T)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

Systeemin $\mathcal{S}$ tilat esitetään positiivisina jäljen yksi operaattoreina

$$T \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) | T \geq 0, \mathrm{tr}[T] = 1\}.$$

Tilajoukko $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ on konveksi, ts $tT_1 + (1-t)T_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ aina kun $T_1, T_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ja $t \in [0,1]$. $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ on jopa σ-konveksi, ts. aina, kun (T_i) on jono $\mathcal{S}(\mathcal{H})$:ssa ja (t_i) on jono lukuja, joille $t_1 \in [0,1]$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1$, niin sarja $\sum_{i=1}^{\infty} t_i T_i$ suppenee $\mathcal{S}(\mathcal{H})$:ssa normin $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}[|\cdot|]$ suhteen. Jokainen tila T voidaan esittää muodossa $T = \sum_{i=1}^{\infty} t_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$, missä (φ_i) on ortonormaali jono $\mathcal{H}$:ssa, $t_i \in [0,1]$, $\sum t_i = 1$ ja sarja suppenee normin $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}}$ suhteen. Jos $T = |\psi\rangle\langle\psi|$, jollakin $\psi \in \mathcal{H}_1$, niin puhutaan lyhyesti vektoritilasta $\psi \in \mathcal{H}_1$.

Fysikaalinen suure E on (tässä esityksessä) $\mathbb{R}$:n tai $\mathbb{R}^2$:n Borelin σ-algebrassa määritelty normitettu positiivioperaattorimitta eli semispektraalimitta, ts. $E : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($\Omega = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{R}^2$) on operaattoriarvoinen joukkofunktio, joka toteuttaa ehdot

- (i) $E(X) \geq 0$ kaikilla $X \in \mathcal{B}(\Omega)$,
- (ii) $E(\Omega) = I$ ja
- (iii) kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ joukkofunktio $E_{\varphi,\psi} : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{C}$, jolle $E_{\varphi,\psi} = \langle \psi | E(X)\varphi \rangle, X \in \mathcal{B}(\Omega)$, on kompleksimitta.

Tästä seuraa, että kuvaus $X \mapsto \langle \psi | E(X)\psi \rangle = \mathbf{p}_{\psi}^{E}(X)$ on todennäköisyysmitta kaikilla vektoritiloilla $\psi \in \mathcal{H}$. Yleisemmin jokainen suureen ja tilan pari (E, T) määrittelee todennäköisyysmitan $\mathbf{p}_T^E : \mathcal{B}(\Omega) \to [0,1]$, $X \mapsto \mathbf{p}_T^E(X) = \mathrm{tr}[TE(X)]$ ja luku $\mathbf{p}_T^E(X)$ on todennäköisyys sille, että suureen E mittaus tuottaa tuloksen joukosta X, kun systeemi on tilassa T. Suuretta E kutsutaan tarkaksi, jos se on spektraalimitta, ts. jos $E(X)$ on projektio kaikilla $X \in \mathcal{B}(\Omega)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $E(X \cap Y) = E(X)E(Y)$ kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\Omega)$.

Jos $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on suure, niin käytetään merkintöjä $E[1]$ ja $E[2]$ ensimmäiselle ja toiselle momenttioperaattorille, jotka määritellään heikkoina integraaleina $E[k] = \int x^k dE(x)$ $(k = 1, 2)$. Operaattorin $E[k]$ määrittelyalueen $\mathcal{D}(E[k])$ muodostavat ne vektorit $\varphi \in \mathcal{H}$, joille funktio $x \mapsto x^k$ on integroituva kompleksimitan $X \mapsto \langle \psi | E(X) \varphi \rangle$ suhteen kaikilla $\psi \in \mathcal{H}$. $E[k]$:n määrittelyalue ei siis välttämättä ole tiheä $\mathcal{H}$:ssa. Käytetään merkintää $\Delta(E, \psi)$ todennäköisyysjakauman $\mathbf{p}_\psi^E$ hajonnalle

$$\Delta(E, \psi)^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(x - \int_{\mathbb{R}} x' d\mathbf{p}_\psi^E(x') \right)^2 d\mathbf{p}_\psi^E(x). \tag{4}$$

Jos $\psi \in \mathcal{D}(E[1]) \cap \mathcal{D}(E[2])$, niin

$$\Delta(E, \psi)^2 = \langle \psi | E[2] \psi \rangle - \langle \psi | E[1] \psi \rangle^2. \tag{5}$$

1.2 Funktionaaliteoriaa

Tämän osio on peräisin artikkelista [4], missä tulokset on todistettu yleisen lokaalisti kompaktin separoituvan metrisen avaruuden tapauksessa. Tässä esityksessä rajoitutaan tarkastelemaan $\mathbb{R}$:ää, jota pidetään varustettuna tavanomaisella itseisarvon määräämällä metriikalla.

Käytetään merkintää $BC(\mathbb{R})$ rajoitettujen jatkuvien funktioiden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ muodostamalle Banachin avaruudelle, jonka normi on $\|f\|_\infty = \sup\{M \in \mathbb{R} \big| |f(x)| < M$ melkein kaikkialla$\}$. Koska tarkastellaan jatkuvia funktioita, niin itse asiassa $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Kompaktitukisten jatkuvien funktioiden muodostamaa lineaarista aliavaruutta merkitään $C_c(\mathbb{R})$:llä. $BC^r(\mathbb{R})$:llä ja $BC^+(\mathbb{R})$:lla tarkoitetaan $BC(\mathbb{R})$:n reaaliarvoisten ja positiivisten funktioiden osajoukkoja. Vastaavia merkintöjä käytetään myös $C_c(\mathbb{R})$:n tapauksessa.

Olkoon $m : BC(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineaarinen funktionaali, joka toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} &(i) \quad m(f) \geq 0 \text{ jos } f \in BC^+(\mathbb{R}), \\ &(ii) \quad m(1) = 1. \end{aligned}$$

Tällaisen funktionaalin tapauksessa käytetään merkintää

$$m(\infty) = 1 - \sup\{m(f) | f \in C_c^+(\mathbb{R}), f \leq 1\} \in [0, 1].$$

Rieszin esityslauseen nojalla on olemassa yksikäsitteinen säännöllinen $\mathbb{R}$:ssä määritelty Borelin mitta m_0 siten, että

$$m(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dm_0(x)$$

kaikilla $f \in C_c(\mathbb{R})$ [5, Theorem 6.19, s. 130].

Osoitetaan seuraavaksi, että m_0 on rajoitettu. Olkoon K mielivaltainen $\mathbb{R}$:n kompakti osajoukko. Silloin on olemassa sellainen positiivinen $M \in \mathbb{R}$, että $(-\infty, -M] \cup [M, \infty) \subset \mathbb{R} \backslash K$. Urysonin lemman nojalla on olemassa jatkuva funktio $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ siten, että $f(x) = 1$ aina, kun $x \in K$ ja $f(x) = 0$ aina, kun $x \in (-\infty, -M] \cup [M, \infty)$. Nyt $f \in C_c^+(\mathbb{R})$ ja $\chi_K \leq f \leq 1$, joten

$$m_0(K) = \int \chi_K(x) dm_0(x) \leq \int f(x) dm_0(x) = m(f).$$

Tästä seuraa, että

$$\sup\{m_0(K) | K \subset \mathbb{R}, K \text{ kompakti}\} \leq \sup\{m(f) | f \in C_c^+(\mathbb{R}), f \leq 1\}.$$

Olkoon nyt $f \in C_c^+(\mathbb{R})$, $f \leq 1$, mielivaltainen. Tällöin $m(f) = \int f(x) dm_0(x) \leq \int \chi_{\text{supp}(f)}(x) dm_0(x) = m_0(\text{supp}(f))$, joten

$$\sup\{m(f) | f \in C_c^+(\mathbb{R}), f \leq 1\} \leq \sup\{m_0(K) | K \subset \mathbb{R}, K \text{ kompakti}\}.$$

Siis m_0:n säännöllisyyden nojalla

$$\begin{aligned} m_0(\mathbb{R}) &= \sup\{m_0(K) | K \subset \mathbb{R}, K \text{ kompakti}\} \\ &= \sup\{m(f) | f \in C_c^+(\mathbb{R}), f \leq 1\} \\ &= 1 - m(\infty) \leq 1. \end{aligned}$$

Erityisesti jokainen funktio $f \in BC(\mathbb{R})$ on integroituva m_0:n suhteen. Kaikilla $f \in BC(\mathbb{R})$ käytetään merkintää

$$m_0(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dm_0(x),$$

eli samaistetaan mitta m_0 ja yo. integraalikaavalla määräytyvä funktionaali.

Lause 1.1. *Jos $m(\infty) = 0$, niin $m(f) = m_0(f)$ kaikilla $f \in BC(\mathbb{R})$.*

Todistus. Tarkastellaan kiinteää pistettä $x_0 \in \mathbb{R}$. Jokaisella $R > 0$ määritellään funktio

$$g_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } |x - x_0| \leq \frac{R}{2}, \\ \frac{3}{2} - \frac{|x-x_0|}{R} & \text{jos } \frac{R}{2} < |x - x_0| \leq \frac{3R}{2}, \\ 0 & \text{jos } |x - x_0| > \frac{3R}{2}. \end{cases}$$

Nyt $g_R \in C_c^+(\mathbb{R})$ ja $g_R \leq 1$, joten

$$\sup\{m(f) | f \in C_c^+(\mathbb{R}), f \leq 1\} \geq \sup\{m(g_R) | R > 0\}.$$

Lisäksi jokaista $f \in C_c^+(\mathbb{R})$, $f \leq 1$ kohti on olemassa sellainen luku $R > 0$, että $f \leq g_R$, joten

$$\sup\{m(f) | f \in C_c^+(\mathbb{R}), f \leq 1\} \leq \sup\{m(g_R) | R > 0\}.$$

Siis

$$\begin{aligned} 1 - m(\infty) &= \sup\{m(f) | f \in C_c^+(\mathbb{R}), f \leq 1\} \\ &= \sup\{m(g_R) | R \geq 0\} \\ &= \lim_{R \to \infty} m(g_R). \end{aligned}$$

Olkoot $f \in BC^+(\mathbb{R})$ ja $R > 0$. Koska $g_R f \in C_c(\mathbb{R})$, niin

$$\begin{aligned} m(f) &= m(g_R f + (1-g_R)f) \\ &= m(g_R f) + m((1-g_R)f) \\ &= m_0(g_R f) + m((1-g_R)f). \end{aligned} \tag{6}$$

Nyt $0 \leq g_R f \leq f$, f on m_0-integroituva ja $\lim_{R\to\infty} g_R(x)f(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_R(x)f(x)dm_0(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dm_0(x).$$

Koska $(1-g_R)f \leq \|f\|_\infty(1-g_R)$, niin

$$\begin{aligned} & \|f\|_\infty(1-g_R) - (1-g_R)f && \geq 0 \\ \Rightarrow \quad & m\big(\|f\|_\infty(1-g_R) - (1-g_R)f\big) && \geq 0 \\ \Rightarrow \quad & \|f\|_\infty m\big(1-g_R\big) - m\big((1-g_R)f\big) && \geq 0. \end{aligned}$$

Toiselle termille yhtälössä (6) saadaan näin

$$m((1-g_R)f) \leq \|f\|_\infty m(1-g_R) = \|f\|_\infty(1-m(g_R)) \to \|f\|_\infty m(\infty) = 0,$$

kun $R \to \infty$. Siis ottamalla yhtälössä (6) puolittain raja-arvo, kun $R \to \infty$, saadaan $m(f) = m_0(f)$.

Jos $f \in BC(\mathbb{R})$, niin kirjoitetaan f muodossa $f = f_1 + if_2$, missä $f_1, f_2 \in BC^r(\mathbb{R})$, ja $f_i = f_i^+ - f_i^-$, missä $f_i^\pm = \frac{1}{2}(|f_i| \pm f_i) \in BC^+(\mathbb{R})$, $i = 1,2$. Nyt väite seuraa aikaisemmasta tuloksesta.

□

Olkoon $i \in \{1,2\}$. Jokaista $f \in BC(\mathbb{R})$ kohti määritellään funktio $\tilde{f}_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, kaavalla $\tilde{f}_i(x_1,x_2) = f(x_i)$ kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Selvästi $\tilde{f}_i \in BC(\mathbb{R}^2)$ ja jos $f \in BC^+(\mathbb{R})$ niin $\tilde{f}_i \in BC^+(\mathbb{R}^2)$. Jos $m : BC(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ on ehdon (i) täyttävä lineaarinen funktionaali, niin määritellään $m_i(f) = m(\tilde{f}_i)$ kaikilla $f \in BC(\mathbb{R})$, jolloin kaikilla $f \in BC^+(\mathbb{R})$ on $m_i(f) = m(\tilde{f}_i) \geq 0$. Jos m täyttää lisäksi ehdon (ii), niin $m_i(1) = m(1) = 1$. Lineaarinen funktionaali $m_i : BC(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ siis toteuttaa ehdot (i) ja (ii), jos m toteuttaa molemmat ehdot. Funktionaalia m_i kutsutaan m:n i:nneksi marginaaliksi.

Lause 1.2. *Olkoon $m : BC(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ ehdot (i) ja (ii) toteuttava lineaarinen funktionaali. Silloin $m_1(\infty) = m_2(\infty) = 0$ jos, ja vain jos $m(\infty) = 0$.*

Todistus. Oletetaan, että $m_1(\infty) = m_2(\infty) = 0$. Määritellään jokaista $R > 0$ kohti funktio $g_R \in C_c^+(\mathbb{R})$ kuten lauseessa 1.1. Määritellään funktio h_R kaavalla $h_R(x_1, x_2) = g_R(x_1)g_R(x_2)$, kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, jolloin $h_R \in C_c^+(\mathbb{R}^2)$. Jokaista $h \in C_c^+(\mathbb{R}^2)$, $h \leq 1$ kohti on olemassa $R > 0$ siten, että $h \leq h_R$. Koska

$$\begin{aligned} 1 - h_R(x_1, x_2) &= (1 - g_R(x_1)) + g_R(x_1)(1 - g_R(x_2)) \\ &\leq (1 - g_R(x_1)) + (1 - g_R(x_2)), \end{aligned}$$

niin $m(1 - h_R) \leq m_1(1 - g_R) + m_2(1 - g_R)$. Tämän johdosta

$$\begin{aligned} m(\infty) &= 1 - \lim_{R\to\infty} m(h_R) \\ &\leq \lim_{R\to\infty} m_1(1 - g_R) + \lim_{R\to\infty} m_2(1 - g_R) \\ &= m_1(\infty) + m_2(\infty) = 0 \end{aligned}$$

Oletetaan nyt, että $m(\infty) = 0$. Olkoot funktiot $g_R \in C_c^+(\mathbb{R})$ ja $h_R \in C_c^+(\mathbb{R}^2)$ kuten edellä. Kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ on

$$1 - h_R(x_1, x_2) = 1 - g_R(x_1)g_R(x_2) \geq 1 - g_R(x_i),$$

$i = 1, 2$, joten $m(1 - h_R) \geq m_i(1 - g_R)$. Tästä seuraa, että

$$0 = m(\infty) = \lim_{R\to\infty} m(1 - h_R) \geq \lim_{R\to\infty} m_i(1 - g_R) = m_i(\infty),$$

mistä väite seuraa.

□

Jos m_0 on positiivinen säännöllinen $\mathbb{R}^2$:n Borelin mitta, niin käytetään merkintää $(m_0)_i$, $i = 1, 2$, m_0:n marginaaleille.

Lause 1.3. *Olkoon $m : BC(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ehdot (i) ja (ii) täyttävä lineaarinen funktionaali. Jos $m(\infty) = 0$, niin $(m_i)_0 = (m_0)_i$, $i = 1, 2$.*

Todistus. Olkoon $f \in BC(\mathbb{R})$. Lauseen 1.1 nojalla on $m_0(\tilde{f}_i) = m(\tilde{f}_i)$. Koska $m(\infty) = 0$, niin lauseen 1.2 mukaan myös $m_i(\infty) = 0$, $i = 1, 2$, ja siis lauseen 1.1 nojalla $(m_i)_0(f) = m_i(f)$. Tästä seuraa, että

$$(m_0)_i(f) = m_0(\tilde{f}_i) = m(\tilde{f}_0) = m_i(f) = (m_i)_0(f).$$

$\square$

1.2.1 Operaattoriarvoisista funktionaaleista

Olkoon $M : BC(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operaattoriarvoinen lineaarikuvaus, joka toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} &(i') \quad M(f) \geq O \text{ jos } f \in BC^+(\mathbb{R}), \\ &(ii') \quad M(1) = I. \end{aligned}$$

Tällöin merkitään

$$M(\infty) = I - \sup\{M(f) | f \in C_c^+(\mathbb{R}), f \leq 1\}.$$

Tämä supremum on aina olemassa [2, Lause I.2.2, s.22].

Olkoon M ehdot (i') ja (ii') täyttävä lineaarikuvaus. Kaikilla $f \in BC^r(\mathbb{R})$ on $M(f - \|f\|_\infty) \leq 0$ ja $M(f + \|f\|_\infty) \geq 0$, joten $\|M(f)\| \leq \|f\|_\infty$. Tällöin on olemassa yksikäsitteisesti määrätty positiivioperaattorimitta $M_0 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ siten, että kaikilla $f \in C_c(\mathbb{R})$ on

$$M(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dM_0(x),$$

missä integraali on määritelty heikossa mielessä [6, Theorem 19, s. 39]. M_0 on säännöllinen siinä mielessä, että [6, Theorem 18, s.38]

$$M_0(X) = \sup\{M_0(K)|K \subset X, K \text{ kompakti}\},$$
$$M_0(X) = \inf\{M_0(U)|U \supset X, U \text{ avoin}\}.$$

Samoin kuin skalaaritapauksessa saadaan

$$M_0(\mathbb{R}) = I - M(\infty) \leq I. \tag{7}$$

Lisäksi kaikilla $f \in BC(\mathbb{R})$ määritellään

$$M_0(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dM_0(x).$$

Annettua ehdot (i') ja (ii') täyttävää lineaarikuvausta ja yksikkövektoria ψ kohti määritellään kuvaus $m_\psi : BC(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ kaavalla $m_\psi(f) = \langle\psi|M(f)\psi\rangle$. Sisätulon lineaarisuudesta seuraa, että m_ψ on $BC(\mathbb{R})$:ssä määritelty lineaarinen funktionaali. Koska $M(f) \geq O$ kaikilla $f \in BC^+(\mathbb{R})$, niin $m_\psi(f) = \langle\psi|M(f)\psi\rangle \geq 0$ kaikilla $f \in BC^+(\mathbb{R})$. Lisäksi $m_\psi(1) = \langle\psi|M(1)\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$, joten m_ψ siis täyttää luvun alussa esitetyt ehdot (i) ja (ii). Nyt $M(f) \to M(\infty)$ heikosti joukossa $\{M(f)|f \in C_c^+, f \leq 1\}$ [2, Lause I.2.2, s. 22], joten $m_\psi(\infty) = \langle\psi|M(\infty)\psi\rangle$.

Lause 1.4. *Olkoon M ehdot (i') ja (ii') täyttävä operaattoriarvoinen lineaarikuvaus. Jos $M(\infty) = O$, niin $M(f) = M_0(f)$ kaikilla $f \in BC(\mathbb{R})$.*

Todistus. Kaikilla $\psi \in \mathcal{H}_1$ ja $f \in C_c(\mathbb{R})$ on

$$(m_\psi)_0(f) = \langle\psi|M_0(f)\psi\rangle,$$

ja yhtälö on voimassa myös kaikilla $f \in BC(\mathbb{R})$. Koska $m_\psi(\infty) = \langle\psi|M(\infty)\psi\rangle = 0$, niin lauseen 1.1 nojalla

$$\langle\psi|M_0(f)\psi\rangle = (m_\psi)_0(f) = m_\psi(f) = \langle\psi|M(f)\psi\rangle.$$

□

Jos $M : BC(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on ehdot (i') ja (ii') täyttävä operaattoriarvoinen lineaarikuvaus, niin M:n marginaalit määritellään kuten skalaaritapauksessa.

Lause 1.5. *Olkoon $M : BC(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ehdot (i') ja (ii') täyttävä operaattoriarvoinen lineaarikuvaus. Silloin*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \textit{jos } M_1(\infty) = M_2(\infty) = 0, \ \textit{niin } M(\infty) = 0, \\
&(ii) \quad \textit{jos } M(\infty) = 0, \ \textit{niin } (M_0)_i = (M_i)_0.
\end{aligned}
$$

Todistus.

(i) Olkoon $\psi \in \mathcal{H}_1$. Määritelmän nojalla on

$$(m_\psi)_i(f) = m_\psi(\tilde{f}_i) = \langle \psi | M(\tilde{f}_i)\psi \rangle = \langle \psi | M_i(f)\psi \rangle$$

kaikilla $f \in BC(\mathbb{R})$ ja $(m_\psi)_i(\infty) = \langle \psi | M_i(\infty)\psi \rangle$. Lauseesta 1.2 seuraa, että $m_\psi(\infty) = 0$. Koska tämä pätee kaikilla yksikkövektoreilla ψ, niin $M(\infty) = 0$.

(ii) Kuten skalaaritapauksessa, lauseesta 1.5 seuraa, että

$$(M_0)_i(f) = M_0(\tilde{f}_i) = M(\tilde{f}_i) = (M_i)_0(f).$$

□

1.3 Spektraaliteoriaa

Tämän osion päätulos on lause 1.9, joka karakterisoi positiivisen itseadjungoidun operaattorin K spektrin siinä tapauksessa, että resolventtioperaattori $(K+1)^{-1}$ on kompakti. Tulosta käytetään myöhemmin, kun geometriselle virheelle etsitään alarajaa. Seuraavat lauseet ovat todistuksineen peräisin Daviesin kirjasta [7].

Olkoon $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ mitta ja $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Tarkastellaan Hilbertin avaruutta $L^2(E, \mu) = \{f : E \to \mathbb{C} | \int_E |f(\mathbf{x})|^2 d\mu(\mathbf{x}) < \infty\}$, jossa on määritelty sisätulo

$$\langle f | g \rangle = \int \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}).$$

Olkoon $a : E \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio, jonka rajoittuma $a|F$ on rajoitettu kaikilla rajoitetuilla joukoilla $F \subset E$. Olkoon $\mathcal{D}(A)$ niiden funktioiden $f \in L^2(E,\mu)$ joukko, joille

$$\int (1 + a(\mathbf{x})^2)|f(\mathbf{x})|^2 d\mu(\mathbf{x}) < \infty.$$

Nyt $\mathcal{D}(A)$ on tiheä $L^2(E,\mu)$:ssä, sillä esimerkiksi rajoitettujen joukkojen karakteristiset funktiot kuuluvat $\mathcal{D}(A)$:han. Määritellään operaattori $A : \mathcal{D}(A) \to L^2(E,\mu)$ kaavalla

$$(Af)(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$$

kaikilla $f \in \mathcal{D}(A)$ ja $\mathbf{x} \in E$.

Lemma 1.1. *Operaattori A on itseadjungoitu.*

Todistus. Koska a on reaaliarvoinen funktio, niin selvästi $\langle f|Ag\rangle = \langle Af|g\rangle$ kaikilla $f, g \in \mathcal{D}(A)$. Siis A on symmetrinen.

Osoitetaan vielä, että $\mathcal{R}(A \pm iI) = L^2(E,\mu)$. Koska a on reaaliarvoinen, niin jokaista $f \in L^2(E,\mu)$ kohti voidaan määritellä funktiot $\tilde{f}_\pm$ kaavalla $\tilde{f}_\pm(\mathbf{x}) = (a(\mathbf{x}) \pm i)^{-1}f(\mathbf{x})$ kaikilla $\mathbf{x} \in E$. Nyt

$$\begin{aligned}
\textstyle\int (1 + a(\mathbf{x})^2)|\tilde{f}_\pm(\mathbf{x})|^2 d\mu(\mathbf{x}) &= \textstyle\int (1 + a(\mathbf{x})^2)|(a(\mathbf{x}) \pm i)^{-1}f(\mathbf{x})|^2 d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \textstyle\int (1 + a(\mathbf{x})^2)(1 + a(\mathbf{x})^2)^{-1}|f(\mathbf{x})|^2 d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \textstyle\int |f(\mathbf{x})|^2 d\mu(\mathbf{x}) < \infty,
\end{aligned}$$

joten $\tilde{f}_\pm \in \mathcal{D}(A)$. Lisäksi $((A \pm iI)\tilde{f}_\pm)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ kaikilla $\mathbf{x} \in E$, joten $L^2(E,\mu) \subset \mathcal{R}(A \pm iI)$. Koska triviaalisti $\mathcal{R}(A \pm iI) \subset L^2(E,\mu)$, niin $\mathcal{R}(A \pm iI) = L^2(E,\mu)$. Tästä seuraa, että A on itseadjungoitu [2, Lemma III.7.3, s.71].

$\square$

Lemma 1.2. *A:n spektri $\sigma(A)$ on niiden $\lambda \in \mathbb{R}$ joukko, joille*

$$\mu\{\mathbf{x} \in E \big| |a(\mathbf{x}) - \lambda| < \epsilon\} > 0$$

kaikilla $\epsilon > 0$. *Jos* $\lambda \notin \sigma(A)$, *niin*

$$((\lambda - A)^{-1} f)(\mathbf{x}) = (\lambda - a(\mathbf{x}))^{-1} f(\mathbf{x})$$

kaikilla $f \in L^2(E, \mu)$ *ja* $\mathbf{x} \in E$.

Todistus. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$ sellainen, että $\mu\{\mathbf{x} \in E \big| |a(\mathbf{x}) - \lambda| < \epsilon\} = 0$ jollakin $\epsilon > 0$. Tällöin funktio $r_\lambda(\mathbf{x}) = (\lambda - a(\mathbf{x}))^{-1}$ on rajoitettu melkein kaikkialla, joten se määrää rajoitetun multiplikatiivisen operaattorin $R_\lambda : L^2(E, \mu) \to L^2(E, \mu)$, $(R_\lambda f)(\mathbf{x}) = r_\lambda(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})$ kaikilla $f \in L^2(E, \mu)$ ja melkein kaikilla $\mathbf{x} \in E$.

Nyt $\mathcal{R}(R_\lambda) = \mathcal{D}(A)$ ja kaikilla $f \in L^2(E, \mu)$ ja melkein kaikilla $\mathbf{x} \in E$ on

$$((\lambda - A) R_\lambda f)(\mathbf{x}) = (\lambda - a(\mathbf{x}))(\lambda - a(\mathbf{x}))^{-1} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Samoin kaikilla $f \in \mathcal{D}(A)$ ja melkein kaikilla $\mathbf{x} \in E$ on

$$(R_\lambda (\lambda - A) f)(\mathbf{x}) = (\lambda - a(\mathbf{x}))^{-1} (\lambda - a(\mathbf{x})) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Siis $\lambda \notin \sigma(A)$.

Olkoon nyt $\lambda \in \mathbb{R}$ sellainen, että $\mu\{\mathbf{x} \in E \big| |a(\mathbf{x}) - \lambda| < \epsilon\} > 0$ kaikilla $\epsilon > 0$ ja määritellään jokaisella $m \in \mathbb{N}$

$$S_m = \{\mathbf{x} \in E \big| |\lambda - a(\mathbf{x})| < 2^{-m}\}.$$

Nyt $\mu(S_m) > 0$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Kaikilla $m \in \mathbb{N}$ on $0 \neq \chi_{S_m} \in L^2(E, \mu)$ ja

$$\|(\lambda - A)\chi_{S_m}\| = \left(\int |\lambda - a(\mathbf{x})|^2 |\chi_{S_m}|^2 d\mu(\mathbf{x}) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{-m} \|\chi_{S_m}\|.$$

Osoitetaan, että $(\lambda - A)$:lla ei ole rajoitettua käänteisoperaattoria. Tehdään vastaoletus. Oletetaan, että on olemassa $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ siten, että $B(\lambda - A) = I|\mathcal{D}(A)$ ja $(\lambda - A)B = I$. Kaikilla $m \in \mathbb{N}$ on

$$\|\chi_{S_m}\| = \|B(\lambda - A)\chi_{S_m}\| \leq \|B\| \|(\lambda - A)\chi_{S_m}\|,$$

mistä seuraa, että

$$\|B\| \geq \|\chi_{S_m}\| \|(\lambda - A)\|^{-1} \geq 2^m,$$

mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. $(\lambda - A)$:lla ei siis ole rajoitettua käänteisoperaattoria, eli $\lambda \in \sigma(A)$.

□

Lemma 1.3. *Olkoon $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ mitta ja olkoon $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Avaruus $L^2(E, \mu)$ on m-ulotteinen, missä $m < \infty$, jos ja vain jos on olemassa sellaiset pisteet $x_1, \ldots, x_m \in E$, että $x_i \neq x_j$ aina kun $i \neq j$, $\mu(\{x_i\}) > 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$ ja $\mu\big(E \setminus \big(\bigcup_{i=1}^m \{x_i\}\big)\big) = 0$.*

Todistus. Jos edellä mainitut pisteet ovat olemassa, niin karakteristiset funktio $\chi_{\{x_i\}}$, missä $i = 1, \ldots, m$, muodostavat $L^2(E, \mu)$:n ortogonaalisen kannan ja $L^2(E, \mu)$ on tällöin m-ulotteinen. Oletetaan nyt, että $L^2(E, \mu)$ on m-ulotteinen, missä $m < \infty$. Jokaista $r \in \mathbb{N}$ kohti $\mathbb{R}$ voidaan ilmaista erillisten puoliavointen välien $I_{t,r} = [\frac{t}{2^r}, \frac{t+1}{2^r})$, $t \in \mathbb{Z}$ numeroituvana unionina. Nyt $\mu(E \cap I_{t,r}) > 0$ korkeintaan m:llä luvulla $t \in \mathbb{Z}$. Kun r kasvaa rajatta, niin nämä epätriviaalit joukot kutistuvat yksiöiksi $\{x_i\}$, missä $i = 1, \ldots, k \leq m$ ja $\mu\big(E \setminus \big(\bigcup_{i=1}^k \{x_i\}\big)\big) = 0$. Todistuksen alkuosan nojalla pisteitä pitää olla tarkalleen m kappaletta.

□

Olkoon K itseadjungoitu operaattori ja $\sigma(K) \subset \mathbb{R}$ K:n spektri. Merkitään $C_\infty(\mathbb{R})$:llä jatkuvien äärettömyydessä häviävien funktioiden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avaruutta varustettuna normilla $\|\cdot\|_\infty$. Jos siis $f \in C_\infty(\mathbb{R})$, niin jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa luku $M > 0$ siten, että $|f(x)| \leq \epsilon$ aina, kun $|x| \geq M$. Seuraava lause on eräs versio spektraalilauseesta. Tulos on klassinen, joten sen todistus sivuutetaan [7, Theorem 2.3.1, s.32].

Lause 1.6. *On olemassa yksikäsitteinen lineaarikuvaus $C_\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $f \mapsto$*

$f(K)$, joka täyttää seuraavat ehdot:

(*i*) $fg \mapsto f(K)g(K)$ *kaikilla* $f, g \in C_\infty(\mathbb{R})$.

(*ii*) $\overline{f}(K) = f(K)^*$ *kaikilla* $f \in C_\infty(\mathbb{R})$.

(*iii*) $\|f(K)\| \leq \|f\|_\infty$ *kaikilla* $f \in C_\infty(\mathbb{R})$.

(*iv*) *Jos* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *ja* $r_z(s) = (z - s)^{-1}$ *kaikilla* $s \in \mathbb{R}$, *niin* $r_z(K) = (z - K)^{-1}$.

(*v*) *Jos* $supp(f) \cap \sigma(K) = \emptyset$, *niin* $f(K) = 0$.

Olkoon L Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ suljettu lineaarinen aliavaruus. L on invariantti K:n suhteen, jos $(z - K)^{-1}L \subset L$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Jos K on rajoitettu, niin tämä on ekvivalentti sen kanssa, että $KL \subset L$. Tärkeä erikoistapaus invariantista aliavaruudesta saadaan, jos

$$L = \overline{\text{lin}\{(z - K)^{-1}\varphi | z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}}$$

jollakin $\varphi \in \mathcal{H}$. Tällöin sanotaan, että L on vektorin $\varphi \in \mathcal{H}$ generoima operaattoriin K liittyvä syklinen aliavaruus, ja vektoria φ kutsutaan sykliseksi vektoriksi. Jos

$$\mathcal{H} = \overline{\text{lin}\{(z - K)^{-1}\varphi | z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}},$$

niin sanotaan lyhyesti, että $\mathcal{H}$:lla on operaattoriin K liittyvä syklinen vektori φ.

Lemma 1.4. *Jokaista itseadjungoitua operaattoria K kohti on olemassa ortogonaaliset sykliset aliavaruudet L_n, $n \in \mathbb{N}$, joita vastaavat sykliset vektorit $\varphi_n \in \mathcal{H}$ siten, että $\mathcal{H}$ on (algebrallisen) suoran summan $\sum_{n=1}^{\infty} \oplus L_n$ sulkeuma.*

Todistus. Olkoon $\{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{H}$:n ortonormaali kanta, ja olkoon L_1 φ_1:n generoima syklinen aliavaruus. Induktiivisesti oletetaan, että $\mathcal{H}$:lla on vektorien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ generoimat ortogonaaliset sykliset aliavaruudet $L_1, \ldots, L_n$. Olkoon $n_0 \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolla $\varphi_{n_0} \notin L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$. Olkoon ψ_{n_0} φ_{n_0}:n komponentti, joka on kohtisuorassa avaruutta $L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ vastaan, ja olkoon L_{n+1} vektorin ψ_{n_0} generoima syklinen aliavaruus. Nyt $L_{n+1} \perp L_k$ kaikilla $k \leq n$ ja $\varphi_{n_0} \in L_1 \oplus \ldots \oplus L_{n+1}$.

Jos jossain induktion vaiheessa lukua $n_0 \in \mathbb{N}$ ei ole olemassa, niin $\mathcal{H}$ on äärellinen suora summa. Jos taas tällainen luku löytyy joka vaiheessa, niin $\varphi_k \in \sum_{n=1}^{\infty} \oplus L_n$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten suora summa on tiheä $\mathcal{H}$:ssa.

$\square$

Seuraavat lauseet osoittavat, että jokainen itseadjungoitu operaattori on unitaarisesti ekvivalentti multiplikatiivisen operaattorin kanssa. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $\mathcal{H}$:lla on syklinen vektori.

Lause 1.7. *Olkoon K itseadjungoitu operaattori ja $\sigma(K)$ K:n spektri. Oletetaan, että $\mathcal{H}$:lla on operaattoriin K liittyvä syklinen vektori φ. Silloin on olemassa rajoitettu mitta $\mu : \mathcal{B}(\sigma(K)) \to [0, \infty)$ ja unitaarinen operaattori*

$$U : \mathcal{H} \to L^2(\sigma(K), \mu),$$

jolla on seuraavat ominaisuudet: Jos $h : \sigma(K) \to \mathbb{R}$ on funktio, jolle $h(s) = s$, niin $\psi \in \mathcal{D}(K)$ jos ja vain jos $hU\psi \in L^2(\sigma(K), \mu)$. Lisäksi $UKU^{-1}\phi = h\phi$ kaikilla $\phi \in U(\mathcal{D}(K))$.

Todistus. Määritellään lineaarinen funktionaali $\Phi : C_\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ kaavalla

$$\Phi(f) = \langle \varphi | f(K) \varphi \rangle.$$

Nyt lauseen 1.6 nojalla

$$\begin{aligned} \Phi(\overline{f}) &= \langle \varphi | \overline{f}(K) \varphi \rangle \\ &= \langle \varphi | f(K)^* \varphi \rangle \\ &= \langle f(K) \varphi | \varphi \rangle \\ &= \overline{\langle \varphi | f(K) \varphi \rangle} \\ &= \overline{\Phi(f)} \end{aligned}$$

kaikilla $f \in \mathbb{C}_\infty(\mathbb{R})$. Jos $f \geq 0$, niin lauseen 1.6 mukaan $f(K) = f^{1/2}(K) f^{1/2}(K)$ ja

$f^{1/2}(K)^* = f^{1/2}(K)$, joten

$$\begin{aligned}\Phi(f) &= \langle\varphi|f(K)\varphi\rangle \\ &= \langle\varphi|f^{1/2}(K)f^{1/2}(K)\varphi\rangle \\ &= \langle f^{1/2}(K)\varphi|f^{1/2}(K)\varphi\rangle \\ &= \|f^{1/2}(K)\varphi\|^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Lauseen 1.6 ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\|\Phi(f)\| &= |\langle\varphi|f(K)\varphi\rangle| \\ &\leq \|\varphi\|\|f(K)\varphi\| \\ &\leq \|\varphi\|^2\|f(K)\| \\ &\leq \|\varphi\|^2\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

joten Rieszin esityslauseen nojalla on olemassa yksikäsitteinen säännöllinen Borelin mitta $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$, jolle

$$\langle\varphi|f(K)\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)$$

kaikilla $f \in C_\infty(\mathbb{R})$. Jos $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ on sellainen, että $\operatorname{supp}(f) \cap \sigma(K) = \emptyset$, niin lauseen 1.6 nojalla $f(K) = 0$, joten $\mu(X) \neq 0$ vain, jos $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on sellainen, että $X \cap \sigma(K) \neq \emptyset$.

Osoitetaan vielä, että μ on rajoitettu. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ merkitään $I_n = [-n,n]$ ja valitaan $\delta, \epsilon > 0$ siten, että $\mu((-(n+\delta),-n) \cup (n,n+\delta)) \leq \epsilon$. Urysonin lemman nojalla jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa jatkuva funktio $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ siten, että $f(x) = 1$ kaikilla $x \in [-n,n]$ ja $f(x) = 0$ kaikilla $x \in (-\infty, -(n+\delta)] \cup [n+\delta,\infty)$. Nyt $f_n \in C_\infty(\mathbb{R})$, $\|f_n\| = 1$ ja $f_n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{R}) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi(f_n) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle\varphi|f_n(K)\varphi\rangle| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty\|\varphi\|^2 \\ &= \|\varphi\|^2 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Koska $\int_{\sigma(K)} |f(x)| d\mu(x) \leq \|f\|_\infty \mu(\sigma(K)) < \infty$ kaikilla $f \in C_\infty(\mathbb{R})$, niin voidaan määritellä lineaarikuvaus $T : C_\infty(\mathbb{R}) \to L^2(\sigma(K), \mu)$ kaavalla $Tf = f|\sigma(K)$, jolloin

$$\begin{aligned} \langle Tf|Tg\rangle &= \int_{\sigma(K)} \overline{f(x)} g(x) d\mu(x) \\ &= \Phi(\overline{f}g) \\ &= \langle \varphi | f(K)^* g(K)\varphi\rangle \\ &= \langle f(K)\varphi | g(K)\varphi\rangle \end{aligned}$$

kaikilla $f, g \in C_\infty(\mathbb{R})$. Merkitään $M = \{f(K)\varphi \in \mathcal{H} | f \in C_\infty(\mathbb{R})\}$ ja määritellään lineaarinen kuvaus $U_0 : M \to L^2(\sigma(K), \mu)$, jolle $U_0(f(K)\varphi) = Tf$ kaikilla $f \in C_\infty(\mathbb{R})$. Koska φ on syklinen vektori, niin M on tiheä $\mathcal{H}$:ssa, ja koska edellisen nojalla U_0 on isometrinen, niin se laajenee unitaariseksi operaattoriksi $U : \mathcal{H} \to L^2(\sigma(K), \mu)$.

Olkoot nyt $f, f_1, f_2 \in C_\infty(\mathbb{R})$ ja merkitään $\psi_i = f_i(K)\varphi \in \mathcal{H}$, jolloin

$$\begin{aligned} \langle \psi_2 | f(K)\psi_1\rangle &= \langle f_2(K)\varphi | f(K) f_1(K)\varphi\rangle \\ &= \langle f_2(K)\varphi | (ff_1)(K)\varphi\rangle \\ &= \int_{\sigma(K)} f(x) f_1(x) \overline{f_2(x)} d\mu(x) \\ &= \langle Tf_2 | fTf_1\rangle \\ &= \langle U(f_2(K)\varphi) | fU(f_1(K)\varphi)\rangle \\ &= \langle U\psi_2 | fU\psi_1\rangle. \end{aligned}$$

Jos nyt $f = r_z$ kuten lauseessa 1.6, niin

$$U r_z(K) U^{-1}\varphi = r_z\varphi \tag{8}$$

kaikilla $\varphi \in L^2(\sigma(K), \mu)$ ja $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Jos $\varphi \in \mathcal{R}(r_z(K))$, niin $\varphi = (z - K)^{-1}\xi$ jollakin $\xi \in L^2(\sigma(K), \mu)$, mistä seuraa, että $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ ja $\xi = (z - K)\varphi$. Vastaavasti, jos $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, niin merkitsemällä $\xi = (z - K)\varphi \in L^2(\sigma(K), \mu)$ saadaan $\varphi = (z - K)^{-1}\xi$, eli $\varphi \in \mathcal{R}(r_z(K))$. Siis $\mathcal{R}(r_z(K)) = \mathcal{D}(K)$. Kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ on $U\varphi \in L^2(\sigma(K), \mu)$ vektori, jolle $r_z U\varphi \in L^2(\sigma(K), \mu)$, ts. U kuvaa joukon $\mathcal{D}(K)$ niiden vektorien $\psi \in L^2(\sigma(K), \mu)$ joukoksi, joilla

$$\int_{\sigma(K)} |x\psi(x)|^2 d\mu(x).$$

Olkoon $\varphi \in L^2(\sigma(K),\mu)$ ja $h : \sigma(K) \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $h(s) = s$. Merkitään $\psi = r_z\varphi$, jolloin $\psi \in \mathcal{D}(h)$. Nyt

$$\begin{aligned} Kr_z(K)U^{-1}\varphi &= zr_z(K)U^{-1}\varphi - (z-K)r_z(K)U^{-1}\varphi \\ &= zr_z(K)U^{-1}\varphi - U^{-1}\varphi, \end{aligned}$$

joten käyttämällä yhtälöä (8) saadaan

$$\begin{aligned} UKU^{-1}\psi &= UKU^{-1}r_z\varphi \\ &= UKU^{-1}Ur_z(K)U^{-1}\varphi \\ &= UKr_z(K)U^{-1}\varphi - UU^{-1}\varphi \\ &= zr_z\varphi - \varphi \\ &= zr_zr_z^{-1}\psi - r_z^{-1}\psi \\ &= (z - r_z^{-1})\psi \\ &= h\psi, \end{aligned}$$

sillä $(z - r_z^{-1})(s) = z - (z-s) = s$ kaikilla $s \in \sigma(K)$.

□

Todistetaan seuraavaksi edellinen lause yleisemmässä tapauksessa.

Lause 1.8. *Olkoon K itseadjungoitu operaattori ja $\sigma(K)$ K:n spektri. Silloin on olemassa rajoitettu mitta $\mu : \mathcal{B}(\sigma(K)\times\mathbb{N}) \to [0,\infty)$ ja unitaarinen operaattori*

$$U : \mathcal{H} \to L^2(\sigma(K)\times\mathbb{N},\mu),$$

jolla on seuraavat ominaisuudet: Jos $h : \sigma(K)\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ on funktio, jolle $h(s,n) = s$, niin $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ jos ja vain jos $hU\varphi \in L^2(\sigma(K)\times\mathbb{N},\mu)$. Lisäksi $UKU^{-1}\psi = h\psi$ kaikilla $\psi \in U(\mathcal{D}(K))$ ja $Uf(K)U^{-1}\phi = f(h)\phi$ kaikilla $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ ja $\phi \in L^2(\sigma(K)\times\mathbb{N},\mu)$.

Todistus. Lauseen 1.4 mukaan $\mathcal{H}$ voidaan kirjoittaa suorana summana ortogonaalisista syklisistä aliavaruuksista L_n, $n \in \mathbb{N}$, joita vastaavat sykliset vektorit φ_n. Oletetaan, että $\|\varphi_n\| = 2^{-n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 1.7 nojalla on olemassa mitat $\mu_n : \mathcal{B}(\sigma(K)) \to [0, \infty)$, joille $\mu_n(\mathbb{R}) = \|\varphi_n\|^2 = 2^{-2n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja unitaarioperaattorit $U_n : L_n \to L^2(\sigma(K), \mu_n)$ siten, että K:n rajoittuma $K|L_n = K_n$ on unitaarisesti ekvivalentti funktiolla $x \mapsto x$ kertomisen kanssa avaruudessa $L^2(\sigma(K), \mu_n)$. Olkoon $\mu : \mathcal{B}(\sigma(K) \times \mathbb{N})$ sellainen mitta, että sen rajoittuma $\mu|\mathcal{B}(\sigma(K) \times \{n\}) = \mu_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Yhdistämällä nämä kuvaukset saadaan väite.

□

Lause 1.9. *Olkoon $K : \mathcal{D}(K) \to \mathcal{H}$ rajoittamaton itseadjungoitu operaattori, jonka spektri $\sigma(K) \subset [0, \infty)$. Silloin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

- (i) *Resolventtioperaattori $(K+1)^{-1}$ on kompakti.*
- (ii) *K:n oleellinen spektri $\sigma_{ess}(K)$ on tyhjä.*
- (iii) *On olemassa täydellinen ortonormaali joukko $\{\varphi_n \in \mathcal{H} | n \in \mathbb{N}\}$ K:n ominaisvektoreita, joita vastaaville ominaisarvoille $\lambda_n \geq 0$ pätee $\lambda_n \to \infty$, kun $n \to \infty$.*

Todistus. Oletetaan (i). Lauseen 1.8 mukaan K on unitaarisesti ekvivalentti avaruudessa $L^2(\sigma(K) \times \mathbb{N}, \mu)$ rajoittamattomalla ei-negatiivisella funktiolla $h(s,n) = s$ kertomisen kanssa. Samoin lemman 1.2 nojalla $(K+1)^{-1}$ on unitaarisesti ekvivalentti funktiolla $k(s,n) = (h(s,n)+1)^{-1}$ kertomisen kanssa. Olkoon jokaisella $n \in \mathbb{N}$ E_n niiden pisteiden $(s,n) \in \sigma(K) \times \mathbb{N}$ joukko, joilla

$$2^{-(n+1)}\|(K+1)^{-1}\| < |k(s,n)| \leq 2^{-n}\|(K+1)^{-1}\|.$$

Jos $L^2(E_n, \mu)$ on ääretönulotteinen jollakin $n \in \mathbb{N}$, niin kyseisessä aliavaruudessa on ääretön ortonormaali jono (ψ_i). Jos nyt $i \neq j$, niin

$$\begin{aligned}
\|(K+1)^{-1}(\psi_i - \psi_j)\|^2 &= \int_{E_n} k(s,n)^2 |\psi_i(s,n) - \psi_j(s,n)|^2 d\mu(s,n) \\
&\geq 2^{-2(n+1)}\|(K+1)^{-1}\|^2 \int_{E_n} |\psi_i(s,n) - \psi_j(s,n)|^2 d\mu(s,n) \\
&\geq 2^{-2(n+1)}\|(K+1)^{-1}\|^2.
\end{aligned}$$

Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, sillä $(K+1)^{-1}$:n kompaktiuden nojalla jonolla $\big((K+1)^{-1}\psi_i\big)$ on suppeneva osajono. Siis $L^2(E_n,\mu)$ on äärellisulotteinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lemmasta 1.3 seuraa, että joukossa

$$[-2^{-n}\|(K+1)^{-1}\|, -2^{-(n+1)}\|(K+1)^{-1}\|) \cup (2^{-(n+1)}\|(K+1)^{-1}\|, 2^{-n}\|(K+1)^{-1}\|]$$

on äärellinen määrä $(K+1)^{-1}$:n spektrin alkioita, ja jokainen niistä on $(K+1)^{-1}$:n äärellisasteinen ominaisarvo. $(K+1)^{-1}$:n ominaisvektoreista saadaan siis $L^2(E_n,\mu)$:lle äärellinen ortonormaali kanta $\{\varphi_i^n | i = 1,\ldots,m_n\}$. Merkitään vielä E:llä niiden pisteiden $(s,n) \in \sigma(K)\times\mathbb{N}$ joukkoa, joilla $k(s,n) = 0$, jolloin yhdistämällä ortonormaalit joukot $\{\varphi^{n_i}\}$ ja E:n mahdollisesti ääretön ortonormaali kanta saadaan täydellinen ortonormaali joukko $(K+1)^{-1}$:n ominaisvektoreita $\{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$, joita vastaaville ominaisarvoille pätee $\lambda_n \to 0$, kun $n \to \infty$. Koska oletuksen nojalla $\sigma(K) \subset [0,\infty)$, niin $1 - \lambda_n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt $\varphi_n \in \mathcal{D}(K)$ ja

$$\begin{aligned}
(K - (\tfrac{1}{\lambda_n} - 1))\varphi_n &= (K+1)\varphi_n - \tfrac{1}{\lambda_n}\varphi_n \\
&= \tfrac{1}{\lambda_n}(K+1)(K+1)^{-1}\varphi_n - \tfrac{1}{\lambda_n}\varphi_n \\
&= \tfrac{1}{\lambda_n}\varphi_n - \tfrac{1}{\lambda_n}\varphi_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, eli φ_n:t ovat K:n ominaisarvoihin $(\frac{1}{\lambda_n} - 1)$ liittyviä ominaisvektoreita. Aikaisemman nojalla φ_n:t muodostavat täydellisen ortonormaalin joukon ja $(\frac{1}{\lambda_n} - 1) \to \infty$, kun $n \to \infty$.

Oletetaan (iii). Järjestetään ominaisvektorit ja niitä vastaavat ominaisarvot siten että $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n$. Määritellään kullakin $k \in \mathbb{N}$ äärellistasteinen operaattori

$$A_k = \sum_{n=1}^{k} (\lambda_n + 1)^{-1} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|.$$

Kaikilla $\psi \in \mathcal{H}$ on nyt

$$\big((K+1)^{-1} - A_k\big)\,\psi = \sum_{n=k+1}^{\infty} (\lambda_n + 1)^{-1} \langle\varphi_n|\psi\rangle\varphi_n,$$

joten Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\|\left((K+1)^{-1}-A_k\right)\psi\| &\leq \textstyle\sum_{n=k+1}^{\infty}(\lambda_n+1)^{-1}|\langle\varphi_n|\psi\rangle|\|\varphi_n\| \\ &\leq \textstyle\sum_{n=k+1}^{\infty}(\lambda_n+1)^{-1}\|\psi\|.\end{aligned}$$

Siis

$$\|(K+1)^{-1}-A_k\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty}(\lambda_n+1)^{-1} \to 0,$$

kun $k \to \infty$. Koska äärellisasteiset operaattorit ovat tiheässä kompaktien operaattorien joukossa, niin $(K+1)^{-1}$ on kompakti.

Oletetaan (ii). Nyt K:n spektri $\sigma(K)$ koostuu äärellisesti degeneroituneista ominaisarvoista $\lambda_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, joita vastaavat ominaisvektorit $\varphi_n \in \mathcal{H}_1$. Oletetaan ominaisarvot järjestetyiksi siten, että $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n$. Oletetaan nyt, että K:n ominaisvektorien joukko ei ole täydellinen ja tarkastellaan lineaarista aliavaruutta

$$L = \{\psi \in \mathcal{H}|\langle\psi|\varphi_n\rangle = 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}.$$

Olkoon $\psi \in L$. Tällöin kaikilla $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$ on

$$\begin{aligned}\langle(z-K)^{-1}\psi|\varphi_n\rangle &= \lambda_n^{-1}\langle(z-K)^{-1}\psi|K\varphi_n\rangle \\ &= \lambda_n^{-1}\left(\langle(z-K)^{-1}\psi|z\varphi_n\rangle - \langle(z-K)^{-1}\psi|(z-K)\varphi_n\rangle\right) \\ &= \tfrac{z}{\lambda_n}\langle(z-K)^{-1}\psi|\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Koska $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ja $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, niin $\langle(z-K)^{-1}\psi|\varphi_n\rangle = 0$. L on siis invariantti K:n suhteen siinä mielessä, että $(z-K)^{-1}L \subset L$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \subset \mathbb{R}$ joten K:n rajoittuman $K|L$ spektri on epätyhjä. Tällöin K:lla on siis muita ominaisarvoja edellä mainittujen lisäksi, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Siis (iii) pätee.

Oletetaan lopuksi (iii). Koska $\lambda_n \to \infty$, kun $n \to \infty$, niin jokaista $M \geq 0$ kohti on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $\lambda_n \geq 0$ aina, kun $n \geq n_0$. Siis $\lambda_n \in [0, M]$ vain äärellisen monella indeksillä n. Erityisesti siis yhtä suuria ominaisarvoja on vain äärellinen määrä, eli ominaisarvot ovat äärellisesti degeneroituneet. Koska K on itseadjungoitu, niin $\sigma(K) = \overline{\{\lambda_n|n \in \mathbb{N}\}} = \{\lambda_n|n \in \mathbb{N}\}$, missä jälkimmäinen yhtäsuuruus seuraa oletuksesta, joten K:n oleellinen spektri on tyhjä.

$\square$

1.4 Harmonista analyysia faasiavaruudessa

Tarkastellaan Hilbertin avaruutta $L^2(\mathbb{R})$ ja faasiavaruutta $\mathbb{R}^2$. Olkoot U ja V translaatio- ja nopeussysäysryhmiin liittyvät $\mathcal{H}$:n yksiparametriset unitaariesitykset. Paikkaesityksessä niille saadaan kaavat $[U(q)\varphi](x) = \varphi(x-q)$ ja $[V(p)\varphi](x) = e^{ipx}\varphi(x)$. Kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ määritellään

$$W(q,p) = e^{i\frac{qp}{2}}U(q)V(p).$$

Kuvaus $W : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $(q,p) \mapsto W(q,p)$ on faasiavaruuden translaatioryhmän redusoitumaton projektiivinen esitys $\mathcal{H}$:ssa. Kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$, $x \in \mathbb{R}$ ja $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ saadaan

$$\begin{aligned}
[W(q,p)\varphi](x) &= e^{i\frac{qp}{2}}[U(q)V(p)\varphi](x) \\
&= e^{i\frac{qp}{2}}[V(p)\varphi](x-q) \\
&= e^{i\frac{qp}{2}}e^{ip(x-q)}\varphi(x-q) \\
&= e^{-i\frac{qp}{2}}e^{ipx}\varphi(x-q).
\end{aligned}$$

Kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$, $x \in \mathbb{R}$ ja $(q,p),(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on

$$\begin{aligned}
[W(q+u,p+v)\varphi](x) &= e^{-i\frac{(q+u)(p+v)}{2}}e^{i(p+v)x}\varphi(x-q-u) \\
&= e^{-\frac{i}{2}(qp+uv+qv+up)}e^{ipx}e^{ivx}\varphi(x-q-u) \\
&= e^{-i\frac{qp}{2}}e^{ipx}e^{-i\frac{uv}{2}}e^{i(vx-\frac{qv}{2}-\frac{up}{2})}\varphi(x-q-u) \\
&= e^{-i\frac{qp}{2}}e^{ipx}e^{-i\frac{uv}{2}}e^{iv(x-q)}e^{i\frac{(qv-up)}{2}}\varphi(x-q-u) \\
&= e^{i\frac{(qv-up)}{2}}e^{-i\frac{qp}{2}}e^{ipx}[W(u,v)\varphi](x-q) \\
&= e^{i\frac{(qv-up)}{2}}[W(q,p)W(u,v)\varphi](x),
\end{aligned}$$

eli kuvaus $((q,p),(u,v)) \mapsto e^{i\frac{(qv-up)}{2}}$ on ryhmän kertojafunktio. Määritellään pariteettioperaattori $\Pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kaavalla

$$[\Pi\varphi](x) = \varphi(-x),$$

kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$ ja $x \in \mathbb{R}$. Pariteettioperaattorille pätee $\Pi = \Pi^*$ ja $\Pi^2 = I$.

Olkoon

$$L^\infty(\mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} | f \text{ mitallinen ja } \|f\|_\infty < \infty\},$$

missä $\|f\|_\infty = \sup\{M \in \mathbb{R} \big| |f(q,p)| < M$ melkein kaikkialla$\}$, ja

$$L^1(\mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} | f \text{ mitallinen ja } \|f\|_1 < \infty\},$$

missä $\|f\|_1 = \int |f(q,p)|dqdp$. Jälkiluokkaa $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ pidetään varustettuna normilla $\|T\|_{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}[|T|]$, ja $\mathcal{L}(\mathcal{H})$:ta normilla $\|A\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{H}_1} \|A\varphi\| = \sup_{\psi,\varphi \in \mathcal{H}_1} |\langle \psi | A\varphi \rangle|$. Merkitään jatkuvien äärettömyydessä häviävien funktioiden $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ joukkoa $C_\infty(\mathbb{R}^2)$:lla, ts. $f \in C_\infty(\mathbb{R}^2)$ jos ja vain jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $M > 0$, että $|f(q,p)| \leq \epsilon$ aina, kun $\sqrt{q^2 + p^2} \geq M$. Jatkuvien kompaktitukisten funktioiden $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ joukkoa merkitään $C_c(\mathbb{R}^2)$:lla ja kompaktien operaattorien joukkoa $\mathcal{C}(\mathcal{H})$:lla.

1.4.1 Fourier-muunnos ja konvoluutio

Seuraavaksi esitettävät Fourier-muunnoksen määritelmä ja siihen liittyvät tulokset ovat peräisin kirjasta [8]. Konvoluutiot on määritelty Wernerin mukaan [9].

Olkoon $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^n)$ nopeasti vähenevien äärettömän monta kertaa differentioituvien funktioiden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ muodostama vektoriavaruus. Määritellään funktion $f \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^n)$ Fourier-muunnos $F_0 f = \hat{f}$ integraalilla

$$(F_0 f)(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} f(y) d\mathbf{y},$$

ja käänteinen Fourier-muunnos on $F_0^{-1} f = \check{f}$ integraalilla

$$(F_0^{-1} f)(\mathbf{y}) = \check{f}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Riemannin-Lebesquen lemman nojalla F_0:lla on yksikäsitteinen laajennus $\tilde{F}_0 : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_\infty(\mathbb{R}^n)$, ja kaikilla $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ on $(\tilde{F}_0 f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$. Tästä syystä käytetään myös tämän laajennuksen yhteydessä merkitää $\tilde{F}_0 f = \hat{f}$. Plancherelin teoreeman nojalla F_0 laajenee yksikäsitteisesti myös unitaariseksi Fourierin-Plancherelin operaattoriksi $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, jonka adjungaatti $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ on F_0^{-1}:n yksikäsitteinen laajennus. $\mathcal{F}$:lle ei kuitenkaan saada eksplisiittistä integraaliesitystä. $\mathcal{F}$:n unitaarisuudesta seuraa, että kaikilla $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on $\langle f | g \rangle =$

$\langle \mathcal{F}f|\mathcal{F}g\rangle$, missä $\langle f|g\rangle = \int \overline{f(\mathbf{x})}g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ on sisätulo $L^2(\mathbb{R}^n)$:ssä. Erityisesti siis kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ pätee $\|\mathcal{F}f\| = \|f\|$. Jatkossa tarvitaan vain tapauksia $n = 1, 2$.

Seuraava lemma luo perustan konvoluutioiden määrittelylle. Lemman todistus on Wernerin artikkelista [9]

Lemma 1.5. *Olkoot $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Kuvaus $(q,p) \mapsto tr[T_1 W(q,p) T_2 W(q,p)^*]$ on integroituva ja*

$$\frac{1}{2\pi}\int tr[T_1 W(q,p) T_2 W(q,p)^*]dqdp = tr[T_1]tr[T_2].$$

Todistus. Koska kuvaus $(T_1, T_2) \mapsto \mathrm{tr}[T_1 W(q,p) T_2 W(q,p)^*]$ on bilineaarinen ja jokainen $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ voidaan kirjoittaa neljän positiivisen operaattorin lineaarikombinaationa niin riittää tarkastella tapausta $T_i \geq 0$. Tällöin T_1:lla ja T_2:lla on spektraalihajotelmat $T_1 \sum t_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ ja $T_2 = \sum s_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$. Toisaalta kuvaus $T_i \mapsto \mathrm{tr}[T_1 W(q,p) T_2 W(q,p)^*]$, $i = 1, 2$, on jatkuva, joten riittää tarkastella tapausta $T_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$, $\varphi_i \in \mathcal{H}_1$, $i = 1, 2$.

Määritellään kaikilla $q \in \mathbb{R}$ funktio ψ_q kaavalla $\psi_q(x) = \overline{\varphi_2(x)}\varphi_1(x+q)$. Koska $|\varphi_2(x)||\varphi_1(x+q)| \leq \frac{1}{2}\big(|\varphi_2(x)|^2 + |\varphi_1(x+q)|^2\big)$, niin $\psi_q \in L^1(\mathbb{R})$ ja kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ on

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_2|W(q,p)^*\varphi_1\rangle &= e^{-i\frac{qp}{2}}\langle\varphi_2|V(p)^*U(q)^*\varphi_1\rangle \\
&= e^{-i\frac{qp}{2}}\textstyle\int e^{-ipx}\overline{\varphi_2(x)}\varphi_1(x+q)dx \\
&= e^{-i\frac{qp}{2}}\sqrt{2\pi}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int e^{-ipx}\psi_q(x)dx \\
&= \sqrt{2\pi}e^{-i\frac{qp}{2}}\hat{\psi}_q(p).
\end{aligned}$$

Koska nyt $\psi_q \in L^2(\mathbb{R})$ melkein kaikilla $q \in \mathbb{R}$, niin käyttämällä hyväksi yhtälöä

$\|f\| = \|\hat{f}\|$ ja Fubinin lausetta saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{tr}[T_1W(q,p)T_2W(q,p)^*]dqdp &= \frac{1}{2\pi}\int \langle\varphi_1|W(q,p)\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|W(q,p)^*\varphi_1\rangle dqdp \\
&= \frac{1}{2\pi}\int |\langle\varphi_2|W(q,p)^*\varphi_1\rangle|^2 dqdp \\
&= \frac{1}{2\pi}\int |\sqrt{2\pi}e^{-i\frac{qp}{2}}\hat{\psi}_q(p)|^2 dqdp \\
&= \int |\hat{\psi}_q(p)|^2 dqdp \\
&= \int |\hat{\psi}_q(p)|^2 dpdq \\
&= \int |\psi_q(p)|^2 dpdq \\
&= \int |\psi_q(p)|^2 dqdp \\
&= \int |\overline{\varphi_2(p)}\varphi_1(p+q)|^2 dqdp \\
&= \|\varphi_2\|^2\|\varphi_1\|^2 \\
&= \mathrm{tr}[T_2]\mathrm{tr}[T_1].
\end{aligned}
$$

□

Määritellään seuraavaksi konvoluutiot.

Määritelmä 1.1. *Olkoot $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ integroituvia funktioita ja $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Niiden väliset konvoluutiot määritellään kaavoilla:*

$$
\begin{aligned}
(f_1 * f_2)(x,y) &= \int f_1(q,p)f_2(x-q,y-p)dqdp, \\
(T_1 * T_2)(q,p) &= tr[T_1W(q,p)\Pi T_2\Pi^*W(q,p)^*],
\end{aligned}
$$

kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Nyt $f_1 * f_2, T_1 * T_2 \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Seuraavat lauseet ovat perustana funktioiden ja operaattorien välisten konvoluutioiden määrittelyille.

Lause 1.10. *Kaikilla integroituvilla $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ja $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ on*

$$
\Big|\int f(q,p)\langle\psi|W(q,p)AW(q,p)^*\varphi\rangle dqdp\Big| \leq \|f\|_1\|A\|\|\psi\|\|\varphi\|.
$$

Todistus. Suoralla laskulla nähdään, että kaikilla $\psi, \varphi \in \mathcal{H}_1$ on

$$\begin{aligned}
& \left| \int f(q,p) \langle \psi | W(q,p) A W(q,p)^* \varphi \rangle dqdp \right| \\
\leq\ & \int |f(q,p)| |\langle W(q,p)^* \psi | A W(q,p)^* \varphi \rangle| dqdp \\
\leq\ & \int |f(q,p)| \|W(q,p)^* \psi\| \|A\| \|W(q,p)^* \varphi\| dqpdp \\
=\ & \|f\|_1 \|A\| \|\psi\| \|\varphi\|.
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 1.2. *Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ integroituva ja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Funktion f ja operaattorin A välinen konvoluutio on rajoitettu lineaarioperaattori $f * A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, jolle*

$$\langle \psi | (f * A) \varphi \rangle = \int f(q,p) \langle \psi | W(q,p) A W(q,p)^* \varphi \rangle dqdp,$$

kaikilla $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$.

Edellisen määritelmän tapauksessa kirjoitetaan muodollisesti

$$f * A = \int f(q,p) W(q,p) A W(q,p)^* dqdp.$$

Lauseesta 1.10 seuraa lisäksi, että

$$\|f * A\| = \sup_{\varphi, \psi \in \mathcal{H}_1} |\langle \varphi | (f * A) \psi \rangle| \leq \|f\|_1 \|A\|. \tag{9}$$

Seuraavissa lauseissa on joitakin tarvittavia konvoluutioiden perusominaisuuksia. Lauseet ovat peräisin Wernerin artikkelista [9].

Lause 1.11. *Konvoluutio on kommutatiivinen ja assosiatiivinen.*

Todistus. Olkoot $f_1, f_2, f_3 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ integroituvia. Kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on

$$\begin{aligned}
(f_1 * f_2)(x,y) &= \int f_1(q,p) f_2(x-q, y-p) dqdp \\
&= \int f_1(x-q', y-p') f_2(q',p') dq'dp' \\
&= (f_2 * f_1)(x,y)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}(f_1 * (f_2 * f_3))(x,y) &= (f_1 * (f_3 * f_3))(x,y) \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^2} f_1(q,p)(f_3 * f_2)(x-q, y-p)dqdp \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^4} f_1(q,p) f_3(u,v) f_2(x-q-u, y-p-v)dudvdqdp \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^2} f_3(u,v)(f_1 * f_2)(x-u, y-v)dudv \\ &= (f_3 * (f_1 * f_2))(x,y) \\ &= ((f_1 * f_2) * f_3)(x,y).\end{aligned}$$

Olkoot $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R})$, $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ ja $x \in \mathbb{R}$ on

$$\begin{aligned}\big(W(q,p)\Pi f\big)(x) &= e^{i\frac{qp}{2}} e^{ip(x-q)} (\Pi f)(x-q) = e^{-i\frac{qp}{2}} e^{ipx} f(q-x) \\ &= \big(W(q,p)^* f\big)(-x) = \big(\Pi^* W(q,p)^* f\big)(x),\end{aligned}$$

joten $W(q,p)\Pi = \Pi^* W(q,p)^*$. Nyt kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ on

$$\begin{aligned}(T_1 * T_2)(q,p) &= \mathrm{tr}[T_1 W(q,p) \Pi T_2 \Pi^* W(q,p)^*] \\ &= \mathrm{tr}[T_2 W(q,p) \Pi T_1 \Pi^* W(q,p)^*] \\ &= (T_2 * T_1)(q,p).\end{aligned}$$

Käyttämällä hyväksi lemmaa 1.5, edellistä kohtaa ja Fubinin lausetta saadaan kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
& \langle\psi|(T_1 * (T_2 * T_3))\varphi\rangle \\
= \ & \langle\psi|(T_1 * (T_3 * T_2))\varphi\rangle \\
= \ & \mathrm{tr}[(T_1 * (T_3 * T_2))|\varphi\rangle\langle\psi|] \\
= \ & \textstyle\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{tr}[W(q,p)T_1W(q,p)^*|\varphi\rangle\langle\psi|]\mathrm{tr}[T_3W(q,p)\Pi T_2\Pi^*W(q,p)^*]dqdp \\
= \ & \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}[W(q,p)T_1W(q,p)^*|\varphi\rangle\langle\psi|W(u,v)T_3W(u,v)^*\times \\
& \quad W(q+u,p+v)\Pi T_2\Pi^*W(q+u,p+v)^*]dqdpdudv \\
= \ & \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}[|\varphi\rangle\langle\psi|W(u,v)T_3W(u,v)^*W(q,p)W(u,v)\Pi T_2\Pi^*\times \\
& \quad W(u,v)^*T_1W(q,p)]dqdpdudv \\
= \ & \textstyle\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{tr}[|\varphi\rangle\langle\psi|W(u,v)T_3W(u,v)^*]\mathrm{tr}[W(u,v)\Pi T_2\Pi^*W(u,v)^*T_1]dudv \\
= \ & \mathrm{tr}[|\varphi\rangle\langle\psi|(T_3 * (T_1 * T_2))] \\
= \ & \mathrm{tr}[T_0((T_1 * T_2) * T_3)] \\
= \ & \langle\psi|((T_1 * T_2) * T_3)\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

□

Lause 1.12. *Konvoluutio säilyttää positiivisuuden.*

Todistus. Olkoot $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ integroituvia, $f_1, f_2 \geq 0$. Silloin

$$(f_1 * f_2)(q,p) = \int f_1(x,y)f_2(q-x,p-y)dxdy \geq 0$$

kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$, joten $f_1 * f_2 \geq 0$.

Olkoot $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $T_1, T_2 \geq 0$ ja olkoon $\{\varphi_n \in \mathcal{H} | n \in N\}$ $\mathcal{H}$:n ortonormaali kanta. Silloin

$$\begin{aligned}
(T_1 * T_2)(q,p) &= \mathrm{tr}[T_1W(q,p)\Pi T_2\Pi^*W(q,p)^*] \\
&= \mathrm{tr}[T_2^{1/2}\Pi^*W(q,p)^*T_1^{1/2}T_1^{1/2}W(q,p)\Pi T_2^{1/2}] \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\langle\varphi_n|T_2^{1/2}\Pi^*W(q,p)^*T_1^{1/2}T_1^{1/2}W(q,p)\Pi T_2^{1/2}\varphi_n\rangle \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\langle T_1^{1/2}W(q,p)\Pi T_2^{1/2}\varphi_n|T_1^{1/2}W(q,p)\Pi T_2^{1/2}\varphi_n\rangle \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\|T_1^{1/2}W(q,p)\Pi T_2^{1/2}\varphi_n\|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$, joten $T_1 * T_2 \geq 0$.

Olkoot $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $f \geq 0$ ja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $A \geq 0$. Silloin kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$ on

$$\begin{aligned}\langle \varphi | (f * A)\varphi \rangle &= \int f(q,p) \langle \varphi | W(q,p) A W(q,p)^* \varphi \rangle dq dp \\ &= \int f(q,p) \langle W(q,p)^* \varphi | A W(q,p)^* \varphi \rangle dq dp \\ &\geq 0\end{aligned}$$

joten $f * A \geq 0$.

$\square$

Tarkastellaan vielä joitakin funktion ja operaattorin välisen konvoluution ominaisuuksia.

Koska kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ ja $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ on

$$\begin{aligned}& \langle \varphi | W(q,p)(f * A) W(q,p)^* \psi \rangle \\ = \ & \langle W(q,p)^* \varphi | (f * A) W(q,p)^* \psi \rangle \\ = \ & \int f(u,v) \langle \varphi | W(q,p) W(u,v) A W(u,v)^* W(q,p)^* \psi \rangle du dv \\ = \ & \int f(u,v) \langle \varphi | W(u,v) W(q,p) A W(q,p)^* W(u,v)^* \psi \rangle du dv \\ = \ & \langle \varphi | (f * (W(q,p) A W(q,p)^*)) \psi \rangle,\end{aligned}$$

niin $W(q,p)(f * A) W(q,p)^* = f * (W(q,p) A W(q,p)^*)$. Kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ on

$$\begin{aligned}\langle \varphi | (f * A)^* \psi \rangle &= \overline{\langle \psi | (f * A) \varphi \rangle} \\ &= \int \overline{f(q,p) \langle \psi | W(q,p) A W(q,p)^* \varphi \rangle} dq dp \\ &= \int \overline{f(q,p)} \langle \varphi | W(q,p) A^* W(q,p)^* \psi \rangle dq dp \\ &= \langle \varphi | (\overline{f} * A^*) \psi \rangle,\end{aligned}$$

joten adjungaatiksi saadaan $(f * A)^* = \overline{f} * A^*$.

Jos $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $T \geq 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $f \geq 0$ ja (φ_i) $L^2(\mathbb{R})$:n ortonormaali kanta, niin monotonisen konvergenssin lauseesta ja operaattorin $f * T$ positiivisuudesta seuraa, että

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[f*T] &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\langle\varphi_i|(f*T)\varphi_i\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\int f(q,p)\langle\varphi_i|W(q,p)TW(q,p)^*\varphi_i\rangle dqdp \\
&= \textstyle\int f(q,p)\sum_{i=1}^{\infty}\langle\varphi_i|W(q,p)TW(q,p)^*\varphi_i\rangle dqdp \\
&= \textstyle\int f(q,p)\mathrm{tr}[W(q,p)TW(q,p)^*]dqdp \\
&= \textstyle\int f(q,p)\mathrm{tr}[T]dqdp < \infty.
\end{aligned}$$

Koska jokainen $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ voidaan kirjoittaa positiivisten jälkiluokkaoperaattorien lineaarikombinaationa ja jokainen $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ neljän positiivisen funktion lineaarikombinaationa, niin konvoluution lineaarisuudesta seuraa, että $f*T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ kaikilla $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$.

Seuraava lause ilmaisee yhteyden konvoluution ja Fourier-muunnoksen välillä. Todistus on peräisin Reedin ja Simonin kirjasta [8, Theorem IX.3, s. 6].

Lause 1.13. *Kaikilla* $f, g \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ *on*

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_0(fg) &= \tfrac{1}{2\pi}(\tilde{F}_0 f)*(\tilde{F}_0 g), \\
\tilde{F}_0(f*g) &= 2\pi(\tilde{F}_0 f)(\tilde{F}_0 g).
\end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ kiinteä. Määritellään funktio $\tilde{f}_{(x,y)}$ kaavalla $\tilde{f}_{(x,y)}(q,p) = e^{i(qx+py)}\overline{f(q,p)}$, jolloin $\tilde{f}_{(x,y)} \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Nyt

$$\langle\tilde{f}_{(x,y)}|g\rangle = \int e^{-i(qx+py)}f(q,p)g(q,p)dqdp = 2\pi(\tilde{F}_0(fg))(x,y),$$

ja

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{F}_0\tilde{f}_{(x,y)}|\tilde{F}_0 g\rangle &= \textstyle\int\left(\overline{\frac{1}{2\pi}\int e^{-i(qu+pv)}e^{i(xu+yv)}\overline{f(u,v)}dudv}\right)(\tilde{F}_0 g)(q,p)dqdp \\
&= \textstyle\int\left(\frac{1}{2\pi}\int e^{-i(u(x-q)+v(y-p))}f(u,v)dudv\right)(\tilde{F}_0 g)(q,p)dqdp \\
&= \textstyle\int(\tilde{F}_0 f)(x-q,y-p)(\tilde{F}_0 g)(q,p)dqdp \\
&= ((\tilde{F}_0 f)*(\tilde{F}_0 g))(x,y),
\end{aligned}$$

mutta nämä sisätulot ovat yhtäsuuret, joten väitteen ensimmäinen yhtälö on voimassa. Käyttämällä hyväksi konvoluution kommutatiivisuutta ja Fubinin lausetta saadaan

$$\begin{aligned}
(\tilde{F}_0(f*g))(x,y) &= (\tilde{F}_0(g*f))(x,y) \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int e^{-i(qx+py)}\left(\int f(u,v)g(q-u,p-v)dudv\right)dqdp \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int f(u,v)\left(\int e^{-i(qx+py)}g(q-u,p-v)dqdp\right)dudv \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int f(u,v)\left(\int e^{-i((q'+u)x+(p'+v)y)}g(q',p')dq'dp'\right)dudv \\
&= \int e^{-i(xu+yv)}f(u,v)\left(\tfrac{1}{2\pi}\int e^{-i(q'x+py)}g(q',p')dq'dp'\right)dudv \\
&= \int e^{-i(xu+yv)}f(u,v)(\tilde{F}_0 g)(x,y)dudv \\
&= 2\pi(\tilde{F}_0 f)(x,y)(\tilde{F}_0 g)(x,y).
\end{aligned}$$

□

Kun edellisen lauseen ensimmäistä kaavaa sovelletaan funktioihin $\tilde{F}_0^{-1}f, \tilde{F}_0^{-1}g \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^2)$, niin saadaan $f*g = 2\pi\tilde{F}_0((\tilde{F}_0^{-1}f)(\tilde{F}_0^{-1}g))$. Jokaisella $f \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^2)$ kuvaus $g \mapsto f*g$ on siis käänteisen Fourier-muunnoksen, funktiolla kertomisen ja Fourier-muunnoksen yhdistetty kuvaus, ja siis jatkuva. Erityisesti lauseen jälkimmäinen kaava pätee kaikilla $f, g \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Lause 1.14. *Olkoon $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Jos*

$$\lim_{(q,p)\to(0,0)} \|W(q,p)AW(q,p)^* - A\| = 0,$$

niin on olemassa funktiojono $(f_n) \subset L^1(\mathbb{R}^2)$ siten, että

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n * A - A\| = 0.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sellainen, että

$$\lim_{(q,p)\to(0,0)} \|W(q,p)AW(q,p)^* - A\| = 0.$$

Valitaan $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $\|W(q,p)AW(q,p)^* - A\| < \epsilon$, kun $q^2+p^2 \le \frac{1}{n_0^2}$. Tällöin $|\langle\psi|(W(q,p)AW(q,p)^* - A)\varphi\rangle| < \epsilon$ kaikilla $\psi, \varphi \in \mathcal{H}_1$. Valitaan jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti funktio $f_n \in L^1(\mathbb{R}^2)$ siten, että $f_n \ge 0$, $\mathrm{supp}(f_n) \subset \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 | q^2+p^2 \le \frac{1}{n^2}\}$, f_n on integroituva ja $\int f_n(q,p)dqdp = 1$

Kun $n > n_0$, niin kaikilla $\psi, \varphi \in \mathcal{H}_1$ on

$$\begin{aligned}
& |\langle\psi|(f_n * A - A)\varphi\rangle| \\
= & \left|\int f_n(q,p)\langle\psi|W(q,p)AW(q,p)^*\varphi\rangle dqdp - \langle\psi|A\varphi\rangle\right| \\
= & \left|\int f_n(q,p)\langle\psi|W(q,p)AW(q,p)^*\varphi\rangle dqdp - \int f_n(q,p)\langle\psi|A\varphi\rangle dqdp\right| \\
= & \left|\int f_n(q,p)\big(\langle\psi|W(q,p)AW(q,p)^*\varphi\rangle - \langle\psi|A\varphi\rangle\big)dqdp\right| \\
\leq & \int f_n(q,p)|\langle\psi|\big(W(q,p)AW(q,p)^* - A\big)\varphi\rangle|dqdp.
\end{aligned}$$

Nyt $|\langle\psi|\big(W(q,p)AW(q,p)^* - A\big)\varphi\rangle| < \epsilon$ kaikilla $(q,p) \in \mathrm{supp}(f_n)$, joten

$$|\langle\psi|(f_n * A - A)\varphi\rangle| < \epsilon \int f_n(q,p)dqdp = \epsilon.$$

Siis myös $\|f_n * A - A\| = \sup_{\psi,\varphi\in\mathcal{H}_1} |\langle\psi|(f_n * A - A)\varphi\rangle| \leq \epsilon$, kun $n > n_0$, joten

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n * A - A\| = 0.$$

$\square$

1.4.2 Säännölliset ja kompaktit operaattorit

Määritelmä 1.3. *Olkoon $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Jos $tr[TW(q,p)] \neq 0$ kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$, niin sanotaan, että T on säännöllinen.*

Määritelmästä seuraa välittömästi, että jos T on säännöllinen, niin myös $\Pi T \Pi^*$ on säännöllinen, sillä

$$\mathrm{tr}[\Pi T \Pi^* W(q,p)] = \mathrm{tr}[T\Pi^* W(q,p)\Pi] = \mathrm{tr}[T\Pi^*\Pi^* W(q,p)^*] = \mathrm{tr}[TW(q,p)^*].$$

Osoitetaan seuraavaksi, että Gaussin tila on säännöllinen.

Olkoon $T = |\Psi\rangle\langle\Psi| \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, missä $\Psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, jolloin T on tila. Nyt kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ on

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[TW(q,p)] &= \langle\Psi|W(q,p)\Psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{qp}{2}} e^{ip(x-q)} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(x-q)^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{q^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{qp}{2}} e^{ip(x-q)} e^{-(x-\frac{q}{2})^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{q^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} (f_{q,p}(x) + ig_{q,p}(x))dx,
\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} f_{q,p}(x) &= \big(\cos(\tfrac{qp}{2})\cos(p(x-q)) - \sin(\tfrac{qp}{2})\sin(p(x-q))\big)e^{-(x-\frac{q}{2})^2} \\ &= \cos(px - \tfrac{qp}{2})e^{-(x-\frac{q}{2})^2}, \\ g_{q,p}(x) &= \big(\sin(\tfrac{qp}{2})\cos(p(x-q)) - \cos(\tfrac{qp}{2})\sin(p(x-q))\big)e^{-(x-\frac{q}{2})^2} \\ &= \sin(px - \tfrac{qp}{2})e^{-(x-\frac{q}{2})^2}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x' = x - \frac{q}{2}$, jolloin

$$\begin{aligned} f_{q,p}(x') &= \cos(px')e^{-x'^2}, \\ g_{q,p}(x') &= \sin(px')e^{-x'^2}. \end{aligned}$$

Nyt $g_{q,p}$ on parillisen ja parittoman funktion tulona pariton, joten

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{q,p}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_{q,p}(x')dx' = 0.$$

Toisaalta $f_{q,p}$ on kahden parillisen funktion tulona parillinen, joten saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}[TW(q,p)] &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{q^2}{4}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos(px')e^{-x'^2}dx' \\ &= \tfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{q^2}{4}}\textstyle\int_{0}^{\infty}\cos(px')e^{-x'^2}dx' \\ &= \tfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{q^2}{4}}\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{p^2}{4}} \\ &= e^{-\frac{q^2+p^2}{4}} \neq 0, \end{aligned}$$

kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$. Siis Gaussin tila $T = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ on säännöllinen.

On huomattava, että kaikki tilat eivät kuitenkaan ole säännöllisiä. Esimerkiksi tilalle $|\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\rangle\langle\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|$ on

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}[|\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\rangle\langle\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|W(q,p)] &= \langle\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|W(q,p)\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\rangle \\ &= \textstyle\int e^{-i\frac{qp}{2}}e^{ipx}\overline{\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x-q)dx \\ &= \textstyle\int e^{ipx-i\frac{qp}{2}}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\chi_{[q-\frac{1}{2},q+\frac{1}{2}]}(x)dx. \end{aligned}$$

Jos nyt $|q| > 1$, niin $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \cap [q-\frac{1}{2},q+\frac{1}{2}] = \emptyset$, joten tällöin

$$\mathrm{tr}[|\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\rangle\langle\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|W(q,p)] = 0.$$

Siis $|\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\rangle\langle\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}|$ ei ole säännöllinen.

Esitetään seuraavaksi ilman toditusta klassinen Wienerin aproksimaatiolause [10]. Lauseen todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [11, Theorem 4.1, s. 8].

Lause 1.15. *Olkoon* $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *ja jokaista paria* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *kohti merkitään* $f^{(x,y)}$*:lla funktiota, jolle* $f^{(x,y)}(q,p) = f(q+x, p+y)$ *kaikilla* $(q,p) \in \mathbb{R}^2$*. Silloin*

$$L^1(\mathbb{R}^2) = \overline{\mathrm{lin}\{f^{(x,y)} | (x,y) \in \mathbb{R}^2\}}$$

silloin, ja vain silloin kun $\hat{f}(q,p) \neq 0$ *kaikilla* $(q,p) \in \mathbb{R}^2$*.*

Tästä seuraa, että jos $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ on sellainen, että $\hat{f}(q,p) \neq 0$ kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$, niin jokaista $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ja $\epsilon > 0$ kohti on olemassa luvut $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ ja $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R}^2$ siten, että

$$\int |g(q,p) - \sum_{i=1}^{N} c_i f(q - x_i, p - y_i)| dq dp < \epsilon.$$

Lause 1.16. *Olkoon* $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ *säännöllinen. Silloin* $T * \mathcal{T}(\mathcal{H}) = \{T * S | S \in \mathcal{T}(\mathcal{H})\}$ *on tiheä* $L^1(\mathbb{R}^2)$*:ssä.*

Todistus. Käyttämällä hyväksi lemmaa 1.5 nähdään, että kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ on

$$\begin{aligned}
& (\tilde{F}_0(T * T))(q,p) \\
= \; & \tfrac{1}{2\pi} \int e^{-i(qx+py)} (T * T)(x,y) dx dy \\
= \; & \tfrac{1}{2\pi} \int e^{-i(qx+py)} \mathrm{tr}[T W(x,y) \Pi T \Pi^* W(x,y)^*] dx dy \\
= \; & \tfrac{1}{2\pi} \int e^{-i(qx+py)} \mathrm{tr}[T W(-p,q)^* W(-p,q) W(x,y) \Pi T \Pi^* W(x,y)^*] dx dy \\
= \; & \tfrac{1}{2\pi} \int e^{-i(qx+py)} e^{i(qx+py)} \mathrm{tr}[T W(-p,q)^* W(x,y)^* W(-p,q) \Pi T \Pi^* W(x,y)^*] dx dy \\
= \; & \tfrac{1}{2\pi} \int \mathrm{tr}[\big(T W(-p,q)^*\big) W(x,y)^* \big(W(-p,q) \Pi T \Pi^*\big) W(x,y)^*] dx dy \\
= \; & \mathrm{tr}[T W(-p,q)^*] \mathrm{tr}[W(-p,q) \Pi T \Pi^*] \\
= \; & \mathrm{tr}[T W(-p,q)^*] \mathrm{tr}[T W(-p,q)^*] \\
\neq \; & 0,
\end{aligned}$$

Nyt Wienerin approksimaatiolauseen 1.15 nojalla jokaista $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ja $\epsilon > 0$ kohti on olemassa luvut $c_i \in \mathbb{C}$ ja $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, N$ siten, että

$$\int |f(q,p) - \sum_{i=1}^{N} c_i (T * T)(q - x_i, p - y_i)| dq dp < \epsilon$$

kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}$. Koska $W(x,y)^*\Pi = \Pi W(x,y)$ ja jälki on lineaarinen, niin saadaan

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{i=1}^N c_i(T*T)(q-x_i,p-y_i) \\
= & \textstyle\sum_{i=1}^N c_i \mathrm{tr}[TW(q-x_i,p-y_i)\Pi T\Pi^* W(q-x_i,p-y_i)^*] \\
= & \textstyle\sum_{i=1}^N c_i \mathrm{tr}[TW(q,p)W(x_i,y_i)^*\Pi T\Pi^* W(x_i,y_i)W(q,p)^*] \\
= & \textstyle\sum_{i=1}^N c_i \mathrm{tr}[TW(q,p)\Pi W(x_i,y_i)TW(x_i,y_i)^*\Pi^* W(q,p)^*] \\
= & \mathrm{tr}[TW(q,p)\Pi \left(\textstyle\sum_{i=1}^N c_i W(x_i,y_i)TW(x_i,y_i)^*\right) \Pi^* W(q,p)^*].
\end{aligned}$$

Valitsemalla $S = \sum_{i=1}^N c_i W(x_i,y_i)TW(x_i,y_i)^* \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ nähdään, että jokaista $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ja $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $S \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ siten, että

$$\|f - T*S\|_1 \leq \epsilon$$

kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$.

□

Laajennetaan vielä konvoluutioiden määritelmiä kahdessa tapauksessa. Koska $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ on suljettu $\mathcal{L}(\mathcal{H})$:n alkioilla kertomisen suhteen, niin voidaan määritellä operaattorien $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvoluutio samalla kaavalla:

$$(T*A)(q,p) = \mathrm{tr}[TW(q,p)\Pi A\Pi^* W(q,p)^*]$$

kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$. Myös tässä tapauksessa konvoluutio on kommutatiivinen ja säilyttää positiivisuuden. On kuitenkin huomattava, että funktio $T*A$ ei yleensä ole integroituva.

Olkoon nyt $S,T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ ja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, jolloin $(S*T) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ja siis $(S*T)*A \in$

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Samoin kuin lauseen 1.11 todistuksessa, saadaan kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
& \langle\varphi|((S*T)*A)\psi\rangle \\
= \; & \langle\varphi|((T*S)*A)\psi\rangle \\
= \; & \textstyle\int_{\mathbb{R}^2}(T*S)(q,p)\langle\varphi|W(q,p)AW(q,p)^*\psi\rangle dqdp \\
= \; & \textstyle\int_{\mathbb{R}^2}\operatorname{tr}[TW(q,p)\Pi S\Pi^* W(q,p)^*]\operatorname{tr}[W(q,p)AW(q,p)^*|\psi\rangle\langle\varphi|]dqdp \\
= \; & \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{\mathbb{R}^4}\operatorname{tr}[W(q,p)AW(q,p)^*|\psi\rangle\langle\varphi|W(u,v)SW(u,v)^*\times \\
& \quad W(q+u,p+v)\Pi T\Pi^* W(q+u,p+v)^*]dudvdqdp \\
= \; & \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{\mathbb{R}^4}\operatorname{tr}[|\psi\rangle\langle\varphi|W(u,v)SW(u,v)^*W(q,p)W(u,v) \\
& \quad \Pi T\Pi^* W(u,v)^*AW(q,p)^*]dqdpdudv \\
= \; & \textstyle\int_{\mathbb{R}^2}\operatorname{tr}[|\psi\rangle\langle\varphi|W(u,v)SW(u,v)^*]\operatorname{tr}[W(u,v)\Pi T\Pi^* W(u,v)^*A]dudv \\
= \; & \textstyle\int_{\mathbb{R}^2}\operatorname{tr}[W(u,v)\Pi T\Pi^* W(u,v)^*A]\langle\varphi|W(u,v)SW(u,v)^*\psi\rangle dudv \\
= \; & \textstyle\int_{\mathbb{R}^2}(T*A)(u,v)\langle\varphi|W(u,v)SW(u,v)^*\psi\rangle dudv,
\end{aligned}$$

joten voidaan määritellä $S*(T*A)$ rajoitettuna lineaarioperaattorina $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, jolle

$$\langle\varphi|(S*(T*A))\psi\rangle = \int (T*A)(u,v)\langle\varphi|W(u,v)SW(u,v)^*\varphi\rangle dudv$$

kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, jolloin $S*(T*A) = (S*T)*A$.

Lause 1.17. *Olkoot $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ säännöllinen ja $S \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Jos $T*A$ häviää äärettömyydessä, niin $S*(T*A)$ on kompakti.*

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $T*A \in C_\infty(\mathbb{R}^2)$ ja $C_c(\mathbb{R}^2)$ on normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen tiheä $C_\infty(\mathbb{R})$:ssa, niin on olemassa $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ siten, että $\|T*A-f\|_\infty < \epsilon$. Nyt kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_1$ on

$$\begin{aligned}
& |\langle\varphi|(S*(T*A)-S*f)\psi\rangle| \\
= \; & \left|\textstyle\int((T*A)(q,p)-f(q,p))\langle\varphi|W(q,p)SW(q,p)^*\psi\rangle dqdp\right| \\
\le \; & \textstyle\int|((T*A)(q,p)-f(q,p))||\langle\varphi|W(q,p)SW(q,p)^*\psi\rangle|dqdp \\
\le \; & \textstyle\int\|T*A-f\|_\infty|\langle\varphi|W(q,p)SW(q,p)^*\psi\rangle|dqdp \\
\le \; & \epsilon\cdot\textstyle\int|\operatorname{tr}[|\psi\rangle\langle\varphi|W(q,p)SW(q,p)^*]|dqdp.
\end{aligned}$$

Osoitetaan, että yo. integraalilla on vektoreista φ ja ψ riippumaton äärellinen ylä-raja.

Koska jokainen $S \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ voidaan kirjoittaa muodossa $S = \sum_{n=1}^{4} c_n S_n$, missä $S_n \geq 0$ kaikilla $n = 1, \ldots, 4$ ja

$$\begin{aligned} |\psi\rangle\langle\varphi| &= \tfrac{1}{2}\big[|\psi\rangle\langle\psi| + \tfrac{1}{2}(|\psi\rangle\langle\varphi| + |\varphi\rangle\langle\psi|)\big] - \tfrac{1}{2}\big[|\psi\rangle\langle\psi| - \tfrac{1}{2}(|\psi\rangle\langle\varphi| + |\varphi\rangle\langle\psi|)\big] \\ &\quad + \tfrac{i}{2}\big[|\psi\rangle\langle\psi| + \tfrac{i}{2}(|\varphi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\varphi|)\big] - \tfrac{i}{2}\big[|\psi\rangle\langle\psi| - \tfrac{i}{2}(|\varphi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\varphi|)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}T_1 - \tfrac{1}{2}T_2 + \tfrac{i}{2}T_3 - \tfrac{i}{2}T_4, \end{aligned}$$

missä $T_i \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $T_i \geq 0$ ja $\mathrm{tr}[T_i] \leq 2$ kaikilla $i = 1, \ldots, 4$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} & \textstyle\int |\mathrm{tr}[|\psi\rangle\langle\varphi| W(q,p) S W(q,p)^*]| dqdp \\ \leq \ & \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=1}^{4} \int |\mathrm{tr}[T_i W(q,p) S W(q,p)^*]| dqdp \\ \leq \ & \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=1}^{4} \sum_{n=1}^{4} |c_n| \int |\mathrm{tr}[T_i W(q,p) S_n W(q,p)^*]| dqdp. \end{aligned}$$

Koska nyt

$$\mathrm{tr}[T_i W(q,p) S_n W(q,p)^*] \geq 0,$$

niin soveltamalla lemmaa 1.5 saadaan

$$\begin{aligned} \textstyle\int |\mathrm{tr}[|\psi\rangle\langle\varphi| W(q,p) S W(q,p)^*]| dqdp &\leq \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi \textstyle\sum_{n=1}^{4} \sum_{n=1}^{4} |c_n| \mathrm{tr}[T_i] \mathrm{tr}[S_n] \\ &\leq 8\pi \cdot \textstyle\sum_{n=1}^{4} |c_n| \mathrm{tr}[S_n]. \end{aligned}$$

Nyt siis

$$|\langle\varphi|(S * (T * A) - S * f)\psi\rangle| \leq \epsilon \cdot 8\pi \cdot \sum_{n=1}^{4} |c_n| \mathrm{tr}[S_n]$$

kaikilla $\psi, \varphi \in \mathcal{H}_1$, joten

$$\|S * (T * A) - S * f\| \leq \epsilon \cdot 8\pi \cdot \sum_{n=1}^{4} |c_n| \mathrm{tr}[S_n]$$

Koska $f * S \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$, niin $S * (T * A) \in \overline{\mathcal{T}(\mathcal{H})} \subset \overline{\mathcal{C}(\mathcal{H})}$ ja koska lisäksi $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ on normin $\|\cdot\|$ suhteen suljettu [2, Lause IV.3.3, s. 103], niin $S*(T*A) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

$\square$

Lause 1.18. *Olkoon* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$*. Jos* $\lim_{(q,p)\to(0,0)} \|W(q,p)AW(q,p)^* - A\| = 0$ *ja funktio* $(q,p) \mapsto tr[TW(q,p)AW(q,p)^*]$ *häviää äärettömyydessä jollakin säännöllisellä* $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$*, niin* A *on kompakti.*

Todistus. Funktio $(q,p) \mapsto \mathrm{tr}[TW(q,p)AW(q,p)^*]$ häviää äärettömyydessä silloin, ja vain silloin kun funktio $(q,p) \mapsto \mathrm{tr}[TW(q,p)^*AW(q,p)]$ häviää äärettömyydessä. Koska lisäksi

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[TW(q,p)^*AW(q,p)] &= \mathrm{tr}[TW(q,p)^*\Pi^*\Pi AW(q,p)\Pi^*\Pi] \\
&= \mathrm{tr}[T\Pi^*W(q,p)\Pi A\Pi^*W(q,p)^*\Pi] \\
&= \mathrm{tr}[\Pi T\Pi^*W(q,p)\Pi A\Pi^*W(q,p)^*] \\
&= ((\Pi T\Pi^*) * A)(q,p)
\end{aligned}$$

ja $\Pi T\Pi^* = T_0$ on säännöllinen, niin yhtäpitävä ehto edellä mainittujen kanssa on, että $T_0 * A \in C_\infty(\mathbb{R}^2)$ jollakin säännöllisellä $T_0 \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $\lim_{(q,p)\to(0,0)} \|W(q,p)AW(q,p)^* - A\| = 0$, niin lauseen 1.14 mukaan voidaan valita $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ siten, että $\|f * A - A\| < \frac{\epsilon}{2}$. Lisäksi lauseen 1.16 mukaan voidaan valita $S \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ siten, että $\|f - T_0 * S\|_1 < \frac{\epsilon}{2}\|A\|^{-1}$. Nyt konvoluution transitiivisuuden ja lineaarisuuden, kolmioepäyhtälön sekä epäyhtälön (9) nojalla

$$\begin{aligned}
\|A - (S * T_0) * A\| &\leq \|A - f * A\| + \|f * A - (S * T_0) * A\| \\
&= \|A - f * A\| + \|(f - S * T_0) * A\| \\
&\leq \|A - f * A\| + \|f - S * T_0\|_1\|A\| \\
&\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2}\|A\|^{-1}\|A\| = \epsilon.
\end{aligned}$$

Lauseen 1.17 nojalla $(S * T_0) * A = S * (T_0 * A) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ ja $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ on normin $\|\cdot\|$ suhteen suljettu [2, Lause IV.3.3, s. 103], joten $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

□

2 Fysikaalisista suureista

2.1 Paikka- ja liikemääräsuureet

Olkoot jälleen $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ sekä U ja V translaatio- ja nopeussysäysryhmiin liittyvät $\mathcal{H}$:n yksiparametriset unitaariesitykset. Olkoot Q ja P vastaavasti U:n ja V:n generoivat itseadjungoidut operaattorit, ts. $U(q) = e^{-iqP}$ ja $V(p) = e^{ipQ}$ kaikilla $q, p \in \mathbb{R}$. Käytetään merkintöjä E^Q ja E^P operaattoreita Q ja P vastaaville spektraalimitoille. Spektraalimitoilla E^Q ja E^P on $[E^Q(X)\varphi](x) = \chi_X(x)\varphi(x)$ ja $E^P(X) = \mathcal{F}^{-1}E^Q(X)\mathcal{F}$, kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nyt kaikilla $q, p \in \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ ja $x \in \mathbb{R}$ on

$$
\begin{aligned}
[U(q)E^Q(X)U(q)^*\varphi](x) &= [E^Q(X)U(q)^*\varphi](x-q) \\
&= \chi_X(x-q)[U(q)^*\varphi](x-q) \\
&= X_{X+q}(x)\varphi(x) \\
&= [E^Q(X+q)\varphi](x)
\end{aligned}
$$

ja

$$
[V(p)E^Q(X)V(p)^*\varphi](x) = e^{ipx}\chi_X(x)e^{-ipx}\varphi(x) = [E^Q(X)\varphi](x).
$$

Näin on saatu paikkasuureelle symmetriaominaisuudet

$$
U(q)E^Q(X)U(q)^* = E^Q(X+q), \tag{10}
$$

$$
V(p)E^Q(X)V(p)^* = E^Q(X), \tag{11}
$$

kaikilla $q, p \in \mathbb{R}$ ja $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ensimmäinen yhtälö tarkoittaa, että tarkka paikkasuure E^Q on kovariantti translaatioiden suhteen ja jälkimmäinen, että E^Q on invariantti nopeussysäysten suhteen. Nämä symmetriaominaisuudet otetaankin yleisen paikkasuureen määritelmäksi.

Määritelmä 2.1. *Suure $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on* paikkasuure, *jos kaikilla $q, p \in \mathbb{R}$ ja*

$X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$U(q)E(X)U(q)^* = E(X+q) \tag{12}$$

$$V(p)E(X)V(p)^* = E(X) \tag{13}$$

Vastaavasti liikemääräsuure määritellään suureena, joka on kovariantti sysäysten suhteen ja invariantti translaatioiden suhteen.

Määritelmä 2.2. *Suure $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on* liikemääräsuure*, jos kaikilla $q, p \in \mathbb{R}$ ja $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on*

$$U(q)E(X)U(q)^* = E(X) \tag{14}$$

$$V(p)E(X)V(p)^* = E(X+p) \tag{15}$$

Kaikilla $q, p \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$ ja $x \in \mathbb{R}$ on

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}U(q)\varphi](x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixy}(U(q)\varphi)(y)dy \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixy}\varphi(y-q)dy \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ix(y'+q)}\varphi(y')dy' \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixq} \int e^{-ixy'}\varphi(y')dy' \\
&= [V(-q)\mathcal{F}\varphi](x)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}V(p)\varphi](x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixy}e^{ipy}f(y)dy \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i(x-p)y}\varphi(y)dy \\
&= [\mathcal{F}\varphi](x-p) \\
&= [U(p)\mathcal{F}\varphi](x).
\end{aligned}$$

Koska $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$ on tiheässä $L^2(\mathbb{R})$:ssä, niin tästä seuraa, että $\mathcal{F}U(q) = V(-q)\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}V(p) = U(p)\mathcal{F}$. Tarkalle liikemääräsuureelle $E^P = \mathcal{F}^{-1}E^Q\mathcal{F}$ saadaan nyt

$$\begin{aligned}
U(q)E^P(X)U(q)^* &= U(q)\mathcal{F}^{-1}E^Q(X)\mathcal{F}U(q)^* \\
&= (\mathcal{F}U(-q))^{-1}E^Q(X)\mathcal{F}U(-q) \\
&= \mathcal{F}^{-1}V(-q)E^Q(X)V(q)\mathcal{F} \\
&= \mathcal{F}^{-1}E^Q(X)\mathcal{F} = E^P(X)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V(p)E^P(X)V(p)^* &= (\mathcal{F}V(-p))^{-1}E^Q(X)\mathcal{F}V(-p) \\ &= \mathcal{F}^{-1}U(p)E^Q(X)U(-p)\mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}^{-1}E^Q(X+p)\mathcal{F} \\ &= E^P(X+p) \end{aligned}$$

kaikilla $q, p \in \mathbb{R}$ ja $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, eli E^P toteuttaa edellä annetut liikemääräsuureen symmetriaehdot. Suureita E^Q ja E^P kutsutaan *kanonisiksi paikka- ja liikemääräsuureiksi.*

Lause 2.1. *Suure $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on paikkasuure jos ja vain jos $\mathcal{F}^{-1}E(\cdot)\mathcal{F}$ on liikemääräsuure.*

Todistus. Edellä esitetyn nojalla $\mathcal{F}^{-1}E(\cdot)\mathcal{F}$ on liikemääräsuure, jos E on paikkasuure. Oletetaan nyt, että $\mathcal{F}^{-1}E(\cdot)\mathcal{F}$ on liikemääräsuure, ts. se toteuttaa määritelmän 2.2 ehdot. Kaikilla $q, p \in \mathbb{R}$ ja $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned} U(q)E(X)U(q)^* &= U(q)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}E(X)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}U(q)^* \\ &= U(q)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}E(X)\mathcal{F}(U(q)\mathcal{F})^* \\ &= \mathcal{F}V(q)\mathcal{F}^{-1}E(X)\mathcal{F}(\mathcal{F}V(q))^* \\ &= \mathcal{F}V(q)\mathcal{F}^{-1}E(X)\mathcal{F}V(q)^*\mathcal{F}^{-1} \\ &= \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}E(X+q)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \\ &= E(X+q) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V(p)E(X)V(p)^* &= V(p)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}E(X)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}V(p)^* \\ &= V(p)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}E(X)\mathcal{F}(V(p)\mathcal{F})^* \\ &= \mathcal{F}U(-p)\mathcal{F}^{-1}E(X)\mathcal{F}(\mathcal{F}U(-p))^* \\ &= \mathcal{F}U(-p)\mathcal{F}^{-1}E(X)\mathcal{F}U(-p)^*\mathcal{F}^{-1} \\ &= \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}E(X)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \\ &= E(X), \end{aligned}$$

joten E toteuttaa määritelmän 2.1 ehdot ja on siis paikkasuure.

$\square$

Lause 2.2. *Olkoon* $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ *todennäköisyysmitta. Kuvaus* $q \mapsto \tilde{\mu}_X(q) = \mu(X - q)$ *on Borel-mitallinen kaikilla* $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Todistus. Jokaista rajoitettua Borel-mitallista funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kohti määritellään funktio $F_f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kaavalla

$$F_f(q) = \int f(q+x) d\mu(x),$$

kaikilla $q \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\mu(X-q) = \int \chi_{X-q}(x) d\mu(x) = \int \chi_X(x+q) d\mu(x) = F_{\chi_X}(q).$$

Olkoon $\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) | F_{\chi_X} \text{ on Borel-mitallinen}\}$. Osoitetaan, että $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Olkoon $f \in C_c(\mathbb{R})$ ja $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että $|f(q_1) - f(q_2)| < \epsilon$ aina, kun $|q_1 - q_2| < \delta$. Nyt

$$\begin{aligned} |F_f(q_1) - F_f(q_2)| &= \big| \textstyle\int \big(f(q_1+x) - f(q_2+x)\big) d\mu(x) \big| \\ &\leq \textstyle\int |f(q_1+x) - f(q_2+x)| d\mu(x) \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

kun $|(q_1+x) - (q_2+x)| = |q_1 - q_2| < \delta$. F_f on siis jatkuva, joten myös mitallinen.

Olkoon nyt $f = \chi_A$ jollakin avoimella joukolla $A \subset \mathbb{R}$. Koska A on σ-kompakti, niin voidaan valita nouseva jono (K_n) kompakteja joukkoja siten, että $K_n \subset A$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\bigcup_n K_n = A$. Urysonin lemman nojalla jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa jatkuva funktio $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ siten, että $f(q) = 1$ aina kun $q \in K_n$ ja $f(q) = 0$ aina kun $q \in \mathbb{R} \setminus A$. Siis $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jono (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota χ_A, joten dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned} F_{\chi_A}(q) &= \textstyle\int \chi_A(q+x) d\mu(x) \\ &= \textstyle\int \lim_{n\to\infty} f_n(x+q) d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\int f_n(x+q) d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} F_{f_n}(q), \end{aligned}$$

joten F_{χ_A} on mitallisten funktioiden rajafunktiona mitallinen. $\mathcal{M}$ siis sisältää avoimet joukot.

Olkoon $\mathcal{A}$ niiden joukkojen $X \subset \mathbb{R}$ kokoelma, joille $\chi_X = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ joillakin avoimilla joukoilla A_i ja luvuilla $c_i = \pm 1$. Nyt $\mathcal{A}$ on algebra. Koska $F_{\sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}} = \sum_{i=1}^n c_i F_{\chi_{A_i}}$ ja jokainen $F_{\chi_{A_i}}$ on mitallinen, niin $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.

Olkoon (A_i) nouseva jono $\mathcal{M}$:ssä. Nyt

$$F_{\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}}(q) = \mu\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i - q\big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i - q) = \lim_{i\to\infty} F_{\chi_{A_i}}(q),$$

joten $F_{\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}}$ on mitallinen eli $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{M}$. Vastaavasti jos (B_i) on laskeva jono $\mathcal{M}$:ssä, niin

$$F_{\chi_{\bigcap_{i=1}^\infty B_i}}(q) = \mu\big(\bigcap_{i=1}^\infty B_i - q\big) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i - q) = \lim_{i\to\infty} F_{\chi_{B_i}}(q),$$

joten $F_{\chi_{\bigcap_{i=1}^\infty B_i}}$ on mitallinen ja siis $\bigcap_{i=1}^\infty B_i \in \mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ on siis monotoninen luokka.

Koska $\mathcal{A}$:n generoima monotoninen luokka $\mathcal{M}_0$ on sama kuin $\mathcal{A}$ generoima σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [2, Lemma II.3.9, s. 37], ja koska toisaalta $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, niin $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\square$

Kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ kuvaus $q \mapsto \mu(X - q)$ on siis rajoitettu ja mitallinen, joten yhtälö

$$E_\mu^Q(X) = \int \mu(X - q) dE^Q(q) \tag{16}$$

määrittelee rajoitetun positiivisen operaattorin. Selvästi $E_\mu^Q(\mathbb{R}) = I$. Kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ on $\langle \psi | E_\mu^Q(\emptyset)\varphi \rangle = 0$ ja jos (A_i) on jono erillisiä $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:n joukkoja, niin dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\langle\psi|E_\mu^Q(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)\varphi\rangle &= \int \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i - q)dE_{\varphi,\psi}^Q(q) \\
&= \int \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i - q)dE_{\varphi,\psi}^Q(q) \\
&= \int \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_i - q)dE_{\varphi,\psi}^Q(q) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \sum_{i=1}^n \mu(A_i - q)dE_{\varphi,\psi}^Q \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \int \mu(A_i - q)dE_{\varphi,\psi}^Q \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \langle\psi|E_\mu^Q(A_i)\varphi\rangle \\
&= \sum_{i=1}^\infty \langle\psi|E_\mu^Q(A_i)\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Kuvaus

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni X \mapsto E_\mu^Q(X) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

on siis suure. Kaikilla $q \in \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja $\psi \in \mathcal{H}$ on

$$\begin{aligned}
\langle\psi|U(q)E_\mu^Q(X)U(q)^*\psi\rangle &= \int_\mathbb{R} \mu(X - q')d\mathbf{p}_{U(q)^*\psi}^{E^Q}(q') \\
&= \int_\mathbb{R} \mu(X - q')d\mathbf{p}_\psi^{U(q)E^Q U(q)^*}(q') \\
&= \int_\mathbb{R} \mu(X - q')d\mathbf{p}_\psi^{E^Q}(q + q') \\
&= \int_\mathbb{R} \mu(X + q - q')d\mathbf{p}_\psi^{E^Q}(q') \\
&= \langle\psi|E_\mu^Q(X + q)\psi\rangle
\end{aligned}$$

Vastaavasti kaikilla $p \in \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja $\psi \in \mathcal{H}$ on

$$\begin{aligned}
\langle\psi|V(p)E_\mu^Q(X)V(p)^*\psi\rangle &= \int_\mathbb{R} \mu(X - q')d\mathbf{p}_{V(p)^*\psi}^{E^Q}(q') \\
&= \int_\mathbb{R} \mu(X - q')d\mathbf{p}_\psi^{V(p)E^Q V(p)^*}(q') \\
&= \int_\mathbb{R} \mu(X - q')d\mathbf{p}_\psi^{E^Q}(q') \\
&= \langle\psi|E_\mu^Q(X)\psi\rangle
\end{aligned}$$

Siis E_μ^Q toteuttaa ehdot (12) ja (13) ja on siten paikkasuure. Käytetään merkintää δ_t pisteeseen $t \in \mathbb{R}$ keskittyneelle pistemitalle, jolloin $E_{\delta_0}^Q$ on kanoninen paikkasuure, siis kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$E^Q(X) = \int \delta_0(X - q)dE^Q(q).$$

Yhtälön (16) mukainen paikkasuure voidaan siten tulkita kanonisen paikkasuureen epätarkaksi tai sumeaksi versioksi. Voidaan osoittaa, että jokainen paikkasuure E on muotoa $E = E_\mu$ jollekin todennäköisyysmitalle $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ [12, Proposition 1].

Kanonisella paikkasuureella on translaatiokovarianssin ja nopeussysäysinvarianssin lisäksi myös skaalaukseen liityvä symmetriaominaisuus, dilaatiokovarianssi. Jatkossa $\mathbb{R}_+$:lla tarkoitetaan positiivisten reaalilukujen muodostamaa multiplikatiivista ryhmää.

Määritelmä 2.3. *Suure $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on kovariantti dilaatioiden suhteen, jos on olemassa $\mathbb{R}_+$:n unitaariesitys A siten, että kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on*

$$A(a)E(X)A(a)^* = E(aX). \tag{17}$$

Dilaatiokovarianssi tarkoittaa sitä, että suure on riippumaton skaalauksesta. Seuraava lause osoittaa, että paikkasuureen dilaatiokovarianssi on yhtäpitävää sen kanssa, että suure on tarkka. Koska jokaisen realistisen paikkamittauksen tarkkuus on rajallinen, niin tällainen mittaus ei pysty määräämään dilaatiokovarianttia paikkasuuretta. Lause ja sen todistuksen pääpiirteet ovat peräisin artikkelista [12, Proposition 2]. Todistuksen alkuosassa käytetty menetelmä on peräisin artikkelista [13, Lemma 3].

Lause 2.3. *Olkoon $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ paikkasuure. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

- (i) *E on dilaatiokovariantti*
- (ii) $\|E(U)\| = 1$ *kaikilla epätyhjillä avoimilla joukoilla $U \subset \mathbb{R}$*
- (iii) $E = E_{\delta_t}$ *jollekin $t \in \mathbb{R}$*
- (iv) *E on tarkka.*

Todistus. Oletetaan, että E on dilaatiokovariantti paikkasuure. Olkoon $r > 0$. Tarkastellaan väliä $(-r, r) = J_{0;r}$. Nyt $(nJ_{0;r})_{n\in\mathbb{N}}$ on nouseva jono joukkoja ja

$\bigcup_{n=1}^{\infty} nJ_{0;r} = \mathbb{R}$, joten $E(nJ_{0;r}) \to E(\mathbb{R}) = I$ vahvasti. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\varphi_0 \in \mathcal{H}_1$, jolloin on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $\|E(nJ_{0;r})\varphi_0 - \varphi_0\| < \epsilon$ kun $n \geq n_0$. Koska triviaalisti $\|E(nJ_{0,r})\varphi_0\| \leq \|\varphi_0\| = 1$ ja kolmiepäyhtälön nojalla

$$\big|\|E(nJ_{0;r})\varphi_0\| - \|\varphi_0\|\big| \leq \|E(nJ_{0;r})\varphi_0 - \varphi_0\| < \epsilon,$$

niin $\|E(nJ_{0;r})\varphi_0\| > 1 - \epsilon$, kun $n \geq n_0$. Siis

$$\|E(nJ_{0;r})\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{H}_1} \|E(nJ_{0;r})\varphi\| \geq \|E(nJ_{0;r})\varphi_0\| \geq 1 - \epsilon,$$

kun $n \geq n_0$. Tästä seuraa, että $\lim_{n\to\infty} \|E(nJ_{0;r})\| = 1$. Toisaalta oletuksen nojalla $E(nJ_{0;r}) = A(n)E(J_{0;r})A(n)^*$, joten $\|E(J_{0;r})\| = \|E(nJ_{0;r})\|$. Siis $\|E((-r, r))\| = 1$ kaikilla $r > 0$. Paikkasuureen translaatiokovarianssista seuraa, että

$$\|E((x - r, x + r))\| = \|E((-r, r))\| = 1$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$, ja koska jokainen epätyhjä avoin joukko $U \subset \mathbb{R}$ sisältään jonkin tällaisen välin, niin $(i) \Rightarrow (ii)$.

Oletetaan nyt, että $\|E(U)\| = 1$ kaikilla epätyhjillä avoimilla joukoilla $U \subset \mathbb{R}$. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $t \in \mathbb{R}$ siten, että $\mu((-\epsilon, \epsilon) - t) > 0$, missä μ on E:hen yhtälön (16) mukaisesti liittyvä todennäköisyysmitta. Osoitetaan, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joilla $|x - t| \geq 4\epsilon$, on $\mu((-\epsilon, \epsilon) - x) = 0$. Tehdään vastaoletus. Oletetaan että on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbb{R}$, että $|t - x_0| \geq 4\epsilon$ ja $\mu((-\epsilon, \epsilon) - x_0) > 0$. Merkitään $m_0 = \min\{\mu((-\epsilon, \epsilon) - t), \mu((-\epsilon, \epsilon) - x_0)\}$. Nyt kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on $\mu((-\epsilon, \epsilon) - x) \leq 1 - m_0$ sillä aina on joko $((-\epsilon, \epsilon) - t) \cap ((-\epsilon, \epsilon) - x) = \emptyset$ tai $((-\epsilon, \epsilon) - x_0) \cap ((-\epsilon, \epsilon) - x) = \emptyset$. Valitaan $\varphi \in \mathcal{H}_1$ siten, että

$$\langle \varphi | E((-\epsilon, \epsilon))\varphi \rangle > \|E((-\epsilon, \epsilon))\| - m_0,$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\|E((-\epsilon, \epsilon))\| &< \textstyle\int \mu((-\epsilon, \epsilon) - x) d\mathbf{p}_\varphi^Q(x) + m_0 \\
&\leq \textstyle\int (1 - m_0) d\mathbf{p}_\varphi^Q(x) + m_0 \\
&= 1 - m_0 + m_0 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten $\mu((-\epsilon,\epsilon)-x)=0$ aina, kun $|x-t|\geq 4\epsilon$. Tästä seuraa, että $\mu((-3\epsilon,3\epsilon)-t)=1$ kaikilla $\epsilon>0$. Pitää siis olla $\mu=\delta_t$, eli $(ii)\Rightarrow(iii)$.

Oletetaan seuraavaksi, että $E=E_{\delta_t}$, jollakin $t\in\mathbb{R}$. Tällöin kaikilla $X\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$E_{\delta_t}(X)=\int\delta_t(X-x)dE^Q(x)=\int\chi_{X-t}(x)dE^Q(x)=E^Q(X-t).$$

Nyt $\{A_t|t\in\mathbb{R}\}$ on perhe $\mathbb{R}_+$:n unitaariesityksiä, kun määritellään

$$[A_t(a)f](x)=\frac{1}{\sqrt{a}}f(a^{-1}(x-t)+t),$$

kaikilla $f\in L^2(\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}_+$ ja $x\in\mathbb{R}$, jolloin

$$[A_t(a)^*f](x)=\sqrt{a}f(a(x-t)-t).$$

Tarkastellaan esitystä A_{-t}. Suoralla laskulla nähdään, että kaikilla $f\in L^2(\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}_+$, $x\in\mathbb{R}$ ja $X\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned}[A_{-t}(a)E_{\delta_t}(X)A_{-t}(a)^*f](x)&=\tfrac{1}{\sqrt{a}}[E^Q(X-t)A_{-t}(a)^*f](a^{-1}(x+t)-t)\\&=\tfrac{1}{\sqrt{a}}\chi_{X-t}(a^{-1}(x+t)-t)[A_0(a)^*f](a^{-1}(x+t)-t)\\&=\tfrac{1}{\sqrt{a}}\chi_{X-t}(a^{-1}(x+t)-t)\sqrt{a}f(a(a^{-1}(x+t)-t+t)-t)\\&=\chi_{aX-t}(x)f(x)\\&=[E^Q(aX-t)f](x)\\&=[E_{\delta_t}(aX)f](x).\end{aligned}$$

Siis $A_{-t}(a)E_{\delta_t}(X)A_{-t}(a)^*=E_{\delta_t}(aX)$, eli E_{δ_t} on dilaatiokovariantti, joten $(iii)\Rightarrow(i)$. Toisaalta kaikilla $X,Y\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned}E_{\delta_t}(X\cap Y)&=E^Q(X\cap Y-t)\\&=E^Q\big((X-t)\cap(Y-t)\big)\\&=E^Q(X-t)E^Q(Y-t)\\&=E_{\delta_t}(X)E_{\delta_t}(Y),\end{aligned}$$

joten E_{δ_t} on tarkka paikkasuure. Siis $(iii)\Rightarrow(iv)$.

Oletetaan lopuksi, että E on tarkka paikkasuure. Olkoon $U \subset \mathbb{R}$ avoin, jolloin voidaan valita vektoritila $\varphi \in \mathcal{H}$ siten, että $\mathbf{p}_\varphi^E(U) = 1$. Siis

$$\|E(U)\| = \sup |\langle\varphi|E(U)\varphi\rangle| = 1,$$

joten $(iv) \Rightarrow (ii)$.

$\square$

Tarkastellaan nyt kanonista paikkasuuretta E^Q. $\mathbb{R}_+$:lla on unitaariesitys A_0, kun määritellään

$$[A_0(a)f](x) = \frac{1}{\sqrt{a}} f(a^{-1}x), \tag{18}$$

kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R})$, jolloin siis

$$[A_0(a)^* f](x) = \sqrt{a} f(ax). \tag{19}$$

Suoralla laskulla nähdään, että kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$ ja $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned}
[A_0(a)E^Q(X)A_0(a)^* f](x) &= \tfrac{1}{\sqrt{a}}[E^Q(X)A_0(a)^* f](a^{-1}x) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{a}}\chi_X(a^{-1}x)[A_0(a)^* f](a^{-1}x) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{a}}\chi_X(a^{-1}x)\sqrt{a} f(x) \\
&= \chi_{aX}(x) f(x) \\
&= [E^Q(aX)f](x).
\end{aligned}$$

Siis $A_0(a)E^Q(X)A_0(a)^* = E^Q(aX)$, eli tarkka paikkasuure on dilaatiokovariantti.

Tarkastellaan seuraavaksi, mitä tarkalle liikemääräsuureelle tapahtuu vastaavassa muunnoksessa. Kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_0$ ja $x \in \mathbb{R}$ on

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}A_0(a)f](x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixy} \tfrac{1}{\sqrt{a}} f(a^{-1}y)dy \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iaxy'} \sqrt{a} f(y')dy' \\
&= \sqrt{a}[\mathcal{F}f](ax) \\
&= [A_0(a^{-1})\mathcal{F}f](x),
\end{aligned}$$

joten $\mathcal{F}A_0(a) = A_0(a^{-1})\mathcal{F}$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} A_0(a)E^P(X)A_0(a)^* &= A_0(a)\mathcal{F}^{-1}E^Q(X)\mathcal{F}A_0^* \\ &= [\mathcal{F}A_0(a^{-1})]^{-1}E^Q(X)\mathcal{F}A_0(a^{-1}) \\ &= [A_0(a)\mathcal{F}]^{-1}E^Q(X)A_0(a)\mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}^{-1}A_0(a^{-1})E^Q(X)A_0(a^{-1})^*\mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}^{-1}E^Q(a^{-1}X)\mathcal{F} \\ &= E^P(a^{-1}X). \end{aligned}$$

2.2 Kovariantit faasiavaruussuureet

Tarkastellaan jälleen faasiavaruuden translaatioryhmän redusoitumatonta projektiivista esitystä $W : (q,p) \mapsto W(q,p) = e^{i\frac{qp}{2}}U(q)V(p)$. Suuretta $G : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sanotaan *kovariantiksi faasiavaruussuureeksi*, jos kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ ja $Z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ on

$$W(q,p)G(Z)W(q,p)^* = G(Z + (q,p)) \tag{20}$$

Kaikki kovariantit faasiavaruussuureet ovat muotoa

$$G^T(Z) = \frac{1}{2\pi}\int_Z W(q,p)TW(q,p)^* dqdp \tag{21}$$

jollekin $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ [14, 24]. Operaattoria T kutsutaan generoivaksi operaattoriksi. Kovariantin faasiavaruussuureen marginaaleina saadaan paikka- ja liikemääräsuureet, ts. kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned} G^T(X \times \mathbb{R}) &= \textstyle\int \mu(X - q)dE^Q(q) = E^Q_\mu(X), \\ G^T(\mathbb{R} \times Y) &= \textstyle\int \nu(Y - p)dE^P(p) = E^P_\nu(Y), \end{aligned}$$

missä $\mu = \mathbf{p}^Q_{\Pi T \Pi^*} = \mu_T$ ja $\nu = \mathbf{p}^P_{\Pi T \Pi^*} = \nu_T$.

2.3 Fysikaalisen suureen sisäinen epätarkkuus

Osoittautuu, että epäkommutatiivisten suureiden yhteismittaukset ovat mahdollisia vain, jos suureet ovat epätarkkoja. Seuraavaksi esitellään kaksi eri määritelmää suureen epätarkkuuden karakterisoinnille. Nämä ovat *sisäinen kohina* ja *resoluutioleveys*.

Olkoon $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ suure. Määritellään E:n sisäistä kohinaa kuvaava operaattori $N_i(E)$ kaavalla

$$N_i(E) = E[2] - E[1]^2. \tag{22}$$

Tämä on positiivinen operaattori. Jos E:n ensimmäinen momentti $E[1]$ on itseadjungoitu, niin $N_i(E) = 0$ tarkalleen silloin, kun E on tarkka suure [15, Theorem 5]. Sisäinen kohina $\mathcal{N}_i(E;\psi)$ vektoritilassa $\psi \in \mathcal{D}(E[2]) \cap \mathcal{D}(E[1]^2)$ määritellään operaattorin $N_i(E)$ keskiarvona ko. tilassa:

$$\mathcal{N}_i(E;\psi) = \langle \psi | N_i(E)\psi \rangle. \tag{23}$$

Sisäisen kohinan mitta $\mathcal{N}_i(E)$ määritellään supremumina yli vektoritilojen $\psi \in \mathcal{D}(E[2]) \cap \mathcal{D}(E[1]^2)$:

$$\mathcal{N}_i(E) = \sup\{\mathcal{N}_i(E;\psi) | \psi \in \mathcal{D}(E[2]) \cap \mathcal{D}(E[1]^2)\}. \tag{24}$$

Oletetaan seuraavaksi, että E:n tuki on koko $\mathbb{R}$, ts. jokaista väliä $J \subset \mathbb{R}$ kohti on olemassa vektoritila $\psi \in \mathcal{H}_1$ siten, että $\mathbf{p}_\psi^E(J) \neq 0$. Olkoon $\epsilon \in [\frac{1}{2}, 1)$. E:n resoluutioleveys ($(1-\epsilon)$:in luotettavuusrajalla) $\gamma_\epsilon(E)$ määritellään kaavalla [16]

$$\gamma_\epsilon(E_1) = \inf\{w > 0 | \forall\ x \in \mathbb{R}\ \exists\ \varphi \in \mathcal{H}_1 \text{ s.e } \mathbf{p}_\varphi^{E_1}(J_{x;w}) \geq 1 - \epsilon\}. \tag{25}$$

Määritelmästä seuraa välittömästi, että tarkalle paikalle ja liikemäärälle resoluutioleveydet ovat $\gamma_\epsilon(E^Q) = 0$ ja $\gamma_\epsilon(E^P) = 0$. Häviävä resoluutioleveys ei kuitenkaan tarkoita, että suure olisi tarkka. Voidaan osoittaa [16, Proposition 16], että sumealle paikkasuureelle $\gamma_\epsilon(E_\mu^Q) = 0$ jos ja vain jos on olemassa $x_0 \in \mathbb{R}$ ja todennäköisyysmitta $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$, jolle $x_0 \in \operatorname{supp}(\lambda)$ siten, että $\mu = (1-\epsilon)\delta_{x_0} + \epsilon\lambda$.

3 Epätarkkuusrelaatio preparoinnille ja minimiepätarkkuustilat

3.1 Epätarkkuusrelaatio Hilbertin avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$

Olkoon $T \in L(L^2(\mathbb{R}))$ tila, jolloin se voidaan kirjoittaa muodossa $T = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \, |\varphi_n\rangle \, \langle\varphi_n|$, missä $\{\varphi_n\}$ on ortonormaali jono, $t_n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$. Olkoon A ja B itseadjungoituja operaatoreita ja E^A ja E^B niitä vastaavat spektraalimitat. Merkitään λ:lla ja μ:llä näiden odotusarvoja tilassa T, ts.

$$\lambda = \mathrm{Exp}(A,T) = \int x d\mathbf{p}_T^A(x),$$
$$\mu = \mathrm{Exp}(B,T) = \int x d\mathbf{p}_T^B(x).$$

Koska

$$\mathbf{p}_T^A(X) = \mathrm{tr}[TE^A(X)] = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \mathrm{tr}[|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|E^A(X)] = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \mathbf{p}_{\varphi_n}^A(X)$$

kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, niin $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \mathrm{Exp}(A,\varphi_n)$ ja $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \mathrm{Exp}(B,\varphi_n)$. A:n varianssille saadaan lauseke

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(A,T) &= \int (x-\lambda)^2 d\mathbf{p}_T^A(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t_n \int (x-\lambda)^2 d\mathbf{p}_{\varphi_n}^A(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t_n \langle\varphi_n|(A-\lambda)^2\varphi_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t_n \|(A-\lambda)\varphi_n\|^2,
\end{aligned}$$

joka on äärellinen jos ja vain jos $\varphi_n \in D(A)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja sarja suppenee. Vastaavasti B:n varianssille saadaan $\mathrm{Var}(B,T) = \sum_{m=1}^{\infty} t_m \|(B-\mu)\varphi_m\|^2$. Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön ja epäyhtälön $\left(\sum a_n b_n\right)^2 \leq \sum a_n^2 \sum b_n^2$ nojalla saadaan.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(A,T)\mathrm{Var}(B,T) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \|(A-\lambda)\varphi_n\|^2\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} t_m \|(B-\mu)\varphi_m\|^2\right) \\
&\geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \|(A-\lambda)\varphi_n\| \|(B-\mu)\varphi_n\|\right)^2 \\
&\geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n |\, \langle(A-\lambda)\varphi_n|(B-\mu)\varphi_n\rangle \,|\right)^2,
\end{aligned}$$

Merkitään

$$\begin{aligned} c_n &= \langle (A-\lambda)\varphi_n | (B-\mu)\varphi_n \rangle \\ &= \langle A\varphi_n | B\varphi_n \rangle - \mu \langle A\varphi_n | \varphi_n \rangle - \lambda \langle \varphi_n | B\varphi_n \rangle + \lambda\mu \|\varphi_n\|^2. \end{aligned}$$

Lausekkeen kolme viimeistä termiä ovat reaalisia, koska A ja B ovat itseadjungoituja, joten saadaan

$$|c_n| \geq |\mathrm{Im}(c_n)| = \frac{1}{2}|c_n - \bar{c}_n| = \frac{1}{2}| \langle A\varphi_n | B\varphi_n \rangle - \langle B\varphi_n | A\varphi_n \rangle |$$

Siis

$$\mathrm{Var}(A,T)\mathrm{Var}(B,T) \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \, \frac{1}{2} | \langle A\varphi_n | B\varphi_n \rangle - \langle B\varphi_n | A\varphi_n \rangle | \right)^2 \tag{26}$$

Olkoon nyt $A = Q$ ja $B = P$, jolloin paikkaesityksessä $(Q\varphi)(x) = x\varphi(x)$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ ja $(P\varphi)(x) = -i\varphi'(x)$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(P)$. Operaattorien välillä pätee relaatio $(QP - PQ)\varphi = i\varphi$ edellyttäen, että $\varphi \in \mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{D}(P)$, $P\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ ja $Q\varphi \in \mathcal{D}(P)$. Nyt

$$| \langle Q\varphi_n | P\varphi_n \rangle - \langle P\varphi_n | Q\varphi_n \rangle | = | \langle \varphi_n | (QP - PQ)\varphi_n \rangle | = 1.$$

Koska $\sum t_n = 1$, niin saadaan

$$\mathrm{Var}(Q,T)\mathrm{Var}(P,T) \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Epäyhtälö pätee kaikilla tiloilla $T = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$, sillä jos toinen variansseista on ääretön, niin epäyhtälö on triviaalisti voimassa, ja jos molemmat ovat äärellisiä, niin $\varphi_n \in \mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{D}(P)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Näin on saatu epätarkkuusrelaatio, joka antaa alarajan paikka- ja liikemääräjakaumien variansseille missä tahansa tilassa. Toisin sanoen systeemiä ei voida preparoida tilaan, jossa sekä paikan että liikemäärän hajonnat olisivat samanaikaisesti mielivaltaisen pieniä.

3.1.1 Minimiepätarkkuustilat

Oletetaan seuraavaksi, että T on minimiepätarkkuustila, ts. $\mathrm{Var}(Q,T)\mathrm{Var}(P,T) = \frac{1}{4}$. Silloin kaikissa aikaisemmin esiintyneissä epäyhtälöissä on yhtäsuuruus voimassa.

Erityisesti

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \|(Q-\lambda)\varphi_n\| \|(P-\mu)\varphi_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} t_n | \langle (Q-\lambda)\varphi_n | (P-\mu)\varphi_n \rangle |$$

Koska $\|(Q-\lambda)\varphi_n\| \|(P-\mu)\varphi_n\| \geq | \langle (Q-\lambda)\varphi_n | (P-\mu)\varphi_n \rangle | \geq 0$, on välttämättä

$$\|(Q-\lambda)\varphi_n\| \|(P-\mu)\varphi_n\| = | \langle (Q-\lambda)\varphi_n | (P-\mu)\varphi_n \rangle |$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt siis Cauchyn-Schwarzin epäyhtälössä on yhtäsuuruus voimassa, mistä seuraa, että jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa $c_n \in \mathbb{C}$ siten, että $c_n(Q-\lambda)\varphi_n = (P-\mu)\varphi_n$. Tästä saadaan paikkaesityksessä differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned} & c_n(x-\lambda)\varphi_n(x) = -i\varphi_n'(x) - \mu\varphi_n(x), \ x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \ & \frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} = i\left(c_n x - c_n\lambda + \mu\right), \end{aligned}$$

jonka ratkaisuna saadaan $\varphi_n(x) = Re^{i\theta} e^{\frac{1}{2}ic_n x^2} e^{i(\mu - c_n\lambda)x}$, missä $R, \theta \in \mathbb{R}$.

Kiinnitetään nyt $n \in \mathbb{N}$ ja merkitään

$$\begin{cases} \varphi_n = \varphi \\ c_n = a + ib. \end{cases}$$

Koska $ic_n = ia - b$, niin differentiaaliyhtälön ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$\varphi(x) = Re^{-\frac{1}{2}b(x-\lambda)^2} e^{\frac{1}{2}b\lambda^2} e^{i\phi_{a,\theta}(x)},$$

missä

$$\phi_{a,\theta}(x) = \theta + \left(\frac{1}{2}ax^2 + (\mu - a\lambda)\, x\right)$$

Normituksesta seuraa, että

$$1 = \|\varphi\|^2 = \int |\varphi(x)|^2 dx = R^2 e^{b\lambda^2} \int e^{-b(x-\lambda)^2} dx = R^2 e^{b\lambda^2} \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

joten $Re^{\frac{1}{2}b\lambda^2} = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$. Siis

$$\varphi(x) = \varphi_{a,b,\theta}(x) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}b(x-\lambda)^2} e^{i\phi_{a,\theta}(x)}$$

Merkitään $\kappa = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$. Lisäksi

$$\begin{aligned}\|(Q-\lambda)\varphi_{a,b,\theta}\|^2 &= \int (x-\lambda)^2|\varphi(x)|^2dx \\ &= \kappa^2 \int (x-\lambda)^2 e^{-b(x-\lambda)^2}dx \\ &= \tfrac{1}{2b}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\|(P-\mu)\varphi_{a,b,\theta}\|^2 &= \int |-i\varphi'(x)-\mu\varphi(x)|^2 \\ &= \int (x-\lambda)^2|a+ib|^2|\varphi(x)|^2dx \\ &= |a+ib|^2 \int (x-\lambda)^2|\varphi(x)|^2dx \\ &= |a+ib|^2\tfrac{1}{2b} \\ &= \tfrac{a^2+b^2}{2b}.\end{aligned}$$

Nyt siis jokainen φ_n on muotoa $\varphi_{a,b,\theta}$ joillekin $a, b, \theta \in \mathbb{R}$. Mutta

$$\begin{aligned}\langle\varphi_{a,b,\theta}|\varphi_{a',b',\theta'}\rangle &\sim \int e^{-\frac{1}{2}(b'+b)(x-\lambda)^2}e^{i[(\theta'-\theta)+\frac{1}{2}(a'-a)x^2-\lambda(a'-a)x]}dx \\ &= e^C e^{-\frac{1}{4}(b'+b-i(a'-a))^2} \\ &\neq 0,\end{aligned}$$

ja koska φ_n:t ovat ortogonaalisia, niin niitä voi olla vain yksi. Siis $T = |\varphi_{a,b,\theta}\rangle\langle\varphi_{a,b,\theta}|$ joillekin a, b, θ. Nyt

$$\frac{1}{4} = \mathrm{Var}(Q,T)\mathrm{Var}(P,T) = \|(Q-\lambda)\varphi_{a,b,\theta}\|^2\|(Q-\mu)\varphi_{a,b,\theta}\|^2 = \frac{1}{4}\frac{a^2+b^2}{b^2},$$

mistä seuraa, että $a^2 + b^2 = b^2$, eli $a = 0$. Miniepätarkkuustilat ovat siis muotoa $T = |\varphi_{b,\theta}\rangle\langle\varphi_{b,\theta}|$, missä

$$\varphi_{b,\theta}(x) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}b(x-\lambda)^2}e^{i(\theta+\mu x)},\ b,\theta \in \mathbb{R} \tag{27}$$

Lasketaan vielä Q:n ja P:n varianssit minimiepätarkkuustilassa. Kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\mathbf{p}^Q_{\varphi_{b,\theta}}(X) = \langle\varphi_{b,\theta}|E^Q(X)\varphi_{b,\theta}\rangle = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\int \chi_X(x)e^{-b(x-\lambda)^2}dx,$$

ja koska

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\varphi_{b,\theta})(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iyx}\varphi_{b,\theta}(y)dy \\ &= \left(\tfrac{b}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-(\frac{1}{2}by^2+(ix-i\mu-b\lambda)y+(\frac{1}{2}b\lambda^2-i\theta))}dy \\ &= \left(\tfrac{b}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\tfrac{2\pi}{b}} e^{\frac{1}{2b}((ix-i\mu-b\lambda)^2-2b(\frac{1}{2}b\lambda^2-i\theta))} \\ &= \left(\tfrac{1}{b\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2b}(-(x-\mu)^2-2i(x-\mu)b+b^2\lambda^2-b^2\lambda^2+2ib\theta)} \\ &= \left(\tfrac{1}{b\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{b}} e^{i(\theta-(x-\mu))},\end{aligned}$$

niin kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\mathbf{p}^P_{\varphi_{b,\theta}}(X) = \langle \mathcal{F}\varphi_{b,\theta} | E^Q(X)\mathcal{F}\varphi_{b,\theta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{b\pi}} \int_X e^{-\frac{(x-\mu)^2}{b}} dx.$$

Koska $\lambda = \mathrm{Exp}(Q, \varphi_{b,\theta}) = \int x d\mathbf{p}^Q_{\varphi_{b,\theta}}(x)$ ja $\mu = \mathrm{Exp}(P, \varphi_{b,\theta}) = \int x d\mathbf{p}^P_{\varphi_{b,\theta}}(x)$, niin

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Q, \varphi_{b,\theta}) &= \int (x-\lambda)^2 d\mathbf{p}^Q_{\varphi_{b,\theta}}(x) \\ &= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int (x-\lambda)^2 e^{-b(x-\lambda)^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int x^2 e^{-bx^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2b^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2b}.\end{aligned} \tag{28}$$

Vastaavasti P:n varianssiksi saadaan

$$\mathrm{Var}(P, \varphi_{b,\theta}) = \frac{1}{\sqrt{b\pi}} \int (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{b}} dx = \frac{b}{2}. \tag{29}$$

Nyt siis $\mathrm{Var}(Q, \varphi_{b,\theta})\mathrm{Var}(P, \varphi_{b,\theta}) = \frac{1}{4}$, eli $\varphi_{b,\theta}$ todella on minimiepätarkkuustila.

3.2 Epätarkkuusrelaatio abstraktissa Hilbertin avaruudessa

Tarkastellaan vielä epätarkkuusrelaatiota ja minimiepätarkkuustiloja abstraktin Hilbertin avaruuden tapauksessa.

Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja $\mathcal{K} = \{|n\rangle | n \in \mathbb{N}\}$ sen ortonormaali kanta. Määritellään lasku- ja nosto-operaattorit A ja A^* kaavoilla

$$\begin{aligned} A|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, &&\text{kun } n \geq 1 \\ A|0\rangle &= 0, \\ A^*|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, &&\text{kun } n \geq 0. \end{aligned}$$

Nyt $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) = \left\{\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle \in \mathcal{H} \middle| \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|n < \infty\right\}$ ja kaikilla $\psi \in \mathcal{D}(A)$ on

$$A\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A|n\rangle$$

ja

$$A^*\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\sqrt{n+1}|n+1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^*|n\rangle.$$

Operaattorien A ja A^* kommutaattori on identiteettioperaattori, $AA^* - A^*A = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = I$, jonka määrittelyalue $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A)$ on tiheä $\mathcal{H}$:ssa. Lisäksi nähdään, että mielivaltainen tila $|n\rangle$ saadaan vakuumista $|0\rangle$ nosto-operaattorilla A^*, $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(A^*)^n|0\rangle$.

Määritellään operaattorit $\tilde{Q}$ ja $\tilde{P}$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{(A^* + A)}, \\ \tilde{P} &= \tfrac{i}{\sqrt{2}}\overline{(A^* - A)}, \end{aligned}$$

missä esim. $\overline{(A^* + A)}$ tarkoittaa operaattorin $A^* + A$ sulkeumaa. $\tilde{Q}$ ja $\tilde{P}$ ovat itseadjungoituja ja niiden kommutaattoriksi saadaan $\tilde{Q}\tilde{P} - \tilde{P}\tilde{Q} = iI$. Operaattorit $\tilde{Q}$ ja $\tilde{P}$ muodostavat Schrödingerin parin, eli ne ovat unitaarisesti ekvivalentit yksiulotteisen vapaan hiukkasen paikka- ja liikemääräoperaattorien Q ja P kanssa [17]. Operaattoreita $\tilde{Q}$ ja $\tilde{P}$ kutsutaan *kvadratuureiksi*. Operoimalla kantavektoreihin saadaan

$$\begin{aligned} \tilde{Q}|n\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{n+1}|n+1\rangle + \sqrt{n}|n-1\rangle), \ \text{kun } n \geq 1, \\ \tilde{Q}|0\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \\ \tilde{P}|n\rangle &= \tfrac{i}{\sqrt{2}}(\sqrt{n+1}|n+1\rangle - \sqrt{n}|n-1\rangle), \ \text{kun } n \geq 1, \\ \tilde{P}|0\rangle &= \tfrac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle. \end{aligned}$$

Tarkastellaan yhtälöä (26). Nyt

$$\begin{aligned}\big\langle \tilde{Q}|n\rangle \big| \tilde{P}|n\rangle\big\rangle &= \big\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle)\big| \tfrac{i}{2}(\sqrt{n+1}|n+1\rangle - \sqrt{n}|n-1\rangle)\big\rangle \\ &= \tfrac{i}{2}(n+1-n) = \tfrac{i}{2},\end{aligned}$$

kun $n \geq 1$ ja $\big\langle \tilde{Q}|0\rangle \big| \tilde{P}|0\rangle\big\rangle = \frac{i}{2}$, joten tilassa $T = \sum_{n=0}^{\infty} t_n |n\rangle\langle n|$ on

$$\mathrm{Var}(\tilde{Q}, T)\mathrm{Var}(\tilde{P}, T) \geq \left(\sum_{n=0}^{\infty} t_n \frac{1}{2} \Big| \frac{i}{2} + \frac{i}{2} \Big| \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

3.2.1 Koherentit ja puristetut tilat

Tässä osiossa on käytetty lähteinä kirjoja [18] ja [19].

Olkoot $q, p \in \mathbb{R}$ faasiavaruusparametrejä ja määritellään $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$. Faasiavaruustranslaatiot voidaan nyt esittää muodossa

$$D(z) = e^{zA^* - \bar{z}A} = e^{-iq\tilde{P} + ip\tilde{Q}} = W(q, p).$$

Operaattori $D(z)$ on unitaarinen ja $D^*(z) = D^{-1}(z) = D(-z)$. Koska $[zA^* - \bar{z}A, A] = -zI$, $[zA^* - \bar{z}A, A^*] = -\bar{z}I$ ja $[zA^* - \bar{z}A, [zA^* - \bar{z}A, A]] = [zA^* - \bar{z}A, [zA^* - \bar{z}A, A^*]] = 0$, niin käyttämällä kaavaa

$$e^{xA}Be^{-xA} = B + x[A, B] + \frac{1}{2!}x^2[A, [A, B]] + \ldots \tag{30}$$

saadaan $D(z)$:lle ominaisuudet

$$D(z)AD^{-1}(z) = A - zI, \tag{31}$$

$$D(z)A^*D^{-1}(z) = A^* - \bar{z}I. \tag{32}$$

Koska $[A^*, [A^*, A]] = [A, [A^*, A]] = O$, niin soveltamalla Baker-Campbell-Hausdorffin kaavaa

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^A e^B, \text{ kun } [A, [A, B]] = [B, [A, B]] = O,$$

$D(z)$ saadaan muotoon

$$D(z) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{zA^*} e^{-\bar{z}A}. \tag{33}$$

Olkoon ψ A:n degeneroitumattomaan ominaisarvoon z liiittyvä normitettu ominaisvektori, ts. $A\psi = z\psi$, $\|\psi\| = 1$. Yhtälön (31) avulla tämä voidaan kirjoittaa muodossa $D(z)AD^{-1}(z)\psi = 0$, joten $D^{-1}(z)\psi$ on verrannollinen vakuumitilaan $|0\rangle$. Näin on saatu *koherenttien tilojen* joukko $\big\{|z\rangle \big| x \in \mathbb{C}\big\}$. Näille tiloille pätee

$$\begin{aligned} |z\rangle &= D(z)|0\rangle, \\ A|z\rangle &= z|z\rangle. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $|z\rangle \in \mathcal{D}(A^k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Käyttämällä yhtälöä (33), saadaan koherentit tilat ilmaistua sarjana

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n (A^*)^n |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} z^n |n\rangle.$$

Lasketaan seuraavaksi $\tilde{Q}$:n ja $\tilde{P}$:n varianssit koherentissa tilassa. Käyttämällä hyväksi kommutaatiorelaatiota $AA^* - A^*A = I$ saadaan

$$\begin{aligned} \langle z|\tilde{Q}^2|z\rangle &= \langle z|\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(A^* + A)\big)^2|z\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\big(\langle z|A^2|z\rangle + \langle z|(A^*)^2|z\rangle + 2\langle z|A^*A|z\rangle + \langle z|z\rangle\big) \\ &= \tfrac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2 + 2|z|^2 + 1) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(1 + (z + \bar{z})^2\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(1 + (2\,\mathrm{Re}(z))^2\big) \\ &= \tfrac{1}{2} + q^2. \end{aligned}$$

Koska lisäksi

$$\langle z|\tilde{Q}|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle z|A|z\rangle + \langle z|A^*|z\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\,\mathrm{Re}(z) = q,$$

niin

$$\mathrm{Var}(\tilde{Q}, |z\rangle) = \langle z|\tilde{Q}^2|z\rangle - \langle z|\tilde{Q}|z\rangle^2 = \frac{1}{2}.$$

Vastaavasti $\tilde{P}$:lle saadaan

$$\begin{aligned}\langle z|\tilde{P}^2|z\rangle &= \langle z|\big(\tfrac{i}{\sqrt{2}}(A^* - A)\big)^2|z\rangle \\ &= -\tfrac{1}{2}\big(\langle z|A^2|z\rangle + \langle z|(A^*)^2|z\rangle - 2\langle z|A^*A|z\rangle - \langle z|z\rangle\big) \\ &= -\tfrac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2 - 2|z|^2 - 1) \\ &= -\tfrac{1}{2}\big(-1 + (z - \bar{z})^2\big) \\ &= -\tfrac{1}{2}\big(-1 + (2i\ \mathrm{Im}(z))^2\big) \\ &= \tfrac{1}{2} + p^2,\end{aligned}$$

ja

$$\langle z|\tilde{P}|z\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\big(\langle z|A^*|z\rangle - \langle z|A|z\rangle\big) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{z} - z) = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot (-2i)\ \mathrm{Im}(z) = p,$$

joten

$$\mathrm{Var}(\tilde{P}, |z\rangle) = \langle z|\tilde{P}^2|z\rangle - \langle z|\tilde{P}|z\rangle^2 = \frac{1}{2}.$$

Nyt siis $\mathrm{Var}(\tilde{Q}, |z\rangle)\mathrm{Var}(\tilde{P}, |z\rangle) = \frac{1}{4}$, joten $|z\rangle$ on minimiepätarkkuustila. Katsomalla yhtälöitä (28) ja (29) nähdään, että koherentti tila antaan samat varianssit, kuin yhtälön (27) mukainen vektoritila avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$ parametrin arvolla $b = 1$.

Koherentit tilat ovat erikoistapauksia yleisemmistä ns. *puristetuista tiloista*, jotka saadaan generoitua puristusoperaattorilla

$$S(\epsilon) = e^{\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}A^2 - \epsilon(A^*)^2)},$$

missä $\epsilon = re^{2i\phi}$, $r \geq 0$, $\phi \in [0, \pi)$. $S(\epsilon)$ on unitaarinen ja $S^*(\epsilon) = S^{-1}(\epsilon) = S(-\epsilon)$. Lasketaan seuraavaksi $S(\epsilon)$:lle yhtälöitä (31) ja (32) vastaavat ominaisuudet. Koska $[\frac{1}{2}\bar{\epsilon}A^2 - \frac{1}{2}\epsilon(A^*)^2, A] = \epsilon A^*$ ja $[\frac{1}{2}\bar{\epsilon}A^2 - \frac{1}{2}\epsilon(A^*)^2, \epsilon A^*] = |\epsilon|^2 A$, niin kaavan (30) nojalla

$$\begin{aligned}S(\epsilon)AS^{-1}(\epsilon) &= A + \epsilon A^* + \frac{1}{2!}|\epsilon|^2 A + \frac{1}{3!}\epsilon|\epsilon|^2 A^* + \dots \\ &= A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\epsilon|^2 n}{(2n)!} + A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon|\epsilon|^2}{(2n+1)} \\ &= A\cosh r + A^*\frac{\epsilon}{|\epsilon|}\sinh r \\ &= A\cosh r + A^* e^{2i\phi}\sinh r. \qquad (34)\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan A^*:lle

$$S(\epsilon)A^*S^{-1}(\epsilon) = A^*\cosh r + Ae^{-2i\phi}\sinh r. \tag{35}$$

Operaattorin $S(\epsilon)$ ominaisuudet (34) ja (35) voidaan yhtäpitävästi ilmaista muodossa

$$S^*(\epsilon)AS(\epsilon) = A\cosh r - A^*e^{-2i\phi}\sinh r, \tag{36}$$

$$S^*(\epsilon)A^*S(\epsilon) = A^*\cosh r - Ae^{2i\phi}\sinh r. \tag{37}$$

Puristettu tila $|z,\epsilon\rangle$ saadaan siirtämällä puristettua vakuumia,

$$|z,\epsilon\rangle = D(z)S(\epsilon)|0\rangle,$$

missä luku $\epsilon \in \mathbb{C}$ on puristusparametri.

Tarkastellaan seuraavaksi $\tilde{Q}$:n ja $\tilde{P}$:n variansseja puristetussa tilassa. Niiden laskemiseksi lasketaan ensin joitakin odotusarvoja.

$$\begin{aligned}
\langle z,\epsilon|A|z,\epsilon\rangle &= \langle 0|S^*(\epsilon)D^*(z)AD(z)S(\epsilon)|0\rangle = \langle 0|S^*(\epsilon)\big(A+zI\big)S(\epsilon)|0\rangle = z \\
\langle z,\epsilon|A^*|z,\epsilon\rangle &= \langle 0|S^*(\epsilon)D^*(z)A^*D(z)S(\epsilon)|0\rangle = \langle 0|S^*(\epsilon)\big(A^*+\bar{z}I\big)S(\epsilon)|0\rangle = \bar{z} \\
\langle z,\epsilon|A^2|z,\epsilon\rangle &= \langle 0|S^*(\epsilon)D^*(z)AD(z)S(\epsilon)S^*(\epsilon)D^*(z)AD(z)S(\epsilon)|0\rangle \\
&= \langle 0|\big[S^*(\epsilon)(A+zI)S(\epsilon)\big]^2|0\rangle \\
&= z^2 - e^{-2i\phi}\sinh r\cosh r \\
\langle z,\epsilon|(A^*)^2|z,\epsilon\rangle &= \langle 0|\big[S^*(\epsilon)(A^*+\bar{z}I)S(\epsilon)\big]^2|0\rangle = \bar{z}^2 - e^{2i\phi}\sinh r\cosh r \\
\langle z,\epsilon|AA^*|z,\epsilon\rangle &= \langle 0|S^*(\epsilon)(A+zI)S(\epsilon)S^*(\epsilon)(A^*+\bar{z}I)S(\epsilon)|0\rangle = |z|^2 + \cosh^2 r \\
\langle z,\epsilon|A^*A|z,\epsilon\rangle &= \langle 0|S^*(\epsilon)(A^*+\bar{z}I)S(\epsilon)S^*(\epsilon)(A+zI)S(\epsilon)|0\rangle = |z|^2 + \sinh^2 r.
\end{aligned}$$

Näistä saadaan $\tilde{Q}$:lle ja $\tilde{P}$:lle

$$
\begin{aligned}
\langle z,\epsilon|\tilde{Q}|z,\epsilon\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle z,\epsilon|A^*|z,\epsilon\rangle + \langle z,\epsilon|A|z,\epsilon\rangle\big) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(z+\bar{z}) = q \\
\langle z,\epsilon|\tilde{Q}^2|z,\epsilon\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\langle z,\epsilon|(A^*)^2|z,\epsilon\rangle + \langle z,\epsilon|A^2|z,\epsilon\rangle + \langle z,\epsilon|AA^*|z,\epsilon\rangle + \langle z,\epsilon|A^*A|z,\epsilon\rangle\big) \\
&= \tfrac{1}{2}(z^2+\bar{z}^2+2|z|^2 - 2\sinh r\cosh r\cos(2\phi) + \sinh^2 r + \cosh^2 r) \\
&= q^2 + \tfrac{1}{2}(\sinh^2 r + \cosh^2 r - 2\sinh r\cosh r\cos(2\phi)) \\
&= q^2 + \tfrac{1}{2}(\cosh(2r) - \sinh(2r)\cos(2\phi)) \\
\langle z,\epsilon|\tilde{P}|z,\epsilon\rangle &= \tfrac{i}{\sqrt{2}}(\bar{z}-z) = p \\
\langle z,\epsilon|\tilde{P}^2|z,\epsilon\rangle &= -\tfrac{1}{2}\big(\langle z,\epsilon|(A^*)^2|z,\epsilon\rangle + \langle z,\epsilon|A^2|z,\epsilon\rangle - \langle z,\epsilon|AA^*|z,\epsilon\rangle - \langle z,\epsilon|A^*A|z,\epsilon\rangle\big) \\
&= -\tfrac{1}{2}(z^2+\bar{z}^2-2|z|^2 - 2\sinh r\cosh r\cos(2\phi) - \sinh^2 r - \cosh^2 r) \\
&= p^2 + \tfrac{1}{2}(\sinh^2 r + \cosh^2 r + 2\sinh r\cosh r\cos(2\phi)) \\
&= p^2 + \tfrac{1}{2}(\cosh(2r) + \sinh(2r)\cos(2\phi))
\end{aligned}
$$

Nyt saadaan $\tilde{Q}$:n ja $\tilde{P}$:n varianssit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tilde{Q},|z,\epsilon\rangle) &= \langle z,\epsilon|\tilde{Q}^2|z,\epsilon\rangle - \langle z,\epsilon|\tilde{Q}|z,\epsilon\rangle^2 = \tfrac{1}{2}(\cosh(2r) - \sinh(2r)\cos(2\phi)), \\
\mathrm{Var}(\tilde{P},|z,\epsilon\rangle) &= \langle z,\epsilon|\tilde{P}^2|z,\epsilon\rangle - \langle z,\epsilon|\tilde{P}|z\epsilon\rangle^2 = \tfrac{1}{2}(\cosh(2r) + \sinh(2r)\cos(2\phi)),
\end{aligned}
$$

joiden tuloksi saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tilde{Q},|z,\epsilon\rangle)\mathrm{Var}(\tilde{P},|z,\epsilon\rangle) &= \tfrac{1}{4}(\cosh^2(2r) - \sinh^2(2r)\cos^2(2\phi)) \\
&= \tfrac{1}{4}(1+\sinh^2(2r) - \sinh^2(2r)\cos^2(2\phi)) \\
&= \tfrac{1}{4}(1+\sinh^2(2r)(1-\cos^2(2\phi))) \\
&= \tfrac{1}{4}f(r,\phi).
\end{aligned}
$$

Selvästi $f(r,\phi) \geq 1$ kaikilla $r \geq 0$ ja $\phi \in [0,\pi)$, ja $f(r,\phi) = 1$ silloin, ja vain silloin kun $r = 0$ tai $\phi \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$. Jos $r = 0$, niin puristusparametri $\epsilon = 0$, joten kyseessä on siirretty vakuumi, eli koherentti tila. Jos $\phi \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, niin $\epsilon = \pm r$, eli puristusparametri on reaalinen. Voidaan siis todeta, että puristettu tila $|z,\epsilon\rangle$ on minimiepätarkkuustila tarkalleen silloin, kun se on muotoa $|z,r\rangle$, missä $r \in \mathbb{R}$.

Tapauksessa $\epsilon = r$ ($\phi = 0$) saadaan $\tilde{Q}$:n ja $\tilde{P}$:n varianseiksi

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tilde{Q},|z,r\rangle) &= \tfrac{1}{2}e^{-r}, \\
\mathrm{Var}(\tilde{P},|z,r\rangle) &= \tfrac{1}{2}e^{r},
\end{aligned}
$$

mikä vastaa tilannetta, jossa paikkajakauma on puristettu ja liikemäärä vastaavasti venytetty. Päinvastainen tilanne on tapauksessa $\epsilon = -r$ ($\phi = \frac{\pi}{2}$), jolloin

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\tilde{Q}, |z, -r\rangle) &= \tfrac{1}{2}e^{r},\\ \mathrm{Var}(\tilde{P}, |z, -r\rangle) &= \tfrac{1}{2}e^{-r}.\end{aligned}$$

Jälleen katsomalla yhtälöitä (28) ja (29) nähdään, että vastaavat varianssit $L^2(\mathbb{R})$:n tapauksessa saadaan parametrin arvoilla $b = e^{\pm r}$.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $\epsilon \in \mathbb{C}$. Osoittautuu, että myös tällöin puristettu tila on minimiepätarkkuustila, jos kvadratuurikomponentteja kierretään sopivan kulman θ verran.

Määritellään kierto-operaattori $U(\theta) = e^{i\theta A^*A}$, jolloin $U(\theta)|n\rangle = e^{i\theta n}|n\rangle$. Suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned}U^*(\theta)AU(\theta)|n\rangle &= e^{in\theta}U^*(\theta)A|n\rangle\\ &= \sqrt{n}e^{in\theta}U^*(\theta)|n-1\rangle\\ &= \sqrt{n}e^{in\theta}e^{-i(n-1)\theta}|n-1\rangle\\ &= e^{i\theta}A|n\rangle,\end{aligned}$$

kaikilla $|n\rangle \in \mathcal{K}$. Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned}U^*(\theta)A^*U(\theta)|n\rangle &= e^{in\theta}U^*A^*|n\rangle\\ &= \sqrt{n+1}e^{-in\theta}U^*(\theta)|n\rangle\\ &= \sqrt{n+1}e^{in\theta}e^{-i(n+1)\theta}|\rangle\\ &= e^{-i\theta}A^*|n\rangle,\end{aligned}$$

kaikilla $|n\rangle \in \mathcal{K}$. A:lle ja A^*:lle saadaan siis muunnoskaavat

$$\begin{aligned}U^*(\theta)AU(\theta) &= e^{-i\theta A^*A}Ae^{i\theta} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}A = e^{i\theta}A,\\ U^*(\theta)A^*U(\theta) &= e^{-i\theta A^*A}A^*e^{i\theta} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\theta)^n}{n!}A^* = e^{-i\theta}A^*.\end{aligned}$$

Määritellään kierretyt kvadratuurit

$$\begin{aligned}X(\theta) &= U^*(\theta)\tilde{Q}U(\theta) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\overline{e^{-i\theta}A^* + e^{i\theta}A}),\\ Y(\theta) &= U^*(\theta)\tilde{P}U(\theta) = \tfrac{i}{\sqrt{2}}(\overline{e^{-i\theta}A^* - e^{i\theta}A}).\end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt kierrettyä kompleksista amplitudia $X(\theta)+iY(\theta) = e^{i\theta}(\tilde{Q}+i\tilde{P})$, missä $\theta \in [-\pi, \pi)$. Tälle saadaan muunnoskaava

$$\begin{aligned} S^*(\epsilon)(X(\theta)+iY(\theta))S(\epsilon) &= S^*(\epsilon)\big(\sqrt{2}e^{i\theta}A\big)S(\epsilon) \\ &= \sqrt{2}e^{i\theta}(A\cosh r - A^*e^{-2i\phi}\sinh r) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-r}\big(e^{i\theta}e^{-2i\phi}A^* + e^{i\theta}A\big) + \tfrac{i}{\sqrt{2}}e^{r}\big(ie^{i\theta}e^{-2i\phi}A^* - ie^{i\theta}A\big). \end{aligned}$$

Valitsemalla $\theta = \phi$ nähdään, että

$$S^*(\epsilon)(X(\phi)+iY(\phi))S(\epsilon) = e^{-r}X(\phi) + ie^{r}Y(\phi),$$

ts. $S(\epsilon)$ puristaa kierretyn kompleksisen amplitudin toista komponenttia ja vastaavasti venyttää toista.

Kierretyille kvadratuurien variansseiksi saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X(\theta), |z,\epsilon\rangle) &= \langle z,\epsilon|X(\theta)^2|z,\epsilon\rangle - \langle z,\epsilon|X(\theta)|z,\epsilon\rangle^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\cosh(2r) - \sinh(2r)\cos(2(\phi-\theta))), \\ \mathrm{Var}(Y(\theta), |z,\epsilon\rangle) &= \langle z,\epsilon|Y(\theta)^2|z,\epsilon\rangle - \langle z,\epsilon|Y(\theta)|z,\epsilon\rangle^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\cosh(2r) + \sinh(2r)\cos(2(\phi-\theta))), \end{aligned}$$

joiden tuloksi tulee

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X(\theta), |z,\epsilon\rangle)\mathrm{Var}(Y(\theta), |z,\epsilon\rangle) &= \tfrac{1}{4}(\cosh^2(2r) - \sinh^2(2r)\cos^2(2(\phi-\theta)) \\ &= \tfrac{1}{4}(1 + \sinh^2(2r) - \sinh^2(2r)\cos^2(2(\phi-\theta)) \\ &= \tfrac{1}{4}(1 + \sinh^2(2r)(1 - \cos^2(2(\phi-\theta))) \\ &= \tfrac{1}{4}g(r,\phi,\theta). \end{aligned}$$

Nyt $g(r,\phi,\theta) \geq 1$ ja $g(r,\phi,\theta) = 1$ silloin, ja vain silloin kun $r = 0$ tai $\phi - \theta = \pm n\pi$, missä $n \in \mathbb{N}$. Kiinteällä puristusparametrin arvolla varianssien tulo saadaan siis minimoitua, kun kierretään kvadratuureja kulman $\theta = \phi \pm n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ verran. Erityisesti valinta $\theta = \phi$ minimoi tulon.

4 Paikan ja liikemäärän yhteismittaukset

Määritelmä 4.1. *Olkoot $M_1, M_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ suureita. Suure $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on niiden* yhdistetty suure*, jos kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on*

$$\begin{aligned} M_1(X) &= M(X \times \mathbb{R}) \\ M_2(Y) &= M(\mathbb{R} \times Y). \end{aligned}$$

Tällöin M_1 ja M_2 ovat M:n marginaalit.

Suureiden M_1 ja M_2 sanotaan olevan *samanaikaisesti mitattavissa*, jos niillä on yhdistetty suure.

Osoittautuu, että jos toinen M:n marginaaleista on tarkka suure, niin M on tulomitta, ts. kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on $M(X \times Y) = M_1(X)M_2(Y)$. Tämän todistamiseksi tarvitaan joitakin lemmoja.

Lemma 4.1. *Olkoot $A \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})^+$ ja $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ siten, että $A \leq P$. Silloin $A = PAP$.*

Todistus. Olkoon $\varphi \in \mathcal{H}$ sellainen, että $P\varphi = 0$. Koska $A \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})^+$, niin kaikilla $\psi, \xi \in \mathcal{H}$, joilla $\langle\psi|A\psi\rangle \neq 0$ on

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle -\tfrac{\langle\psi|A\xi\rangle}{\langle\psi|A\psi\rangle}\psi + \xi| - \tfrac{\langle\psi|A\xi\rangle}{\langle\psi|A\psi\rangle}A\psi + A\xi\rangle \\ &= \tfrac{|\langle\psi|A\xi\rangle|^2}{\langle\psi|A\psi\rangle^2}\langle\psi|A\psi\rangle - \tfrac{\langle\psi|A\xi\rangle}{\langle\psi|A\psi\rangle}\langle\xi|A\psi\rangle - \tfrac{\langle A\xi|\psi\rangle}{\langle\psi|A\psi\rangle}\langle\psi|A\xi\rangle + \langle\xi|A\xi\rangle, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\langle\psi|A\xi\rangle|^2 - \langle\psi|A\xi\rangle\langle A\xi|\psi\rangle - \langle A\xi|\psi\rangle\langle\psi|A\xi\rangle + \langle\psi|A\psi\rangle\langle\xi|A\xi\rangle \\ &= -|\langle\psi|A\xi\rangle|^2 + \langle\psi|A\psi\rangle\langle\xi|A\xi\rangle. \end{aligned}$$

Jos taas $\langle\psi|A\psi\rangle = 0$, niin $\|A^{1/2}\psi\|^2 = \langle A^{1/2}\psi|A^{1/2}\psi\rangle = \langle\psi|A\psi\rangle = 0$, eli $A^{1/2}\psi = 0$. Tällöin myös $|\langle\psi|A\xi\rangle|^2 = |\langle A^{1/2}\psi|A^{1/2}\xi\rangle|^2 = 0$, joten kaikilla $\psi, \xi \in \mathcal{H}$ on

$$|\langle\psi|A\xi\rangle|^2 \leq \langle\psi|A\psi\rangle\langle\xi|A\xi\rangle.$$

Erityisesti

$$|\langle\psi|A\varphi\rangle|^2 \leq \langle\psi|A\psi\rangle\langle\varphi|A\varphi\rangle \leq \langle\psi|P\psi\rangle\langle\varphi|P\varphi\rangle = 0,$$

kaikilla $\psi \in \mathcal{H}$. Siis valitsemalla $\psi = A\varphi$ nähdään, että $A\varphi = 0$. Koska kaikilla $\psi \in \mathcal{H}$ on $P(I-P)\psi = 0$, niin myös $A(I-P)\psi = 0$. Siis $A(I-P) = 0$, ja koska $A(\mathcal{H}) \subset P(\mathcal{H})$ [2, Lause I.3.6, s. 27], niin $A = PA = PAP$.

$\square$

Seuraava lemma on peräisin kirjasta [20]. Tässä esityksessä riittää jälleen olettaa, että $\Omega = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{R}^2$.

Lemma 4.2. *Olkoon $E : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sellainen suure, että $E(B_0)$ on projektio jollakin $B_0 \in \mathcal{B}(\Omega)$. Silloin $E(B)$ kommutoi $E(B_0)$:n kanssa kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$.*

Todistus. Kaikilla $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ on $B = (B \setminus (B \cap B_0)) \cup (B \cap B_0)$, missä joukot $B \setminus (B \cap B_0)$ ja $(B \cap B_0)$ ovat erillisiä. Siis

$$E(B) = E(B \setminus (B \cap B_0)) + E(B \cap B_0). \tag{38}$$

Toisaalta $B \cup B_0 = B_0 \cup (B \setminus (B \cap B_0))$, missä joukot B_0 ja $B \setminus (B \cap B_0)$ ovat erillisiä, joten

$$E(B \setminus (B \cap B_0)) + E(B_0) = E(B \cup B_0) \leq E(\mathbb{R}) = I.$$

Siis $E(B \setminus (B \cap B_0)) \leq I - E(B_0)$, missä $I - E(B_0)$ on projektio. Koska lisäksi $E(B \cap B_0) \leq E(B_0)$, niin lemman 4.1 mukaan

$$\begin{aligned} E(B \setminus (B \cap B_0)) &= (I - E(B_0))E(B \setminus (B \cap B_0))(I - E(B_0)), \\ E(B \cap B_0) &= E(B_0)E(B \cap B_0)E(B_0), \end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (38) saadaan

$$E(B) = (I - E(B_0))E(B \setminus (B \cap B_0))(I - E(B_0)) + E(B_0)E(B \cap B_0)E(B_0). \tag{39}$$

Kertomalla yhtälö (39) $E(B_0)$:lla vuoroin oikealta ja vasemmalta, ja käyttämällä hyväksi sitä, että $E(B_0)^2 = E(B_0)$, saadaan lopulta

$$E(B)E(B_0) = E(B_0)E(B \cap B_0)E(B_0) = E(B_0)E(B).$$

□

Seuraava lause on peräisin artikkelista [21].

Lause 4.1. *Olkoon* $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *suure, jonka toinen marginaali on tarkka suure. Tällöin kaikilla* $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *on* $M(X \times Y) = M_1(X)M_2(Y)$.

Todistus. Tarkastellaan tapausta, jossa M_1 on tarkka suure, ts. $M_1(X)$ on projektio kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Siis $M(X \times \mathbb{R})$ on projektio kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, joten lemman 4.2 nojalla $M(Z)$ kommutoi $M(X \times \mathbb{R})$:n kanssa kaikilla $Z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on nyt

$$M_1(X)M_2(Y) = M(X \times \mathbb{R})M(\mathbb{R} \times Y) = M(\mathbb{R} \times Y)M(X \times \mathbb{R}) = M_2(Y)M_1(X),$$

eli marginaalit M_1 ja M_2 kommutoivat. Kuvaus $(X, Y) \mapsto M_1(X)M_2(Y)$ on positiivioperaattorikaksoismitta, joten se laajenee yksikäsitteiseksi semispektraalimitaksi $G : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, jolle $G(X \times Y) = M_1(X)M_2(Y)$ kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ [22, Theorem 1.10].

Olkoot $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Koska $M_1(X)$ on projektio, joka kommutoi $M_2(Y)$:n kanssa, niin $G(X \times Y) = M_1(X)M_2(Y) = M_1(X) \wedge M_2(Y)$ [23, Corollary 2.3]. Toisaalta koska $M_1(X) = M(X \times \mathbb{R})$ ja $M_2(Y) = M(\mathbb{R} \times Y)$, niin $M(X \times Y)$ on M_1:n ja M_2:n eräs alaraja, joten $M(X \times Y) \leq G(X \times Y)$. Merkitään $\mathcal{A}$:lla algebraa, jonka muodostavat muotoa $X \times Y$, $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, olevien joukkojen äärelliset unionit. Nyt $M(Z) \leq G(Z)$ kaikilla $Z \in \mathcal{A}$. Olkoon $\mathcal{M} = \{Z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) | M(Z) \leq G(Z)\}$. Osoitetaan, että $\mathcal{M}$ on monotoninen luokka.

Olkoon (A_n) nouseva jono $\mathcal{M}$:ssä. Kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$ on

$$\langle \varphi | M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \varphi\rangle - \langle \varphi | G(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \big(\langle \varphi | M(A_n)\varphi\rangle - \langle \varphi | G(A_n)\varphi\rangle\big) \leq 0,$$

joten $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$. Vastaavasti, jos (B_n) on laskeva jono $\mathcal{M}$:ssä, niin kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$ on

$$\langle \varphi | M(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)\varphi\rangle - \langle \varphi | G(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \big(\langle \varphi | M(B_n)\varphi\rangle - \langle \varphi | G(B_n)\varphi\rangle\big) \leq 0,$$

joten $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$. Siis $\mathcal{M}$ on monotoninen luokka.

Koska $\mathcal{A}$:n generoima σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ on sama kuin $\mathcal{A}$:n generoima monotoninen luokka [2, Lemma II.3.9, s. 37], ja koska toisaalta $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, niin $M(Z) \leq G(Z)$ kaikilla $Z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Olkoot $Z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ja $\varphi \in \mathcal{H}_1$. Koska $M_{\varphi,\varphi}$ ja $G_{\varphi,\varphi}$ ovat todennäköisyysmittoja, niin

$$1 - M_{\varphi,\varphi}(Z) = M_{\varphi,\varphi}(\mathbb{R}^2 \setminus Z) \leq G_{\varphi,\varphi}(\mathbb{R}^2 \setminus Z) = 1 - G_{\varphi,\varphi}(Z),$$

ts. $\langle\varphi|G(Z)\varphi\rangle \leq \langle\varphi|M(Z)\varphi\rangle$. Koska φ oli mielivaltainen, niin $G(Z) \leq M(Z)$. Siis $M(Z) = G(Z)$ kaikilla $Z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

□

Seuraava tulos on peräisin Werneriltä [24]. Lauseen todistus on tässä muodossa esitetty artikkelissa [4].

Lause 4.2. *Olkoon E^Q_μ paikka- ja E^P_ν liikemääräsuure. Jos E^Q_μ:llä ja E^P_ν:llä on yhdistetty suure, niin niillä on myös yhdistetty suure, joka on kovariantti faasiavaruussuure.*

Todistus. Jokaista funktiota $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ja pistettä $(q,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kohti merkitään $f^{(q,p)}$:llä funktiota, jolle kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ on

$$f^{(q,p)}(x,y) = f(x+q, y+p).$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on yhteenlaskun suhteen Abelin ryhmä, joten on olemassa luvun 1.2 mukainen lineaarinen funktionaali $m : BC(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, jolle

$$m(f^{(q,p)}) = m(f)$$

kaikilla $f \in BC(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ja $(q,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ [25].

Olkoon M_0 E^Q_μ:n ja E^P_ν:n yhdistetty suure. Määritellään kaikilla $f \in BC(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ ja $q, p \in \mathbb{R}$

$$\Theta[f; \varphi, \psi](q,p) = \langle W(q,p)^*\varphi | M_0(f^{(q,p)}) W(q,p)^*\psi\rangle.$$

Koska $\|M_0(f^{(q,p)})\| = \|\int f^{(q,p)}(x,y)dM_0(x,y)\| \leq \|f^{(q,p)}\|_\infty = \|f\|_\infty$ ja $W(q,p)$ on unitaarinen operaattori, niin $|\Theta[f;\varphi,\psi](q,p)| \leq \|f\|_\infty \|\|\varphi\|\|\psi\|$ ja siis $\Theta[f;\varphi,\psi]$ on rajoitettu funktio. Tarkastellaan seuraavaksi jatkuvuutta. Koska

$$\Theta[f;\varphi,\psi](x+q,y+p) = \Theta[f^{(q,p)};W(q,p)^*\varphi, W(q,p)^*\psi](x,y),$$

niin riittää tarkastella jatkuvuutta origossa. Saadaan

$$\begin{aligned}
|\Theta[f;\varphi,\psi](q,p) - \Theta[f;\varphi,\psi](0,0)| &\leq |\langle W(q,p)^*\varphi|M_0(f^{(q,p)})(W(q,p)^*\psi - \psi)\rangle| \\
&\quad +|\langle (W(q,p)^*\varphi - \varphi)|M_0(f^{(q,p)})\psi\rangle| \\
&\quad +|\langle \varphi|M_0(f^{(q,p)} - f)\psi\rangle| \\
&\leq \|f\|_\infty \big(\|\varphi\|\|W(q,p)^*\psi - \psi\| + \|W(q,p)^*\varphi - \varphi\|\|\psi\|\big) \\
&\quad +|\langle \varphi|M_0(f^{(q,p)} - f)\psi\rangle|,
\end{aligned}$$

missä kaksi ensimmäistä termiä lähestyy nollaa, kun $(q,p) \to (0,0)$, W:n vahvan jatkuvuuden nojalla ja kolmas termi dominoidun konvergenssin lauseen nojalla. Siis $\Theta[f;\varphi,\psi]$ on jatkuva ja siten $\Theta[f;\varphi,\psi] \in BC(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Kaikilla $f \in BC(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ määritellään rajoitettu lineaarioperaattori $M^{av}(f)$ kaavalla

$$\langle\varphi|M^{av}(f)\psi\rangle = m(\Theta[f;\varphi,\psi])$$

Jos nyt $f \in BC^+(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, niin kaikilla $q,p \in \mathbb{R}$ $M_0(f^{(q,p)})$ on positiivinen operaattori, ja siis $\Theta[f;\varphi,\varphi](q,p) = \langle W(q,p)^*\varphi|M_0(f^{(q,p)})W(q,p)^*\varphi\rangle \geq 0$. Kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$ on nyt $\Theta[f;\varphi,\varphi] \geq 0$, joten $\langle\varphi|M^{av}(f)\varphi\rangle = m(\Theta[f;\varphi,\varphi]) \geq 0$, eli $M^{av}(f) \geq 0$. Tämän lisäksi kaikilla $\varphi,\psi \in \mathcal{H}$ on $\langle\varphi|M^{av}(1)\psi\rangle = m(\Theta[1;\varphi,\psi]) = m(\langle\varphi|\psi\rangle) = \langle\varphi|\psi\rangle m(1) = \langle\varphi|\psi\rangle$, joten $M^{av}(1) = I$. Vastaavuus $M^{av} : BC(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on siis luvun 1.2 mukainen operaattoriarvoinen lineaarinen funktionaali. Kaikilla $\varphi,\psi \in \mathcal{H}$ ja $q,p \in \mathbb{R}$

on

$$\begin{aligned}\langle\varphi|W(q,p)M^{av}(f^{(q,p)})W(q,p)^*\psi\rangle &= \langle W(q,p)^*\varphi|M^{av}(f^{(q,p)})W(q,p)^*\psi\rangle \\ &= m(\Theta[f^{(q,p)};W(q,p)^*\varphi,W(q,p)^*\psi]) \\ &= m(\Theta^{(q,p)}[f;\varphi,\psi]) \\ &= m(\Theta[f;\varphi,\psi]) \\ &= \langle\varphi|M^{av}(f)\psi\rangle,\end{aligned}$$

joten

$$M^{av}(f) = W(q,p)M^{av}(f^{(q,p)})W(q,p)^*. \tag{40}$$

Jos $f \in BC(\mathbb{R})$ ja $(q,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, niin saadaan

$$\begin{aligned}\Theta[\tilde{f}_1;\varphi,\psi](q,p) &= \langle W(q,p)^*\varphi|M_0(\tilde{f}_1^{(q,p)}W(q,p)^*\psi\rangle \\ &= \langle W(q,p)^*\varphi|W(q,p)^*E^Q_\mu(f)W(q,p)W(q,p)^*\psi\rangle \\ &= \langle\varphi|E^Q_\mu(f)\psi\rangle.\end{aligned}$$

Erityisesti $\Theta[\tilde{f}_1;\varphi,\psi]$ on vakiofunktio. Vastaavasti saadaan $\Theta[\tilde{f}_2;\varphi,\psi](q,p) = \langle\varphi|E^P_\nu(f)\psi\rangle$. Nyt siis kaikilla $\varphi,\psi\in\mathbb{R}$ on $\langle\varphi|M^{av}(\tilde{f}_1)\psi\rangle = m(\langle\varphi|E^Q_\mu(f)\psi\rangle) = \langle\varphi|E^Q_\mu(f)\psi\rangle m(1) = \langle\varphi|E^Q_\mu(f)\psi\rangle$ ja $\langle\varphi|M^{av}(\tilde{f}_1)\psi\rangle = \langle\varphi|E^P_\nu(f)\psi\rangle$, joten

$$\begin{aligned}M^{av}_1(f) &= E^Q_\mu(f)\\ M^{av}_2(f) &= E^P_\mu(f).\end{aligned}$$

Koska $E^Q_\mu(\mathbb{R}) = E^P_\nu(\mathbb{R}) = I$, niin yhtälön (7) nojalla $M^{av}_1(\infty) = M^{av}_2(\infty) = 0$, joten lauseen (1.5) mukaan $M^{av}_0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = I$ ja

$$\begin{aligned}\left(M^{av}_0\right)_1 &= E^Q_\mu\\ \left(M^{av}_0\right)_2 &= E^P_\nu\end{aligned}$$

Yhtälön (40) mukaan suure M^{av}_0 toteuttaa kovarianssiehdon (20).

$\square$

5 Virheiden karakterisointeja ja epätarkkuusrelaatioita

Jokainen mittaus riippumatta siitä, onko se luonteeltaan klassinen vai kvanttimekaaninen, altistuu kohinalle. Tämän seurauksena suure, jota todellisuudessa mitataan (E_1) poikkeaa siitä, mitä haluttiin mitata (E). Tästä poikkeamasta tai mistä tahansa tällaisen poikkeaman mitasta käytetään nimitystä *virhe* tai *epätarkkuus*. Yleisesti ottaen mittauksessa voi ilmetä systemaattisia virheitä, joiden seurauksena mittaustulosjakuma on siirtynyt. Lisäksi voi olla satunnaisia virheitä, jota aiheuttavat jakauman levenemistä. Jotta mittauksessa esiintyvän kohinan mitta olisi mielekäs, pitää sen määräytyä täysin todennäköisyysjakaumista $\mathbf{p}_\psi^{E_1}$ ja $\mathbf{p}_\psi^{E}$. Seuraavaksi esitellään kolme eri mittaa mittauksessa esiintyvälle epätarkkuudelle.

5.1 Standardimitta

Standardimitta ilmaisee virheen mittalaitteesta luettavan suureen ja mitattavan suureen välisenä keskimääräisenä poikkeamana. Tämä vastaa klassisen statistisen analyysin tilannetta, missä todennäköisyysjakaumien momentteja käytetään mittausvirheen kuvaamisessa. Tässä osiossa on käytetty lähteenä artikkelia [26].

Olkoon $\mathcal{H}$ tarkasteltavaan systeemiin liittyvä Hilbertin avaruus ja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mitattavaa fysikaalista suuretta vastaava rajoitettu itseadjungoitu operaattori. Olkoon $\langle \mathcal{K}, \xi, Z, U \rangle$ mittausprosessi, jolla A:ta yritetään mitata. Tässä $\mathcal{K}$ on mittalaitteeseen liittyvä Hilbertin avaruus, $\xi \in \mathcal{K}$, $\|\xi\| = 1$, on mittalaitteen vektoritila ennen mittausta, $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ asteikkosuuretta vastaava rajoitettu itseadjungoitu operaattori ja $U : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ on mittausvuorovaikutusta kuvaava unitaarinen kuvaus. Määritellään nyt virheen standardimitta [27]:

$$\epsilon(Z, A, \psi) = \langle \psi \otimes \xi | (Z^{\text{out}} - A^{\text{in}})^2 \psi \otimes \xi \rangle^{\frac{1}{2}}, \tag{41}$$

missä $Z^{\text{out}} = U^* I \otimes Z U$ ja $A^{\text{in}} = A \otimes I$.

Olkoon E suure, jota todellisuudessa mitataan. E määräytyy täysin ehdosta

$$\langle\psi|E(X)\psi\rangle = \langle\psi\otimes\xi|U^*I\otimes E^Z(X)U\psi\otimes\xi\rangle$$

kaikilla $X\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja $\psi\in\mathcal{H}$. Koska Z oletetaan rajoitetuksi, niin momenttioperaattorit $E[1]$ ja $E[2]$ ovat ne rajoitetut itseadjungoidut operaattorit, joille

$$\begin{aligned}\langle\psi|E[1]\psi\rangle &= \langle\psi\otimes\xi|U^*I\otimes ZU\psi\otimes\xi\rangle,\\ \langle\psi|E[2]\psi\rangle &= \langle\psi\otimes\xi|U^*I\otimes Z^2U\psi\otimes\xi\rangle\end{aligned}$$

kaikilla $\psi\in\mathcal{H}$. Nyt

$$\begin{aligned}\langle\psi\otimes\xi|\big(Z^{\text{out}}\big)^2\psi\otimes\xi\rangle &= \langle\psi|E[2]\psi\rangle\\ \langle\psi\otimes\xi|\big(A^{\text{in}}\big)^2\psi\otimes\xi\rangle &= \langle\psi|A^2\psi\rangle\end{aligned}$$

Koska A^{in} kommutoi $I\otimes P[\xi]$:n kanssa ja $I\otimes P[\xi]Z^{\text{out}}I\otimes P[\xi] = E[1]\otimes P[\xi]$ niin saadaan

$$\begin{aligned}\langle\psi\otimes\xi|Z^{\text{out}}A^{\text{in}}\psi\otimes\xi\rangle &= \langle\psi\otimes\xi|I\otimes P[\xi]Z^{\text{out}}A^{\text{in}}I\otimes P[\xi]\psi\otimes\xi\rangle\\ &= \langle\psi\otimes\xi|I\otimes P[\xi]Z^{\text{out}}I\otimes P[\xi]A^{\text{in}}\psi\otimes\xi\rangle\\ &= \langle\psi\otimes\xi|E[1]\otimes P[\xi]A^{\text{in}}\psi\otimes\xi\rangle\\ &= \langle\psi|E[1]A\psi\rangle.\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan

$$\langle\psi\otimes\xi|A^{\text{in}}Z^{\text{out}}\psi\otimes\xi\rangle = \langle\psi|AE[1]\psi\rangle.$$

Virheen standardimitan lauseke voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}\epsilon(E,A;\psi)^2 &= \langle\psi|(E[1]-A)^2\psi\rangle + \langle\psi|(E[2]-E[1]^2)\psi\rangle\\ &= \langle\psi|N_r(E,A)^2\psi\rangle + \langle\psi|N_i(E)\psi\rangle, \qquad (42)\end{aligned}$$

missä $N_r(E,A) = E[1]-A$ on suhteellinen kohina. $\epsilon(E,A;\psi)=0$ kaikilla $\psi\in\mathcal{H}$ silloin ja vain silloin kun E on tarkka suure ja $E[1]=A$.

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälön (42) ensimmäistä termiä. Siinä esiintyvää operaattoria $N_r(E,A) = E[1]-A$ ei voida mitata samanaikaisesti $E[1]$:n tai A:n kanssa ellei ψ kuulu niiden kommutointialueeseen. Kun termi kirjoitetaan muodossa

$$\langle\psi|(E[1]-A)^2\psi\rangle = \langle\psi|E[1]^2\psi\rangle + \langle\psi|A^2\psi\rangle - \langle\psi|(E[1]A+AE[1])\psi\rangle,$$

niin nähdään, että siinä esiintyy operaattori $E[1]A + AE[1]$, jonka mittausta ei yleisesti voida palauttaa $E[1]$:n ja A:n mittauksiin. Tästä seuraa, että termiä ei yleisessä tapauksessa voida määrittää pelkästään E:n ja A:n mittaustulosstatistiikoista.

Virheen standardimitta riippuu tilasta ψ, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että mittalaitteen kalibroinnista saatavia virheiden arviointeja pitäisi pystyä soveltamaan useisiin eri tiloihin. Tämän takia määritelläänkin tilasta riippmaton mitta, suureen E virheen *globaali standardimitta* A:n suhteen kaavalla

$$\epsilon(E, A) = \sup_{\psi \in \mathcal{H}_1} \epsilon(E, A; \psi). \tag{43}$$

Suuretta E kutsutaan A:n *standardiapproksimaatioksi*, jos $\epsilon(E, A) < \infty$.

5.2 Geometrinen mitta

Tarkastellaan seuraavaksi Wernerin esittämää virheen geometrista mittaa. Määritelmät ja lauseet ovat peräisin artikkelista [24].

Tarkastellaan aluksi todennäköisyysmittoja $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$. Kaikilla rajoitetuilla mitallisilla funktioilla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integraali $\int f(x) d\mu(x)$ määrittelee μ:hyn liittyvän odotusarvofunktionaalin, jolle käytetään merkintään $\mu(f)$. Luonnollinen tapa määritellä mittojen välinen etäisyys olisi tarkastella suurinta eroa niiden määräämien todennäköisyyksien välillä, ts. tarkastella lukua $\sup_{X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mu(X) - \nu(X)|$. Tämä ei kuitenkaan ole käyttökelpoinen määritelmä, sillä esimerkiksi kahdelle pistemitalle δ_x ja δ_y, missä $x \neq y$, on $\sup_{X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\delta_x(X) - \delta_y(X)| = 1$, koska on mitallisia joukkoja, jotka sisältävät vain toisen pisteen. Tämä määritelmä ei siis ota huomioon pisteiden välistä etäisyyttä. Etäisyys määritelläänkin suurimpana erona odotusarvofunktionaalien arvojen välillä, kun funktionaalien arvot lasketaan hitaasti muuttuville funktioille.

Merkitään Λ:lla sellaisten rajoitettujen Borel-mitallisten funktioiden $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

joukkoa, joille $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Lukua

$$d(\mu, \nu) = \sup_{f \in \Lambda} |\mu(f) - \nu(f)|$$

kutsutaan todennäköisyysmittojen μ ja ν väliseksi etäisyydeksi. Jos nyt μ, ν ja η ovat todennäköisyymittoja, niin kaikilla $f \in \Lambda$ on

$$\begin{aligned} |\mu(f) - \nu(f)| &= |\textstyle\int f(x)d\mu(x) - \int f(x)d\nu(x)| \\ &\leq |\textstyle\int f(x)d\mu(x) - \int f(x)d\eta(x)| + |f(x)d\eta(x) - \int f(x)d\nu(x)| \\ &= |\mu(f) - \eta(f)| + |\eta(f) - \nu(f)|. \end{aligned}$$

Siis $d(\mu, \nu) \leq d(\mu, \eta) + d(\eta, \nu)$ eli näin määritelty etäisyys toteuttaa kolmioepäyhtälön.

Lause 5.1. *Olkoon $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ todennäköisyysmitta ja $y \in \mathbb{R}$. ν:n ja pistemitan δ_y välinen etäisyys on*

$$d(\nu, \delta_y) = \int |x - y| d\nu(x) \tag{44}$$

Todistus. Kaikilla $f \in \Lambda$ on

$$\begin{aligned} |\nu(f) - \delta_y(f)| &= |\textstyle\int f(x)d\nu(x) - f(y)| \\ &= |\textstyle\int \big(f(x) - f(y)\big)d\nu(x)| \\ &\leq \textstyle\int |x - y| d\nu(x). \end{aligned}$$

Siis myös $d(\nu, \delta_y) \leq \int |x - y| d\nu(x)$. Määritellään kaikilla $n \in \mathbb{N}$ funktio $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$g_n(x) = \begin{cases} |x - y|, & \text{kun } |x - y| \leq n \\ n, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Nyt $g_n \in \Lambda$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\nu(g_n) - \delta_y(g_n)| \leq \sup_{f \in \Lambda} |\nu(f) - \delta_y(f)|$. Toisaalta koska $g_n(y) = \delta_y(g_n) = 0$, niin

$$\int_{-n}^{n} |x - y| d\nu(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) d\nu(x) = |\nu(g_n) - \delta_y(g_n)|,$$

joten

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|d\nu(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{-n}^{n}|x-y|d\nu(x)\\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}}|\nu(g_n)-\delta_y(g_n)|\\ &\le \sup_{f\in\Lambda}|\nu(f)-\delta_y(f)|\\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}|x-y|d\nu(x).\end{aligned}$$

Siis $d(\nu,\delta_y)=\int|x-y|d\nu(x)$.

□

Lause 5.2. *Olkoot $\mu,\nu:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to[0,1]$ todennäköisyysmittoja. Tällöin on voimassa epäyhtälö*

$$d(\mu,\mu*\nu)\le\int|y|d\nu(y),$$

missä $\mu*\nu$ on mittojen konvoluutio

$$(\mu*\nu)(f)=\iint f(x+y)d\mu(x)d\nu(y).$$

Todistus. Kaikilla $f\in\Lambda$ on

$$\begin{aligned}|\mu(f)-(\mu*\nu)(f)| &= \left|\int f(x)d\mu(x)-\iint f(x+y)d\mu(x)d\nu(y)\right|\\ &= \left|\iint\big(f(x)-f(x+y)\big)d\mu(x)d\nu(y)\right|\\ &\le \iint|f(x)-f(x+y)|d\mu(x)d\nu(y)\\ &\le \iint|x-(x+y)|d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \int|y|d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \int|y|d\nu(y).\end{aligned}$$

Siis myös $d(\mu,\mu*\nu)=\sup_{f\in\Lambda}|\mu(f)-(\mu*\nu)(f)|\le\int|y|d\nu(y)$.

□

Olkoon $E:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to\mathcal{L}_s(\mathcal{H})^+$ positiivioperaattorimitta. Tällöin jokaista rajoitettua Borel-mitallista funktiota $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kohti integraali $\int_{\mathbb{R}}fdE$ määrittelee (heikossa mielessä) rajoitetun itseadjungoidun operaattorin, jolle käytetään merkintää

$E(f)$. Siis kaikilla vektoritiloilla ψ, luku $\langle\psi|E(f)\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f d\mathbf{p}_\psi^E$ on hyvin määritelty. Lukua

$$d(E_1,E_2) = \sup_{\psi\in\mathcal{H}_1} \sup_{f\in\Lambda} \big|\langle\psi|(E_1(f)-E_2(f))\psi\rangle\big|$$
$$= \sup_{f\in\Lambda} \|E_1(f)-E_2(f)\|$$

kutsutaan suureiden E_1 ja E_2 väliseksi etäisyydeksi. Tässä jälkimmäinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että itseadjungoidulle operaattorille $A \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ normi voidaan kirjoittaa muodossa $\|A\| = \sup_{\psi\in\mathcal{H}_1} |\langle\psi|A\psi\rangle|$. Suureen E_1 sanotaan olevan E_2:n *geometrinen approksimaatio* jos $d(E_1,E_2) < \infty$. Etäisyys voidaan kirjoittaa myös suureita vastaavien todennäköisyysjakaumien avulla, sillä kaikilla $f \in \Lambda$ ja $\psi \in \mathcal{H}_1$ on $\big|\langle\psi|\big(E_1(f)-E_2(f)\big)\psi\rangle\big| = \big|\mathbf{p}_\psi^{E_1}(f)-\mathbf{p}_\psi^{E_2}(f)\big|$, joten $d(E_1,E_2) = \sup_{\psi\in\mathcal{H}_1} d(\mathbf{p}_\psi^{E_1},\mathbf{p}_\psi^{E_2})$.

Lause 5.3. *Olkoon G^T kovariantti faasiavaruussuure, jonka marginaalit siis ovat sumeat paikka- ja liikemääräsuureet*

$$G_1^T = E^Q * \mu_T = E^Q * \boldsymbol{p}^Q_{\Pi T\Pi^*} \tag{45}$$

$$G_2^T = E^P * \nu_T = E^P * \boldsymbol{p}^P_{\Pi T\Pi^*}. \tag{46}$$

Tällöin marginaalien etäisyydet tarkoista paikka- ja liikemääräsuureista ovat

$$d(G_1^T,E^Q) = \int |x| d\mu_T(x) \tag{47}$$

$$d(G_2^T,E^P) = \int |y| d\nu_T(y). \tag{48}$$

Todistus. Riittää todistaa yhtälö (47). Kaikilla $f \in \Lambda$ ja $\psi \in \mathcal{H}_1$ on

$$\begin{aligned}\big|\langle\psi|\big(G_1^T(f)-E^Q(f)\big)\psi\rangle\big| &= \big|(\mathbf{p}_\psi^Q * \mu_T)(f) - \mathbf{p}_\psi^Q(f)\big| \\ &= \big|\textstyle\iint f(x+y)d\mathbf{p}_\psi^Q(x)d\mu_T(y) - \int f(x)d\mathbf{p}_\psi^Q(x)\big| \\ &= \big|\textstyle\iint \big(f(x+y)-f(x)\big)d\mathbf{p}_\psi^Q(x)d\mu_T(y)\big| \\ &\le \textstyle\iint |x+y-x| d\mathbf{p}_\psi^Q(x)d\mu_T(y) \\ &\le \textstyle\int |y| d\mu_T(y)\end{aligned}$$

Siis myös $d(G_1^T,E^Q) \le \int |y|d\mu_T(y)$. Seuraavaksi käytetään hyväksi tietoa, että on vektoritiloja, joiden paikkajakaumat ovat mielivaltaisen lähellä pistemittaa.

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan vektoritila $\psi \in \mathcal{H}_1$ siten, että $\mathbf{p}_\psi^Q([-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]) = 1$. Tällöin kaikilla $f \in \Lambda$ on

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}_\psi^Q(f) - \delta_0(f)| &= \left| \int \big(f(x) - f(0)\big) d\mathbf{p}_\psi^Q(x) \right| \\
&\leq \int |x| d\mathbf{p}_\psi^Q(x) \\
&= \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} |x| d\mathbf{p}_\psi^Q(x) \\
&\leq \tfrac{\epsilon}{2} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} d\mathbf{p}_\psi^Q(x) \\
&\leq \tfrac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

joten myös $d(\delta_0, \mathbf{p}_\psi^Q) < \frac{\epsilon}{2}$. Nyt kolmioepäyhtälön ja yhtälön (44) nojalla

$$d(\mu_T, \mathbf{p}_\psi^Q) \geq d(\mu_T, \delta_0) - d(\delta_0, \mathbf{p}_\psi^Q) > \int |x| d\mu_T(x) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Lemman (5.2) ja kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{p}_\psi^Q * \mu_T, \mathbf{p}_\psi^Q) &\geq d(\mathbf{p}_\psi^Q, \mu_T) - d(\mathbf{p}_\psi^Q * \mu_T, \mu_T) \\
&> \int |x| d\mu_T(x) - \int |x| d\mathbf{p}_\psi^Q(x) - \tfrac{\epsilon}{2} \\
&> \int |x| d\mu_T(x) - d(\mathbf{p}_\psi^Q, \delta_0) - \tfrac{\epsilon}{2} \\
&> \int |x| d\mu_T(x) - \epsilon
\end{aligned}$$

Lopulta saadaan

$$d(G_1^T, E^Q) \geq d(\mathbf{p}_\psi^Q * \mu_T, \mathbf{p}_\psi^Q) \geq \int |x| d\mu_T(x) - \epsilon \longrightarrow \int |x| d\mu_T(x)$$

kun $\epsilon \to 0$.

$\square$

Sumeat paikka- ja liikemääräsuureet ovat siis vastaavien tarkkojen suureiden geometrisiä approksimaatioita silloin ja vain silloin kun yhtälöiden (47) ja (48) integraalit ovat äärellisinä olemassa.

Seuraavaksi pitää selvittää, mitkä pareista $\big(d(G_1^T, E^Q), d(G_2^T, E^P)\big)$ voidaan saavuttaa varioimalla generoivaa operaattoria T. Kutsutaan näiden pisteiden joukkoa sallituksi alueeksi.

Olkoot T_1, T_2 positiivisia jäljen yksi operaattoreita. Tällöin näiden konveksikombinaatio $T = \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2$, $\lambda \in (0,1)$, on myös positiivinen jäljen yksi operaattori. Kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned}
\mu_T(X) &= \mu_{\lambda T_1+(1-\lambda)T_2}(X) \\
&= \mathbf{p}^Q_{\Pi(\lambda T_1+(1-\lambda T_2)\Pi^*}(X) \\
&= \mathrm{tr}\big[\Pi(\lambda T_1 + (1-\lambda)T_2)\Pi^* E^Q(X)\big] \\
&= \lambda \mathrm{tr}\big[\Pi T_1 \Pi^* E^Q(X)\big] + (1-\lambda)\mathrm{tr}\big[\Pi T_2 \Pi^* E^Q(X)\big] \\
&= \lambda \mu_{T_1}(X) + (1-\lambda)\mu_{T_2}(X),
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
d(G_1^T, E^Q) &= \int |x| d\mu_{\lambda T_1+(1-\lambda)T_2}(x) \\
&= \lambda \int |x| d\mu_{T_1}(x) + (1-\lambda) \int |x| d\mu_{T_2}(x) \\
&= \lambda d(G_1^{T_1}, E^Q) + (1-\lambda) d(G_1^{T_2}, E^Q),
\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$d(G_2^T, E^P) = \lambda d(G_2^{T_1}, E^P) + (1-\lambda) d(G_2^{T_2}, E^P).$$

Luvut $\big(d(G_1^T, E^Q), d(G_2^T, E^P)\big)$ muodostavat siis $\mathbb{R}^2$:n konveksin osajoukon, ts. jos sallittu alue sisältää kaksi eri pistettä, niin se sisältää myös näitä yhdistävän janan.

Käytetään seuraavaksi hyväksi luvussa (2.1) tarkasteltua dilaatiosymmetriaa. Olkoon $A_0(a)$ $\mathbb{R}_+$:n unitaariesitys, jolle $[A_0(a)f](x) = \frac{1}{\sqrt{a}} f(a^{-1}x)$ kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R})$ ja $x \in \mathbb{R}$. Tällöin siis $A_0(a)E^Q(X)A_0(a)^* = E^Q(aX)$ ja $A_0(a)E^P(X)A_0(a)^* = E^P(a^{-1}X)$. Kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}_+$ ja $x \in \mathbb{R}$ on

$$[\Pi A_0(a)^* f](x) = [A_0(a)^* f](-x) = \sqrt{a} f(-ax) = \sqrt{a}[\Pi f](ax) = [A_0(a)^* \Pi f](x),$$

joten Π ja $A_0(a)^*$ kommutoivat. Korvataan nyt generoiva operaattori T unitaarisesti muunnetulla operaattorilla $A_0(a)^*TA_0(a)$, jolloin kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned}
\mu_{A_0(a)^*TA_0(a)}(X) &= \mathrm{tr}[\Pi A_0(a)^*TA_0(a)\Pi^* E^Q(X)] \\
&= \mathrm{tr}[A_0(a)^*\Pi T\Pi^* A_0(a)E^Q(X)] \\
&= \mathrm{tr}[\Pi T\Pi^* A_0(a)E^Q(X)A_0(a)^*] \\
&= \mathrm{tr}[\Pi T\Pi^* E^Q(aX)] \\
&= \mu_T(aX),
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\nu_{A_0(a)^*TA_0(a)}(X) &= \mathrm{tr}[\Pi A_0(a)^*TA_0(a)\Pi^* E^P(X)] \\
&= \mathrm{tr}[A_0(a)^*\Pi T\Pi^* A_0(a)E^P(X)] \\
&= \mathrm{tr}[\Pi T\Pi^* A_0(a)E^P(X)A_0(a)^*] \\
&= \mathrm{tr}[\Pi T\Pi^* E^P(a^{-1}X)] \\
&= \nu_T(a^{-1}X).
\end{aligned}$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
d(G_1^{A_0(a)^*TA_0(a)}, E^Q) &= \int |x| d\mu_T(ax) = a \int |x| d\mu(x) = a d(G_1^T, E^Q), \\
d(G_2^{A_0(a)^*TA_0(a)}, E^P) &= \int |y| d\nu_T(a^{-1}y) = a^{-1} \int |y| d\nu(y) = a^{-1} d(G_2^T, E^P),
\end{aligned}$$

joten etäisyyksien tulo pysyy vakiona, kun a käy läpi $\mathbb{R}_+$:n. Tästä seuraa, että jos T on jotain sallittua pistettä vastaava generoiva operaattori, niin unitaarisesti muunnetut operaattorit $A_0(a)^*TA_0(a)$ piirtävät ko. pisteen kautta kulkevan hyperbelin, kun a käy läpi $\mathbb{R}_+$:n. Koska sallitut pisteet muodostavat konveksin joukon, niin myös kaikki hyperbelin yläpuolelle jäävät pisteet kuuluvat sallittuun alueeseen.

Seuraava lause osoittaa, että etäisyyksien tulolla on aidosti positiivinen alaraja.

Lause 5.4. $\inf_{T\in\mathcal{S}(\mathcal{H})} d(G_1^T, E^Q) \cdot d(G_2^T, E^P) > 0.$

Todistus. Tehdään vastaoletus: $\inf_{T\in\mathcal{S}(\mathcal{H})} d(G_1^T, E^Q) \cdot d(G_2^T, E^P) = 0$. Tällöin jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa $T_n \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ siten, että

$$d(G_1^{T_n}, E^Q) = d(G_2^{T_n}, E^P) = \frac{1}{n},$$

ts. lähestytään origoa suoraa $d(G_1^T, E^Q) = d(G_2^T, E^P)$ pitkin. Nyt siis

$$\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu_{T_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} |y| d\nu_{T_n}(y) = \frac{1}{n}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska

$$\begin{aligned}
\mu_{T_n}(\mathbb{R} \setminus [-1,1]) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} d\mu_{T_n}(x) \\
&\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |x| d\mu_{T_n}(x) \\
&\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu_{T_n}(x) \\
&= \tfrac{1}{n},
\end{aligned}$$

ja μ_{T_n} on todennäköisyysmittana additiivinen, niin

$$\mu_{T_n}([-1,1]) = 1 - \mu_{T_n}(\mathbb{R} \setminus [-1,1]) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Vastaavasti saadaan, että $\nu_{T_n}([-1,1]) \geq 1 - \frac{1}{n}$. Nyt siis

$$\mu_{T_n}([-1,1]) + \nu_{T_n}([-1,1]) \geq 2 - \frac{2}{n} \to 2$$

kun $n \to \infty$, mikä on ristiriita, sillä

$$\mu_{T_n}([-1,1]) + \nu_{T_n}([-1,1]) \leq 1 + \sqrt{a_0} < 2,$$

missä a_0 on operaattorin $E^Q([-1,1])E^P([-1,1])E^Q([-1,1])$ suurin ominaisarvo [28]. Siis

$$\inf_{T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} d(G_1^T, E^Q) \cdot d(G_2^T, E^P) > 0.$$

$\square$

Määritellään $C = \inf_{T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} d(G_1^T, E^Q) \cdot d(G_2^T, E^P)$, jolloin siis $(d(G_1^T, E^Q), d(G_2^T, E^P))$-tasossa voidaan operaattoria T varioimalla saavuttaa kaikki hyperbelin $d(G_1^T, E^Q) \cdot d(G_2^T, E^P) = C$ yläpuolelle jäävät pisteet. Osoitetaan vielä, että kyseinen hyperbeli saavutetaan. Tätä varten tarkastellaan operaattoria $K = |Q| + |P|$, missä $|Q| = \int |x| dE^Q(x)$ ja $|P| = \int |y| dE^P(y)$. Lauseen 1.9 mukaan riittävä ehto sille, että K:lla on pienin ominaisarvo, ja että se on äärellisesti degeneroitunut on, että resolventtioperaattori $(K+1)^{-1}$ on kompakti. Osoitetaan kompaktius seuraavassa lauseessa.

Lause 5.5. *Olkoon* $K = |Q| + |P|$. *Tällöin resolventtioperaattori* $(K+1)^{-1}$ *on kompakti.*

Todistus. K:n spektri $\sigma(K) \subset [0, \infty)$, joten $(K+1)^{-1}$ on hyvin määritelty rajoitettu lineaarioperaattori. Vastaavasti $(K + 1 \pm \epsilon)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on hyvin määritelty kaikilla $0 < \epsilon < 1$.

Olkoon $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ ja $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ siten, että $|q| + |p| < \epsilon$. Kaikilla $\psi \in \mathcal{D}(K)$, joilla $W(q,p)^*\psi \in \mathcal{D}(K)$ on

$$\begin{aligned}\langle\psi|W(q,p)KW(q,p)^*\psi\rangle &= \langle W(q,p)^*\psi|(|Q| + |P|)W(q,p)^*\psi\rangle \\ &= \int |x| dE^Q_{W(q,p)^*\psi, W(q,p)^*\psi}(x) + \int |y| dE^P_{W(q,p)^*\psi, W(q,p)^*\psi}(y).\end{aligned}$$

Käyttämällä hyväksi määritelmissä 2.1 ja 2.2 esiintyviä paikka- ja liikemääräsuureiden symmetriaominaisuuksia saadaan kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}E^Q_{W(q,p)^*\psi, W(q,p)^*\psi}(X) &= \langle W(q,p)^*\psi|E^Q(X)W(q,p)^*\psi\rangle \\ &= \langle\psi|W(q,p)E^Q(X)W(q,p)^*\psi\rangle \\ &= \langle\psi|E^Q(X+q)\psi\rangle \\ &= E^Q_{\psi,\psi}(X+q),\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}E^P_{W(q,p)^*\psi, W(q,p)^*\psi}(X) &= \langle W(q,p)^*\psi|E^P(X)W(q,p)^*\psi\rangle \\ &= \langle\psi|W(q,p)E^P(X)W(q,p)^*\psi\rangle \\ &= \langle\psi|E^P(X+p)\psi\rangle \\ &= E^P_{\psi,\psi}(X+p),\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}\langle\psi|W(q,p)KW(q,p)^*\psi\rangle &= \int |x| dE^Q_{\psi,\psi}(x+q) + \int |y| dE^P_{\psi,\psi}(y+p) \\ &= \int |x-q| dE^Q_{\psi,\psi}(x) + \int |y-p| dE^P_{\psi,\psi}(y).\end{aligned}$$

Kolmioepäyhtälön nojalla $|x - q| \geq \big||x| - |q|\big| \geq |x| - |q|$, joten integraalin lineaarisuudesta seuraa, että

$$\begin{aligned}&\langle\psi|W(q,p)KW(q,p)^*\psi\rangle\\ &\geq \int |x| dE^Q_{\psi,\psi}(x) - \int |q| dE^Q_{\psi,\psi}(x) + \int |y| dE^P_{\psi,\psi}(y) - \int |p| dE^P_{\psi,\psi}(y)\\ &= \langle\psi||Q|\psi\rangle + \langle\psi||P|\psi\rangle - |q| - |p|\\ &= \langle\psi|(K - |q| - |p|)\psi\rangle,\end{aligned}$$

joten $W(q,p)KW(q,p)^* \geq K - |q| - |p|$. Koska käänteisoperaattorin ottaminen kääntää operaattorien järjestyksen, niin

$$W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^* = (W(q,p)KW(q,p)^* + 1)^{-1} \leq (K + 1 - |q| - |p|)^{-1}.$$

Toisaalta kolmioepäyhtälön toisen puolen nojalla $|x-q| \leq |x| + |q|$, joten saadaan

$$\begin{aligned}&\langle\psi|W(q,p)KW(q,p)^*\psi\rangle\\ &\leq \int |x| dE^Q_{\psi,\psi}(x) + \int |q| dE^Q_{\psi,\psi}(x) + \int |y| dE^P_{\psi,\psi}(y) + \int |p| dE^P_{\psi,\psi}(y)\\ &= \langle\psi||Q|\psi\rangle + \langle\psi||P|\psi\rangle + |q| + |p|\\ &= \langle\psi|(K + |q| + |p|)\psi\rangle,\end{aligned}$$

joten $W(q,p)KW(q,p)^* \leq K + |q| + |p|$, mistä seuraa, että

$$W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^* \geq (K + 1 + |q| + |p|)^{-1}.$$

Koska siis $W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^* - (K+1+|q|+|p|)^{-1} \geq 0$, niin kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$ on

$$\begin{aligned}0 &\leq |\langle\varphi|(W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^* - (K+1+|q|+|p|)^{-1})\varphi\rangle|\\ &= \langle\varphi|(W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^* - (K+1+|q|+|p|)^{-1})\varphi\rangle\\ &\leq \langle\varphi|((K+1-|q|-|p|)^{-1} - (K+1+|q|+|p|)^{-1})\varphi\rangle\\ &= -(-1+|q|+|p|+1+|q|+|p|)\langle\varphi|(K+1-|q|-|p|)^{-1}(K+1+|q|+|p|)^{-1}\varphi\rangle\\ &= 2(|q|+|p|)|\langle\varphi|(K+1-|q|-|p|)^{-1}(K+1+|q|+|p|)^{-1}\varphi\rangle|\\ &\leq 2\epsilon\|(K+1-|q|-|p|)^{-1}\|\|(K+1+|q|+|p|)^{-1}\|\|\varphi\|^2.\end{aligned}$$

missä on käytetty Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä, sekä resolventtiyhtälöä (3).

Tarkastellaan seuraavaksi resolventtioperaattorien normeja. Määritellään kaikilla $\epsilon \in [0, \frac{1}{2})$ funktio $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\epsilon(x) = (|x| + 1 - \epsilon)^{-1}$. Nyt siis $f|\sigma(K)(x) = (x+1-\epsilon)^{-1}$, joten $f_\epsilon(K) = (K+1-\epsilon)^{-1}$ lauseen 1.6 mielessä. Koska $\sup_{\epsilon\in[0,\frac{1}{2})} \|f_\epsilon\| = \sup_{\epsilon\in[0,\frac{1}{2})}(1-\epsilon)^{-1} = 2$ ja lauseen 1.6 mukaan $\|f_\epsilon(K)\| \leq \|f_\epsilon\|$, niin $\|(K+1-\epsilon)^{-1}\| \leq 2$ kaikilla $\epsilon \in [0, \frac{1}{2})$. Käyttämällä tätä hyväksi saadaan

$$\|W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^* - (K+1+|q|+|p|)^{-1}\| \leq 8\epsilon.$$

Toisaalta käyttämällä resolventtiyhtälöä (3) saadaan

$$\begin{aligned}
&\|(K+1+|q|+|p|)^{-1} - (K+1)^{-1}\| \\
&= \| - (-1-|q|-|p|+1)(K+1+|q|+|p|)^{-1}(K+1)^{-1}\| \\
&\leq (|q|+|p|)\|(K+1+|q|+|p|)^{-1}\|\|(K+1)^{-1}\| \\
&\leq 4\epsilon,
\end{aligned}$$

joten kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
&\|W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^* - (K+1)^{-1}\| \\
&\leq \|W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^* - (K+1+|q|+|p|)^{-1}\| \\
&\quad + \|(K+1+|q|+|p|)^{-1} - (K+1)^{-1}\| \\
&\leq 12\epsilon,
\end{aligned}$$

kun $|q| + |p| \leq \epsilon$, ts.

$$\lim_{(q,p)\to(0,0)} \|W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^* - (K+1)^{-1}\| = 0.$$

Olkoon

$$\begin{aligned}
k(q,p) &= \mathrm{tr}[|\Psi\rangle\langle\Psi|W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^*] \\
&= \langle\Psi|W(q,p)(K+1)^{-1}W(q,p)^*\Psi\rangle \\
&= \langle W(q,p)^*\Psi|(K+1)^{-1}W(q,p)^*\Psi\rangle,
\end{aligned}$$

missä $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ on Gaussin tila. Koska $(K+1)^{-1} \leq (|Q|+1)^{-1}$ ja $(K+1)^{-1} \leq (|P|+1)^{-1}$, niin tarkastellaan ensin lausekkeita $\langle W(q,p)^*\Psi|(|Q|+1)^{-1}W(q,p)^*\Psi\rangle$ ja $\langle W(q,p)^*\Psi|(|P|+1)^{-1}W(q,p)^*\Psi\rangle$.

Koska kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned} E^Q_{\Psi,\Psi}(x) &= \langle \Psi | E^Q(X)\Psi\rangle \\ &= \int \chi_X(x)|\Psi(x)|^2 dx \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int \chi_X(x) e^{-x^2}, \end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned} \langle \Psi | W(q,p)(|Q|+1)^{-1} W(q,p)^* \Psi\rangle &= \int \tfrac{1}{|x|+1} dE^Q_{\Psi,\Psi}(x+q) \\ &= \int \tfrac{1}{|x-q|+1} dE^Q_{\Psi,\Psi}(x) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int \tfrac{1}{|x-q|+1} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Merkitään $f_q(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{|x-q|+1} e^{-x^2}$. Nyt $\lim_{q\to\infty} f_q(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $|f_q(x)| \leq e^{-x^2}$, joka on integroituva, joten dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\lim_{q\to\infty} \langle \Psi | W(q,p)(|Q|+1)^{-1} W(q,p)^* \Psi\rangle = \lim_{q\to\infty} \int f_q(x) dx = 0.$$

Koska

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\Psi)(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iyx}\Psi(y) dy \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tfrac{1}{\pi^{1/4}} e^{-iyx} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \tfrac{1}{\pi^{1/4}} \cdot \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \tfrac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \Psi(x) \end{aligned}$$

niin kaikilla $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned} E^P_{\Psi,\Psi}(Y) &= \langle \Psi | E^P(Y)\Psi\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}\Psi | E^P(Y)\mathcal{F}\Psi\rangle \\ &= \tfrac{1}{\pi^{1/4}} \int \chi_Y(y) e^{-\frac{y^2}{2}}. \end{aligned}$$

Samoin kuin operaattorin $|Q|$ tapauksessa, saadaan nyt

$$\lim_{p\to\infty} \langle \Psi | W(q,p)(|P|+1)^{-1} W(q,p)^* \Psi\rangle = 0,$$

ts. $\lim_{q,p\to\infty} k(q,p) = 0$.

Operaattori $(K+1)^{-1}$ siis toteuttaa lauseen 1.18 ehdot, eli $(K+1)^{-1}$ on kompakti.

□

Seuraus 5.1. *Olkoon $K = |Q| + |P|$. K:n oleellinen spektri $\sigma_{ess}(K) = \emptyset$. Erityisesti K:lla on pienin ominaisarvo.*

Käyttämällä seurauksen 5.1 antamaa tietoa K:n pienimmän ominaisarvon olemassaolosta saadaan johdettua epätarkkuusrelaatio kovariantin faasiavaruussuureen marginaaleille.

Lause 5.6. *Olkoon G^T kovariantti faasiavaruussuure. Silloin marginaalit G_1^T ja G_2^T toteuttavat epäyhtälön*

$$d(G_1^T, E^Q) \cdot d(G_2^T, E^P) \geq \frac{E_0^2}{4}, \tag{49}$$

missä E_0 on operaattorin $K = |Q| + |P|$ pienin ominaisarvo.

Todistus. Olkoon $\psi_0 \in \mathcal{H}$ operaattorin K pienimpään ominaisarvoon E_0 liittyvä ominaisvektori, jolloin siis

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle \psi_0 | K \psi_0 \rangle \\ &= \langle \psi_0 || Q | \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 || P | \psi_0 \rangle \\ &= \int |x| dE^Q_{\psi_0,\psi_0}(x) + \int |y| dE^P_{\psi_0,\psi_0}(y). \end{aligned}$$

Koska kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned} E^Q_{\psi_0,\psi_0}(X) &= \langle \psi_0 | E^Q(X) \psi_0 \rangle \\ &= \mathrm{tr}[|\psi_0\rangle\langle\psi_0| E^Q(X)] \\ &= \mathrm{tr}[\Pi\Pi^* |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \Pi\Pi^* E^Q(X)] \\ &= \mu_{\Pi^*|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\Pi}(X) \end{aligned}$$

ja vastaavasti $E^P_{\psi_0,\psi_0}(X) = \nu_{\Pi^*|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\Pi}(X)$, niin merkitsemällä $T_0 = \Pi^*|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\Pi$ saadaan

$$\begin{aligned} E_0 &= \int |x| d\mu_{T_0}(x) + \int |y| d\nu_{T_0}(y) \\ &= d(G_1^{T_0}, E^Q) + d(G_2^{T_0}, E^P). \end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt tilannetta $(d(G_1^T, E^Q), d(G_2^T, E^P))$-tasossa. Aikaisemman nojalla operaattoria T varioimalla voidaan saavuttaa kaikki hyperbelin $d(G_1^T, E^Q) \cdot$

$d(G_2^T, E^P) = C$ yläpuolelle jäävät pisteet. Koska E_0 on lineaarikombinaation $d(G_1^T, E^Q) + d(G_2^T, E^P)$ pienin arvo, niin suora $d(G_1^T, E^Q) + d(G_2^T, E^P) = E_0$ leikkaa sallitun alueen tarkalleen yhdessä pisteessä. Tästä seuraan, että kyseinessä suoran ja hyperbelin leikkauspisteessä $T = T_0$. Lisäksi aikaisemmin käsitellyn dilaatiosymmetrian nojalla kaikki reunahyperbelin pisteet voidaan saavuttaa. Lasketaan nyt vakion C arvo, ts. suoran ja hyperbelin leikkauspisteen koordinaattien tulo.

Sijoittamalla $d(G_2^T, E^P) = C \cdot d(G_1^T, E^Q)^{-1}$ suoran yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} & d(G_1^T, E^Q) + C \cdot d(G_1^T, E^Q)^{-1} = E_0 \\ \Rightarrow\ & d(G_1^T, E^Q)^2 - E_0 \cdot d(G_1^T, E^Q) + C = 0 \\ \Rightarrow\ & d(G_1^T, E^Q) = \tfrac{1}{2}(E_0 \pm \sqrt{E_0^2 - 4C}). \end{aligned}$$

Leikkauspisteitä on tarkalleen yksi, kun $T = T_0$, joten diskriminantin $E_0^2 - 4C$ pitää hävitä, mistä saadaan

$$C = \frac{E_0^2}{4}. \tag{50}$$

□

Lasketaan nyt etäisyyksien tulo siinä tapauksessa, että kovariantin faasiavaruussuureen generoi Gaussin tila.

Olkoon $T = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, missä $\Psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on nyt

$$\begin{aligned} \mu_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}(X) &= \mathrm{tr}[\Pi|\Psi\rangle\langle\Psi|\Pi^* E^Q(X)] \\ &= \langle \Pi\Psi | E^Q(X) \Pi\Psi \rangle \\ &= \int \chi_X(x) |\Psi(-x)| dx \\ &= \tfrac{1}{\pi^{1/4}} \int \chi_X(x) e^{-x^2} dx, \end{aligned}$$

joten paikkasuureelle saadaan

$$\begin{aligned} d(G_1^{|\Psi\rangle\langle\Psi|}, E^Q) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} |x| d\mu_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}(x) \\ & \tfrac{1}{\pi^{1/4}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx \\ &= \tfrac{2}{\pi^{1/4}} \textstyle\int_0^{\infty} x e^{x^2} dx \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Koska kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\Pi\Psi)(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iyx}\Psi(-y)dy \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \tfrac{1}{\pi^{1/4}} \int e^{-iyx} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \tfrac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2} \\ &= \Psi(x),\end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned}\nu_{|\Psi\rangle\langle\Psi|}(X) &= \langle \Pi\Psi | E^P(X)\Pi\Psi\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}\Pi\Psi | E^Q(X)\mathcal{F}\Pi\Psi\rangle \\ &= \langle \Psi | E^Q \Psi\rangle \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int \chi_X(x) e^{-x^2} dx\end{aligned}$$

kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, joten $d(G_2^{|\Psi\rangle\langle\Psi|}, E^P) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Etäisyyksien tuloksi siis saadaan

$$d(G_1^{|\Psi\rangle\langle\Psi|}, E^Q) \cdot d(G_2^{|\Psi\rangle\langle\Psi|}, E^P) = \frac{1}{\pi}.$$

On huomattava, että $\frac{1}{\pi}$ ei ole alaraja etäisyyksien tulolle. K:n pienin ominaisarvo voidaan laskea numeerisesti, ja Wernerin mukaan näin saatu alaraja on $C \approx 0,304745 < \frac{1}{\pi}$ [24]. Lisäksi K:n perustila osoittautuu olevan lähellä harmonisen oskillaattorin perustilaa.

Osoitetaan vielä, lause 5.6 pätee myös siinä tapauksessa, että paikka- ja liikemääräsuureiden yhdistetty suure ei (välttämättä) ole kovariantti faasiavaruussuure.

Lause 5.7. *Olkoon M paikka- ja liikemääräsuureiden E^Q_μ ja E^P_ν yhdistetty suure. Silloin marginaalit M_1 ja M_2 toteuttavat epäyhtälön*

$$d(M_1, E^Q) \cdot d(M_2, E^P) \geq \frac{E_0^2}{4}, \tag{51}$$

missä E_0 on operaattorin $K = |Q| + |P|$ pienin ominaisarvo.

Todistus. Lauseen 4.2 mukaan E^Q_μ:llä ja E^P_ν:llä on yhdistetty suure M^{av}, joka on kovariantti faasiavaruussuure, ja siten yhtälön (21) antamaa muotoa jollakin positiivisella jäljen yksi operaattorilla T. Nyt $M_1 = M_1^{av} = E^Q_\mu$ ja $M_2 = M_2^{av} = E^P_\nu$, joten

$d(M_1, E^Q) = d(M_1^{av}, E^Q)$ ja $d(M_2, E^P) = d(M_2^{av}, E^P)$. Koska M^{av} on kovariantti faasiavaruussuure, niin lauseen 5.6 nojalla saadaan

$$d(M_1, E^Q) \cdot d(M_2, E^P) = d(M_1^{av}, E^Q) \cdot d(M_2^{av}, E^P) \geq \frac{E_0^2}{4},$$

missä E_0 on operaattorin K pienin ominaisarvo.

□

5.3 Kaistanleveys

Määritellään lopuksi virheen kaistanleveys (error bar width), joka liittyy läheisesti mittalaitteen kalibrointiin. Tarkastellaan ainoastaan sellaisia tarkkoja suureita, joiden tuki on koko $\mathbb{R}$. Määritelmät ja tulokset ovat peräisin artikkeleista [29] ja [30].

Olkoot $E_1, E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ suureita joista E on tarkka. Jokaiselle $\epsilon \in (0, 1)$, $\delta > 0$ määritellään E_1:n *virhe* E:n suhteen kaavalla

$$\mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E) = \inf\{w > 0 | \forall x \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{H}_1 : \mathbf{p}_\varphi^E(J_{x;\delta}) = 1 \Rightarrow \mathbf{p}_\varphi^{E_1}(J_{x;w}) \geq 1 - \epsilon\}, \tag{52}$$

missä $J_{x;\delta} = [x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}]$. E_1:tä sanotaan E:n ϵ-approksimaatioksi, jos $\mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E) < \infty$ kaikilla $\delta > 0$. Koska virhe on δ:n kasvava funktio, niin voidaan määritellä E_1:n *virheen kaistanleveys* E:n suhteen:

$$\mathcal{W}_\epsilon(E_1, E) = \inf_\delta \mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E). \tag{53}$$

Jos $\mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E) = \infty$ kaikilla $\delta > 0$, niin merkitään $\mathcal{W}_\epsilon(E_1, E) = \infty$. Suuretta E_1 kutsutaan E:n *approksimaatioksi* (äärellisen virheen kaistanleveyden mielessä), jos $\mathcal{W}_\epsilon(E_1, E) < \infty$ kaikilla $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Vastaavasti suuretta $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kutsutaan suureiden E_1 ja E_2 *likimääräiseksi yhdistetyksi suureeksi* jos sen marginaalit

M_1 ja M_2 ovat E_1:n ja E_2:n approksimaatioita. Jos E_1 on E:n approksimaatio, niin kuvaus $\epsilon \mapsto \mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E)$ on ϵ:n vähenevä funktio kaikilla $\delta > 0$.

Lause 5.8. *Olkoot E_1 ja E suureita, joista E on tarkka. E_1:n virheen kaistanleveys E:n suhteen toteuttaa epäyhtälön*

$$\mathcal{W}_\epsilon(E_1, E) \geq \gamma_\epsilon(E_1), \tag{54}$$

missä $\gamma_\epsilon(E_1)$ on yhtälössä (25) määritelty E_1:n resoluutioleveys.

Todistus. Jos $\mathcal{W}_\epsilon(E_1, E) = \infty$, niin epäyhtälö on triviaalisti voimassa, joten voidaan olettaa, että $\mathcal{W}_\epsilon(E_1, E) < \infty$. Tällöin on olemassa $\delta_0 > 0$, jolle $\mathcal{W}_{\epsilon,\delta_0}(E_1, E) < \infty$. Toisaalta $\mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E)$ on δ:n kasvava funktio, joten $\mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E) < 0$ myös kaikilla $\delta \leq \delta_0$. Olkoon $w \geq \mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E)$ jollekin $\delta \in (0, \delta_0]$. Tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $\varphi \in \mathcal{H}_1$, joilla $\mathbf{p}_\varphi^E(J_{x;\delta}) = 1$ on $\mathbf{p}_\varphi^{E_1}(J_{x;w}) \geq 1-\epsilon$. Koska E:n tuki on koko $\mathbb{R}$, niin tästä seuraa, että jokaista $x \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa vektoritila $\varphi \in \mathcal{H}_1$ siten, että $\mathbf{p}_\varphi^{E_1}(J_{x;w}) \geq 1$. Siis $w \geq \gamma_\epsilon(E_1)$, mistä seuraa, että $\mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E) \geq \gamma_\epsilon(E_1)$ kaikilla $\delta > 0$, joten myös $\mathcal{W}_\epsilon(E_1, E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{W}_{\epsilon,\delta}(E_1, E) \geq \gamma_\epsilon(E_1)$.

□

Tämä tarkoittaa, että suureen E_1 resoluutioleveys, joka on positiivioperaattorimitan sisäinen ominaisuus, asettaa alarajan E_1:n virheen kaistanleveydelle minkä tahansa tarkan suureen E suhteen. Lemman seurauksena nähdään lisäksi, että jos E on suure, jonka tuki on koko $\mathbb{R}$, niin jokaisen E:n ϵ-approksimaation E_1 resoluutioleveys on äärellinen, $\gamma_\epsilon(E_1) < \infty$.

Lause 5.9. *Sumeat paikka- ja liikemääräsuureet E^Q_μ ja E^P_ν ovat tarkkojen paikka- ja liikemääräsuureiden E^Q ja E^P approksimaatioita kaikilla todennäköisyysmitoilla $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$.*

Todistus. Riittää todistaa väite paikkasuureelle. Olkoot $\epsilon \in (0, 1)$ ja $\delta > 0$ annettuja. Pitää osoittaa, että on olemassa äärellinen $w > 0$, jolle kaikilla $q \in \mathbb{R}$

on $\mathbf{p}_\varphi^{Q_\mu}(J_{q;w}) \geq 1-\epsilon$ aina, kun $\mathbf{p}_\varphi^{Q}(J_{q;\delta}) = 1$. Olkoon $q_0, w_0 \in \mathbb{R}$ siten, että $\mu(J_{q_0;w_0}) \geq 1-\epsilon$. Kaikilla $x \in J_{q_0;w_0}$ ja $y \in J_{q;\delta}$ on

$$|y-(q-x)| \leq |y-q| + |x-q_0| + |q_0| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{w_0}{2} + |q_0|.$$

Siis aina, kun $w \geq 2|q_0| + w_0 + \delta$, niin $J_{q;\delta} \subset J_{q;w} - x$ kaikilla $x \in J_{q_0,w_0}$. Tällöin $\mathbf{p}_\varphi^{Q}(J_{q;w} - x) = 1$ kaikilla $x \in J_{q_0,w_0}$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_\varphi^{Q_\mu}(J_{q;w}) &= \textstyle\iint_{\mathbb{R}\times J_{q;w}} \mathbf{p}_\varphi^{Q}(y-x)\mu(x)dxdy = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{p}_\varphi^{Q}(J_{q;w}-x)d\mu(x) \\ &\geq \textstyle\int_{J_{q_0;w_0}} \underbrace{\mathbf{p}_\varphi^{Q}(J_{q;w}-x)}_{=1} d\mu(x) = \mu(J_{q_0;w_0}) \geq 1-\epsilon\end{aligned}$$

□

Lause 5.10. *Sumeat paikka- ja liikemääräsuureet E_μ^Q ja E_ν^P toteuttavat epäyhtälöt*

$$\mathcal{W}_{\epsilon_1}(E_\mu^Q, E^Q) \geq \gamma_{\epsilon_1}(E_\mu^Q) = W_{\epsilon_1}(\mu) \tag{55}$$

$$\mathcal{W}_{\epsilon_2}(E_\nu^P, E^P) \geq \gamma_{\epsilon_2}(E_\nu^P) = W_{\epsilon_2}(\nu), \tag{56}$$

missä $W_\epsilon(\mu) = \inf\{w > 0|$on olemassa $x \in \mathbb{R}$ s.e. $\mu(J_{x;w}) \geq 1-\epsilon\}$ on mitan μ kokonaisleveys.

Todistus. Epäyhtälöt seuraavat lauseesta (5.8). Osoitetaan yhtäsuuruus paikkasuureen tapauksessa.

Olkoon $w > 0$ sellainen, että $w \geq \gamma_{\epsilon_1}(E_\mu^Q)$. Tällöin kaikilla $q \in \mathbb{R}$ ja vektoritiloilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$ on $\mathbf{p}_\varphi^{Q_\mu}(J_{q;w}) = \int \mu(J_{q;w}-x)d\mathbf{p}_\varphi^{Q}(x) \geq 1-\epsilon_1$. Pitää siis olla $\mu(J_{q;w}-x) \geq 1-\epsilon_1$ jollakin $x \in \mathbb{R}$, mistä seuraa, että $w \geq W_{\epsilon_1}(\mu)$. Siis $\gamma_{\epsilon_1}(E_\mu^Q) \geq W_{\epsilon_1}(\mu)$.

Olkoon nyt $w > 0$ sellainen, että $w > W_{\epsilon_1}(\mu)$. Silloin $\mu(J_{q;w}) \geq 1-\epsilon_1$ jollakin $y \in \mathbb{R}$. Olkoon $u > w$. Tarkastellaan välejä $J_{x;u}$, missä $x \in J_{q;w}$. Merkitään $J_0 = \bigcap_{x\in J_{q;w}} J_{x;u}$. Nyt $J_0 \subset J_{x;u}$ kaikilla $x \in J_{q;w}$ ja J_0:n pituus on positiivinen. Olkoon $\varphi \in \mathcal{H}_1$ tila, jonka paikkajakauma on keskittynyt J_0:aan, ts. $\mathbf{p}_\varphi^{Q}(J_0) = 1$. Tällöin myös $\mathbf{p}_\varphi^{Q}(J_{x;u}) = 1$ kaikilla $x \in J_{q;w}$. Nyt

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_\varphi^{Q_\mu}(J_{x;u}) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} \mathbf{p}_\varphi^{Q}(J_{x;u}-y)d\mu(y) \geq \int_{J_{q;w}} \mathbf{p}_\varphi^{Q}(J_{x;u}-y)d\mu(y) \\ &= \mu(J_{q;w}) \geq 1-\epsilon_1,\end{aligned}$$

joten $w \geq \gamma_{\epsilon_1}(E^Q_\mu)$. Koska $w > W_{\epsilon_1}(\mu)$ oli mielivaltainen, niin $W_{\epsilon_1}(\mu) \geq \gamma_{\epsilon_1}(E^Q_\mu)$.

□

Paikka- ja liikemääräsuureet E^Q_μ ja E^P_ν ovat yhdessä mitattavia tarkalleen silloin, kun ne ovat kovariantin faasiavaruussuureen G^T marginaaleja. Tällöin niiden resoluutioleveydet saadaan todennäköisyysmittojen μ_T ja ν_T kokonaisleveyksistä. Nämä toteuttavat epäyhtälön $W_{\epsilon_1}(\mu_T) \cdot W_{\epsilon_2}(\nu_T) \geq 2\pi\hbar \cdot (1-\epsilon_1-\epsilon_2)^2$, joten

$$\gamma_{\epsilon_1}(E^Q_{\mu_T}) \cdot \gamma_{\epsilon_2}(E^P_{\nu_T}) = W_{\epsilon_1}(\mu_T) \cdot W_{\epsilon_2}(\nu_T) \geq 2\pi\hbar \cdot (1-\epsilon_1-\epsilon_2)^2, \tag{57}$$

kaikilla $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, joille $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 1$.

Lause 5.11. *Jokainen kovariantti faasiavaruussuure G^T on E^Q:n ja E^P:n likimääräinen yhdistetty suure. G^T:n marginaalien virheen kaistanleveydet paikan ja liikemäärän suhteen toteuttavat epätarkkuusrelaation*

$$\mathcal{W}_{\epsilon_1}(G^T_1, E^Q) \cdot \mathcal{W}_{\epsilon_2}(G^T_2, E^P) \geq 2\pi\hbar \cdot (1-\epsilon_1-\epsilon_2)^2 \tag{58}$$

kaikilla $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, joille $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 1$.

Todistus. Koska kovariantin faasiavaruussuureen marginaalit ovat sumeat paikka- ja liikemääräsuureet, niin lauseen ensimmäinen väite seuraa lauseesta (5.10). Epäyhtälö seuraa yhtälöistä (55), (56) ja (57).

□

Seuraavaksi osoitetaan, että paikan ja liikemäärän yhdistettyä suuretta M vastaavan kovariantin faasiavaruussuureen M^{av} marginaalien resoluutioleveydet ja virheen kaistanleveydet ovat korkeintaan yhtä suureet kuin vastaavat arvot M:n marginaaleille. Tällöin voidaan jälleen rajoittua tarkastelemaan kovariantteja suureita. Suure $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on paikan ja liikemäärän (ϵ_1, ϵ_2)-approksimaatio, jos sen ensimmäinen marginaali M_1 on E^Q:n ϵ_1-approksimaatio ja toinen marginaali M_2 on

E^P:n ϵ_2-approksimaatio. Eksplisiittisesti ilmaistuna tämä tarkoittaa sitä, että jokaista $\delta > 0$ kohti on olemassa positiiviset luvut $w, w' < \infty$ siten, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

(i) kaikilla $q \in \mathbb{R}$ ja $\varphi \in \mathcal{H}_1$, joilla $\mathbf{p}_\varphi^Q(J_{q;\delta}) = 1$, on $\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(J_{q;w}) \geq 1 - \epsilon_1$

(ii) kaikilla $p \in \mathbb{R}$ ja $\varphi \in \mathcal{H}_1$, joilla $\mathbf{p}_\varphi^P(J_{p;\delta}) = 1$, on $\mathbf{p}_\varphi^{M_2}(J_{p;w}) \geq 1 - \epsilon_2$

Koska yhdistettyä suuretta M vastaavan kovariantin faasiavaruussuureen M^{av} tapauksessa joudutaan tarkastelemaan muotoa $M(f) = \int f(x)dM(x)$ olevia funktionaaleja, niin (ϵ_1, ϵ_2)-approksimaation määritelmä pitää ilmaista siihen sopivassa muodossa. Tämä on tehty seuraavassa lemmassa.

Lemma 5.1. *Olkoot $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, \frac{1}{2})$ annettuja. Suure $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on E^Q:n ja E^P:n (ϵ_1, ϵ_2)-approksimaatio jos ja vain jos jokaista $\delta > 0$ kohti on olemassa positiiviset luvut $w, w' < \infty$ siten, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

(i') *kaikilla $q \in \mathbb{R}$ ja $f \in BC(\mathbb{R})$, joille $\chi_{J_{q;w}} \leq f \leq 1$, sekä kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$, joille $\mathbf{p}_\varphi^Q(J_{q;\delta}) = 1$, on $\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(f) \geq 1 - \epsilon_1$*

(ii') *kaikilla $p \in \mathbb{R}$ ja $g \in BC(\mathbb{R})$, joille $\chi_{J_{p;w'}} \leq g \leq 1$, sekä kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$, joille $\mathbf{p}_\varphi^P(J_{p;\delta}) = 1$, on $\mathbf{p}_\varphi^{M_2}(g) \geq 1 - \epsilon_2$*

Todistus. Oletetaan ensin, että M on E^Q:n ja E^P:n (ϵ_1, ϵ_2)-approksimaatio. Olkoon $\delta > 0$. Silloin on olemassa positiiviset luvut w, w' siten, että ehdot (i) ja (ii) toteutuvat. Nyt jokaisella Borel-mitallisella funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $\chi_{J_{q;w}} \leq f \leq 1$ on $\int (f(x) - \chi_{J_{q;w}}(x)) d\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(x) \geq 0$, joten

$$\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(J_{q;w}) = \int \chi_{J_{q;w}}(x) d\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(x) \leq \int f(x) d\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(x) = \mathbf{p}_\varphi^{M_1}(f) \leq 1,$$

ja vastaavasti M_2:lle. Siis ehdot (i') ja (ii') ovat voimassa.

Oletetaan seuraavaksi, että M on sellainen suure, että annettuja $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, \frac{1}{2})$ ja $\delta > 0$ kohti on olemassa luvut $w, w' < \infty$ siten, että ehdot (i') ja (ii') ovat voimassa. Riittää osoittaa, että ehto (i) toteutuu. Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$

funktio $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ seuraavasti:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx + 1 - n(q - \frac{1}{2}) & \text{jos } \frac{w}{2} \leq q - x < \frac{w}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{jos } |q - x| \leq \frac{w}{2} \\ -nx + 1 + n(q + \frac{1}{2}) & \text{jos } \frac{w}{2} \leq x - q < \frac{w}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

Nyt $f_n \in BC(\mathbb{R})$ ja $\chi_{J_{q;w}} \leq f_n \leq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ sekä $f_n \to \chi_{J_{q;w}}$ tasaisesti, joten $\lim_{n\to\infty} \| \int f_n dM_1 - \int \chi_{J_{q;w}} dM_1 \| = 0$ ja siis erityisesti $\int f_n d\mathbf{p}_\varphi^{M_1} \to \int \chi_{J_{q;w}} d\mathbf{p}_\varphi^{M_1}$ kun $n \to \infty$. Jokaista $\epsilon > 0$ kohti on siis olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten,että $|\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(J_{q;w}) - \mathbf{p}_\varphi^{M_1}(f_n)| < \epsilon$, kun $n \geq n_0$. Koska kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$, joilla $\mathbf{p}_\varphi^Q(J_{q;w}) = 1$ on $\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(f_n) \geq 1 - \epsilon_1$, niin $\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(J_{q;w}) \geq \mathbf{p}_\varphi^{M_1}(f_n) - |\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(J_{q;w}) - \mathbf{p}_\varphi^{M_1}(f_n)| \geq 1 - \epsilon_1 - \epsilon$, kun $n \geq n_0$. Tämä on voimassa kaikilla $\epsilon > 0$, joten myös $\mathbf{p}_\varphi^{M_1}(J_{q;w}) \geq 1 - \epsilon_1$.

□

Tarkistetaan seuraavaksi, että M^{av} todella toteuttaa nämä ehdot. Jos M on E^Q:n ja E^P:n (ϵ_1, ϵ_2)-approksimaatio, niin jokaista ϵ_1 ja $\delta > 0$ kohti on olemassa positiivinen luku $w < \infty$ siten, että M_1 toteuttaa ehdon (i'). Jos $f \in BC(\mathbb{R})$ on sellainen, että $\chi_{J_{q;w}} \leq f \leq 1$, niin funktio $\tilde{f}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}_1(q,p) = f(q)$ kaikilla $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ on rajoitettu ja jatkuva, eli $\tilde{f}_1 \in BC(\mathbb{R}^2)$. Lisäksi $\chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}} \leq \tilde{f}_1 \leq 1$. Ehto (i') voidaan nyt ilmaista seuraavasti: kaikilla $q \in \mathbb{R}$ ja $\tilde{f}_1 \in BC(\mathbb{R}^2)$, joilla $\chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}} \leq \tilde{f}_1 \leq 1$, sekä kaikilla vektoritiloilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$, joilla $\mathbf{p}_\varphi^Q(J_{q;\delta}) = 1$ on $\mathbf{p}_\varphi^M(\tilde{f}_1) \geq 1 - \epsilon_1$.

Tarkastellaan seuraavaksi termejä $\langle W(q',p')^*\varphi | M(\tilde{f}_1^{(q',p')}) W(q',p')^*\varphi \rangle$, missä $\varphi \in \mathcal{H}_1$, $(q',p') \in \mathbb{R}^2$ ja $\tilde{f}_1 \in BC(\mathbb{R}^2)$ ovat mielivaltaisia. Jos nyt $\chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}} \leq \tilde{f}_1 \leq 1$, niin funktiolle $\tilde{f}_1^{(q',p')}$ on voimassa $\chi_{J_{q-q',w}\times\mathbb{R}} \leq \tilde{f}_1^{(q',p')} \leq 1$. Jos vektoritilalle φ on voimassa $\mathbf{p}_\varphi^Q(J_{q;w}) = 1$, niin

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^Q_{W(q',p')^*\varphi}(J_{q-q';\delta}) &= \langle W(q',p')^*\varphi | E^Q(J_{q-q';\delta}) W(q',p')^*\varphi \rangle = \langle \varphi | E^Q(J_{q;\delta})\varphi \rangle \\ &= \mathbf{p}_\varphi^Q(J_{q;\delta}) = 1. \end{aligned}$$

Siis

$$\theta[\tilde{f}_1; \varphi, \varphi](q',p') = \langle W(q',p')^*\varphi | M(\tilde{f}_1^{(q',p')}) W(q',p')^*\varphi \rangle \geq 1 - \epsilon_1,$$

joten $\mathbf{p}_\varphi^{M_1^{av}}(f) = \langle\varphi|M^{av}(\tilde{f}_1)\varphi\rangle = m(\theta[\tilde{f}_1;\varphi,\varphi]) \geq 1-\epsilon_1$.

Lause 5.12. *Olkoon M E^Q:n ja E^P:n likimääräinen yhdistetty suure. Sitä vastaava kovariantti faasiavaruussuure M^{av} on myös E^Q:n ja E^P:n likimääräinen yhdistetty suure, ja se toteuttaa epäyhtälöt*

$$\mathcal{W}_{\epsilon_1,\delta}(M_1, E^Q) \geq \mathcal{W}_{\epsilon_1,\delta}(M_1^{av}, E^Q) \tag{59}$$

$$\mathcal{W}_{\epsilon_2,\delta}(M_2, E^P) \geq \mathcal{W}_{\epsilon_2,\delta}(M_2^{av}, E^Q). \tag{60}$$

Todistus. Riittää todistaa epäyhtälö (59). Olkoot $\epsilon_1 \in (0,1)$ ja $\delta > 0$ annettuja. Olkoon $w < \infty$ sellainen positiivinen luku, että kaikilla $q \in \mathbb{R}$ ja $\psi \in \mathcal{H}_1$, joilla $\mathbf{p}_\psi^Q(J_{q;\delta}) = 1$ on $\mathbf{p}_\psi^{M_1}(J_{q;w}) \geq 1-\epsilon_1$. Nyt kaikilla $f \in BC(\mathbb{R}^2)$, joille $\chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}} \leq f \leq 1$ on

$$\mathbf{p}_\psi^M(f) = \int f(x)d\mathbf{p}_\psi^M(x) \geq \int \chi_{\chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}}}(x)d\mathbf{p}_\psi^M(x) = \mathbf{p}_\psi^M(\chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}}) = \mathbf{p}_\psi^{M_1}(J_{q;w}) \geq 1-\epsilon_1.$$

Kuten edellä, tästä seuraa, että myös $\mathbf{p}_\psi^{M^{av}}(f) \geq 1-\epsilon_1$. Olkoon f_n kuten lemmassa (5.1). Määritellään funktio $\tilde{f}_{n,1} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ kaavalla $\tilde{f}_{n,1}(x,y) = f_n(x)$. Nyt $\tilde{f}_{n,1} \in BC(\mathbb{R}^2)$ ja $\chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}} \leq \tilde{f}_{n,1} \leq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, sekä $\tilde{f}_{n,1} \to \chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}}$ tasaisesti. Siis $\int \tilde{f}_{n,1}d\mathbf{p}_\psi^{M^{av}} \to \int \chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}}$, kun $n \to \infty$. Siis jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $|\mathbf{p}_\psi^{M^{av}}(\chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}}) - \mathbf{p}_\psi^{M^{av}}(\tilde{f}_{n,1})| < \epsilon$, kun $n \geq n_0$. Koska kaikilla $\psi \in \mathcal{H}$, joilla $\mathbf{p}_\psi^Q(J_{q;w}) = 1$ on $\mathbf{p}_\psi^{M^{av}}(\tilde{f}_{n,1}) \geq 1-\epsilon_1$, niin

$$\mathbf{p}_\psi^{M_1^{av}}(J_{q;w}) = \mathbf{p}_\psi^{M^{av}}(\chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}}) \geq \mathbf{p}_\psi^{M^{av}}(\tilde{f}_{n,1}) - |\mathbf{p}_\psi^{M^{av}}(\chi_{J_{q;w}\times\mathbb{R}}) - \mathbf{p}_\psi^{M^{av}}(\tilde{f}_{n,1})| \geq 1-\epsilon_1-\epsilon,$$

kun $n \geq n_0$. Koska ϵ on mielivaltainen, niin $\mathbf{p}_\psi^{M_1^{av}}(J_{q;w}) \geq 1-\epsilon_1$. On siis osoitettu, että jos $w \geq \mathcal{W}_{\epsilon_1,\delta}(M_1, E^Q)$, niin $w \geq \mathcal{W}_{\epsilon_1,\delta}(M_1^{av}, E^Q)$.

□

Seuraava lause antaa vastaavat epäyhtälöt resoluutioleveyksille.

Lause 5.13. *Olkoon M E^Q:n ja E^P:n likimääräinen yhdistetty suure. Sitä vastaava kovariantti faasiavaruussuure M^{av} toteuttaa epäyhtälöt*

$$\gamma_{\epsilon_1}(M_1) \geq \gamma_{\epsilon_1}(M_1^{av}) \tag{61}$$

$$\gamma_{\epsilon_2}(M_2) \geq \gamma_{\epsilon_2}(M_2^{av}). \tag{62}$$

Todistus. Todistetaan epäyhtälö (61). Olkoon $\epsilon_1 \in (0,1)$ annettu. Olkoon $w > 0$ sellainen luku, että jokaista $x \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa vektoritila $\psi \in \mathcal{H}_1$ siten, että $\mathbf{p}_\psi^{M_1}(J_{x;w}) \geq 1 - \epsilon_1$. Samoin kuin edellisen lemman todistuksessa tästä seuraa, että $\mathbf{p}_\psi^{M_1^{av}}(J_{x;w}) \geq 1 - \epsilon_1$. Siis aina kun $w \geq \gamma_{\epsilon_1}(M_1)$, niin $w \geq \gamma_{\epsilon_1}(M_1^{av})$.

□

Edellä todistetut lauseet voidaan nyt koota lauseeksi, joka ilmaisee virheen kaistanleveyteen ja resoluutioleveyteen liittyvät epätarkkuusrelaatiot.

Lause 5.14. *Olkoon M E^Q:n ja E^P:n likimääräinen yhdistetty suure. Silloin kaikilla $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0,1)$, joille pätee $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 1$, M:n marginaalien virheen kaistanleveydet ja resoluutioleveydet toteuttavat epätarkkuusrelaatiot*

$$\mathcal{W}_{\epsilon_1}(M_1) \cdot \mathcal{W}_{\epsilon_2}(M_2) \geq 2\pi\hbar \cdot (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2)^2 \tag{63}$$

$$\gamma_{\epsilon_1}(M_1) \cdot \gamma_{\epsilon_2}(M_2) \geq 2\pi\hbar \cdot (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2)^2 \tag{64}$$

Viitteet

[1] W. Heisenberg, Über den anschaulichen inhalt der quantentheorischen kinematik und mechanik, *Z. Phys.* **43** 172-198 (1927).

[2] P. Lahti, Kari Ylinen, *Johdatus kvanttimekaniikkaan*, Suomen fyysikkoseura, 1989.

[3] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, Inc. 1972.

[4] C. Carmeli, T. Heinonen and A. Toigo, On the coexistence of position and momentum observables, *J. Phys. A: Math. Theor.* **38** 5253-5266 (2005).

[5] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[6] S. K. Berberian, *Notes on Spectral Theory*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, 1966.

[7] E. B. Davies, *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press, 1995.

[8] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, Inc. 1975.

[9] R. Werner, Quantum harmonic analysis on phase space, *J. Math. Phys.* **25** 1404-1411 (1984).

[10] N. Wiener, Tauberian theorems, *Ann. Math.* **33** 1-100 (1932).

[11] H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, Oxford University Press, 1968.

[12] C. Carmeli, T.Heinonen and A. Toigo, Position and momentum observables on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^3$, *J. Math. Phys.* **45** 2526-2539 (2004).

[13] D. P. L. Castrigiano, On Euclidian systems of covariance for massless particles, *Lett. Math. Phys.* **5** 303-309 (1981).

[14] A. S. Holevo, Covariant measurements and uncertainty relations, *Rep. Math. Phys.* **16** 385-400 (1979).

[15] J. Kiukas, P. Lahti, K. Ylinen, Phase space quantization and the operator moment problem, *J. Math. Phys. Theor.* **47** 072104 (2006).

[16] C. Carmeli, T. Heinonen, A. Toigo, Intrinsic unsharpness and approximate repeatability of quantum measurements, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 1303-1323 (2007).

[17] C. R. Putnam, *Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics*, Springer-Verlag, 1967.

[18] P. Busch, M. Graborowski, P. Lahti, *Operational Quantum Physics*, Springer-Verlag, 1995.

[19] D. F. Walls, G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, 1994.

[20] W. Stulpe, *Classical Representations of Quantum Mechanics Related to Statistically Complete Observables*, Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 1999.

[21] P. Lahti, J. Kiukas, A Note on the preparation uncertainty relations for unbiased joint measurements, unpublished manuscript.

[22] C. Berg, J. P. R. Christensen, P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[23] T. Moreland, S. Gudder, Infima of Hilbert space effects, *Linear Algebra and Its Applications* **286** 1-17 (1999).

[24] R. Werner, The uncertainty relation for joint measurement of position and momentum, *Qu. Inf. Comp.* **4** 546-562 (2005).

[25] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis vol I, Structure of Topological Groups. Integration Theory, Group Representations*, Academic Press, New York, 1963.

[26] P. Busch, T. Heinonen, P. Lahti, Noise and disturbance in quantum measurement, *Phys. Lett. A.* **320** 261-270 (2004).

[27] M. Ozawa, Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements, *Ann. Phys.* **311** 350-416 (2004).

[28] P. Lahti, States of minimal uncertainty and maximal information for position and momentum observables in quantum theory, *Rep. Math. Phys.* **23** 289-297 (1986).

[29] P. Busch, D. Pearson, Universal joint-measurement uncertainty relation for error bars, *J. Math. Phys.* **48** 082103 (2007).

[30] P. Busch, D. B. Pearson, Inaccuracy and unsharpness in approximate joint measurements of position and momentum, unpublished manuscript.