

PTOLEMAIOKSEN LAUSEEN YLEISTYKSESTÄ
TASOKÄYRIEN TASAISUUDEN LUONNEHTIMISEKSI

Eero Harmaala

Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2012

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HARMAALA, EERO: Ptolemaioksen lauseen yleistyksestä tasokäyrien
tasaisuuden luonnehtimiseksi

Pro gradu -tutkielma, 60 s.

Matematiikka

Toukokuu 2012

Tutkielma tarkastelee tasokäyrien tasaisuuden mittaamista lukuarvona, jonka määritelmä perustetaan geometriseen Ptolemaioksen lauseeseen. Tarkoituksena on selvittää, missä määrin luotu mitta sopii käyrien tasaisuuden luonnehdinnaksi, mutta päämääränä on myös määrittää tavanomaisimpien tasokuvioiden tasaisuus mitalla mitattuina.

Mitattava arvo on tullut jo aikaisemmissa tutkimuksissa esille, ja sen perusteella voidaan muotoilla välttämätön ja riittävä ehto niin sanotuille kvasiympyröille. Myös yhteys K -kvasiympyröitä kuvaavaan suureeseen K on olemassa. Silti arvon tutkimus on toistaiseksi ollut vähäistä, joten tutkielma syventyy arvon määrittämisen lisäksi uusien menetelmien kehittämiseen. Pääasiallisena työkaluna tässä tehtävässä ovat Möbius-kuvaukset.

Lukuarvon tutkimuksen ohella selvitetään sen yhteyksiä toiseen käyräkohtaiseen vakioon. Tasoalueille määritelty uniformisuusvakio ilmentää eräässä esitysmuodossa samankaltaisia piirteitä kuin alueen reunakäyrälle kehitetty tasaisuuden mitta. Tähän näennäiseen yhteyteen perustuva tutkimushypoteesi osoitetaan alkuperäisessä muodossaan osittain vääräksi, mutta otaksuma tulee jalostetuksi saatujen tulosten perusteella. Vaikka tyhjentävää kuvausta yhteydestä ei saada, tutkimus paljastaa samankaltaisuuksia ja eroja tarkasteltavien lukujen luonteissa.

Asiasanat: geometria, matemaattinen analyysi.

Sisältö

Johdanto	1
1 Tutkimuksen lähestymistapa ja menetelmät	5
1.1 Kompleksitason geometriasta ja Möbius-kuvauksista	5
1.2 Merkinnöistä	7
2 Arvo kolmiolla ja kulma-alueilla	8
2.1 Tarkastelu kulma-alueiden reunalla	8
2.1.1 Yksi piste kulmapisteenä	8
2.1.2 Kulma-alueen muut tapaukset	11
2.1.3 Möbius-yhtenevät alueet ja käyrät	13
2.2 Kaksikulmainen alue	14
2.3 Kolmio	15
3 Yleistetyt kuvausmenetelmät	17
3.1 Katsaus Seittenrannan tuloksiin	17
3.1.1 Yleistyksiä ja niiden seurauksia	18
3.2 Kulmatuloksia	23
3.3 Nelikulmio	26
3.3.1 Suunnikas	27
3.4 Konveksit kaaret	30
3.5 Ellipsi	33
4 Vertailukohde uniformisuusvakiosta	36
4.1 Uniformisista alueista	36
4.2 Kulmalliset alueet	37
4.3 Säteittäin jatkuvat alueet	42
4.4 Ellipsi	44
4.5 Uniformisuusvakion kvasi-Möbius-invarianssista	46
4.5.1 Yksikkökiekon komplementti invarianssin sovelluksena	47
4.6 Nelikulmiot	49
4.7 Kolmiot	51
5 Tulokset ja päätelmät	54
Kirjallisuutta	59

Johdanto

Geometrinen tasokuvioiden kuvailuun on monia tapoja. Siinä missä aksiomaattinen geometria ottaa lähtökohdaksi tietyt perusoletukset, joilla rajataan intuitioon nojautuminen mahdollisimman suppeaksi, geometrian sovellukset ja analyttinen matematiikka tarjoavat kirjon luontevia määreitä *yhdenmuotoisuudesta* aina *kaarevuuteen*. Silti ei ole aivan ilmeistä, miten kukin luonnollisen kielen kuvaileva määre on tulkittava matemaattisesti.

Asetetaan kysymykseksemme, mitä tasokäyrän *pyöreydellä* ja *tasaisuudella* voidaan tarkoittaa, ja miten tämänkaltaista ominaisuutta on mitattava. Välttämätön edellytys luonnehdinnalle on epäilemättä se, että ympyrä on kuvailtava pyöreäksi. Ilmeinen tapa vaatimuksen täyttämiseksi onkin aloittaa tunnetusta ja täsmällisestä ehdosta, joka liittyy ympyrän saumattomasti lukuarvoihin. Eräs tällainen klassinen geometrian tulos on Ptolemaioksen lause.

Lause 1 (Ptolemaioksen). *Kun $\diamond ABCD$ on syklinen nelikulmio, niin*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Ensimmäinen hyvä syy tämän luonnehdinnan valitsemiseen on, että käänteinen tulos pitää paikkansa tietyssä muodossa, kun ympyröiksi hyväksytään myös suorat. Saamme tästä tarkan ehdon sille, milloin neljä pistettä ovat järjestettyinä ympyrällä. Lause yleistyy vielä täsmällisempään muotoon epäyhtälönä (esim. Berger, 10.9.2).

Lause 2 (Ptolemaioksen epäyhtälö). *Nelikulmiolle $\diamond ABCD$ on voimassa*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD,$$

ja yhtälö pätee tarkalleen silloin, kun nelikulmio on syklinen tai pisteet ovat samalla suoralla järjestyksessä.

Tämän perusteella saamme luonnehdinnan sille, miten paljon neljän pisteen keskinäinen asetelma poikkeaa ympyrällä sijaitsemisesta.

Määritelmä 1. Kun A, B, C ja D ovat neljä eri pistettä, nimetään *Ptolemaioksen luvuksi* arvo

$$p(A, B, C, D) = \frac{AB \cdot CD + AD \cdot BC}{AC \cdot BD} \geq 1.$$

Koska tavoitteenamme on luoda tapa mitata nimenomaan *käyrien* pyöreyttä ja tasaisuutta, määritelmä on täydennettävä käsittämään kaikki järjestetyt pistenelikot käyrillä. Luonnollinen valinta mitattavaksi arvoksi on silloin seuraavanlainen.

Määritelmä 2. Olkoon $J \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ Jordan-kaari tai Jordan-käyrä, ja määritellään arvo

$$P(J) = \sup p(A, B, C, D),$$

missä A, B, C ja D ovat pisteitä järjestyksessä käyrältä. Kun lukuarvo on äärellisenä olemassa, kutsumme sitä käyrän *P-arvoksi*.

Tällainen määritelmä karakterisoi hyvin ainakin ympyrät sekä janat, ja antaa P -arvon käänteisluvulle $1/P \in [0, 1]$ mielekkään tulkinnan käyrän *pyöreytensä* sikäli kuin pyöreys ajatellaan yleisessä mielessä käyrän *tasaisuudeksi*. Rajoitus Jordan-kaariksi ja Jordan-käyriksi ei liene välttämätön, mutta se takaa injektiivisen parametriesityksen ja niin ollen myös tarkan määritelmän järjestetyistä käyräpisteistä.

Nyt, kun pyöreys on tullut yhdellä tavalla määriteltyksi, seuraa jatkokysymys siitä, kuinka pyöreitä tavanomaisimmat tasokäyrät mitallamme mitattuina ovat. Koska käyrät ovat suljettuja joukkoja, arvo 1 saavutetaan vain ympyröiden ja suorien osajoukoilla, mitä sopii olettaakin. Ensimmäinen päämäärämme on määrittää arvoja tasokäyriille ja kehittää menetelmiä näiden arvojen laskemiseen. Ennen tähän syventymistä teemme kuitenkin katsauksen mahdollisiin sovelluksiin ja otamme lisämotiivin tutkimukseen siitä, että se tuo samalla osansa myös muiden analyyttisten ongelmien ratkaisemiseen.

Tutkimuksen taustasta ja päämääristä

Tutkittavaksi valittu arvo on ollut esillä jo aikaisemmissa tutkimuksissa, ja sille on esitetty yhteyksiä eritoten *kvasikonformisiin kuvauksiin*. Tämän tutkimuksen toisena päämääränä on valottaa näitä yhteyksiä ja tulostemme seurauksia, kuitenkin ilman perinpohjaista syventymistä itse kvasikonformikuvausten teoriaan. Teemme seuraavassa yleiskatsauksen aiheeseen.

Kompleksitason kvasikonformiset kuvaukset ovat tason homeomorfismeja itselleen, joilla kuvauksen dilataatio on rajoitettu jollain arvolla K . Dilataatio itsessään mittaa kuvauksen paikallista vääristymää, ja rajatapauksena $K = 1$ ovatkin tarkalleen kaikki konformikuvaukset eli kuvaukset, jotka ovat paikallisesti kulmat säilyttäviä.

Kvasikonformisten kuvausten pohjalta voidaan luonnollisella tavalla määritellä myös kvasikonformiset ympyrät eli *kvasiympyrät*. Laajennetun kompleksitason Jordan-käyrä $J \subset \mathbb{C}$ on kvasiympyrä silloin, kun on olemassa tason kvasikonforminen kuvaus, joka kuvaa käyrän J ympyräksi. Kuvauksen dilataatio liitetään käsitteeseen puhumalla K -kvasiympyröistä. Kvasiympyröiden yhteyden määrittelemäämme P -arvoon osoitti Ahlfors (1963). Tulkinta seuraavassa muodossa on esitetty myöhemmissä artikkeleissa (esim. Rickman 1966, Blevins 1973).

Lause 3 (Ahlfors). *Jordan-käyrä $J \subset \mathbb{C}$ on kvasiympyrä, jos ja vain jos arvo*

$$\sup \frac{|z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3|}{|z_1 - z_3||z_2 - z_4|} = \sup p(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

on äärellisenä olemassa kaikilla järjestetyillä pistenelikoilla $z_1, z_2, z_3, z_4 \in J$.

Jordan-käyrät J , joilla $P(J) < \infty$, muodostavat siis varsin mielenkiintoisen käyrien luokan. Silti arvon tutkimus on jäänyt kovin suppeaksi. Merkillepantavin P -arvon määrittämiseen liittyvä tulos lienee Pasi Seittenrannan lisensiaatintutkielmassa (1996) esittämä todistus seuraavalle lauseelle.

Lause 4 (Seittenranta). *Kun J on kolmion reunakäyrä ja $\alpha_{\min} \in (0, \pi/3]$ sen pienin sisäkulma, niin*

$$P(J) = \frac{1}{\sin \frac{\alpha_{\min}}{2}} \geq 2.$$

Seittenrannan tutkielma on ansioitunut lisäksi erään yhteyden toteamisessa kvasiympyröihin. Tämä yhteys esitetään seurauksena kahdesta aikaisemmasta tuloksesta. Otetaan käsiteltäväksemme yksi tulkinta lauseelle, jonka alun perin esittivät Agard ja Gehring (1965).

Lause 5 (Agard & Gehring). *Kun $f : \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^2$ on K -kvasikonforminen kuvaus ja $a, b, c, d \in \bar{\mathbb{R}}^2$ erillisiä pisteitä, niin silloin*

$$\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{p(f(a), f(b), f(c), f(d))}\right) \geq \varphi_{1/K,2} \left(\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{p(a, b, c, d)}\right) \right).$$

Lauseen funktio $\varphi_{K,n} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ on homeomorfismi, joka on määritelty arvoilla $K > 0$, ja jossa $n = 2$ on dimensio (katso esim. Vuorinen 1988, 7.43). Yllä olevasta lauseen tulkinnasta saadaan seuraus.

Seuraus 1 (Vuorinen 1990). *Kun a, b, c ja d ovat eri pisteitä tässä järjestyksessä ympyrällä ja f on K -kvasikonforminen kuvaus joukossa $\bar{\mathbb{R}}^2$, niin silloin on voimassa*

$$p(f(a), f(b), f(c), f(d)) \leq \frac{1}{\varphi_{1/K,2}(1/\sqrt{2})\varphi_{K,2}(1/\sqrt{2})} \leq 8^{K-1}.$$

Seittenranta totesi tästä arvoon $P(J)$ yhteyden, joka nähdään helposti käyttämällä epäyhtälön äärimmäistä osaa $p(f(a), f(b), f(c), f(d)) \leq 8^{K-1}$.

Seuraus 2 (Seittenranta 1996). *Jos J on K -kvasiympyrä, niin*

$$K \geq 1 + \frac{\log P(J)}{\log 8}.$$

Näin ollen kolmiot ovat K -kvasiympyröitä arvoilla $K \geq 4/3$.

Muista Seittenrannan liseniaatintutkielman luvuista poiketen sen viimeinen luku, joka aiheita käsittelee, ei ole tullut enää jälkeinpäin julkaistuksi. Sitäkin suuremmalla syyllä tarkastelemme myös tutkielmassa esitettyjä tuloksia. Monet näistä tuloksista voidaan esittää yleisesti avaruudessa $\bar{\mathbb{R}}^n$ päteviksi, mutta tasokäyriin liittyvät tulokset luonnollisestikin ovat voimassa, vaikka todistus tehdään ainoastaan tasossa $\bar{\mathbb{R}}^2$, joten keskitymme itse käsittelemään siihen samaistettavaa laajennettua kompleksitasoa $\bar{\mathbb{C}}$.

Tässä tutkimuksessa osoitamme, että tietyt P -arvot ja niiden arviot ovat voimassa yksinkertaisille tasokäyrille. Tulemme lisäksi todistamaan Seittenrannan esittämät päätulokset uusin menetelmin. Sen sijaan, että menetelmämme keskittyisivät ainoastaan yhden ongelman ratkaisemiseen, pyrimme rakentamaan myös yksinomaan Möbius-kuvauksiin liittyviä tuloksia ja aputuloksia.

Yhteyden selvittämisestä uniformisuuteen

Tutkimuksen kolmantena päätavoitteena on kartoittaa lisäyhteyksiä kvasikonformisten kuvausten aihepiirissä. Eräs samankaltainen suure liittyy tasoalueiden *uniformisuuteen*. Perinteinen uniformisuuden määritelmä on geometrinen, mutta se voidaan osoittaa yhtäpitäväksi sellaisen määritelmän kanssa, joka vetoaa *kvasihyperboliseen metriikkaan* (Gehring & Osgood 1979). Tutustumme tarkemmin juuri tähän määritelmään.

Uniformisuudelle on useita keskenään yhtäpitäviä määritelmiä eri metriikoiden avulla ilmaistuna, mutta uniformiseen tasoalueeseen $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ liittyy aina vakio, joka riippuu metriikoiden valinnasta. Kun sitten tarkastellaan kvasihyperbolisen metriikan avulla määriteltyä *uniformisuusvakiota* A_G alueelle G , ja verrataan sitä reunakäyrän ∂G määräämään arvoon $P(\partial G)$, voidaan havaita hämmästyttäviä yhtäläisyyksiä.

Siinä missä näytämme luvussa 1 arvon $P(J)$ invariantiksi Möbius-kuvauksissa, valitsemallamme tavalla määritellyllä uniformisuusvakiolla A_G on lähes vastaava kvasiinvarianssi. Toisaalta niillä harvoilla alueilla, joilla luku A_G tarkasti ennalta tunnetaan, voidaan osoittaa, että $A_G = 1 + P(\partial G)$, jos ∂G on yksinkertainen käyrä. Tällaisia alueita ovat käytännössä kuitenkin vain yksikkökierokko \mathbb{B}^2 , puolitaso \mathbb{H}^2 ja sektorialue $D_\alpha = \{re^{it} \mid 0 < r, 0 < t < \alpha\}$ pienillä kulmilla $\alpha \in (0, \pi]$ (Lindén 2005). Myös joissakin muissa tapauksissa A_G tunnetaan, mutta on otettava huomioon, että alueen reunakäyrän ∂G on oltava yksinkertainen Jordan-käyrä, jotta arvon $P(\partial G)$ määritelmä olisi mielekäs.

Se, että luvut näyttävät käyttäytyvän samankaltaisella tavalla, on motiivinamme tutkia uniformisuusvakiota luvussa 4. Tarkkojen vakioiden määrittäminen osoittautuu hankalaksi, mutta tähtäämme hyvien arvioiden luomiseen. Koska tarkoituksena on täsmentää arvojen välisiä yhtäläisyyksiä, keskitymme etenkin niihin tapauksiin, joille myös P -arvo on määritettävissä.

Viimeiseen lukuun 5 on koottu lopulliset johtopäätökset niin P -arvosta kuin uniformisuusvakiostakin. Analysoimme tulosten perusteella arvojen yhteisiä piirteitä ja eroja. Kuten olettaakin sopii, alustava otaksuma $A_G = 1 + P(\partial G)$ voidaan osoittaa vääräksi ja korvata paremmalla kuvauksella lukujen luonteesta. Täsmällinen yhteys jää toki avoimeksi, mutta tutkimuksen lopuksi muodostamme uusia hypoteeseja ja kysymyksiä jatkotutkimuksen pontimiksi.

1 Tutkimuksen lähestymistapa ja menetelmät

Alkuperäinen geometrinen ongelmanasettelu, joka otettiin tutkimuksen lähtökohdaksi, asettaa vain vähän rajoituksia ongelman ratkaisutavalle. Yksinkertaisimmillaan ratkaisut voidaan perustaa puhtaan geometriisiin argumentteihin, joilla Ptolemaioksen lausekin on todistettavissa. Toisaalta sama ongelma on muotoiltavissa suoraviivaisella tavalla analyttiseksi optimointiongelmaksi, mikä lienee luontevinta tapauksissa, joissa maksimoitavalla arvolla on riittävän yksinkertainen parametrisointi.

Yleisesti ottaen tutkimusongelma on vaativa ratkaistavaksi neljän muuttujan optimointina. Seittenrannan lisensiaatintutkielmassa esitettyjen kaltaisia laskennallisia perusteluita voidaan hyödyntää tietyn rajoituksen, ja seuraavissa luvuissa onkin johdettu muutamia tuloksia vastaavaan tyyliin. Ongelman yksityiskohtainen tarkastelu kuitenkin osoittaa, että sen ratkaisemiseen on hyvä vaihtoehto. Eräs Möbius-kuvauksiin perustettu menetelmä on erityisen käyttökelpoinen.

Tässä tutkielmassa on tietoisesti valittu ratkaisuun lähestymistapa, joka painottuu Möbius-kuvausten hyödyntämiseen, koska suora laskennallinen ratkaisutapa ei ole tehokas monimutkaisissa tapauksissa. Vain perustavimmat tutkielman tulokset on ratkaistu tavalla, jossa vedotaan itse ratkaistaviin funktion arvoihin. Sen sijaan todistukset keskittyvät palauttamaan ongelmatilanteita kuvauksilla tapauksiin, joille on ratkaisu onnistuttu muutoin johtamaan.

1.1 Kompleksitason geometriasta ja Möbius-kuvauksista

Vaikka tutkimusongelma on mahdollista muotoilla täsmällisesti myös n -ulotteisessa avaruudessa, keskitymme tärkeimpänä tapauksena tasogeometriaan ja sen Möbius-kuvauksiin. Tasogeometristen ongelmien tarkastelussa käytetään laajennettua kompleksitasoa $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, jossa Möbius-kuvausten ominaisuudet ovat tarkasti tunnettuja ja yksinkertaisesti määriteltäviä.

Tutkielman tuloksissa oletetaan tunnetuksi laajennetun kompleksitason ja Möbius-kuvausten perusominaisuudet, joista on osa tähän alalukuun todistuksitta koottu. Tarkoituksena on kerrata seuraavassa näitä ominaisuuksia ainakin siltä osin kuin ne ovat myöhempien tulosten kannalta olennaisia, mutta perinpohjaista esitystä Möbius-kuvauksista ei tehdä. Aihetta on käsitelty kattavasti useissa funktioteorian ja geometrian teoksissa (katso esim. Astala 2005, Beardon 2005), joissa väitteet tulevat myös tarkasti perustelluiksi.

Määritelmä 1.1. Kompleksitason Möbius-kuvaukset $w \in \mathcal{Möb}$, $w : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, ovat muotoa

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$. Kun $c \neq 0$, niin määritellään $w(\infty) = a/c$ ja $w(-d/c) = \infty$, ja kun $c = 0$, niin määritellään $w(\infty) = \infty$.

Lause 1.2. Määritelmän 1.1 pohjalta voidaan osoittaa oikeiksi seuraavat väittämät:

(i) Möbius-kuvaukset ovat bijektiivisiä kuvauksia laajennetulta kompleksitasolta $\overline{\mathbb{C}}$ itselleen, ja ne muodostavat ryhmän $\mathcal{Möb}$ kuvausten yhdistämisen suhteen.

(ii) Kolme tason pistettä $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ ja niille määritetyt kolme kuvapistettä $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ määräävät yksikäsitteisen Möbius-kuvauksen $w \in \mathcal{Möb}$, jolla $w(z_i) = w_i$ kaikilla $i \in \{1, 2, 3\}$.

Möbius-kuvausten olennaiset ominaisuudet liittyvät ympyröihin, ja asian yhtenäisen käsittely vaatii, että ympyrän käsite laajennetaan kattamaan myös suorat. Jatkossa ympyrällä viitataan siis *yleistettyyn ympyrään*, joka on joko euklidisen geometrian ympyrä $C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r > 0\}$, ($a \in \mathbb{C}$), tai suora $\ell(a, b) = \{ta + (1 - t)b : t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$, ($a, b \in \mathbb{C}$). Käytämme merkintää $\mathcal{C}(a, b, c)$ kolmen eri pisteen $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ kautta kulkevalle ympyrälle. Erityisesti suorat ovat ympyröitä, jotka kulkevat pisteen ∞ kautta: $\ell(a, b) = \mathcal{C}(a, b, \infty)$. Lisäksi määritellään kiekko $\mathbb{D}(a, b, c)$ ympyrän $\mathcal{C}(a, b, c)$ sisäosaa vastaavaksi alueeksi siten, että sisäpuoli tulkitaan vasemmaksi puoleksi kierrettäessä pisteet järjestyksessä.

Lause 1.3. *Kun $w \in \mathcal{Möb}$ on Möbius-kuvaus, niin seuraavat lauseet ovat voimassa.*

- (i) *Jos $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ on ympyrä, niin myös kuvajoukko $w(C)$ on ympyrä.*
- (ii) *Kuvaus w on holomorfinen kuvauksena sekä kulmat että suunnistuksen säilyttävä konformikuvaus. Kompleksitason käyrät leikkaavat samassa kulmassa kuin niiden kuvakäyrät, ja erityisesti suunnistetuilla ympyröillä vasemmat ja oikeat puolet säilyvät kolmen määrittelevän pisteen lukusuunnassa.*

Määritelmä 1.4. Neljän pisteen $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ perusteella määritetään *kaksoissuhde*

$$[a, b, c, d] = \frac{(a - c)(b - d)}{(a - b)(c - d)}.$$

Siinäkin tapauksessa, että yksi pisteistä saa arvon ∞ , kaksoissuhde voidaan määrittää äärellisenä hyödyntämällä sääntöä $\pm\infty/\infty = \pm 1$. Kaksoissuhteen määrittelytavasta on nähtävissä, että sillä on symmetriset muodot

$$[a, b, c, d] = [b, a, d, c] = [c, d, a, b] = [d, c, b, a],$$

mutta on toisaalta huomattava, että vaihtamalla kaksoissuhteessa kolmen viimeisen parametrin järjestystä saadaan kuusi arvoa

$$[a, b, c, d] = \frac{1}{[a, c, b, d]} = 1 - [a, b, d, c] = \frac{1}{1 - [a, c, d, b]} = 1 - \frac{1}{[a, d, b, c]} = \frac{[a, d, c, b] - 1}{[a, d, c, b]},$$

ja yhdessä symmetrioiden kanssa kaikki $4 \cdot 6 = 4!$ permutaatiota tulevat tyhjentävästi käydyiksi läpi.

Lause 1.5. *Kaksoissuhde säilyy Möbius-kuvauksissa. Toisin sanottuna, kuvauksilla $w \in \mathcal{Möb}$ ja pisteillä $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ on voimassa*

$$[w(a), w(b), w(c), w(d)] = [a, b, c, d].$$

Erityisesti lauseen 1.2 kohdan (ii) esittämä kuvaus voidaan ratkaista *kuuden pisteen kaavasta* $[w(z), w_1, w_2, w_3] = [z, z_1, z_2, z_3]$. Kaksoissuhteen avulla Ptolemaioksen lause voidaan myös muotoilla uudella tavalla. Lausekkeiden selkiyttämiseksi kaksoissuhteen itseisarvolle käytetään jatkossa merkintää $|a, b, c, d|$.

Lause 1.6 (Ptolemaiios). *Neljä eri pistettä a, b, c ja d ovat järjestettyinä samalla ympyrällä tarkalleen silloin, kun*

$$1 = p(a, b, c, d) = \frac{|a - b||c - d| + |a - d||b - c|}{|a - c||b - d|} = |a, c, b, d| + |a, c, d, b|.$$

Kaksoissuhteen eri muotojen perusteella luvulle saadaan nyt toisella tavalla alaraja

$$p(a, b, c, d) = |a, c, b, d| + |a, c, d, b| = |[a, c, b, d]| + |1 - [a, c, b, d]| \geq 1,$$

missä yhtäsuuruus on voimassa silloin ja vain silloin, kun pisteet ovat samalla ympyrällä. Lisäksi se, että parametrisoinnin suunnalla ei ole merkitystä arvon $p(J)$ kannalta, nähdään myös symmetriasta

$$p(a, b, c, d) = |a, c, b, d| + |a, c, d, b| = |d, b, c, a| + |d, b, a, c| = p(d, c, b, a).$$

Yhtä lailla $P(J)$ säilyy Möbius-kuvauksissa, jotka kattavat erityisesti kaikki avaruuden siirrot, kierrot ja skaalaukset. Selkeyden vuoksi tässä tutkielmassa pyritään kuitenkin käyttämään aina järjestystä, jossa pisteet kiertävät käyrän vastapäivään.

1.2 Merkinnöistä

Aiheen käsittelyn vaatimat yleisimmät merkinnät on koottu alle taulukoksi viitteineen. Tämän lisäksi merkitsemme Möbius-kuvauksissa pisteiden kuvapistettä heittomerkillä. Esimerkiksi pisteelle a ja peräkkäisille kuvauksille $w, v \in \mathcal{Möb}$ merkitään $a' = w(a)$ ja $a'' = v(a') = v(w(a))$, ellei kuvausten järjestyksestä aiheudu epäselvyyttä.

Merkintä	Merkitys	Määr.
$[a, b, c, d]$	Kaksoissuhde, itseisarvo $ a, b, c, d = [a, b, c, d] $.	s. 6
A_D	Metriikoilla määritelty uniformisuusvakio alueelle D .	s. 37
$\text{ang } z(t)$	Suuntakulma käyrälle, jolla on parametriesitys $z(t)$.	s. 30
\mathbb{B}^n	Yksikkökuula $\{z \in \mathbb{R}^n : z < 1\} \subset \mathbb{R}^n$.	
\mathbb{B}_*^n	Puhkaistu kuula $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$.	s. 48
$\mathbb{B}^n(a, r)$	Avoim kuula $\{z \in \mathbb{R}^n : a - z < r\} \subset \mathbb{R}^n$. Erityisesti myös $\mathbb{B}(a, r) = \mathbb{B}^2(a, r)$ ja $\mathbb{B}^n(r) = \mathbb{B}^n(0, r)$.	s. 37
$\mathcal{C}(a, r)$	Ympyrä $\{z \in \mathbb{C} : z - a = r\}$.	s. 6
$\mathcal{C}(a, b, c)$	Kolmen pisteen $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ kautta kulkeva ympyrä.	s. 6
\mathbb{D}	Yksikkökiekko $\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$.	
$\mathbb{D}(a, b, c)$	Ympyrän $\mathcal{C}(a, b, c)$ rajaama tason alue, joka on pisteiden kiertosuunnassa käyrän vasemmalla puolella.	s. 6
$\mathbb{D}'(a, b, c)$	Kiekon $\mathbb{D}(a, b, c)$ ja sovitetun puolitason leikkausalue.	s. 24
D_α	Kulma-alue $\{re^{it} \in \mathbb{C} : 0 < r, 0 < t < \alpha\}$.	s. 8
$D_{\alpha, \beta}$	Kahden kulman rajaama alue, reunakäyränä $J_{\alpha, \beta}$.	s. 14
δ_G	Seittenrannan itseissuhdemetriikka (<i>absolute ratio metric</i>).	s. 46
\mathbb{H}	Puolitaso $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$.	s. 23
\mathbb{H}^n	Puoliavaruus $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.	
j_G	j -metriikka (<i>distance ratio metric</i>).	s. 36
J_α	Kulmakäyrä $J_\alpha = \partial D_\alpha$.	s. 8
k_G	Kvasihyperbolinen metriikka.	s. 36
$\ell(a, b)$	Pisteiden $a, b \in \mathbb{C}$ kautta kulkeva suora. Myös yleistettynä ympyränä $\ell(a, b) = \mathcal{C}(a, b, \infty)$.	s. 6
$p(a, b, c, d)$	Ptolemaioksen luku neljälle pisteelle.	s. 1
$P(J)$	Ptolemaioksen arvo käyrälle J .	s. 1
\mathbb{R}_*^n	Puhkaistu avaruus $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.	s. 47
σ_D	Ferrandin metriikka.	s. 47

2 Arvo kolmiolla ja kulma-alueilla

Tässä luvussa tavoitteenamme on rakentaa todistus Seittenrannan lauseelle, joka antaa P -arvon kolmioille. Ensimmäinen todistuksemme koostuu tapauskohtaisesti räätälöidyistä kuvauksista, ja on siten varsin monimutkainen, mutta kuvausten käyttämisen edullisuus tulee myöhemmin ilmi. Pääasiallinen syy suoran laskennan välttämiseen on sen kasvava vaativuus käsiteltävien käyrien monimutkaistuessa. Toisaalta tämän luvun tulokset tulivat todistetuiksi kuvauksilla jo ennen tutustumista Seittenrannan työhön. Seuraavissa luvuissa näemme vähitellen, että menetelmän valinta johtaa onnekaasti yleisempiinkin tuloksiin.

Luvun rakenne on seuraava: Ensin määritämme P -arvon kulma-alueen reunakäyrällä siinä tapauksessa, että yksi neljästä pisteestä on kulman kärkipisteenä. Sen jälkeen palautamme muut kulmakäyrän tapaukset Möbius-kuvauksilla edelliseen. Toisena tarkasteltavana käyränä on kaksikulmaisen alueen reunakäyrä. Viimeiseksi jää kolmion tapaus, jonka käsittely kuvauksilla kulma-alueiden jälkeen ei ole enää kovin vaativa. Luvussa 3 kehitämme sitten vielä tätä lukua yleisempiä menetelmiä Möbius-kuvausten rakentamiseksi, esitämme toisen todistuksen kolmiotulokselle, ja siirrymme lopulta tarkastelemaan kolmiota monimutkaisempia tasokäyriä.

2.1 Tarkastelu kulma-alueiden reunalla

Selvitämme ensin arvon $P(J_\alpha)$ kulma-alueen $D_\alpha = \{re^{i\theta} \mid r > 0, 0 < \theta < \alpha\}$ reunakäyrälle $J_\alpha = \partial D_\alpha = \{re^{i\alpha} \mid r \geq 0\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Tämän alaluvun päätuloksena on seuraava lause, joka tulee perustelluksi osion lopussa.

Lause 2.1. *Kun $\alpha \in (0, \pi]$, niin kulma-alueen reunakäyrälle J_α on voimassa*

$$P(J_\alpha) = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Arvon määrittäminen vaatii, että tarkastelu kattaa kaikki järjestetyn pistenelikon $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ asetelmat käyrällä. Symmetrian vuoksi on otettava huomioon vain muutama erilainen tapa, joilla pisteet voivat asettua kulmakäyrän kyljille. Erityiseksi osoittautuu tilanne, jossa yksi pisteistä on käyrän kulmapisteenä.

2.1.1 Yksi piste kulmapisteenä

Aloitetaan määrittämällä arvolle $P(J_\alpha)$ alaraja. Tätä varten tarkastellaan tapausta, jossa yksi pisteistä on kulmapisteenä. Arvon symmetriaominaisuuksien perusteella piste b voidaan valita kulmapisteeksi seuraavan määritelmän mukaisesti.

Määritelmä 2.2. Kun $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ ovat tason pisteitä siten, että pisteestä b avautuu kulma $\alpha = \angle cba \in (0, \pi)$ ja $c \in (b, d)$, niin merkitään

$$P_1(\alpha) = \sup p(a, b, c, d).$$

Koska arvo ei muutu Möbius-kuvauksilla kuvattaessa, niin rajoituksetta b, c ja d voidaan olettaa reaalisiksi ja

$$P_1(\alpha) = \max \left\{ \sup p(te^{i\alpha}, 0, c, d), \sup p(te^{i\alpha}, 0, c, \infty) \right\},$$

missä $t > 0$ ja $0 < c < d$ ovat reaalityyppisiä.

Alaraja saadaan nyt johdetuksi, kun pisteet on asetettu sopivasti suhteessa toisiinsa.

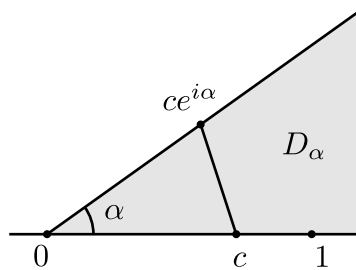
Lause 2.3. *Kun $\alpha \in (0, \pi)$, niin kulma-alueen reunakäyrälle J_α on voimassa*

$$P(J_\alpha) \geq P_1(\alpha) \geq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

ja alaraja saavutetaan jo kulmakäyrän rajoitetussa osassa.

Todistus. Oikeanpuoleisen epäyhtälön todistamiseksi valitaan $b = 0$, $c \in (0, 1)$, $d = 1$ ja $a = ce^{i\alpha}$, vasen puoli seuraa suoraan sisällymisestä. Tilanne on kuvan 1 mukainen, ja arvoksi tulee

$$p(ce^{i\alpha}, 0, c, 1) = \frac{|ce^{i\alpha} - 0| \cdot |c - 1| + |ce^{i\alpha} - 1| \cdot |c - 0|}{|ce^{i\alpha} - c| \cdot |0 - 1|} = \frac{|c - 1| + |ce^{i\alpha} - 1|}{|e^{i\alpha} - 1|}.$$



Kuva 1: Kulma-alue D_α ja pisteet sen reunalla.

Koska $|ce^{i\alpha} - 1| > |c - 1|$ ja $|e^{i\alpha} - 1| = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, niin

$$p(ce^{i\alpha}, 0, c, 1) > \frac{2|c - 1|}{|e^{i\alpha} - 1|} = \frac{1 - c}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Valinta $c = (\sin \frac{\alpha}{2})\varepsilon > 0$ antaa alarajaksi $p((\sin \frac{\alpha}{2})\varepsilon e^{i\alpha}, 0, (\sin \frac{\alpha}{2})\varepsilon, 1) > (\sin \frac{\alpha}{2})^{-1} - \varepsilon$, missä luku $\varepsilon > 0$ on vapaasti valittavissa, joten supremumin määritelmän mukaisesti on oltava

$$P(J_\alpha) \geq P_1(\alpha) \geq \sup_{c \in \mathbb{R}_+} p(ce^{i\alpha}, 0, c, 1) \geq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

□

Huomautus 2.4. Edellisestä lauseesta seuraa jo se, että millä tahansa tasokäyrällä J , jolla on kulma $\alpha \in (0, \pi)$, on oltava $P(J) \geq (\sin \frac{\alpha}{2})^{-1}$. Olennaisesti funktio $(\sin \frac{x}{2})^{-1}$ on aidosti vähenevä välillä $(0, \pi)$, joten pienimmät kulmat antavat aina alarajan. Alaraja on usein hyvä, mutta tulemme näkemään, että jo monikulmioillakin arvot voivat olla suurempia kuin minkä pienin kulma määrää.

Määritetään seuraavaksi yläraja. Teemme laskelmat ensin tapaukselle $d = \infty$, koska voimme hyödyntää siitä saatavaa tulosta äärellisten pisteiden tapauksessa.

Apulause 2.5. Kun $t, c \in \mathbb{R}_+$, niin $p(te^{i\alpha}, 0, c, \infty) \leq (\sin \frac{\alpha}{2})^{-1}$.

Todistus. Ääretöntä koskevia laskusääntöjä käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} p(te^{i\alpha}, 0, c, \infty) &= \frac{|te^{i\alpha} - 0||c - \infty| + |te^{i\alpha} - \infty||0 - c|}{|te^{i\alpha} - c||0 - \infty|} \\ &= \frac{t \cdot \infty + \infty \cdot c}{|te^{i\alpha} - c| \cdot \infty} \\ &= \frac{t + c}{|te^{i\alpha} - c|} \\ &= \frac{t + c}{\sqrt{t^2 + c^2 - 2tc \cos \alpha}} = g(t), \end{aligned}$$

missä viimeinen vaihe seuraa kosinilauseesta. Funktio $g(t)$ on reaalinen ja sen derivaatta on

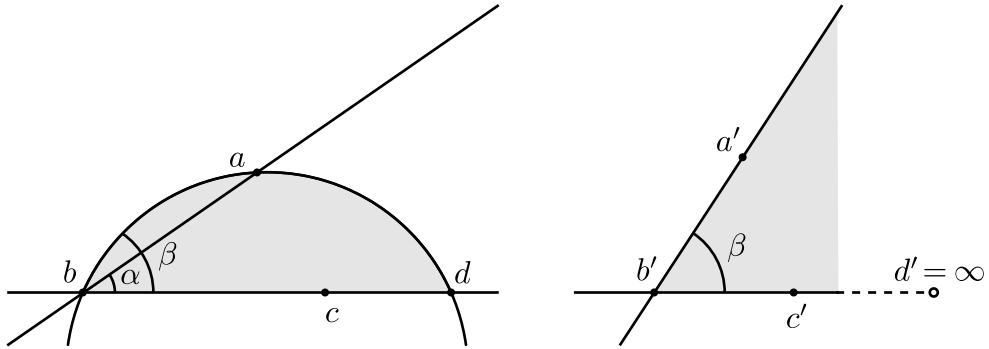
$$g'(t) = (c - t) \cdot \frac{c(1 + \cos \alpha)}{(t^2 + c^2 - 2tc \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

joten pisteessä $t = c$ funktio saavuttaa suurimman arvonsa

$$p(ce^{i\alpha}, 0, c, \infty) = \frac{2}{|e^{i\alpha} - 1|} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad \square$$

Lause 2.6. Kulmilla $\alpha \in (0, \pi)$ on voimassa $P_1(\alpha) = (\sin \frac{\alpha}{2})^{-1}$.

Todistus. Lauseen 2.3 ja apulauseen 2.5 nojalla on osoitettava, että $P_1(\alpha) \leq (\sin \frac{\alpha}{2})^{-1}$ äärellisillä pisteillä. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sitten pisteitä järjestyksessä kulma-alueen D_α reunalla siten, että kulmapisteenä on b . Osoitetaan, että $p(a, b, c, d) < (\sin \frac{\alpha}{2})^{-1}$.



Kuva 2: Kulma-alueen D_α reunan pisteet ja niiden kuvat kulma-alueen D_β reunalla.

Koska pisteistä mikään ei ole ∞ , niin kuvan 2 mukaisesti $\mathcal{C}(b, d, a)$ on ympyrä, joka leikkaa suoran $\ell(b, d)$ kulmassa $\beta > \alpha$. Kun d kuvataan Möbius-kuvauksella pisteeksi $d' = \infty$ ja samalla säilytetään suora $\ell(b, d)$, niin ympyrä $\mathcal{C}(b, d, a)$ kuvautuu suoraksi, joka leikkaa edelleen suoran $\ell(b', d')$ kulmassa β . Nelikko a', b', c', d' voidaan kuvata kulma-alueelle D_β , ja apulauseen 2.5 nojalla

$$p(a', b', c', d') \leq \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} < \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

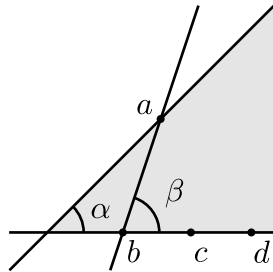
missä toinen epäyhtälö seuraa funktion $(\sin(x/2))^{-1}$ aidosta vähenevyydestä välillä $(0, \pi)$. \square

2.1.2 Kulma-alueen muut tapaukset

Tilanteissa, joissa pistettä ei ole kulmapisteenä, arvo voidaan rajoittaa sopivilla kuvauksilla edelliseen tapaukseen. Aloitetaan tapauksesta, jossa kulma-alueen toisella kyljellä on vain yksi piste.

Lause 2.7. *Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ järjestetty kulma-alueen D_α reunalle niin, ettei mikään pisteistä ole kulmapisteenä. Jos kulman toisella kyljellä on vain yksi piste, niin $p(a, b, c, d) < \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^{-1}$.*

Todistus. Olkoot pisteet b, c ja d kulman α oikealla kyljellä ja $\beta = \angle cba$ kulma pisteessä b . Tällöin $\beta > \alpha$ ja pisteet a, c ja d ovat β -kulmaisen pisteestä b avautuvan kulma-alueen reunalla, kuten kuvassa 3. Erityisesti $p(a, b, c, d) \leq \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{-1} < \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^{-1}$. \square



Kuva 3: Kulma-alueen D_α reunalla olevat pisteet avautuvat kulmaan $\beta > \alpha$.

Viimeiseksi tapaukseksi jää se, että kulma-alueen kummallakin kyljellä on kaksi pistettä. Täsmällisen todistuksen esittämistä varten todetaan ensin aputulokset.

Apulause 2.8. *Kolmen eri pisteen $a, b, c \in \mathbb{C}$ kautta kulkevan ympyrän keskipiste on*

$$\frac{(b-c)|a|^2 + (c-a)|b|^2 + (a-b)|c|^2}{(b-c)\bar{a} + (c-a)\bar{b} + (a-b)\bar{c}}.$$

Todistus. Keskipiste on ympyrän jänneiden ab ja bc keskinormaalien leikkauspisteessä. Parametrisoimalla normaalien suorat luvuilla $s, t \in \mathbb{R}$ saadaan yhtälöksi $(a+b)/2 + i(b-a)s = (b+c)/2 + i(c-b)t$. Yhtälön kompleksikonjugaattina on $(\bar{a}+\bar{b})/2 + i(\bar{b}-\bar{a})s = (\bar{b}+\bar{c})/2 + i(\bar{c}-\bar{b})t$, ja yhtälöparista saadaan ratkaistuksi

$$s = \frac{1}{2}i \cdot \frac{\bar{a}(b-c) + \bar{b}(a-c) + \bar{c}(2c-a-b)}{\bar{a}(b-c) + \bar{b}(c-a) + \bar{c}(a-b)}.$$

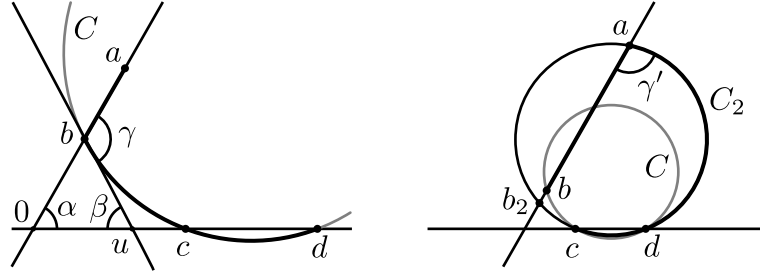
Kun arvo sijoitetaan suoran parametriksi, keskipisteeksi tulee sieventämällä

$$\frac{1}{2}(a+b) + i(b-a)s = \frac{(b-c)|a|^2 + (c-a)|b|^2 + (a-b)|c|^2}{(b-c)\bar{a} + (c-a)\bar{b} + (a-b)\bar{c}}.$$

\square

Lause 2.9. Kun pisteistä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ kaksi on kulma-alueen D_α yhdellä kyljellä ja loput kaksi toisella, niin $p(a, b, c, d) < (\sin(\alpha/2))^{-1}$.

Todistus. Olkoon piste 0 kulma-alueen kärkenä. Rajoituksetta voidaan olettaa, että $|b| \leq |c|$ ja $c, d \in \mathbb{R}_+$ niin, että tilanne on kuvan 4 vasemman puolen mukainen. Osoitetaan, että ympyrä $C = \mathcal{C}(b, c, d)$ leikkaa suoran $\{te^{i\alpha} \mid t \in \mathbb{R}\}$ kulmassa $\gamma > \alpha$.



Kuva 4: Kaksi pistettä kulman α molemmilla kyljillä. Vasen puoli: Ympyrä $C = \mathcal{C}(b, c, d)$ leikkaa suoran $\ell(a, b)$ kulmassa $\gamma > \alpha$. Oikea puoli: Ellei piste a ole ympyrän C sisäpuolella, niin sitten taas ympyrän $C_2 = \mathcal{C}(c, d, a)$ leikkauskulma on $\gamma' > \alpha$.

Ottamalla huomioon, että c ja d ovat reaalisia, apulauseen 2.8 avulla ympyrän C keskipisteeksi voidaan johtaa

$$k = \frac{(b-c)d^2 + (c-d)b\bar{b} + (d-b)c^2}{(b-c)d + (c-d)\bar{b} + (d-b)c} = b - \frac{(d-b)(c-b)}{b-\bar{b}},$$

joten ympyrän tangenti pisteessä b on $\{b - i(k-b)t \mid t \in \mathbb{R}\}$. Tangentin ja reaaliakselin leikkauspisteelle saadaan yhtälö $u = b - i(k-b)t \in \mathbb{R}$, ja konjugoimalla toiseksi yhtälöksi tulee $u = \bar{b} + i(\bar{k} - \bar{b})t$. Yhtälöparin ratkaisuna on

$$t = -i \cdot \frac{b - \bar{b}}{k - b + \bar{k} - \bar{b}} = i \cdot \frac{b - \bar{b}}{c + d - (b + \bar{b})},$$

josta sijoittamalla saadaan leikkauspiste

$$u = b - i(k-b)t = b + \frac{(d-b)(c-b)}{c+d-(b+\bar{b})} = \frac{cd - |b|^2}{c+d-2\operatorname{Re}(b)}.$$

Koska $|b| \leq c < d$, niin $u \in \mathbb{R}_+$. Toisaalta $\operatorname{Re}(xy) = \operatorname{Re}(x)\operatorname{Re}(y) - \operatorname{Im}(x)\operatorname{Im}(y)$, joten

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u) - \operatorname{Re}(b) &= \frac{\operatorname{Re}(d-b)\operatorname{Re}(c-b) - \operatorname{Im}(b)^2}{c+d-2\operatorname{Re}(b)} \\ &= \frac{\operatorname{Re}(d-b)\operatorname{Re}(c-b) - \operatorname{Im}(b)^2}{\operatorname{Re}(c-b) + \operatorname{Re}(d-b)} \\ &< \frac{\operatorname{Re}(d-b)\operatorname{Re}(c-b) - 0}{0 + \operatorname{Re}(d-b)} \\ &= \operatorname{Re}(c-b), \end{aligned}$$

ja erityisesti $u < c$. Tangentti leikkaa reaaliakselin siis välillä $[0, c]$ ja kuvan 4 mukaisesti muodostuu kolmio $\triangle 0ub$. Olkoon $\beta = \angle 0ub$ ja γ kulma, jossa ympyrä $\mathcal{C}(b, c, d)$ leikkaa

suoran $\ell(a, b)$. Tällöin $\pi - (\alpha + \beta) = \pi - \gamma$, joten $\gamma = \alpha + \beta \in (\alpha, \pi]$ on väitetyin suuruinen kulma.

Jos nyt a on ympyrän $\mathcal{C}(b, c, d)$ sisäpuolella, niin pisteet a, b, c ja d voidaan kuvata Möbius-kuvauksella kulma-alueen D_γ reunalle siten, että b on kulmapisteinä. Tilanne palautuu aikaisempaan tapaukseen, jossa $p(a, b, c, d) \leq (\sin(\gamma/2))^{-1} < (\sin(\alpha/2))^{-1}$.

Mikäli a ei ole ympyrän $\mathcal{C}(b, c, d)$ sisäpuolella, niin käytetään sen sijaan ympyrää $C_2 = \mathcal{C}(c, d, a)$, joka leikkaa suoran $\ell(a, b)$ pisteen a lisäksi pisteessä b_2 . Koska b on ympyrän C_2 sisäpuolella, on oltava $|b_2| < |b| \leq c$ ja ympyrällä C_2 on pisteessä b_2 leikkauskulmana $\gamma' > \alpha$. Kuvaamalla nyt b_2 pisteeksi ∞ saadaan pistenelikko kuvatuksi käyrälle $J_{\gamma'}$ niin, että a on kulmapisteinä. Tässäkin tapauksessa $p(a, b, c, d) \leq (\sin(\gamma'/2))^{-1} < (\sin(\alpha/2))^{-1}$, ja alkuperäinen väite pitää. \square

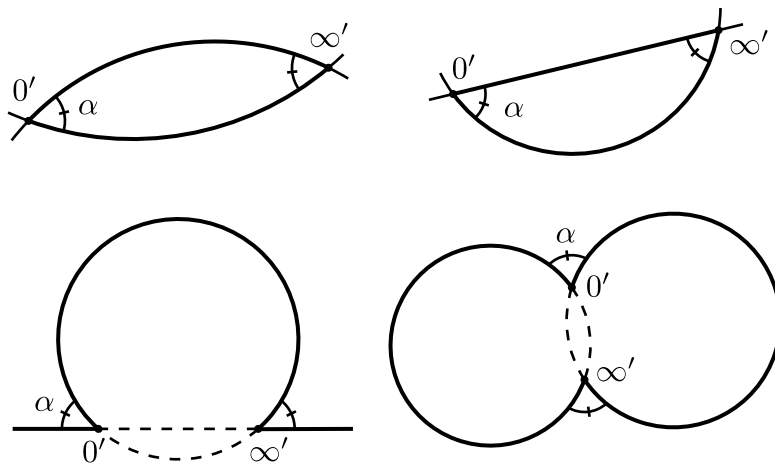
Lauseen 2.1 todistus. Tapaus $\alpha = \pi$ on väitetyssä yhtälössä

$$P(J_\alpha) = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

arvolla 1 ilmeinen, ja tapaukset $\alpha \in (0, \pi)$ tulivat käsitellyiksi edellisissä tuloksissa. Lause 2.6 tiivistää tuloksen yhden kulmapisteen tapauksessa, joten symmetrian nojalla jää jäljelle tapaus, jossa toisella kyljellä on kolme pistettä (lause 2.7), ja viimeiseksi tapaus, jossa kummallakin kyljellä on kaksi pistettä (lause 2.9). \square

2.1.3 Möbius-yhtenevät alueet ja käyrät

Jo lauseen 2.6 todistuksessa tultiin käyttäneeksi tietoa, että P -arvon rajaamiseksi riittää tuntea arvo jollain asetelman Möbius-kuvalla. Todistus jo pelkästään kulma-alueen tilanteesta antaa arvon $P(J)$ samalla useille muillekin tasokäyrille J . Arvon Möbius-invarianssi tuottaa jokaiselle käyrälle ekvivalenssiluokan sen kuvakäyristä. Kutsumme tasoalueita *Möbius-yhteneviksi*, jos niiden välillä on Möbius-kuvaus, ja laajennamme käsitteen kattamaan myös käyrät. Yksittäisen kulman määräämällä kulmakäyrällä J_α on muun muassa seuraavanlaiset Möbius-yhtenevät käyrät.

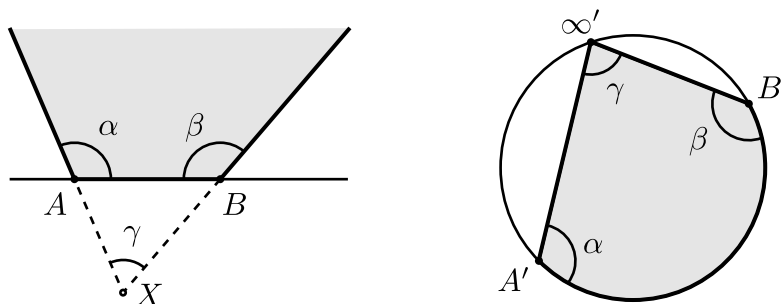


Kuva 5: Kulma-alueen reunakäyrän J_α kuvajoukkoja erilaisissa Möbius-kuvauksissa.

Olellainen ero näiden käyrien ja alueiden välillä tulee siitä, miten piste ∞ kuvataan. Kuvista on kuitenkin hyvä laittaa merkkeille, että joissakin tapauksissa käyrän kiertosuunta voi muuttua tai alueen konveksisuus ei säily.

2.2 Kaksikulmainen alue

Luonnollisena yleistyksenä kulma-alueesta saadaan kahden kulman α ja β rajaama alue $D_{\alpha,\beta}$. Kun $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ja $\alpha + \beta > \pi$, niin kuvan 6 vasemman puolen mukaisen kaksikulmaisen alueen kyljet leikkaavat kulmassa $\gamma = \alpha + \beta - \pi \in (0, \pi)$ alueen ulkopuolella. Rajoituksetta voidaan olettaa, että kulmien välinen sivu on reaaliakselilla. Kun kylkien leikkauspiste kuvataan Möbius-kuvauksella äärettömäksi, kyljet säilyvät suorina, mutta reaaliakseli muuttuu kuvan 6 oikean puolen tapaiseksi ympyräksi, jonka reunaan sisältyy erityisesti pisteen ∞ kuvapiste ∞' .



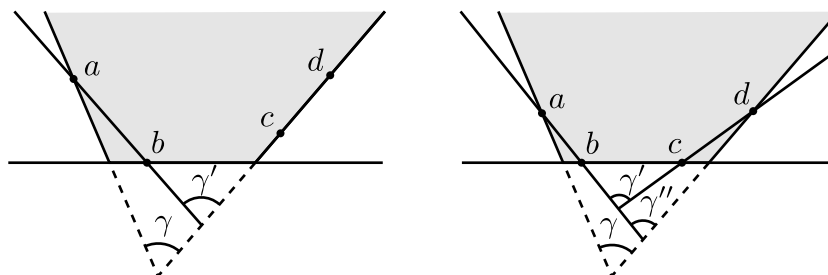
Kuva 6: Kahden kulman rajaama alue sekä sen kuva-alue Möbius-kuvauksessa.

Olkoon $J_{\alpha,\beta}$ alueen $D_{\alpha,\beta}$ reunakäyrä. Yhtä kulmaa koskevan tarkastelun perusteella on selvää, että $P(J_{\alpha,\beta}) \geq \max(\sin(\theta/2))^{-1}$, $\theta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Kulmat α ja β sisältyvät nimittäin alkuperäiseen käyrään ja γ sen edellä mainittuun Möbius-kuvaan. Osoitettavaksi jää, että yhtäsuuruus pitää.

Lause 2.10. *Kaksikulmaisen alueen $D_{\alpha,\beta}$ reunakäyrälle $J_{\alpha,\beta}$ on voimassa*

$$P(J_{\alpha,\beta}) = (\sin(\theta/2))^{-1}, \quad \theta = \min\{\alpha, \beta, \alpha + \beta - \pi\}.$$

Todistus. On jo todettu, että $P(J_{\alpha,\beta}) \geq (\sin(\theta/2))^{-1}$. Merkitään jälleen $\gamma = \alpha + \beta - \pi \in (0, \pi)$ ja osoitetaan, että jokainen järjestetty pistenelikko sisältyy johonkin kulmakäyrään $J_{\gamma'}$, jolla $\gamma' \geq \theta$. Jokaisella reunakäyrän kyljellä on oltava nyt oma pisteensä, joka ei ole kulmapiste. Jos näin ei ole, niin jättämällä pois pisteetön sivu saadaan osajoukko jostakin kulmakäyrästä J_α, J_β tai J_γ .



Kuva 7: Suorien $\ell(a, b)$ ja $\ell(c, d)$ leikkauskulma $\gamma' \geq \gamma$ avautuu joko toista ääretöntä kylkeä vasten tai sitten on kylkeä vasten avautuva kulma γ'' , jolla $\gamma' \geq \gamma'' \geq \gamma$.

Riippumatta siitä, millä reunan osalla on kaksi pistettä, suorat $\ell(a, b)$ ja $\ell(c, d)$ leikkaavat kulmassa $\gamma' \geq \gamma$, kuten kuvasta 7 nähdään. Koska pisteet saadaan joka tapauksessa rajoitetuksi kulmaan, joka on vähintään yhtä suuri kuin θ , lauseessa on voimassa yhtäsuuruus. \square

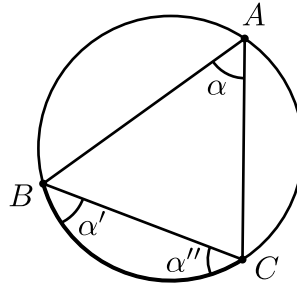
Huomautus 2.11. Lauseen 2.10 todistuksessa johtamamme tulos on seuraavanlainen: Kun $J_{\alpha,\beta}$ on kaksikulmaisen alueen reunakäyrä, niin silloin sen järjestetyt pistenelikot $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$ voidaan kuvata Möbius-kuvauksella samaan järjestykseen kulmakäyrälle J_θ , missä $\theta = \min\{\alpha, \beta, \alpha + \beta - \pi\}$. Jatkossakin monet P -arvoon liittyvät tulokset tullaan todistamaan tässä muodossa. Silloin yläraja seuraa lauseesta 2.1 ja alaraja vastaavan kulman sisältymisestä käyrään.

Tulemme luvussa 3 yleistämään lauseen 2.10 todistuksen ajatusta konvekseille käyrille. Toistaiseksi tyydymme kuitenkin lauseen tähän muotoon, sillä se on riittävä kolmion P -arvon osoittamiseen.

2.3 Kolmio

KolmiOSSakin suurin arvo palautuu pienimpään kulmaan. Tämän todistamiseksi on hyvä ensin huomata seuraava seikka kulmista kolmion ja sen ympäri piirretyn ympyrän välillä.

Huomautus 2.12. Kolmion sisäkulmat ovat yhtä suuret kuin kulmat niitä vastaavien sivujen ja kolmion ympäri piirretyn ympyrän välillä.



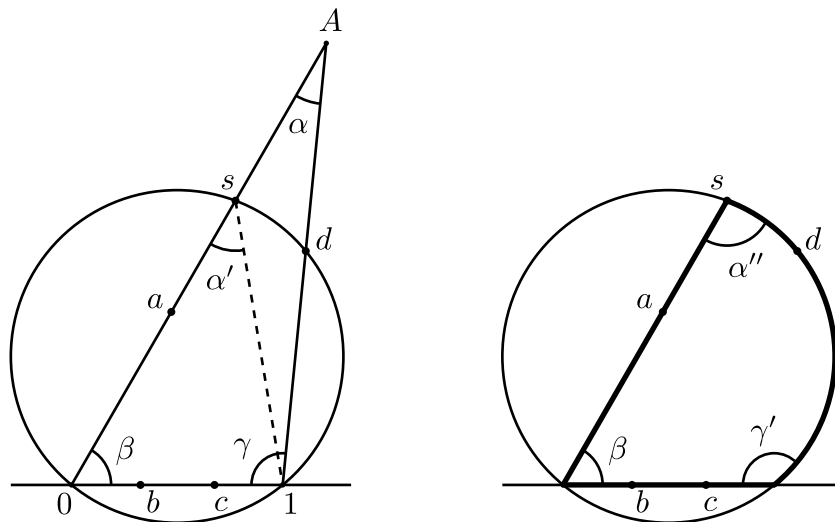
Kuva 8: Kolmion sisäkulma α sekä vastakkaiset ympäri piirretyn ympyrän kanssa muodostuvat kulmat α' ja α'' .

Perustelu. Kun kolmiona on $\triangle ABC$ ja $\alpha = \angle BAC$ kuten kuvassa 8, niin ympäri piirretyllä ympyrällä kukin kehäkulmista α, α' ja α'' vastaa samaa kaarta BC , joten $\alpha'' = \alpha' = \alpha$. \square

Lause 2.13. Kolmion reunakäyrän pisteet $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ voidaan kuvata Möbius-kuvauksella samaan järjestykseen kulma-alueen D_θ reunalle, missä kulma $\theta \in (0, \pi]$ on vähintään yhtä suuri kuin kolmion pienin sisäkulma.

Todistus. Ellei jokaisella kolmion sivulla ole omaa pistettä a, b, c tai d , pisteet sijaitsevat jo valmiiksi kolmion jonkin kulman sivuilla. Välttämättä on siis myös sellainen kolmion sivu, jolla on kaksi edellä mainituista pisteistä. Rajoituksetta voidaan valita sivuksi $[0, 1]$ sekä pisteiksi b ja c . Olkoon kolmas kärkipiste A ja kolmion $\triangle A01$ sisäkulmat vastaavasti α, β ja γ kuten kuvassa 9.

Kun pisteet ovat järjestyksessä kolmion reunalla vastapäivään kierrettäessä, niin niistä a ja d sijaitsevat reaaliakselin yläpuolella, kumpikin omalla kolmion sivulla, jotka kohtaavat pisteessä A . Toinen ympyröistä $\mathcal{C}(a, b, c)$ ja $\mathcal{C}(b, c, d)$ on sellainen, että jäljelle



Kuva 9: Vasemmalla kolmio $\triangle A01$ ja ympyrä, jonka sisäpuolella on kaikki pisteet a, b, c ja d . Oikealla vahvennuttuna käyrä, jolle pisteet sisältyvät, ja joka on kuvattavissa Möbius-kuvauksella kaksikulmaisen alueen reunakäyrälle.

jäävä neljäs piste on ympyrän sisäpuolella. Olkoon $C = \mathcal{C}(b, c, d)$ tällainen ympyrä ja a ympyrän sisäpuolella. Toinen tapaus on symmetrinen.

Sivulla $0A$ on leikkauspiste s niin, että $a \in (0, s]$. Koska A on ympyrän C ulkopuolella, niin kulmalle $\alpha' = \angle 0s1$ on voimassa $\alpha' > \alpha$. Nyt pisteet a, b, c, d sisältyvät kuitenkin suljetulle käyrälle, joka on kuvattavissa kaksikulmaisen alueen reunakäyrälle. Pisteestä 0 avautuu nimittäin ympyrälle kehäkulma β , jonka sivut leikkaavat ympyrän kulmissa α'' ja γ' . Huomautuksen 2.12 mukaisesti $\alpha'' = \alpha' + \beta > \alpha$ ja toisaalta $\gamma' > \gamma$. Kuvaamalla Möbius-kuvauksella pistekolmikko $0, 1, s$ kolmikoksi $\infty, 0, 1$ pisteiden b, c, d, a kuvat saadaan järjestyksessä alueen $D_{\gamma', \alpha''}$ reunakäyrälle. Koska vastaava tulos kaksikulmaiselle alueelle on osoitettu jo lauseessa 2.10, kuten huomautuksessa 2.11 todetaan, niin väite seuraa kolmion tapauksessa. \square

Lauseen 4 todistus. Väitteenä on, että

$$P(J) = \frac{1}{\sin \frac{\alpha_{\min}}{2}} \geq 2,$$

missä $\alpha_{\min} \in (0, \pi/3]$ on kolmion J pienin sisäkulma. Lauseen 2.13 perusteella mikä tahansa reunakäyrän järjestetty pistenelikko voidaan kuvata käyrälle J_θ , missä $\theta \geq \alpha_{\min}$. Funktion $(\sin x)^{-1}$ väheneytyksen ja lauseen 2.1 johdosta arvo $(\sin(\alpha_{\min}/2))^{-1}$ on yläraja, ja toisaalta sama arvo saavutetaan pienimmässä kulmassa. Lauseen epäyhtälö tulee suoraan arvosta $(\sin(\pi/6))^{-1} = 2$. \square

3 Yleistetyt kuvausmenetelmät

Tässä luvussa tutustumme ensin Seittenrannan käyttämään todistusmenetelmään kolmiolle ja esitämme osalle todistusta tulkinnan Möbius-kuvausten avulla. Erityisesti erään apulauseen tulkinta itsessään osoittautuu hedelmälliseksi tutkimuskohteeksi, ja tulemme johtamaan sille yleistyksiä ja mielenkiintoisia seurauksia. Vahvennettu apulause on suureksi hyödyksi, kun pureudumme lopuksi konveksien käyrien ja nelikulmioiden tarkasteluun. Toiseksi apuvälineeksi näitä tarkasteluja varten tarvitaan kulmiin liittyviä tuloksia, jotka tulevat todistetuiksi apulauseen yleistysten jälkeen.

3.1 Katsaus Seittenrannan tuloksiin

Kenties olennaisimpana osana Seittenrannan todistusta kolmiolle on seuraava apulause. Tulemme myöhemmin todistamaan tämän tuloksen ja sen yleistyksiä.

Apulause 3.1 (Seittenranta 1996). *Olkoot α ja β kaksi konveksin nelikulmion $abcd$ vierekkäistä kulmaa, joilla $\alpha \leq \beta$. Tällöin*

$$p(a, b, c, d) \leq \min \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2}} \right\}.$$

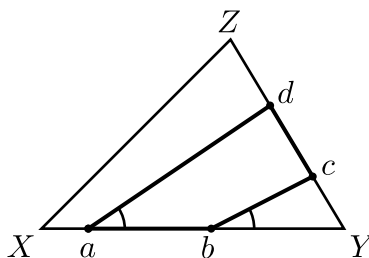
Sen lisäksi, että apulause on tärkeä alkuperäisessä todistuksessa, se on kätevä työkalu tarkasteltaessa muita käyriä. Katsotaan, miten tulos soveltuu kolmion tapaukseen. Seuraavassa on osa lauseen todistusta Seittenrannan esittämässä muodossa.

Lause 4 (Seittenranta 1996). *Kun $\triangle XYZ$ on kolmio, J sen reunakäyrä ja kolmion pienin sisäkulma $\alpha_{\min} \in (0, \pi/3]$, niin*

$$P(J) = \frac{1}{\sin \frac{\alpha_{\min}}{2}} \geq 2.$$

Todistus (Seittenranta). Alaraja $P(J) \geq (\sin(\alpha_{\min}/2))^{-1}$ seuraa suoraan lauseesta 2.3 ja epäyhtälön arvo 2 tulee kulmasta $\pi/3$. Osoitamme, että $P(J) \leq (\sin(\alpha_{\min}/2))^{-1}$.

Kiertäkööt pisteet a, b, c ja d käyrän J vastapäivään. Jos kaikki pisteet ovat kolmion $\triangle XYZ$ samalla sivulla, niin $P(J) = 1$. Muutoin $abcd$ on konvekssi nelikulmio. Jos tällä nelikulmiolla on kulmat α ja β siten, että $\alpha \leq \beta \leq \pi - \alpha_{\min}$ tai $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \beta$, niin silloin $p(a, b, c, d) \leq (\sin(\alpha/2))^{-1}$ apulauseen 3.1 mukaan. Osoitamme, että tällaiset kulmat ovat aina olemassa.



Kuva 10: Nelikulmio $abcd$ sekä siihen liittyvät kulmat $\angle bad < \alpha_{\min}$ ja $\pi - \angle cba < \alpha_{\min}$.

Olettakaamme sitä varten, että a ja b ovat samalla sivulla XY , ja että kulmilla on voimassa $\angle bad < \alpha_{\min}$ ja $\angle cba > \pi - \alpha_{\min}$ kuten kuvassa 10. Silloin $d \in YZ$ ja $\angle dcb > \angle ZYX \geq \alpha_{\min}$, mistä väite seuraa. \square

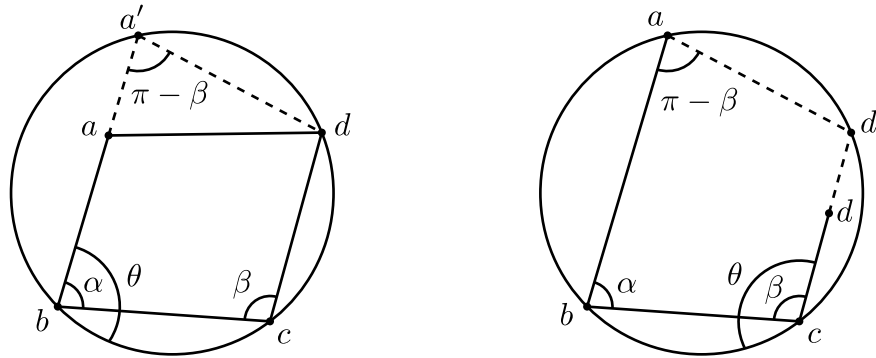
3.1.1 Yleistyksiä ja niiden seurauksia

Lauseen todistus osoittaa apulauseen 3.1 hyödylliseksi työkaluksi, joten keskitymme seuraavaksi sen tutkimiseen. Ensin esitämme apulauseen vastaavan kuvaustuloksen, josta alkuperäinen apulause helposti seuraa.

Apulause 3.2. *Olkoon $abcd$ konvekssi nelikulmio, jolla on sellaiset vierekkäiset kulmat α ja β , että $0 < \alpha \leq \beta < \pi$. Silloin on olemassa kuvaus $w \in \mathcal{M}\ddot{o}b$, joka kuvaa kulmapisteet samassa järjestyksessä käyrälle J_θ , missä*

$$\theta \geq \max\{\alpha, \pi - \beta\} \in (0, \pi]. \quad (1)$$

Todistus. Tarkastellaan tapausta, jossa α on vastapäivään kierrettäessä ennen kulmaa β , päinvastainen tapaus on symmetrinen. Rajoituksetta pisteet kiertävät nelikulmion vastapäivään, $\alpha = \angle cba$ ja $\beta = \angle dcb$. Väite seuraa välittömästi, jos $a \in \mathcal{C}(b, c, d)$, ja todistus jaetaan kahteen osaan sen mukaan, että kuuluuko piste a ympyrään vastaavaan avoimeen kiekkoon $\mathbb{D}(b, c, d)$ vai ei.



Kuva 11: Apulauseen 3.2 tilanne tapauksissa (i) $a \in \mathbb{D}(b, c, d)$ ja (ii) $a \notin \mathbb{D}(b, c, d)$.

- (i) $a \in \mathbb{D}(b, c, d)$. Suora $\ell(a, b)$ leikkaa ympyrän $\mathcal{C}(b, c, d)$ pisteen b lisäksi pisteessä a' . Nelikulmio $a'bcd$ on tällöin konvekssi, koska alkuperäinenkin on. Syklisessä nelikulmiossa on kulmana $\angle ba'd = \pi - \beta$. Nyt kehäkulma θ , joka on janan $[a', b]$ ja kaaren bca' välillä, vastaa suurempaa ympyrän kaarta kuin kehäkulmat $\angle cba' = \alpha$ ja $\angle ba'd$. Kuvaukseksi sopii siis tässä tapauksessa esimerkiksi sellainen $w \in \mathcal{M}\ddot{o}b$, että $w(b) = 0$, $w(c) = 1$ ja $w(a') = \infty$.
- (ii) $a \notin \mathbb{D}(b, c, d)$. Silloin $d \in \mathbb{D}(a, b, c)$. Kun $\mathcal{C}(a, b, c) \cap \ell(c, d) = \{c, d'\}$, niin kaaren abc ja janan $[c, d']$ välillä on kulma $\theta \geq \beta \geq \alpha$. Silloin kulma $\pi - \theta$ vastaa pienempää kaarta cd' kuin kulma α (kaarena $cd'a$) ja saadaan

$$\pi - \theta \leq \alpha \implies \theta \geq \pi - \alpha \geq \pi - \beta.$$

Tällä kertaa kuvaukseksi sopii $w \in \mathcal{M}\ddot{o}b$, jolla $w(c) = 0$, $w(d) = 1$ ja $w(d') = \infty$.

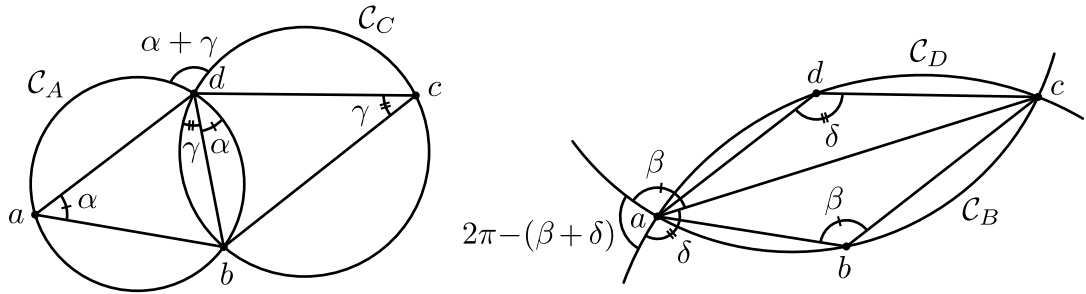
Tapaus, jossa kulma β on vastapäivään kierrettäessä ennen pienempää kulmaa α , ei todistukseltaan eroa olennaisesti eroa edeltävästä, mutta on huomattava, että siinäkin nelikulmion $abcd$ kärkipisteet saadaan kuvatuksi käyrälle J_θ samassa vastapäivään kiertävässä järjestyksessä. \square

Apulauseen 3.1 todistus. Kun α ja β ovat kuten apulauseessa 3.2, niin väite seuraa kaavasta $\sin((\pi-\beta)/2) = \cos(\beta/2)$ ja funktion $(\sin x)^{-1}$ vähenevyydestä välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$. \square

Edellistä tarkempi tarkastelu apulauseen 3.2 tilanteessa osoittaa, että saatu arvio on vielä parannettavissa. Seuraavan geometrisen aputuloksen esittämisen jälkeen on vaivatonta muotoilla lauseeksi apulauseen kulmalle θ toinen arvio, joka on tiukempi kuin minkä epäyhtälö (1) antaa.

Apulause 3.3. Olkoot a, b, c ja $d \in \mathbb{C}$ neljä eri pistettä, jotka muodostavat konveksin nelikulmion $abcd$, jolla α, β, γ ja δ ovat pisteitä vastaavat sisäkulmat. Silloin ympyröiden $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}(a, b, d)$ ja $\mathcal{C}_C = \mathcal{C}(b, c, d)$ välinen ulkokulma on pienempi nelikulmion vastakkaisten sisäkulmien summista. Sama ulkokulma on myös ympyröiden $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}(a, b, c)$ ja $\mathcal{C}_D = \mathcal{C}(c, d, a)$ välillä.

Todistus. Olkoon $\alpha + \gamma$ pienempi vastakkaisten kulmien summista. Tällöin $\alpha + \gamma \leq \pi \leq \beta + \delta$. Jos $\alpha + \gamma = \pi = \beta + \delta$, niin kyseessä on syklinen nelikulmio ja väite pitää. Muussa tapauksessa ympyrät \mathcal{C}_A ja \mathcal{C}_C leikkaavat vain pisteissä b ja d . Koska $\alpha + \gamma < \pi$, niin kehäkulmien α ja γ kaaret ovat vastaavissa ympyröissä pienempiä kuin puoliympyrät, ja asetelma on kuvan 12 vasemman puolen mukainen.



Kuva 12: Vasemmalla puolella apulauseen 3.3 ympyrät $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}(a, b, d)$ ja $\mathcal{C}_C = \mathcal{C}(b, c, d)$, sekä niihin liittyvät kulmat. Oikealla puolella vastaava tilanne ympyröillä $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}(a, b, c)$ ja $\mathcal{C}_D = \mathcal{C}(c, d, a)$.

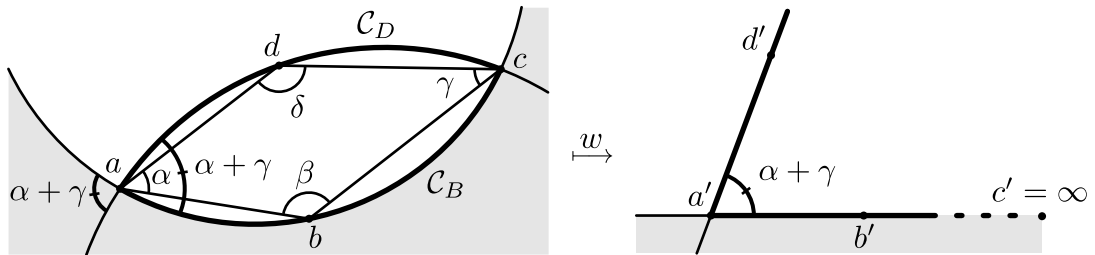
Erityisesti ympyröiden \mathcal{C}_A ja \mathcal{C}_C muodostamat kulmat suoran $\ell(b, d)$ kanssa ovat vastaavasti α ja γ , sillä pisteestä b avautuu kehäkulma kaarelle bd kummassakin ympyrässä. Ulkokulman suuruus ympyröiden \mathcal{C}_A ja \mathcal{C}_C välillä on siis $\alpha + \gamma$.

Jotta sama nähdään todeksi ympyröillä \mathcal{C}_B ja \mathcal{C}_D , tehdään niille edellisen kaltainen päättely, jolla päästään kuvan 12 oikean puolen kuvaamaan tilanteeseen. Koska $\beta + \delta > \pi$, niin tällä kertaa kehäkulmat (β ja δ) avautuvat janalta $[a, c]$ ympyröiden ulompiin kaariin asti. Haluttu kulma saadaan komplementtina $2\pi - (\beta + \delta) = \alpha + \gamma$. \square

Lause 3.4. *Kun pisteet a, b, c ja d muodostavat konveksin nelikulmion, jonka sisäkulmat ovat vastaavasti α, β, γ ja δ , niin on olemassa kuvaus $w \in \mathcal{M}\ddot{o}b$, joka kuvaa pisteet samassa järjestyksessä käyrälle J_θ , missä*

$$\theta = \min\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} \in (0, \pi].$$

Todistus. Rajoituksetta voidaan olettaa, että pisteet kiertävät vastapäivään, ja että $\alpha + \gamma \leq \pi \leq \beta + \delta = 2\pi - (\alpha + \gamma)$, kuten apulauseessa 3.3. Olennainen huomio apulauseesta on nyt se, että pisteet kuuluvat kahden ympyrän $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}(a, b, c)$ ja $\mathcal{C}_D = \mathcal{C}(c, d, a)$ leikkauksen reunakäyrälle alkuperäisessä järjestyksessään, kuten apulauseeseen liittyvän kuvan 12 oikealla puolella. Nämä ympyrät leikkaavat kulmassa $\alpha + \gamma = 2\pi - (\beta + \delta)$.



Kuva 13: Ympyröiden $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}(a, b, c)$ ja $\mathcal{C}_D = \mathcal{C}(c, d, a)$ leikkausalueen reunakäyrät, ja alueiden kuvautuminen kuvauksessa $w \in \mathcal{M}\ddot{o}b$. Varjostettuna ympyrän \mathcal{C}_B ulkopuoli ja sen kuva-alue.

Ympyröiden leikkauskulmasta tiedämme, että on sellainen kuvaus $w \in \mathcal{M}\ddot{o}b$, joka täyttää ehdot $w(a) = 0$, $w(b) = 1$ ja $w(c) = \infty$, ja joka kuvaa nelikulmion kärkipisteet käyrälle $J_{\alpha+\gamma}$ muuttumattomassa järjestyksessä. Molemmat ympyrät kuvautuvat nimittäin suoriksi, ja ympyrän \mathcal{C}_B ulkopuoli alemmaksi puolitasoksi, kuten kuvassa 13 on havainnollistettu. \square

Lauseen yksinkertaisuudesta huolimatta sillä on hyödyllisiä seurauksia. Apulause 3.2 seuraa suoraan, koska $\alpha + \gamma > \alpha$ ja toisaalta $\alpha + \gamma = 2\pi - (\beta + \delta) = (\pi - \beta) + (\pi - \delta) \geq \pi - \beta$. Tämän lisäksi apulauseessa 3.1 annettua ylärajaa Ptolemaioksen luvulle voidaan myös parantaa seurauksen 3.5 mukaiseksi.

Seuraus 3.5. *Kun α ja γ ovat konveksin nelikulmion $abcd$ kaksi vastakkaista sisäkulmaa, niin*

$$p(a, b, c, d) \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{2}}.$$

Perustelu. Nimetään toiseksi sisäkulmiksi β ja δ . Saamme

$$\sin \frac{\beta + \delta}{2} = \sin \frac{2\pi - (\alpha + \gamma)}{2} = \sin \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

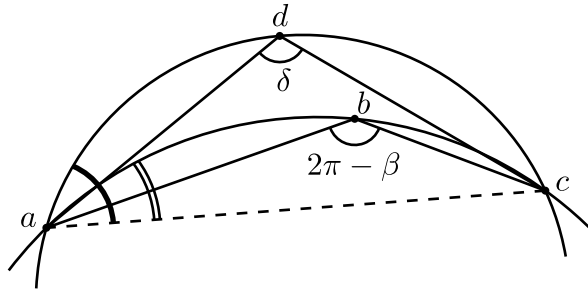
minkä avulla väite seuraa lauseista 2.1 ja 3.4. Kannattaa myös huomata, että väitteen epäyhtälössä on yhtäsuuruus silloin, kun lauseen 3.4 mukaisessa kuvauksessa $w \in \mathcal{M}\ddot{o}b$ kuvapisteille on voimassa $|w(d)| = |w(b)| = 1$. Tämä on nähtävissä apulauseen 2.5 todistuksesta. \square

Yllättävää kyllä, pisteiden muodostaman nelikulmion konveksisuus ei ole välttämätöntä edellisissä tuloksissa. Tarkasteltaessa ympyröiden leikkausaluetta muissa tapauksissa eroksi muodostuu se, että leikkausalueen määrittävät kulmat eivät ole samat kuin ne, jotka ovat ympyröiden välisinä ulkokulmina. Muotoilemme yleistyksen.

Seuraavassa tuloksessa nelikulmion $abcd$ yksinkertaisuus tarkoittaa sitä, että murtoviiva $abcd$ muodostaa yksinkertaisen sulkeutuvan käyrän. Yksinkertaisuuskin on edellytyksenä ainoastaan teknisistä syistä, sillä yleistysten laajempi muotoilu vaatisi, että negatiiviset kulmat ja pisteiden järjestyksen muuttuminen sallitaan.

Lause 3.6. *Olkoon $abcd$ yksinkertainen nelikulmio ja α, β, γ ja δ pisteitä vastaavat sisäkulmat. Kun $\alpha + \gamma \leq \pi \leq \beta + \delta$, niin ympyröiden $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}(a, b, c)$ ja $\mathcal{C}_D = \mathcal{C}(c, d, a)$ leikkauspisteiden a ja c välillä on alue, jonka reunakäyrällä pisteet ovat järjestyksessä. Lisäksi kahden ympyränkaaren, jotka muodostavat alueen reunakäyrän, välillä on kulma $\alpha + \gamma$.*

Todistus. Konveksin nelikulmion tapaus tuli todistetuksi apulauseessa 3.3. Tarkastellaan sitten yksinomaan konkaaveja nelikulmioita. Tällaisessa tilanteessa nelikulmiolla on sisäkulmanaan oikokulmaa suurempi kulma, joksi valitaan $\beta > \pi$.



Kuva 14: Lauseen 3.6 tilanne. Paksulla kaarella merkitty kulma $\pi - \delta$ ja kahdella kaarella kulma $\beta - \pi$.

Kulma δ vastaa nyt ympyrällä \mathcal{C}_D pisteiden a ja b välistä kaarta, jolle piste d ei kuulu. Toista kaarta vastaa siis kehäkulma $\pi - \delta$. Ympyrällä \mathcal{C}_B kehäkulmana on $2\pi - \beta$, joten pisteiden a, b ja c välistä kaarta vastaa kulma $\pi - (2\pi - \beta) = \beta - \pi$. Nämä kehäkulmat voidaan katsoa ympyränkaarten ja janan $[a, c]$ välisiksi, joten ympyränkaarten välinen kulma on

$$(\pi - \delta) - (\beta - \pi) = 2\pi - (\beta + \delta) = \alpha + \gamma. \quad \square$$

Tästä voimme päätellä seuraavan yleistyksen lauseelle 3.4 oikeaksi. Perustelu on olennaisesti samanlainen kuin aikaisemmalla lauseella, ja myös tarkennus kuvauksesta on todistuksen perusteella ilmeinen.

Lause 3.7. *Kun pisteet a, b, c ja d muodostavat yksinkertaisen nelikulmion, jonka sisäkulmat ovat vastaavasti α, β, γ ja δ , niin on olemassa kuvaus $w \in \mathcal{Möb}$, joka kuvaa pisteet samassa järjestyksessä käyrälle J_θ , missä*

$$\theta = \min\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} \in (0, \pi].$$

Erityisesti $p(a, b, c, d) \leq (\sin \frac{\theta}{2})^{-1}$ ja kuvaus w voidaan valita sellaiseksi, että se täyttää ehdot $w(a) = 0, w(b) = 1, w(c) = \infty$ ja $w(d) = te^{i\theta}$, missä $t > 0$. \square

Maininta kuvauksesta tehtiin sen vuoksi, että siihen pohjautuvasti lausetta voidaan käyttää vielä toisen tuloksen perustelemiseksi. Seuraava lause tiedetään entuudestaan pitäväksi ainakin konvekseilla nelikulmioilla (Yaglom, s.146), mutta yleistys ei enää tee todistusta yhtään monimutkaisemmaksi.

Lause 3.8. *Olkoon $abcd$ yksinkertainen nelikulmio, jolla on vastakkaiset kulmat α ja γ . Silloin nelikulmion kärkipisteet on kuvattavissa Möbius-kuvauksella kärkipisteiksi suunnikkaalle $a'b'c'd'$, jolla on kulma $(\alpha + \gamma)/2$. Erityisesti $p(a, b, c, d) = p(a', b', c', d')$.*

Todistus. Lauseessa 3.7 esitetyllä kuvauksella $w \in \mathcal{M}\ddot{o}b$ voidaan kuvata yksinkertainen nelikulmio $abcd$ kulma-alueen J_θ reunalle siten, että $w(a) = 0$, $w(b) = 1$, $w(c) = \infty$ ja $w(d) = te^{i\theta}$ jollakin $t > 0$, kun $\theta = (\alpha + \gamma)/2$. Vastaava onnistuu suunnikkaalle $a'b'c'd'$, joskin toisella kuvauksella $w_2 \in \mathcal{M}\ddot{o}b$ ja luvulla $t_2 > 0$. Jos siis onnistumme osoittamaan, että luvuksi t_2 saadaan erilaisilla ehdot täyttävillä suunnikkailla mikä tahansa positiivinen luku, niin $w_3 = w_2^{-1}w \in \mathcal{M}\ddot{o}b$ käy lauseen kuvaukseksi. Silloin myös väite $p(a, b, c, d) = p(a', b', c', d')$ seuraa funktion Möbius-invarianssista.

Otetaan lähtökohdaksi suunnikas, jonka kärkipisteinä ovat $a' = 0, b' = r, c' = r + se^{i\theta/2}$ ja $d' = se^{i\theta/2}$, missä r ja s ovat positiivisia lukuja. Kun suunnikkaan kärkipisteet kuvataan kulma-alueen reunalle, niin erityisesti niiden määräämät kaksoissuhteet säilyvät. Saamme alkuperäiseksi kaksoissuhteeksi luvun

$$[a', b', c', d'] = \frac{(0 - (r + se^{i\theta/2}))(r - se^{i\theta/2})}{(0 - r)(r + se^{i\theta/2} - se^{i\theta/2})} = \frac{r^2 - s^2 e^{i\theta}}{r^2} = 1 - \left(\frac{s}{r}\right)^2 e^{i\theta}.$$

Toisaalta kulma-alueen reunalla vastaava kaksoissuhde on

$$[0, 1, \infty, t_2 e^{i\theta}] = \frac{(0 - \infty)(1 - t_2 e^{i\theta})}{(0 - 1)(\infty - t_2 e^{i\theta})} = 1 - t_2 e^{i\theta},$$

joten kuvaus saadaan sopivaksi valitsemalla $t_2 = s/r$. □

3.2 Kulmatuloksia

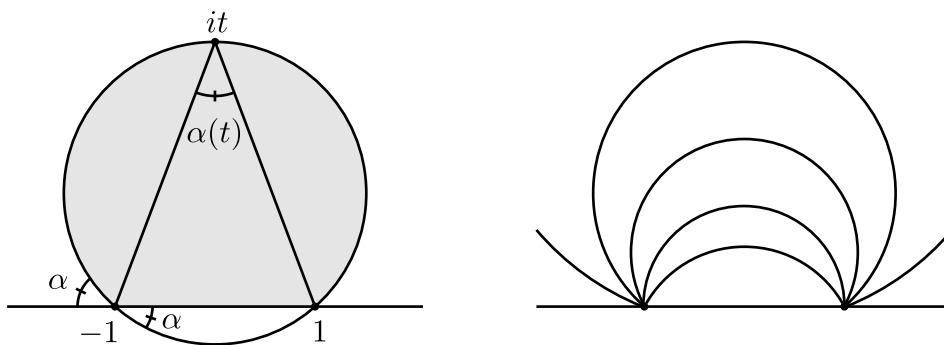
Kun nyt on tullut selväksi, että yksi tapa rajoittaa lukua $p(a, b, c, d)$ on tutkia nelikulmion $abcd$ kulmia, voimme syystä suunnata tarkastelumme hetkeksi siihen, minkälaisia kulmia konveksien käyrien sisällä voi muodostua. Erityinen mielenkiinto kohdistuu jälleen pienimpiin kulmiin.

Lähtökohtanamme on tutkia, minkälainen kulma avautuu reaaliakselilta kahden pisteen välille ylemmällä puolitasolla $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$. Valitsemme siis kaksi pistettä $x, y \in \mathbb{H}$ ja tarkastelemme kulmia $\angle ypx$, kun $p \in \mathbb{R}$. Ääritapausten löytämiseksi esitämme aputuloksen, jonka olennaisuus ei etukäteen ole aivan ilmeistä.

Apulause 3.9. Joukkofunktio $f_D : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{H})$, $f_D(t) = \mathbb{D}(-1, 1, it) \cap \mathbb{H}$, on aidosti kasvava joukkojen sisältymisrelaation suhteen. Ympyränkaarilla $C_t = \mathcal{C}(-1, 1, it) \cap \mathbb{H}$, $t > 0$, on lisäksi voimassa

$$\mathbb{H} = \bigcup_{t>0} C_t$$

missä $C_t \cap C_s = \emptyset$, jos $t \neq s$.



Kuva 15: Alue $f_D(t)$ sekä siihen liittyvä kulma $\alpha = \alpha(t)$. Alueiden reunakäyrät täyttävät ylemmän puolitason \mathbb{H} .

Todistus. Selvästi $f_D(0) = \emptyset$, ja kun $t > s \geq 0$, niin $\frac{1}{2}(s+t)i \in f_D(t) \setminus f_D(s)$, joten joukot eroavat toisistaan. Kun $\alpha = \angle(-1, it, 1)$, niin

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \implies \quad \alpha(t) = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Sama kulma α on ympyrän ja reaaliakselin välillä, joten kuvaus $w \in \mathcal{Möb}$, jolla $w(-1) = 0$, $w(1) = \infty$ ja $w(it) = e^{i(\pi-\alpha)}$, kuvaa alueen $f_D(t)$ bijektiivisesti kulma-alueeksi $D_{\pi-\alpha}$. Koska $\alpha(t)$ on aidosti vähenevä funktio, niin ensimmäinen väite seuraa.

Toisen väitteen näyttämiseksi toteen on osoitettava, että kukin piste $z \in \mathbb{H}$ kuuluu yksikäsitteisesti jollekin ympyränkaarista C_t . Mutta tähän seuraa jo siitä, että kolme pistettä $-1, 1$ ja z määräävät itse yksikäsitteisen ympyrän. Koska $z \notin \mathbb{R}$, niin kaarta vastaava kokonainen ympyrä leikkaa imaginaariakselin kahdessa pisteessä iu ja iv , $u < 0 < v$, ja näin ollen $z \in C_v$. \square

Huomautus 3.10. Vaikka apulauseessa 3.9 funktio $\alpha(t)$ todettiin aidosti väheneväksi, on hyvä huomata, että silti samassa tilanteessa ympyrän säde on parametrin t funktiona aidosti vähenevä, jos $t \in [0, 1]$, ja aidosti kasvava, jos $t \geq 1$.

Olemme valmiita antamaan luonnehdinnan ääritapauksille kulmaongelmassa, joka mainittiin luvun alussa. Edellisen tuloksen ansiosta saamme samalla tilanteelle mukavan geometrisen tulkinnan, jota suoraviivainen laskenta ei välttämättä paljasta.

Apulause 3.11. *Olkoot $x, y \in \mathbb{H}$ kaksi eri pistettä ylemmällä puolitasolla ja $z \in \overline{\mathbb{R}}$. Tällöin kulma $|\angle xzy|$ saavuttaa suurimman arvonsa ympyrän $\mathcal{C}(x, z, y)$ sivutessa reaaliakselia. Vastaavasti pienin kulma saavutetaan suoran $\ell(x, y)$ ja reaaliakselin leikkauspisteessä.*

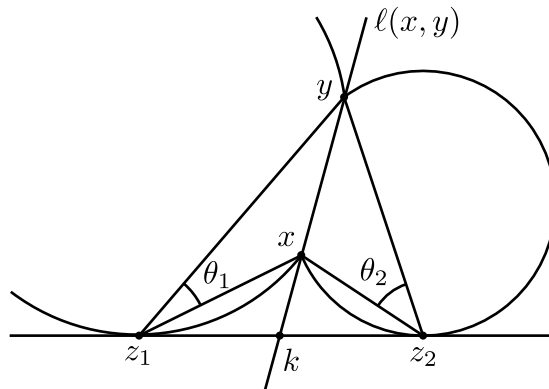
Todistus. Pienintä kulmaa koskeva väite on ilmeinen, sillä $|\angle xzy| = 0$ jos ja vain jos $z \in \ell(x, y)$. Suurinta kulmaa varten tarkastellaan aluetta, joka saadaan sovelluksena apulauseesta 3.9. Piste

$$q(t) = \frac{1}{2}(x + y) + i \frac{y - x}{|y - x|} t \quad (t \in \mathbb{R})$$

on janan $[x, y]$ keskinormaalilla etäisyydellä $|t|$ janasta. Sen avulla määritelty alue $D(t) = \mathbb{D}'(x, y, q(t)) \cup \mathbb{D}'(y, x, q(-t))$ koostuu kahdesta apulauseen 3.9 mukaisesta kiekon ja puolitason leikkausalueesta

$$\mathbb{D}'(a, b, c) = \mathbb{D}(a, b, c) \cap (a + (b - a)\mathbb{H}),$$

jotka on sovitettu tilanteeseen. Nyt luvun $t > 0$ pienimmät arvot t_1 ja t_2 , joilla alueen $D(t)$ puoliskojen reunakäyrät leikkaavat reaaliakselia, määräävät kaksi pistettä z_1 ja z_2 , joissa vastaavasti ympyrät $\mathcal{C}(x, z_i, y)$ sivuavat reaaliakselia.



Kuva 16: Pisteet $x, y \in \mathbb{H}$ sekä reaaliakselia sivuavat ympyrät $\mathcal{C}(x, z_1, y)$ ja $\mathcal{C}(x, z_2, y)$. Tässä tapauksessa $\theta_2 = |\angle xz_2y| > \theta_1$ on suurin arvo, jonka kulma $|\angle xzy|$ saa.

Kun suoran leikkauspiste $k \in \ell(x, y) \cap \overline{\mathbb{R}}$ on reaalisenä olemassa, se jakaa reaaliakselin kahteen osaan, joilla kummallakin on paikallinen maksimipisteensä. Apulauseen funktio $\alpha(t)$ on nimittäin aidosti vähenevä ja kulma on kaikilla ympyrän kehäpisteillä sama, joten sivuamispisteissä z_1 ja z_2 saavutetaan suoran $\ell(x, y)$ molemmin puolin kulman maksimipiste.

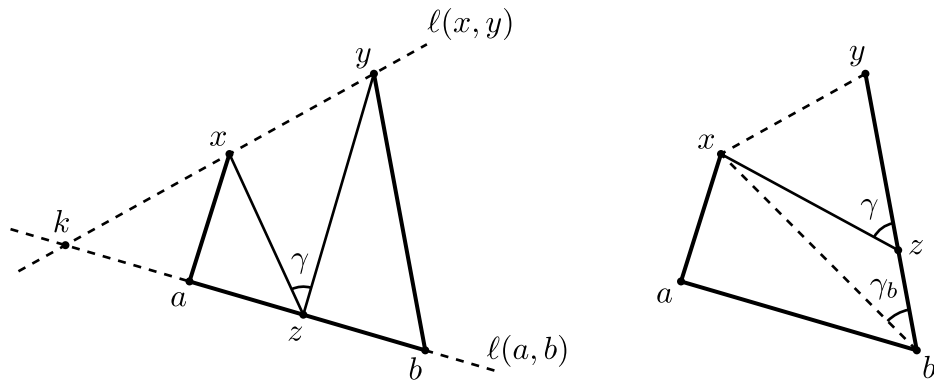
Konstruktio perusteella on selvää, että saavutettavat suurimmat kulmat ovat samat vain jos suora $\ell(x, y)$ on kohtisuorassa reaaliakselia vastaan, ja että maksimaalisia kulmia on vain yksi, jos suora on yhdensuuntainen reaaliakselin kanssa. Kulmafunktion $\alpha(t)$ aidosta vähenevyydestä seuraa myös se, että kulma $|\angle xzy|$ pienenee erkaannuttaessa maksimipisteistä kohti leikkauspistettä k tai ääretöntä. \square

Suoralta avautuvan kulman tapauksesta pääsemme varsin helposti tiettyyn konvekseja käyriä koskevaan tulokseen. Aloitamme tuloksen osoittamisesta nelikulmiolle.

Apulause 3.12. *Kun $xaby$ on konvekseksi nelikulmio, ja z on piste murtoviivalla $xaby$, niin kulma $\gamma = \angle yzx$ saa pienimmän arvonsa, kun $z = a$ tai $z = b$.*

Todistus. Apulauseen 3.11 mukaan suoralta $\ell(a, b)$ avautuvalla kulmalla on maksimi silloin, kun $\mathcal{C}(x, z, y)$ sivuaa suoraa, ja kulma pienenee maksimista erkaannuttaessa kohti ääretöntä tai suorien $\ell(a, b)$ ja $\ell(x, y)$ leikkauspistettä k . Koska kyseessä on konvekseksi nelikulmio, leikkauspiste k on janan $[a, b]$ ulkopuolella. Tällä janalla pienin kulma on siis toisessa päätepisteessä.

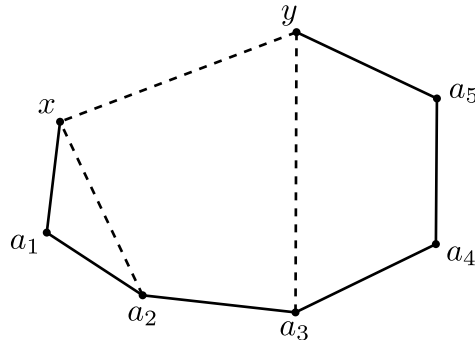
Toisilla janoilla $[x, a]$ ja $[b, y]$ on taas heti ilmeistä, että pienin kulma saavutetaan vastaavasti pisteissä a ja b kauimpana pisteistä x ja y . Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 17. \square



Kuva 17: Apulauseen 3.12 kulma $\gamma = \angle yzx$ tapauksissa $z \in [a, b]$ ja $z \in [b, y]$. Jälkimmäisessä tapauksessa kulmalla $\gamma_b = \angle ybx$ on voimassa $\gamma_b \leq \gamma$.

Seuraus 3.13. *Kun $xa_1a_2 \dots a_ny$ on konvekseksi monikulmio ($n \geq 1$) ja z on piste murtoviivalla $xa_1a_2 \dots a_ny$, niin kulma $\gamma = \angle yzx$ saavuttaa pienimmän arvonsa jossakin kulmapisteessä $z = a_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Todistus. Edellisestä apulauseen todistuksesta tulos seuraa myös kolmiolle, sillä tarkastelu voidaan rajoittaa kahteen kylkeen. Oletetaan sitten, että $n > 2$. Tällöin jokainen nelikulmio $xa_ia_{i+1}y$ ($i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$) on konvekseksi, joten väite seuraa erityisesti näiden yhdisteen osajoukolle, johon myös kaikki pisteet a_i kuuluvat.



Kuva 18: Konvekseksi monikulmio $xa_1a_2 \dots a_5y$ ja nelikulmio xa_2a_3y sen osana.

Sama voidaan muodollisemmin ilmaista murtoviivoja kuvastavilla tasojoukoilla

$$M(p_1, p_2, \dots, p_m) = \bigcup_{j=1}^{m-1} [p_j, p_{j+1}]$$

muodossa

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset M(x, a_1, a_2, \dots, a_n, y) \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} M(x, a_i, a_{i+1}, y). \quad \square$$

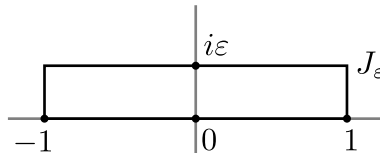
Apulauseen 3.9 nojalla tulos tarkoittaa loppujen lopuksi vain sitä, että suurin pisteiden x ja y välinen ympyränkaari, joka leikkaa murtoviivan muissakin pisteissä, kulkee välttämättä joidenkin kärkipisteiden a_j kautta.

3.3 Nelikulmio

Siirrymme jälleen itse P -arvojen määrittämiseen, mihin sovellamme edellä esitettyjä tuloksia. Kun tarkasteltavana käyränä on vähintään nelikulmisen monikulmion reuna, P -arvo ei enää riipu ainoastaan kulmien suuruudesta. Jo nelikulmiolla on tapauksia, joissa kulmien suuruutta muuttamatta saadaan arvo rajoittamattoman suureksi. Kun $\varepsilon > 0$, niin esimerkiksi kuvan 19 suorakulmiolle J_ε on voimassa

$$P(J_\varepsilon) \geq p(i\varepsilon, -1, 0, 1) = \frac{|i\varepsilon + 1| \cdot 1 + |i\varepsilon - 1| \cdot 1}{|i\varepsilon| \cdot 2} = \frac{|i\varepsilon - 1|}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} > M$$

millä tahansa positiivisella luvulla M , jos valitaan $\varepsilon < \frac{1}{M}$.



Kuva 19: Suorakulmio, jonka P -arvo on suurempi kuin $1/\varepsilon$.

Todettakoon myös, että kulmien määrän perusteella Ptolemaioksen arvolle saadaan löyhä alaraja, koska tarkasteltavana on suljettu yksinkertainen monikulmion reuna-käyrä.

Huomautus 3.14. Kun J on yksinkertainen suljettu n -kulmisen monikulmion reuna-käyrä, niin

$$P(J) \geq \frac{1}{\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Perustelu. Monikulmion sisäkulmien $\alpha_i \in (0, 2\pi)$ summa on $\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi$, joten positiivisista luvuista pienin $\alpha_m = \min_i \alpha_i \leq (n-2)\pi/n < \pi$. Lauseen 2.3 perusteella $P(J) \geq (\sin \frac{\alpha_m}{2})^{-1}$. □

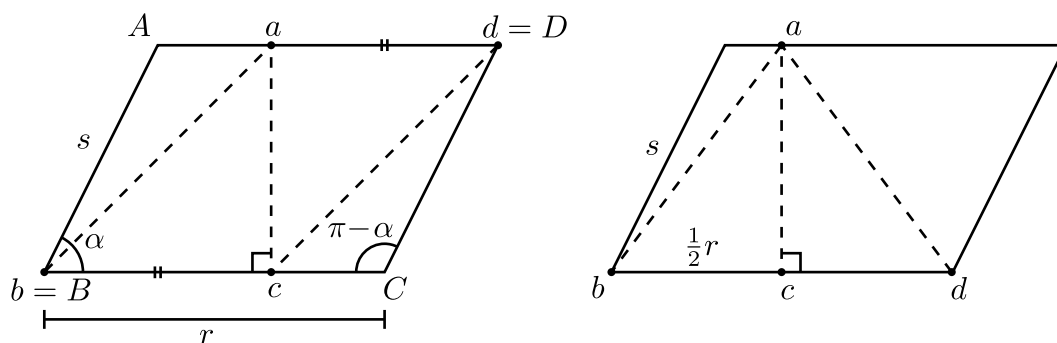
3.3.1 Suunnikas

Tarkastellaan aluksi suunnikkaita. Määritetään ensin alaraja suunnikkaan P -arvolle. Myös suorakulmio sisällytetään tähän tarkasteluun.

Lause 3.15. *Kun J on suunnikas $ABCD$, jonka pienempi sisäkulma on $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ja sivujen pituudet r ja s , $r \geq s$, niin silloin*

$$P(J) \geq \max \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \sqrt{\left(\frac{r}{2s \sin \alpha}\right)^2 + 1} \right\}, \text{ ja} \quad (2)$$

$$P(J) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}}{s \sin \alpha} + \frac{s \sin \alpha}{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}} \right). \quad (3)$$



Kuva 20: Suunnikas $ABCD$ sekä kaksi eri pisteasetelmaa. Oikeanpuoleinen asetelma on mahdollinen vain tapauksessa $\frac{1}{2}r \geq s \cos \alpha$.

Todistus. Pienimmän kulman perusteella on ilmeistä, että $P(J) \geq (\sin \frac{\alpha}{2})^{-1}$. Osoitetaan sitten epäyhtälö (3). Koska $r \geq s$, niin erityisesti $(r + s \cos \alpha)/2 \geq s \cos \alpha$. Voidaan siis asettaa pisteet suunnikasmuodostelmaan $abcd$, jossa $b = B$, $d = D$ ja pisteet a ja c jakavat suunnikkaan koko leveyden $(r + s \cos \alpha)$ puoliksi, kuten kuvan 20 vasemmalla puolella on esitetty.

Tällaisessa tilanteessa $|a - d| = |b - c| = (r + s \cos \alpha)/2$, $|a - c| = s \sin \alpha$, ja kosinilauseen perusteella $|a - b| = |c - d| = \sqrt{s^2 \sin^2 \alpha + |a - d|^2}$. Kun kosinilauseetta sovelletaan vielä suunnikkaan pidemmän lävistäjän $|b - d|$ laskemiseksi, saamme

$$\begin{aligned} p(a, b, c, d) &= \frac{|a - d|^2 + |a - b|^2}{s \sin \alpha \cdot \sqrt{(r + s \cos \alpha)^2 + s^2 \sin^2 \alpha}} \\ &= \frac{2|a - d|^2 + s^2 \sin^2 \alpha}{s \sin \alpha \cdot \sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2 \cos^2 \alpha) + 2s^2 \sin^2 \alpha}{s \sin \alpha \cdot \sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}}, \end{aligned}$$

mikä nähdään samaksi kuin epäyhtälön (3) lauseke.

Epäyhtälön (2) jälkimmäisen osan todistamiseksi todetaan ensin, että tapauksessa $r < 2s \cos \alpha$ epäyhtälö (3) antaa suuremman arvon. Silloin nimittäin

$$\sqrt{\left(\frac{r}{2s \sin \alpha}\right)^2 + 1} < \sqrt{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{1}{\sin \alpha},$$

ja toisaalta epäyhtälön (3) mukaan ehdoista $s \leq r < 2s \cos \alpha$ saadaan

$$P(J) > \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}}{s \sin \alpha} > \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3r^2 + s^2}}{s \sin \alpha} \geq \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Näin ollen voimme keskittyä tyystin tapaukseen $\frac{1}{2}r \geq s \cos \alpha$. Asetetaan kaksi pistettä r -pituisen sivun päihin ja kolmas sen keskelle. Silloin tämän sivun keskinormaali leikkaa vastakkaisen sivun pisteessä, joka määritellään pisteeksi a . Kun b, d ja c ovat kuvan 20 oikean puolen mukaisesti kantasivun pääty pisteet ja keskipiste, niin arvoksi tulee

$$p(a, b, c, d) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}r \sqrt{(\frac{1}{2}r)^2 + s^2 \sin^2 \alpha}}{rs \sin \alpha} = \frac{\sqrt{r^2 + 4s^2 \sin^2 \alpha}}{2s \sin \alpha} = \sqrt{\left(\frac{r}{2s \sin \alpha}\right)^2 + 1},$$

ja epäyhtälö (2) pitää paikkansa. \square

Kukin lauseen 3.15 antamista alarajoista on oleellinen. Epäyhtälön (2) toinen osa tulee epäyhtälön (3) lauseketta suuremmaksi vain suurilla kulman α arvoilla.

Huomautus 3.16. Suorakulmion tapauksessa $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ja $(\sin \frac{\alpha}{2})^{-1} = \sqrt{2}$, joten alaraja saa muodon

$$P(J) \geq \max \left\{ \sqrt{2}, \sqrt{\frac{r^2}{4s^2} + 1} \right\}.$$

Epäyhtälöllä (3) ei ole tässä vaikutusta, sillä sen lauseke on suorakulmiolla pienempi kuin jälkimmäinen epäyhtälön (2) osa. Molemmat jäljellä olevat termit osoittautuvat olennaisiksi vertaamalla arvoja tilanteissa $r = s$ ja $r = 3s$.

Seuraavaksi määritämme ylärajan.

Lause 3.17. *Kun J on suunnikas, jonka pienempi sisäkulma on $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ja sivujen pituudet r ja s , $r \geq s$, niin*

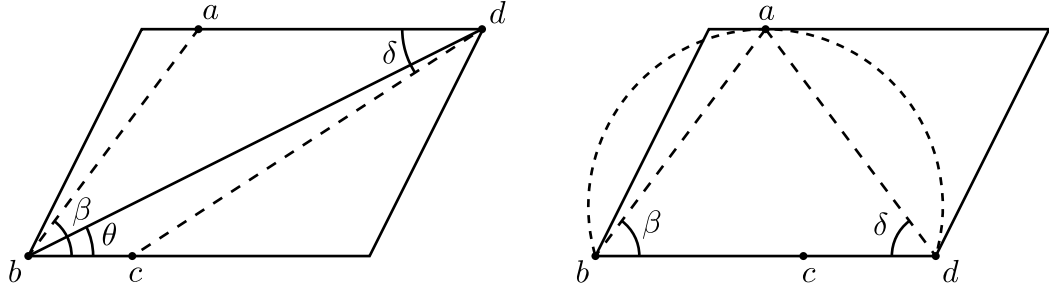
$$P(J) \leq \max \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \sqrt{\left(\frac{r}{2s \sin \alpha}\right)^2 + 1}, \frac{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}}{s \sin \alpha} \right\}.$$

Todistus. Olkoon $abcd$ järjestetty nelikko suunnikaskäyrällä J . Rajoituksetta a ja c voidaan valita pisteiksi, joiden sisäkulmien summa on vähintään π . Jos a ja c ovat samalla sivulla, niin silloin ovat myös pisteet b ja d , koska niiden sisäkulmien summa on korkeintaan π . Siinä tapauksessa $p(a, b, c, d) = 1$.

Jos taas a ja c ovat vierekkäisillä sivuilla, niin toinen jäljellä olevista pisteistä, b tai d , muodostaa näiden välissä kulman, joka on vähintään suunnikkaan kulman suuruinen. Suunnikkaan kulmista pienempi on $\alpha \leq \pi - \alpha$, joten pisteitä b ja d vastaavien sisäkulmien summa $\beta + \delta$ on vähintään α . Mutta silloin seurauksen 3.5 nojalla

$$p(a, b, c, d) \leq \frac{1}{\sin((\beta + \delta)/2)} \leq \frac{1}{\sin(\alpha/2)}.$$

Jäljelle jää tapaus, jossa a ja c ovat vastakkaisilla sivuilla. Tiedämme, että kulmien summa $\beta + \delta$ antaa seurauksen 3.5 perusteella ylärajan. Jos nyt etenemme niin, että pienennämme kulmien summaa $\beta + \delta$, voimme varmuudella sanoa luvusta $p(a, b, c, d)$ sen, että yläraja $(\sin((\beta + \delta)/2))^{-1}$ kasvaa, ja uusikin yläraja on pitävä.



Kuva 21: Kaksi minimitapausta summalle $\beta + \delta$, kun a ja c ovat vastakkaisilla sivuilla.

Huomataan, että seurauksen 3.13 perusteella pienin kulmien summa $\beta + \delta$ saadaan silloin, kun molemmat pisteet b ja d ovat suunnikkaan kulmissa. Näin ollen ne ovat joko jonkin sivun tai lävistäjän päätepisteinä.

Tarkastellaan ensin näitä pisteitä saman sivun päädyissä. Olkoon tällä sivulla piste c , ja a jääköön vastakkaiselle sivulle. Mutta apulause 3.11 takaa, että pisteen a sisäkulma on suurimmillaan silloin, kun ympyrä $\mathcal{C}(b, d, a)$ sivuaa sivua, jolla a on. Koska vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia, optimaalinen paikka pisteelle a on janan bd keskinormaalien leikkauspisteessä. Tilannetta on hahmoteltu kuvan 21 oikealla puolella. Riippumatta siitä, onko optimaalinen paikka mahdollinen, saamme oletuksella $r \geq s$ kulmien summalle rajoituksen

$$\sin((\beta + \delta)/2) \geq \frac{s \sin \alpha}{\sqrt{(r/2)^2 + s^2 \sin^2 \alpha}} = \left(\sqrt{\left(\frac{r}{2s \sin \alpha}\right)^2 + 1} \right)^{-1},$$

ja ylärajaksi tulee

$$p(a, b, c, d) \leq \frac{1}{\sin((\beta + \delta)/2)} \leq \sqrt{\left(\frac{r}{2s \sin \alpha}\right)^2 + 1}.$$

Viimeisenä käsiteltävänä tilanteena on se, jossa b ja d ovat lävistäjän päätepisteinä. Silloin on selvää, että kumpikin muodostaa sisäkulman, joka on vähintään yhtä suuri kuin se, jonka lävistäjä muodostaa sivun kanssa. Voidaan rajoittaa tarkastelemaan pienempää kulmista, jonka pidempi lävistäjä muodostaa vastakkaisien sivujen kanssa. Olkoon tämä kulma θ . Silloin $(\beta + \delta)/2 \geq \theta$ ja

$$\sin \theta = \frac{s \sin \alpha}{\sqrt{(r + s \cos \alpha)^2 + s^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{s \sin \alpha}{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}},$$

joten väitteen epäyhtälö seuraa. □

Huomautus 3.18. Lauseen yläraja tuli esitettyksi kolmiosisaisena, mutta viimeinen sen termeistä on ainoa merkityksellinen muita suurempana. Oletuksen $r \geq s$ perusteella voidaan nimittäin kirjoittaa

$$\frac{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}}{s \sin \alpha} \geq \frac{\sqrt{2 + 2 \cos \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos(\alpha/2)}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}, \quad (4)$$

ja toisaalta

$$\frac{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}}{s \sin \alpha} = \sqrt{\left(\frac{r}{s \sin \alpha}\right)^2 + 2 \frac{r \cos \alpha}{s \sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \geq \sqrt{\left(\frac{r}{2s \sin \alpha}\right)^2 + 1}.$$

Tällä tavoin ylärajan esitys yksinkertaistuu, mutta todennäköisesti lauseke ei ole paras mahdollinen. Saamme kuitenkin tietoa P -arvon suuruusluokasta, josta esitämme seurauksen.

Seuraus 3.19. *Kun J on suunnikas, jonka pienempi sisäkulma on $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ja sivujen pituudet r ja s , $r \geq s$, niin silloin*

$$\frac{1}{2} \left(A + \frac{1}{A} \right) \leq P(J) \leq A = \frac{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}}{s \sin \alpha}.$$

Yhdelle erikoistapaukselle saamme tarkan arvon. Huomautuksen 3.18 lausekkeessa (4) on yhtäsuuruus, kun $r = s$, joten neljäkkäälle on voimassa seuraava tarkka tulos.

Seuraus 3.20. *Jos J on neljäkkään reunakäyrä ja $\alpha \in (0, \pi/2]$ sen pienempi sisäkulma, niin silloin $P(J) = 1/\sin(\alpha/2)$.*

3.4 Konveksit kaaret

Määritelmä 3.21. Olkoon $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ paloittain sileän käyrän parametriesitys. Arvoilla $t \in [0, 1]$, joilla $\gamma'(t) \neq 0$, määrittelemme sen *suuntakulmaksi* funktion $\text{ang } \gamma(t) = \arg \gamma'(t)$. Jos $\gamma'(t_0) = 0$ jollain $t_0 \in (0, 1]$, niin täydennämme määritelmäksi

$$\text{ang } \gamma(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \arg \gamma'(t),$$

ja tapauksessa $\gamma'(0) = 0$ käytämme oikeanpuoleista raja-arvoa ($t \rightarrow 0+$). Koska \arg on monihaarainen funktio, teemme valinnan $\text{ang } \gamma(0) \in [0, 2\pi)$ ja vaadimme, että parametrin $t_1 \in [0, 1)$ arvoilla on voimassa

$$\left| \text{ang } \gamma(t_1) - \lim_{t \rightarrow t_1^+} \text{ang } \gamma(t) \right| < 2\pi,$$

ja pisteessä $t_1 = 1$ saman vasemmanpuoleisella raja-arvolla ($t \rightarrow 1-$).

Edellisen määritelmän mielessä voimme puhua tangentista myös kulmapisteissä eräänlaisena oikeanpuoleisena tangenttina. Käyrän sileillä osilla tämä on luonnollisesti yhtenevä tangenttiin. Täsmällisyyden nimissä teemme määritelmän myös sille, mitä tarkoitamme tässä yhteydessä konvekseilla käyrillä. Kuten aikaisemminkin, seuraavassa määritelmässä

$$[x, y] = \{(1-p)x + py \mid 0 \leq p \leq 1\}$$

on jana pisteiden $x, y \in \mathbb{C}$ välillä.

Määritelmä 3.22. Olkoon $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ käyrän J parametriesitys. Jos luvuilla s ja t , $0 \leq s \leq t \leq 1$, on aina voimassa

$$\gamma([0, 1]) \cap [\gamma(s), \gamma(t)] = [\gamma(s), \gamma(t)]$$

tai

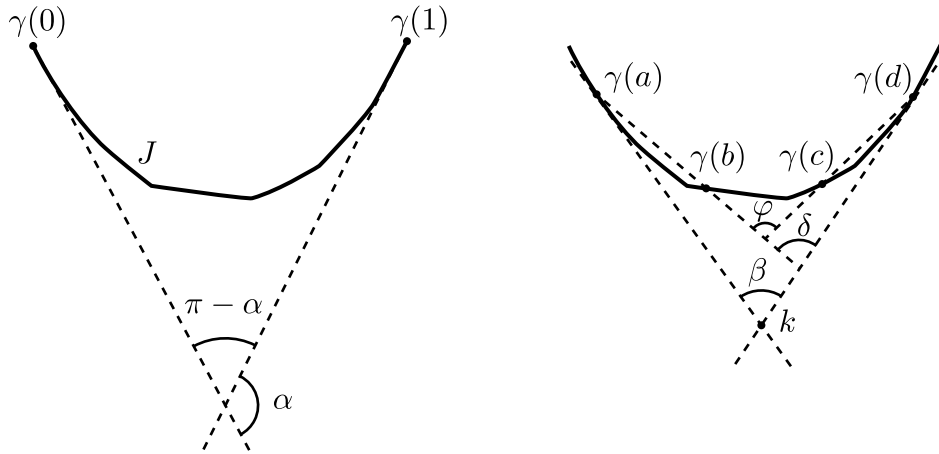
$$\gamma([0, 1]) \cap [\gamma(s), \gamma(t)] = \{\gamma(s), \gamma(t)\}, \quad (5)$$

niin sanomme käyrää *konveksiksi*. Mikäli jälkimmäinen ehto (5) pätee aina, niin käyrä on *aidosti konveksi*. Erityisesti konveksin käyrän parametriesitys $\gamma(t)$ on sellainen, että $\text{ang } \gamma(t)$ on monotoninen ja $|\text{ang } \gamma(1) - \text{ang } \gamma(0)| \leq 2\pi$.

Lause 3.23. Kun konveksin käyrän J parametrisoinnilla $\gamma(t)$ on voimassa $\alpha = |\text{ang } \gamma(0) - \text{ang } \gamma(1)| < \pi$, niin silloin

$$P(J) \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi - \alpha}{2}}.$$

Todistus. P -arvo on parametrisoinnin suunnasta riippumaton, joten oletetaan $\text{ang } \gamma$ kasvavaksi. Valitaan neljä lukua $0 \leq a < b < c < d \leq 1$. Käyrän konveksiuden vuoksi kaikkien sen tangenttien välillä suuntakulmat eroavat korkeintaan kulman α verran. Toisaalta tangenttien leikkauspisteestä avautuu käyrää kohti kulma, joka on vähintään $\pi - \alpha$.



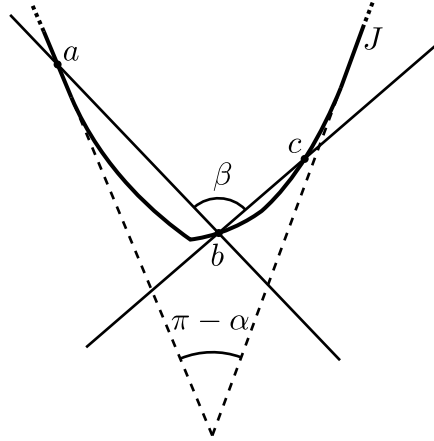
Kuva 22: Konveksi käyrä J , siihen liittyvä kulma α ja esimerkki pisteasetelmasta.

Olkoon pisteiden $\gamma(a)$ ja $\gamma(d)$ tangenttien leikkauspiste k ja siitä käyrälle avautuva kulma $\beta \geq \pi - \alpha$. Silloin suorat $\ell(\gamma(a), \gamma(b))$ ja $\ell(k, \gamma(d))$ leikkaavat kulmassa $\delta \geq \beta$. Tämän perusteella voimme sitten todeta, että suorien $\ell(\gamma(a), \gamma(b))$ ja $\ell(\gamma(c), \gamma(d))$ leikkauskulma on $\varphi \geq \delta$. Konveksiuden perusteella on nyt ilmeistä, että neljä pistettä ovat jo valmiiksi järjestyksessä jollain kulmalla $\varphi \geq \pi - \alpha$. \square

Huomautus 3.24. Koska konveksilla käyrällä parametrisointi voidaan tehdä kumpaankin suuntaan tahansa, todistus osoittaa aikaisempien tulosten tapaan, että järjestetyt pistenelikot voidaan aina kuvata Möbius-kuvauksella käyrälle J_θ , missä $\theta \geq \pi - \alpha$.

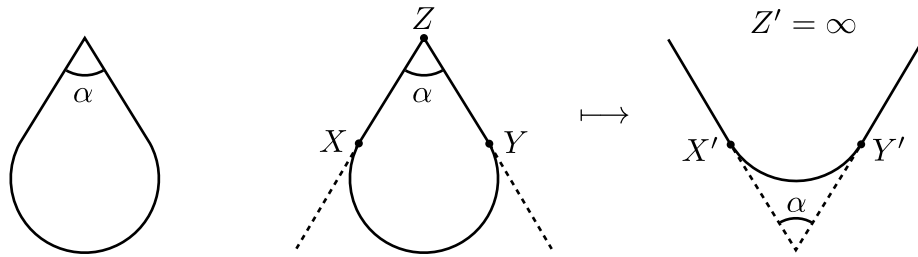
Edellisen lauseen perusteella lukua $(\sin \frac{\pi - \alpha}{2})^{-1}$ suurempi P -arvo asettaa vaatimuksen maksimaaliselle pisteasetelmalle. Pisteiden on nimittäin asetettava niin, että niiden välille ei jää konveksia kaartaa, jossa suuntakulma muuttuu vähemmän kuin α .

Lause yleistyy vielä siihenkin tapaukseen, että käyrää jatketaan päätepisteistään tangentin suuntaisina säteinä. Pisteiden ∞ sisällyttäminen tulee mahdolliseksi, koska pistenelikolla $abc\infty$ saamme $\infty \in \ell(a, b) \cap \ell(b, c)$ ja nämä sekantteja vastaavat suorat leikkaavat kulmassa $\beta \geq \pi - \alpha$, kuten kuvasta 23 ilmenee.



Kuva 23: Konvekksi kaari, jota on jatkettu pääty pisteistään säteillä käyräksi J .

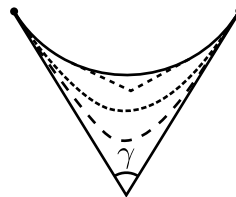
Tämän sovelluksena tiedämme, että esimerkiksi seuraavanlainen kahdesta janas-
ta ja ympyränkaaresta muodostuva tippakäyrä saa P -arvokseen tarkalleen luvun
 $(\sin(\alpha/2))^{-1}$, $\alpha \in (0, \pi)$.



Kuva 24: Esimerkki käyrästä, joka palautuu kuvauksella konvekseksi kaareksi.

Liitoskohtien X , Y ja Z kuvaaminen pisteiksi 0 , 1 ja ∞ tuottaa tässä tapauksessa
juurikin sellaisen konveksin käyrän, johon edeltävä käsittely soveltuu. Kuvausta on
havainnollistettu kuvan 24 oikealla puolella.

Huomautus 3.25. Lauseen 3.23 antama arvio on paras mahdollinen annetuilla ole-
tuksilla. Kun rajatapauksiksi otetaan ympyrän kaari ja kulmakäyrä, nähdään hel-
posti, että P -arvoksi voidaan saada tällaisilla käyrillä mikä tahansa luku väliltä
 $[1, 1/\sin((\pi - \alpha)/2)]$, missä α on lauseen mukaisesti suuntakulman muutos.



Kuva 25: Konvekseja kaaria J , joilla $P(J) \in [1, 1/\sin(\gamma/2)]$. Arvo $P(J) = 1/\sin(\beta/2)$,
 $\beta \in [\gamma, \pi]$, saadaan korvaamalla ympyrän kaaren osa kulmalla β .

3.5 Ellipsi

Viimeisenä P -arvon tutkimuskohteena on ellipsi. Muodostamme tällä kertaa arvion tarkastelemalla kulmia, kun venytämme ympyrää yhdessä suunnassa.

Apulause 3.26. Määritellään funktio $f(t) = (\arctan t)/t$ arvoille $t > 0$. Tällöin $f(t)$ on aidosti vähenevä, ja lisäksi $f(t) \rightarrow 1$, kun $t \rightarrow 0+$.

Todistus. Derivoimalla saadaan

$$f'(t) = \frac{t - (1 + t^2) \arctan t}{(1 + t^2)t^2} = \frac{g(t)}{(1 + t^2)t^2},$$

missä funktion $g(t)$ derivaatta

$$g'(t) = -2t \arctan t$$

on arvoilla $t > 0$ negatiivinen. Toisaalta lähestyttäessä nollaa oikealta puolelta funktiolle $g(t)$ on voimassa

$$\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 0 - (1 + 0^2) \cdot 0 = 0,$$

joten funktioiden $g(t)$ ja $f'(t)$ arvojen on oltava negatiivisia, kun t on positiivinen. Käyttämällä l'Hôpitalin sääntöä saadaan raja-arvo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/(1 + t^2)}{1} = 1,$$

mikä osoittaa, että myös jälkimmäinen väite on tosi. □

Seuraus 3.27. Kun $x > 0$, $y > 0$ ja $c \in (0, 1)$, niin

$$\arg(x + icy) > c \cdot \arg(x + iy).$$

Todistus. Apulauseen 3.26 nojalla

$$\frac{\arctan(c \cdot y/x)}{c \cdot y/x} > \frac{\arctan y/x}{y/x},$$

ja toisaalta $\arg(x + iy) = \arctan(y/x)$. □

Lause 3.28. Olkoot a ja b ellipsin E puoliakseleiden pituudet. Silloin

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \leq P(E) \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Todistus. Ympyrää vastaava tapaus $a = b$ toteuttaa selvästi epäyhtälöt. Oletetaan sitten, että $b < a$, ja valitaan a puoliakseliksi reaaliakselin suunnassa. Silloin

$$p(a, bi, -a, -bi) = \frac{2 \cdot (\sqrt{a^2 + b^2})^2}{2a \cdot 2b} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right),$$

joten väitetty alaraja on voimassa. Ylärajan todistamiseksi tarkastellaan ympyrää, joka skaalataan c -kertaiseksi imaginaariakselin suunnassa. Valinnalla $c = b/a$ kyseessä on ympyrän pienennys ellipsin E muotoiseksi.

Ympyrältä valitut neljä pistettä muodostavat konveksin syklisen nelikulmion, jolla on sisäkulmat α, β, γ ja δ . Vastakkaisten kulmien summalle on silloin myös voimassa $\alpha + \gamma = \pi = \beta + \delta$.

Jokainen kulmista on kahden janan välissä. Skaalattaessa imaginaariakselin suunnassa kumpikin jana voi muuttaa kulmaansa suhteessa vaakatasoon joko pienemmäksi tai suuremmaksi. Olennainen huomio on, että silloin, kun kulma pienenee eniten, seuraus 3.27 antaa alarajan pienennyksen jälkeisille kulmille. Olettaen, että vastakkaisten kulmien summa $\alpha + \gamma$ pienenee eniten, skaalauksen jälkeen vastakkaisilla kulmilla on voimassa $\alpha' + \gamma' \in (c\pi, \pi]$. Koska edellinen pitää nelikulmiosta riippumatta, lause 3.7 antaa arvion $P(E) \leq (\sin(c\pi/2))^{-1}$. \square

Lauseen antamien rajojen välinen ero ei ole aivan ilmeinen. Teemme ylärajaan selvennyksen, jonka todistamiseksi tarvitsemme seuraavan apulauseen.

Apulause 3.29. *Luvulla $x \in (0, \pi/2]$ on voimassa*

$$x \cot x \geq 1 - \frac{4x^2}{\pi^2}.$$

Todistus. Rajoitetaan tarkastelu annetulle välille ja määritellään $g(x) = x \cot x$, jolloin voimme laskea

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\sin 2x - 2x}{2 \sin^2 x} \leq 0, \\ g''(x) &= -2 \cdot \frac{1 - x \cot x}{\sin^2 x}, \\ g'''(x) &= \frac{3 \sin 2x - 2x(2 + \cos 2x)}{\sin^4 x} = \frac{h(x)}{\sin^4 x}. \end{aligned}$$

Koska $x \cot x \rightarrow 1$, kun $x \rightarrow 0+$, ja $g'(x) \leq 0$, niin on oltava $x \cot x \leq 1$. Saamme siis

$$h'(x) = 8(x \cot x - 1) \sin^2 x \leq 0,$$

ja koska $h(0) = 0$, niin siten $g'''(x) \leq 0$. Funktio $g''(x)$ on siis vähenevä. Laskemme sen arvot reunoilla. Selvästikin $g''(\pi/2) = -2$ ja lähestyttäessä nollaa saamme kahdesti (*) l'Hôpitalin sääntöä käyttämällä

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} g''(x) &\stackrel{(*)}{=} -2 \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\cot x + x \csc^2 x}{2 \sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^3 x \cos x} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{3 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2}{3 \cos^2 x - \sin^2 x} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Määritellään sitten polynomi p säännöllä $p(x \cdot \pi/2) = 1 - x^2$, joten saamme $p(x) = 1 - 4x^2/\pi^2$, $p'(x) = -8x/\pi^2$, $p''(x) = -8/\pi^2$ ja $p'''(x) = 0$. Tällöin $(g - p)'''(x) \leq 0$, joten $(g - p)''$ laskee positiivisesta arvosta $8/\pi^2 - 2/3$ monotonisesti negatiiviseen arvoon $8/\pi^2 - 2$. Näin ollen derivaatalla $(g - p)'$ on yksittäinen huippu. Toisaalta l'Hôpitalin sääntö antaa

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (g - p)'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} + 0 = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{2 \sin x \cos x} = 0,$$

ja $(g - p)'(\pi/2) = -\pi/2 - 4/\pi < 0$, joten erityisesti myös $(g - p)'$ muuttuu tarkasteluvälillä positiiviseksi. Myös funktiolla $g - p$ on siis yksittäinen huippu, ja se saavuttaa pienimmän arvonsa toisessa välin päätepisteessä. Nyt $(g - p)(\pi/2) = 0$ ja

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (g - p)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x}{\sin x} - 1 = 0,$$

joten on oltava $g \geq p$ koko välillä $(0, \pi/2]$. \square

Kun lauseen funktiossa g täydennetään reunalla arvoksi $g(0) = 1$, niin polynomista p saadaan sille yllättävän hyvä arvio välillä $[0, \pi/2]$. Numeerisen tarkastelun perusteella tämän arvion absoluuttinen virhe on korkeimmillaan noin 0,05. Epäyhtälöllä on helppoa osoittaa oikeaksi seuraava tulos.

Lause 3.30. *Kun $c \in (0, 1]$, niin*

$$\frac{1}{\sin(c \cdot \pi/2)} < \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right).$$

Todistus. Määritellään funktio $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeella

$$f(c) = \frac{1}{\sin(c\pi/2)} / \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right) = \frac{2}{\sin(c\pi/2) \cdot (c + 1/c)}.$$

Silloin sen derivaataksi voidaan laskea

$$f'(c) = \frac{-2}{(1 + c^2)^2 \sin(c\pi/2)} \cdot \left((1 + c^2) \cdot (c\pi/2) \cot(c\pi/2) - (1 - c^2) \right),$$

ja apulauseen 3.29 perusteella $(c\pi/2) \cot(c\pi/2) \geq (1 - c^2)$, joten

$$f'(c) \leq \frac{-2}{(1 + c^2)^2 \sin(c\pi/2)} \cdot (1 - c^2)(1 + c^2 - 1) \leq 0. \quad (6)$$

Koska $f(1) = 1$ ja

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} f(c) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{4}{\pi} \cdot \left((c^2 + 1) \sin(c\pi/2) / (c\pi/2) \right)^{-1} = \frac{4}{\pi},$$

niin vähenevä funktio saa arvonsa väliltä $[1, 4/\pi]$. Arvoa $4/\pi$ ei saavuteta missään pisteessä $c > 0$, sillä derivaatan lausekkeen (6) mukaisesti on oltava $f'(c) < 0$ lähellä nollaa. Tästä seuraa alkuperäinen väite. \square

Seuraus 3.31. *Kun E on ellipsi, jonka pääakseleiden pituudet ovat a ja b , niin*

$$1 \leq \frac{P(E)}{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)} < \frac{4}{\pi}.$$

On hyvä pitää mielessä, että lause 3.28 antaa edellistä paremman arvon ylärajalle. Tulimme vain osoittaneeksi, että se on suuruudeltaan samaa luokkaa alarajan kanssa.

Arvon määrittämiseksi tehdyt numeeriset testit viittaavat poikkeuksetta siihen, että yhtäsuuruus annettuun alarajaan olisi voimassa. Toistaiseksi kysymys jää kuitenkin avoimeksi. Alarajan määrittämistävän perusteella ratkaisu olennaisesti vaatii sen, että osoitetaan maksimaalisessa pisteasetelmassa pisteiden asettautuminen pääakseleiden ja ellipsin leikkauspisteisiin.

4 Vertailukohde uniformisuusvakiosta

Yhdeksi tutkimuksen tavoitteeksi asetettiin P -arvon yhteyksien selvittäminen muihin käyrien tasaisuutta luonnehtiviin suureisiin ja erityisesti niin sanottuun uniformisuusvakioon. Pyrkimys tulee yksinomaan havainnosta, että sopivasti määriteltynä vakio on luonteeltaan samankaltainen kuin P -arvo.

Tässä luvussa määrittelemme uniformisuuden ja tarkastelemme siihen liittyvää vakiota. Määritämme vakiolle uusia arvioita etenkin niillä tasoalueilla, joiden reunakäyriä olemme tarkastelleet P -arvon yhteydessä.

4.1 Uniformisista alueista

Kuten jo johdannossakin tuli mainituksi, alkuperäinen uniformisuuden määritelmä on puhtaasti euklidiseen geometriaan perustuva. Uniformisuus koskee alueita $D \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Avaruuden \mathbb{R}^n aidoilla osajoukoilla etäisyys $d(\partial D, z)$ joukon reunaan on määritelty kaikilla pisteillä $z \in D$. Merkitään käyrän γ euklidista pituutta luvulla $\ell_d(\gamma)$, ja olkoot $\gamma_x^-, \gamma_x^+ \subset \gamma$ käyrän osat, joihin piste $x \in \gamma$ jakaa käyrän. Jos nyt on olemassa vakiot a ja b siten, että mitkä tahansa alueen pisteet $x_1, x_2 \in D$ voidaan yhdistää suoristuvalla käyrällä $\gamma \subset D$, jolla lisäksi

$$\begin{aligned} \ell_d(\gamma) &\leq a |x_1 - x_2|, \text{ ja} \\ \min\{\ell_d(\gamma_x^-), \ell_d(\gamma_x^+)\} &\leq b d(\partial D, x) \text{ kaikilla } x \in \gamma, \end{aligned}$$

niin kutsumme aluetta D *uniformiseksi*.

Olemme kuitenkin kiinnostuneet toisesta yhtäpitävästä määritelmästä, jota varten vaaditaan kaksi metriikkaa. Määritellään kvasihyperbolinen etäisyys pisteille $x, y \in G$ alueessa $G \subsetneq \mathbb{R}^n$ arvoksi

$$k_G(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{xy}} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{d(\partial G, z)},$$

missä Γ_{xy} on pisteet x ja y yhdistävien suoristuvien käyrien perhe. Tällöin k_G on metriikka ja arvoltaan muuttumaton euklidisen avaruuden isometrioissa. Lisäksi aina on olemassa käyrä, *geodeesi*, jolla pienin arvo saavutetaan. (Gehring & Osgood 1979.)

Määritellään alueessa G myös *j -metriikka* (*distance ratio metric*) lausekkeella

$$j_G(x, y) = \log \left(1 + \frac{|x - y|}{\min\{d(\partial G, x), d(\partial G, y)\}} \right).$$

Tämä on tärkeä vertailumetriikka, jolla geodeesejä ei kuitenkaan yleisesti ole. Näiden metriikoiden tunnettuja ominaisuuksia on koottu lauseeksi.

Lause 4.1. *Olkoot G ja F alueita (yhtenäisiä avoimia joukkoja), joilla $G \subseteq F \subsetneq \mathbb{R}^n$. Silloin*

1. $k_G \geq k_F$ ja $j_G \geq j_F$ koko osajoukossa $G \subseteq F$,
2. $j_G \leq k_G$ kaikilla joukoilla $G \subsetneq \mathbb{R}^n$, ja
3. Sekä j_G että k_G säilyvät similaarisuuskuvauksissa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Toisin sanottuna, kaikilla pisteillä $x, y \in \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$k_G(x, y) = k_{fG}(f(x), f(y)) \quad \text{ja} \quad j_G(x, y) = j_{fG}(f(x), f(y)).$$

Lauseen ominaisuudet epäyhtälöä $j_G \leq k_G$ lukuun ottamatta seuraavat suoraan määritelmästä, ja epäyhtälön osoittivat oikeaksi Gehring ja Palka (1976). Metriikoiden avulla uniformisuuden määritelmä tulee seuraavanlaiseksi.

Lause 4.2 (Gehring & Osgood 1979). *Alue $G \subsetneq \mathbb{R}^n$ on uniforminen tarkalleen silloin, kun on olemassa luku $A \geq 1$, jolla*

$$k_G(x, y) \leq A j_G(x, y) \quad \text{kaikilla } x, y \in G.$$

Tällöin alueen G *uniformisuusvakioksi* (*uniformity constant*) määritellään

$$A_G = \inf\{A \geq 1 \mid k_G(x, y) \leq A j_G(x, y)\}.$$

Jatkoa varten edelliseen lisätään käytäntö, että $A_G = \infty$, jos G ei ole uniforminen. Näin ollen merkinnän A_G käyttö ei vielä takaa alueen G uniformisuutta, vaikka A_G esiintyisi epäyhtälössä $A_G \geq c$ jonkin luvun $c \in \mathbb{R}$ kanssa.

Nyt, kun uniformisuusvakio on tullut määritellyksi metriikoiden avulla, selvitämme sen arvoja eri alueilla. Koska P -arvon määritelmä rajoittuu ainoastaan Jordan-käyriin, keskitymme tarkastelemaan yhtenäisiä tasoalueita $G \subsetneq \mathbb{R}^2$, joiden reunakäyrälle arvo $P(\partial G)$ on määritettävissä.

Kahdelle avaruuden \mathbb{R}^n osa-alueelle G vakion A_G arvo on hyvin tunnettu. Sekä yksikkökuulalla \mathbb{B}^n (Anderson, Vamanamurthy & Vuorinen, Lemma 7.56) että puoliavaruudella \mathbb{H}^n (Vuorinen 1988, Lemma 2.41) vakio on 2. Koska metriikat eivät muutu euklidisen avaruuden similaarisuuskuvauksissa, tasoon rajoitettuna vakio 2 saadaan kaikille tason kiekkoille ja suoraa rajaamille puolitasoille.

Merkittävimmät myöhemmät tulokset vakiolle lienee esittänyt Henri Lindén väitöskirjassaan (2005). Olennessa osassa todistuksissamme on seuraava tarkka tulos kulma-alueille $D_\alpha = \{re^{i\theta} \mid 0 < r, 0 < \theta < \alpha\}$, missä $\alpha \in (0, \pi]$.

Lause 4.3 (Lindén 2005). *Kun $\alpha \in (0, \pi]$, niin kulma-alueella D_α vakio on*

$$A_{D_\alpha} = 1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Kun tarkastellaan muita sellaisia alueita G , joilla myös $P(\partial G)$ voidaan määritellä, vakiolle A_G on ainoastaan arvioita. Tarkasti tunnettujen tapausten \mathbb{B}^2 , \mathbb{H}^2 ja D_α kohdalla voidaan lisäksi tehdä havainto, että juuri niillä on voimassa $A_G = 1 + P(\partial G)$. Tutkimme asiaa tarkemmin etsimällä sekä yhtäläisyyksiä että eroja lukujen A_G ja $P(\partial G)$ välille.

4.2 Kulmalliset alueet

Aloitamme tutkimuksen alueista, joilla on kulmia. Aikaisempien lukujen perusteella on jo tunnettua, että kulman α sisältäville reunakäyrille saamme arvion

$$P(\partial G) \geq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Tälle tulokselle on vastine uniformisuusvakiolla. Lauseen 4.3 pohjalta rakennamme seuraavan tuloksen, missä joukko $\mathbb{B}(z, r) = \mathbb{B}^2(z, r)$ on tason kiekko. ($\mathbb{B}^n(z, r) \subset \mathbb{R}^n$ on z -keskinen ja r -säteinen euklidinen avoin kuula.)

Lause 4.4. Kun $\alpha \in (0, \pi)$ on kulma ja alue $G \subseteq D_\alpha$ on kulma-alueen sellainen osajoukko, että jollain luvulla $r > 0$ on voimassa

$$G \cap \mathbb{B}(0, r) = D_\alpha \cap \mathbb{B}(0, r), \quad (7)$$

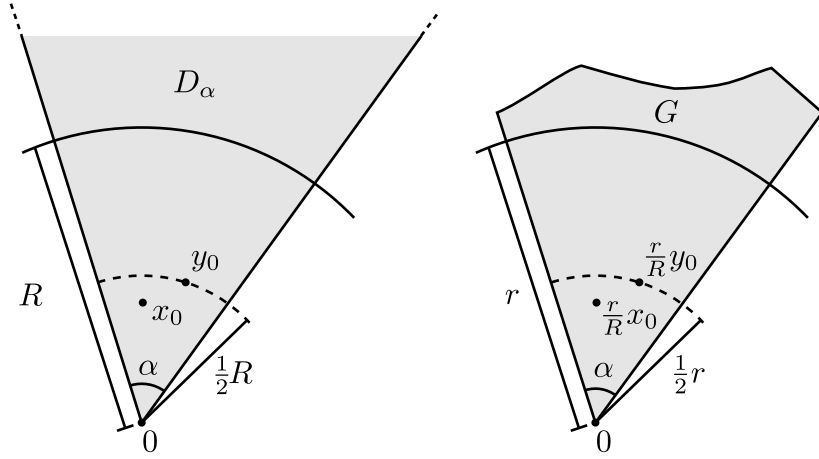
niin silloin $A_G \geq A_{D_\alpha}$.

Todistus. Vakion määritelmästä seuraa, että jokaista positiivista lukua $\varepsilon > 0$ kohden on oltava pisteet $x_0, y_0 \in D_\alpha$, joilla

$$k_{D_\alpha}(x_0, y_0) \geq (A_{D_\alpha} - \varepsilon)j_{D_\alpha}(x_0, y_0).$$

Pisteet x_0 ja y_0 sisältyvät joukkoon $D_\alpha \cap \mathbb{B}(0, R)$, missä $R = 2 \cdot \max\{|x_0|, |y_0|\}$. Silloin erityisesti pisteet $r/R \cdot x_0$ ja $r/R \cdot y_0$ kuuluvat joukkoon $G \cap \mathbb{B}(0, r)$. Osoitamme ensin, että

$$j_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0) = j_{D_\alpha}(x_0, y_0).$$



Kuva 26: Pisteet x_0 ja y_0 kulma-alueessa D_α sekä niiden (joukkoon G sisältyvät) kuvapistet kuvauksessa $z \mapsto (r/R)z$.

Kulma-alueessa D_α tiedämme, että $d(\partial D_\alpha, x_0)$ ja $d(\partial D_\alpha, y_0)$ ovat välttämättä kohtisuoria etäisyyksiä alueen kylkiin. Koska erityisesti $d(\partial D_\alpha, x_0) < |x_0| \leq R/2$, niin $|(r/R)x_0| \leq r/2$ ja

$$d(\partial G, (r/R)x_0) = d(\partial D_\alpha, (r/R)x_0) = r/R \cdot d(\partial D_\alpha, x_0).$$

Alue $G \cap \overline{\mathbb{B}}(0, r/2)$ on siis kulma-alueen osa, jossa saavutetaan lyhin etäisyys reunaan ∂G kohtisuorana etäisyytenä kulma-alueen kyljistä. Yhtä lailla saamme

$$d(\partial G, (r/R)y_0) = r/R \cdot d(\partial D_\alpha, y_0),$$

ja merkitsemällä $m = \min\{d(\partial D_\alpha, x_0), d(\partial D_\alpha, y_0)\}$ voimme päätellä, että

$$\begin{aligned} j_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0) &= \log \left(1 + \frac{|r/R \cdot x_0 - r/R \cdot y_0|}{r/R \cdot m} \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{|x_0 - y_0|}{m} \right) \\ &= j_{D_\alpha}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Seuraavaksi osoitamme, että aina on oltava

$$k_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0) \geq k_{D_\alpha}(x_0, y_0).$$

Todetaan aluksi, että jokaisella pisteet $r/R \cdot x_0$ ja $r/R \cdot y_0$ yhdistävällä suoristuvalla käyrällä $\gamma \subset G$ on joukossa D_α vastine $(R/r)\gamma$, joka yhdistää pisteet x_0 ja y_0 , koska $(R/r)G \subseteq D_\alpha$ kaikilla positiivisilla luvuilla R/r .

Toisaalta kaikilla pisteillä $z \in G$ eli pisteillä $(R/r)z \in (R/r)G \subseteq D_\alpha$ on voimassa

$$d(\partial G, z) = r/R \cdot d(\partial((R/r)G), (R/r)z) \leq r/R \cdot d(\partial D_\alpha, (R/r)z).$$

Olkoon $\gamma \subset G$ polku alueessa G pisteiden $r/R \cdot x_0$ ja $r/R \cdot y_0$ välillä. Metriikan määritelmästä ja edellisestä toteamuksesta saamme, että

$$k_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0) = \inf_{\gamma \subset G} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{d(\partial G, z)} \geq \inf_{\gamma \subset G} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{r/R \cdot d(\partial D_\alpha, (R/r)z)}.$$

Sijoitetaan lausekkeen integraaliin $z = (r/R)w$, jolloin $dz = (r/R)dw$ ja parametrin w kulkema polku $\Gamma = (R/r)\gamma$ on alueessa $(R/r)G \subseteq D_\alpha$ pisteiden x_0 ja y_0 välillä. Tämän tuloksena

$$\begin{aligned} k_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0) &\geq \inf_{\gamma \subset G} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{r/R \cdot d(\partial D_\alpha, (R/r)z)} \\ &= \inf_{\Gamma \subset (R/r)G} \int_{\Gamma} \frac{|dw|}{d(\partial D_\alpha, w)} \\ &\geq \inf_{\Gamma' \subset D_\alpha} \int_{\Gamma'} \frac{|dw|}{d(\partial D_\alpha, w)} \\ &= k_{D_\alpha}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

koska polut $\Gamma' \subset D_\alpha$ (pisteiden x_0 ja y_0 välillä) kattavat erityisesti kaikki polut $\Gamma \subset (R/r)G$. Lopullisena johtopäätöksenä saamme nyt, että

$$\begin{aligned} k_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0) &\geq k_{D_\alpha}(x_0, y_0) \\ &\geq (A_{D_\alpha} - \varepsilon)j_{D_\alpha}(x_0, y_0) \\ &= (A_{D_\alpha} - \varepsilon)j_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0). \end{aligned}$$

Koska on olemassa tällaiset alueen G pisteet $(r/R)x_0$ ja $(r/R)y_0$, niin on oltava $A_G \geq A_{D_\alpha} - \varepsilon$. Emme asettaneet rajoituksia positiiviselle luvulle ε , joten tästä seuraa, että $A_G \geq A_{D_\alpha}$. \square

Seuraus 4.5. *Kun G on konveksin monikulmion sisäalue ja $\alpha_{\min} \in (0, \pi)$ monikulmion pienin sisäkulma, niin*

$$A_G \geq 1 + \frac{1}{\sin(\alpha_{\min}/2)}.$$

Todistus. Tilanteeseen liittyvät metriikat ovat siirto- ja kierto invariantteja, joten voimme siirtää pienintä kulmaa $\alpha = \alpha_{\min}$ vastaavan kulmapisteen origoksi siten, että kulman kyljet ovat kulma-alueen D_α kyljillä. Monikulmion konveksiuden vuoksi muunnoksesta saatu alue G' sisältyy kulma-alueeseen. Jos a ja b ovat monikulmiossa kulman kylkien

pituudet, niin valitsemme $r = \min\{a, b\} \cdot \cos(\alpha/2)$. Tällöin alueella G' ja luvulla r täyttyy lauseen 4.4 ehto (7). Saamme

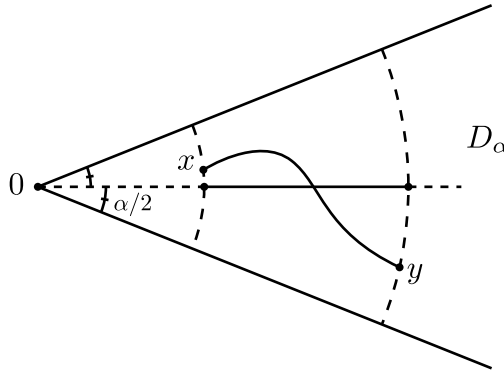
$$A_G = A_{G'} \geq A_{D_\alpha} = 1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad \square$$

Lauseen 4.4 olennaisin rajoitus sen sovellettavuuden kannalta on epäilemättä vaatimus alueen $G \subset D_\alpha$ sisältymisestä itse kulma-alueeseen. Tapa, jolla lause tuli todistetuksi, viittaa vahvasti siihen, että vaatimuksesta voitaisiin luopua. Tekemällä muutamia lisäyksiä päästäänkin tähän tulokseen.

Aikaisempi todistus tehtiin nimenomaan lauseen yleistystä silmällä pitäen, ja osa tehdyistä päätelmistä voidaan itse asiassa johtaa helpommin kuin todistuksessa esitettiin. Tärkeä huomio on ensinnäkin metriikoiden monotonisuus niin, että sisältyvillä alueilla $G \subset S$ on aina voimassa $k_G \geq k_S$ ja $j_G \geq j_S$. Kun edellinen yhdistetään tietoon metriikoiden muuttumattomuudesta säteittäisessä skaalauksessa, saamme välittömästi seurauksena, että

$$k_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0) \geq k_{D_\alpha}(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0) = k_{D_\alpha}(x_0, y_0).$$

Täsmällinen integroimispolkujen tarkastelu ei kuitenkaan ollut turhaa, sillä se tulee tarpeelliseksi yleistyksen todistamisessa. Käytännön eroksi edelliseen muodostuu se, että k -metriikkaa varten päätepisteet on asetettava riittävän lähelle kulmaa nyt myös sen takia, että geodeettinen polku saadaan pidetyksi vastaavan kulma-alueen sisällä. Kulmaa lähellä oleville päätepisteille voidaan nimittäin osoittaa, että kulma-alueesta poikkeaminen aiheuttaisi liian pitkän polun. Tämän toteuttamiseksi otamme käyttöön pienen apulauseen.



Kuva 27: Apulauseessa 4.6 integrointipolulle saadaan alaraja kulmanpuolittajalta.

Apulause 4.6. *Olkoot $x, y \in D_\alpha$ pisteitä kulma-alueessa ja $|x| \leq |y|$. Silloin*

$$k_{D_\alpha}(x, y) \geq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \log \frac{|y|}{|x|}.$$

Todistus. On löydettävä integrointipolku, joka tuottaa lyhimmän matkan säteeltä $|x|$ säteelle $|y|$ origosta. Parametrisoidaan polut polaarimuotoon $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$, jonka perusteella erityisesti $|dz| \geq |dr|$. Toisaalta etäisyys reunasta ∂D_α on korkeimmillaan

kulmanpuolittajalla, joten $d(\partial D_\alpha, z) \leq r \sin(\alpha/2)$. Saamme lyhimmän etäisyyden kulmanpuolittajaa pitkin kulkevalla janalla, ja kolmioepäyhtälöä käyttämällä seuraa

$$k_{D_\alpha}(x, y) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{|dz|}{d(\partial D_\alpha, z)} \geq \int_{|x|}^{|y|} \frac{|dr|}{r \sin(\alpha/2)} \geq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left| \int_{|x|}^{|y|} \frac{dr}{r} \right| = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \log \frac{|y|}{|x|}$$

kuten väitettiin.

□

Muotoilemme lauseelle 4.4 yleistyksen, joka poistaa rajoituksen $G \subset D_\alpha$.

Lause 4.7. *Kun alueella $G \subset \mathbb{R}^2$ on voimassa*

$$G \cap \mathbb{B}(0, r) = D_\alpha \cap \mathbb{B}(0, r)$$

jollain luvulla $r > 0$ ja kulmalla $\alpha \in (0, \pi)$, niin silloin $A_G \geq A_{D_\alpha}$.

Todistus. Seuraamme lauseen 4.4 todistusmenetelmää, joten kiinnitämme huomion ainoastaan niihin kohtiin, jotka eivät sellaisenaan toimi tässä yleisemmässä tapauksessa. Luvun r ja pisteiden x_0, y_0 valinta on sama kuin edellisessäkin lauseessa. Kun asetamme vaatimuksen $R \geq 2 \cdot \max\{|x_0|, |y_0|\}$, niin silloin erityisesti

$$j_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0) = j_{D_\alpha}(x_0, y_0),$$

ja voimme keskittyä kvasihyperbolisen metriikan polkuihin.

Koska pisteet x_0 ja y_0 on kiinnitetty jokaista lukua ε kohden, niin tiedämme luvun $c = \frac{1}{2} A_{D_\alpha} \cdot j_{D_\alpha}(x_0, y_0)$. Teemme toisen vaatimuksen luvulle R muodossa

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \log \frac{\frac{1}{2}R}{\max\{|x_0|, |y_0|\}} \geq c,$$

joka sievenee muotoon

$$R \geq 2 \max\{|x_0|, |y_0|\} \cdot e^{c \sin(\alpha/2)}.$$

Otetaan sitten polku $\gamma \subset G$ pisteiden $r/R \cdot x_0$ ja $r/R \cdot y_0$ välillä. Pisteiden x_0 ja y_0 välisen polun $(R/r)\gamma$ on nyt joko

- (i) kokonaan kuljettava säteen $\frac{1}{2}R$ sisällä, tai
- (ii) kuljettava säteiden $m = \max\{|x_0|, |y_0|\}$ ja $\frac{1}{2}R$ väli kahdesti.

Tapauksessa (ii) pisteillä z , joilla $|z| \leq \frac{1}{2}R$, on myös $d(\partial(R/r)G, z) = d(\partial D_\alpha, z)$, joten apulause 4.6 antaa

$$k_{(R/r)G}(x_0, y_0) \geq 2 \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \log \frac{\frac{1}{2}R}{m} > 2c = A_{D_\alpha} \cdot j_{D_\alpha}(x_0, y_0) = A_{D_\alpha} \cdot j_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0),$$

ja väite on tässä tapauksessa selvä.

Mutta tapaus (i) on nyt myös ilmeinen, sillä geodeesillä $(R/r)\gamma$ on oltava

$$d(\partial(R/r)G, z) = d(\partial D_\alpha, z)$$

rajoituksen $|z| \leq \frac{1}{2}R$ vuoksi. Näin siis tässä tapauksessa

$$k_G(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0) = k_{D_\alpha}(r/R \cdot x_0, r/R \cdot y_0),$$

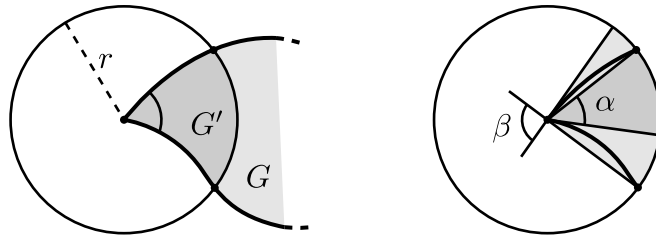
ja pääsemme haluttuun tulokseen samankaltaisella ε -ehdolla kuin aikaisemmassakin lauseessa 4.4. \square

Olemme tulleet johtaneeksi ensimmäisen näennäisen yhtäläisyyden P -arvon ja uniformisuusvakion välillä: Silloin, kun tasoalueella G on kulma $\alpha \in (0, \pi)$, niin sillä on voimassa $A_G \geq 1 + (\sin(\alpha/2))^{-1}$ ja alueen reunakäyrällä $P(\partial G) \geq (\sin(\alpha/2))^{-1}$.

Yksi luonnollinen kysymys on, kuinka paljon edellinen yleistyy. Kulmilla $\beta \in (\pi, 2\pi)$ uniformisuusvakiota ei tarkkaan edes tunneta, mutta tapauksessa $G \subset D_\beta$ alaraja lienee pääteltävissä edeltävään tapaan. Tällöin alueen G uniformisuusvakiolle saataisiin vähintäänkin sama alaraja, jonka Lindén on väitöskirjassaan johtanut.

Toinen puoli asiasta on alueiden kulmien tulkintatapa. Sama tulos saataneen vielä yleisemminkin käyrien leikkauskulmille käyttämällä erilaisia rajallemenoprosesseja. P -arvon kohdalla tuloksen toteamiseksi riittää se, että käyrällä eri suunnista kulmapistettä lähestyvien pisteiden välinen kulma lähestyy jotakin raja-arvoa, mutta edellisten lauseiden hengessä tehty tarkastelu uniformisuusvakiolle ei ole yhtä yksinkertainen. Emme syvenny yksityiskohtiin, mutta todistuksessa voisimme edetä seuraavasti.

Valitaan alueen G kulmapiste ja siihen keskitetty r -säteinen kiekko. Tarkastelemme kiekon ja alkuperäisen alueen leikkausaluetta G' . Tehdään sekä alueen G' sisälle että sen ulkopuolelle kulma-alueen osat, joilla on vastaavasti kulminaan α ja β . Asettelu tehdään niin, että sisäpuolelle asetettu osa on kulmaltaan mahdollisimman suuri ja ulkopuolelle asetettu osa mahdollisimman pieni.



Kuva 28: Esitys tarkastelutavaksi yleisesti alueiden kulmilla.

Silloin voimme skaalata kulma-alueen D_α pisteet alueen G' sisälle. Tällä alueella saamme $d(\partial D_\alpha, z) \leq d(\partial G', z)$, kunhan $|z|$ on tarpeeksi pieni. Saamme käänteisen epäyhtälön alueelle D_β , joten

$$j_G(x, y) \leq j_{D_\alpha}(x, y) \quad \text{ja} \quad k_G(x, y) \geq k_{D_\beta}(x, y),$$

jos pisteet tulevat valituiksi tarpeeksi läheltä alueen kulmaa. Sikäli kuin on mahdollista rajata käyrän kulma näin ja raja-arvona $\beta - \alpha \rightarrow 0$, kun $r \rightarrow 0$, niin päättelyllä voidaan päästä lähelle rajakulman määräämää arvoa.

4.3 Säteittäin jatkuvat alueet

Luontevana jatkona kulmien tarkastelulle katsotaan tilannetta, jossa tietyssä mielessä alueen kulma muodostuu äärettömyyteen. Toisin sanottuna tarkasteltavaksi otetaan säteittäin johonkin kulmaan avautuvat alueet, joiden P -arvoa tulimme tutkineeksi muun muassa luvussa 3.4.

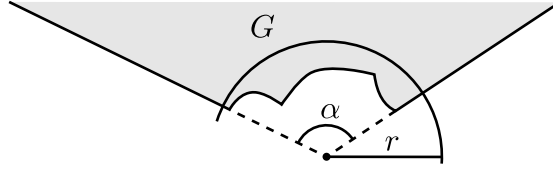
Aikaisemmissa tarkasteluissa P -arvon Möbius-invarianssin perusteella saimme kulmaan α avautuville käyrille helposti alarajaksi $P \geq 1/\sin(\alpha/2)$, mutta uniformisuusvakion kanssa tilanne ei ole aivan yhtä yksioikoinen. Kumpaakaan metriikoista, kvasi-hyperbolista metriikkaa saati j -metriikkaakaan, ei voida suoraan määritellä joukoille, joihin sisältyy piste ∞ .

Osoittautuu, että uniformisuusvakiolla on samanmuotoinen alaraja kuin edellisen alaluvun tuloksissa. Todistamme tämän vastaavalla tekniikalla, mutta tällä kertaa skaalaus tehdään suurennoksena.

Lause 4.8. *Olkoon $\alpha \in (0, 2\pi)$ kulma ja $G \subseteq D_\alpha$ sellainen kulma-alueen osajoukko, että*

$$G \setminus \mathbb{B}(0, r) = D_\alpha \setminus \mathbb{B}(0, r)$$

jollain luvulla $r > 0$. Silloin $A_G \geq A_{D_\alpha}$.



Kuva 29: Säteittäin kulmaan α avautuva alue $G \subseteq D_\alpha$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. On sellaiset $x_0, y_0 \in D_\alpha$, että

$$k_{D_\alpha}(x_0, y_0) \geq (A_{D_\alpha} - \varepsilon)j_{D_\alpha}(x_0, y_0).$$

Valitaan $R = \min\{|x_0|, |y_0|\}$. Silloin luvuilla $c \geq 1$ pisteet $(cr/R)x_0$ ja $(cr/R)y_0$ ovat joukossa G . Tarkastellaan j -metriikan arvoja. Näillä on lauseke

$$j_G((cr/R)x_0, (cr/R)y_0) = \log \left(1 + \frac{(cr/R)|x_0 - y_0|}{\min\{d(\partial G, (cr/R)x_0), d(\partial G, (cr/R)y_0)\}} \right).$$

Kolmioepäyhtälön nojalla pisteillä $z \in G$ on voimassa $d(\partial G, z) \geq d(\partial D_\alpha, z) - r$, joten

$$\begin{aligned} j_G((cr/R)x_0, (cr/R)y_0) &\leq \log \left(1 + \frac{|x_0 - y_0|}{\min\{d(\partial D_\alpha, x_0), d(\partial D_\alpha, y_0)\} - R/c} \right) \\ &\leq j_{D_\alpha}(x_0, y_0) + \delta \end{aligned}$$

millä tahansa luvulla $\delta > 0$, kunhan c valitaan riittävän suureksi.

Kvasihyperbolisella metriikalla tilanne on tätä yksinkertaisempi. Koska $G \subset D_\alpha$, niin $k_G \geq k_{D_\alpha}$ koko joukossa G , ja skaalausinvarianssista alueessa D_α saamme

$$k_G((cr/R)x_0, (cr/R)y_0) \geq k_{D_\alpha}((cr/R)x_0, (cr/R)y_0) = k_{D_\alpha}(x_0, y_0).$$

Päättelemme, että

$$k_G((cr/R)x_0, (cr/R)y_0) \geq (A_{D_\alpha} - \varepsilon)(j_G((cr/R)x_0, (cr/R)y_0) - \delta),$$

ja erityisesti epäyhtälö $k_G/j_G \geq A_{D_\alpha} - \varepsilon - (A_{D_\alpha} - \varepsilon)\delta/j_G$ toteutuu joillakin alueen G pisteillä. Tässä emme valintaa $\varepsilon > 0$ rajoittaneet mitenkään. Luvut δ ja j_G ovat sen sijaan riippuvaisia luvusta c . Koska $G \subset D_\alpha$, niin $j_G \geq j_{D_\alpha}$ ja

$$\frac{\delta}{j_G((cr/R)x_0, (cr/R)y_0)} \leq \frac{\delta}{j_{D_\alpha}((cr/R)x_0, (cr/R)y_0)} = \frac{\delta}{j_{D_\alpha}(x_0, y_0)},$$

missä $j_{D_\alpha}(x_0, y_0)$ on jo tullut kiinnitetyksi. Nyt luvut ε ja δ saadaan vielä lähelle nollaa ja suhde k_G/j_G lähelle kulma-alueen uniformisuusvakiota A_{D_α} kuten pitikin. \square

Huomautus 4.9. Lause 4.8 osoitettiin kulmille $\alpha \in (0, 2\pi)$, vaikka tarkka vakion arvo tunnetaan vain kulmille välillä $(0, \pi]$. Tapauksessa $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ vakiolle on olemassa alaja ylärajat (Lindén 2005), joten alueiden D_α uniformisuus on kuitenkin taattu.

4.4 Ellipsi

Ellipsin uniformisuus seuraa ympyrän uniformisuudesta. Käytämme kuvaustulosta uniformisuuden osoittamiseen ja väljän ylärajan muodostamiseen uniformisuusvakiolle.

Apulause 4.10 (Vuorinen 1988, 3.17). *Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bilipschitz-kuvaus vakiolla L , eli toisin sanottuna*

$$|x - y|/L \leq |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$, ja olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ uniforminen. Silloin fG on uniforminen, ja erityisesti

$$A_{fG} \leq L^4 A_G.$$

Seuraus 4.11. *Kun E on ellipsi, jonka pääakselien pituudet ovat a ja b , $a \geq b$, niin silloin E on uniforminen ja $A_E \leq 2(a/b)^4$.*

Perustelu. Koska $A_{\mathbb{B}^2} = 2$ ja kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (ax, by)$, on ilmeisesti a/b -bilipschitz, niin väite seuraa suoraan apulauseesta 4.10. \square

Hyvän alarajan saaminen vaatii aina sopivan integroimispolun kvasihyperboliselle metriikalle. Tällainen kehitetään lauseessa 4.13. Tarvitsemme ensin aputuloksen.

Apulause 4.12. *Olkoon E ellipsialue, jolla $\partial E = \{(x_0, y_0) \mid (x_0/a)^2 + (y_0/b)^2 = 1\}$ ja $a \geq b$. Jos $(x, 0)$ on ellipsin isoakselin piste, jolla $|x| \leq a - b^2/a$, niin silloin*

$$d(x, \partial E) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 - b^2}} \quad (8)$$

ja pistettä x lähimmät ellipsin pisteet ovat

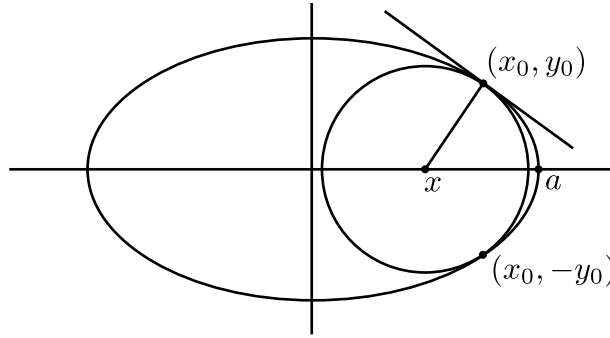
$$(x_0, \pm y_0) = \left(\frac{x}{1 - b^2/a^2}, \pm b\sqrt{\left(\frac{ax}{a^2 - b^2}\right)^2 - 1} \right). \quad (9)$$

Jos taas $(x, 0)$ on isoakselin piste, jolla $|x| \in (a - b^2/a, a)$, niin $d(x, \partial E) = a - |x|$ ja lähin piste on $ax/|x|$.

Todistus. Implisiittinen derivointi ellipsin yhtälössä $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ antaa yhtälön $2x/a^2 + 2yy'/b^2 = 0$, josta ratkaistaan $y' = -xb^2/(ya^2)$. Siispä ellipsin pisteessä (x_0, y_0) olevan normaalin kulmakerroin on $y_0a^2/(x_0b^2)$ ja vastaavan suoran yhtälö on

$$y - y_0 = \frac{y_0a^2}{x_0b^2}(x - x_0).$$

Rajoituksella $|x_0| < a$ tästä ratkaistaan normaalin ja x -akselin leikkauspisteeksi $(x, 0)$, missä $x = x_0(1 - b^2/a^2)$. Erityisesti $x \rightarrow a - b^2/a$, kun $x_0 \rightarrow a$.



Kuva 30: Apulauseen pisteet $(x, 0)$ ja $(x_0, \pm y_0)$.

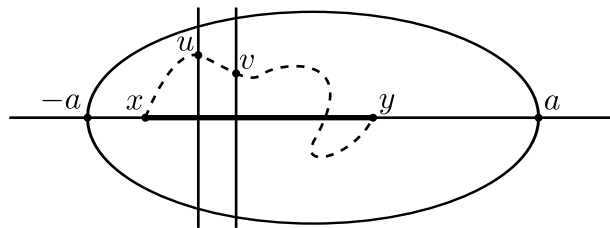
Käännetään nyt tarkastelu. Jos otetaan ellipsin isoakselilta keskipiste $(x, 0)$ sisäympyrälle, niin maksimaalinen ellipsiin sisältyvä ympyrä sivuaa ellipsiä symmetrisesti joissakin pisteissä $(x_0, \pm y_0)$. Tapauksessa $|x| \leq a - b^2/a$ sivuamispisteen x -koordinaatiksi saamme $x_0 = x(1 - b^2/a^2)^{-1}$ ja sivuamispisteiksi ratkeaa (9) ellipsin yhtälön avulla. Toisaalta ympyrän säde $\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}$ sievenee muotoon (8).

Toinenkin väite on lopulta ilmeinen, koska ellipsin pääkaarevuusympyrän säteeksi osoittautui b^2/a . \square

Lause 4.13. *Olkoon $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ ellipsi, jolla pääakselien pituuksien suhde on $a/b \geq 1$. Silloin*

$$A_E \geq \max \left\{ 2, \frac{2(\sqrt{a^2 - b^2}/b) \arcsin(\sqrt{a^2 - b^2}/a)}{\log(2(a/b)^2 - 1)} \right\}.$$

Todistus. Tarkastellaan ensin yleisesti arvoa $k_E(x, y)$, kun x ja y ovat ellipsin isoakselin pisteitä, joilla $-a < x < y < a$. Silloin vastaava geodeesi γ on jana $[x, y]$. Geodeesin on nimittäin ylitettävä jokainen välin (x, y) osaväli vähintään kerran, ja tämä polun osuus γ_{uv} pisteiden $u, v \in \gamma$ välillä on vähintään osavälin pituinen. Toisaalta symmetrian perusteella etäisyys ellipsin reunaan on maksimaalinen isoakselilla. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 31.



Kuva 31: Geodeesi ellipsin isoakselilla ja vaihtoehtoinen polku.

Jos $x \in (0, a - b^2/a]$, niin saamme symmetrisesti pisteille $-x$ ja x lasketuksi

$$k_E(-x, x) = 2 \int_0^x \frac{dt}{b\sqrt{1 - t^2/(a^2 - b^2)}} = 2 \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

kun hyödynnetään apulauseen 4.12 antamaa etäisyyttä $d(t, \partial E)$. Erityisesti arvolla $x = a - b^2/a$ saadaan

$$k_E(b^2/a - a, a - b^2/a) = 2 \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Vastaavasti j -metriikka saa arvon $j_E(b^2/a - a, a - b^2/a) = \log(2(a/b)^2 - 1)$, ja näin väitteen toinen osa tulee todistetuksi.

Osoitetaan vielä, että $A_E \geq 2$. Tämä voitaisiin tehdä jatkamalla integroimispolkua pisteiden $-x_1$ ja x_1 välille, $x_1 \in (a - b^2/a, a)$, ja asettamalla $x_1 \rightarrow a$. Helpompi ratkaisu on kuitenkin tehdä vastaava rajallemeno pikkuakselilla.

Valitaan $y > 0$. Kaikilla $s \in [0, b)$ on voimassa $d(is, \partial E) = b - s$. Saamme

$$k_E(-y, y) = 2 \int_0^y \frac{ds}{b-s} = 2(\log b - \log(b-y)),$$

koska aikaisempi geodeesipäätelmä pätee molemmilla ellipsin akseleilla. Toisaalta

$$j_E(-y, y) = \log\left(1 + \frac{2y}{b-y}\right) = \log(b+y) - \log(b-y).$$

Ottamalla raja-arvo $y \rightarrow b$ suhteelle k/j saadaan l'Hôpitalin säännöllä

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{k_E(-y, y)}{j_E(-y, y)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{2/(b-y)}{1/(b+y) + 1/(b-y)} = 2,$$

mikä todistaa epäyhtälön. □

Lauseen todistuksessa integrointi tehtiin ellipsin pääkaarevuusympyröiden keskipisteiden välillä. Tarkalleen ottaen metriikoiden suhde ei saavuta isoakselilla suurinta arvoansa juuri tässä pisteessä. Numeerisista testeistä voidaan tehdä kuitenkin se päätelmä, että saatu alaraja on likimäärin suhteen suurin arvo. Sellaisena se on vertailua varten tarpeeksi mainio, eikä funktion $k_E(-x, x)$ maksimointiin perehdytä syvemmin.

4.5 Uniformisuusvakioiden kvasi-Möbius-invarianssista

Jo aikaisemmin tuli mainituksi, että uniformisuudella on useita yhtäpitäviä määritelmiä. Tutustumme määritelmään, joka perustuu kahteen Möbius-invarianttiin metriikkaan. Nämä metriikat ovat läheisessä yhteydessä j -metriikkaan ja kvasihyperboliseen metriikkaan, ja yhteyden osoittaminen paljastaa eräänlaisen kvasi-Möbius-invarianssin jälkimmäisillä metriikoilla.

Kvasi-invarianssi periytyy samalla uniformisuusvakiolle, joka määriteltiin suhteen k_G/j_G perusteella. Tuloksena voimme johtaa uniformisuusvakioiden arvioita alueiden Möbius-kuville. Näin voimme tehdä muun muassa alueella $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n} \subset \mathbb{R}^n$. Ensimmäinen tarvittavista metriikoista on Seittenrannan esittämä.

Määritelmä 4.14. Olkoon $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ avoin joukko, jolla $\text{card}(\partial G) \geq 2$. Määritellään *itseissuhdemetriikka* (*absolute ratio metric*) lausekkeella

$$\delta_G(x, y) = \log\left(1 + \sup_{a, b \in \partial G} |a, x, b, y|\right)$$

kaikille pisteille $x, y \in G$.

Tämä voidaan osoittaa metriikaksi, minkä lisäksi se on Möbius-invariantti, kuten kaksoissuhteen itseisarvo $|a, x, b, y|$ antaa ymmärtää. Tiivis yhteys j -metriikkaan on seuraavan lauseen mukainen.

Lause 4.15 (Seittenranta 1996). *Kaikilla avoimilla joukoilla $G \subsetneq \mathbb{R}^n$ on voimassa*

$$j_G \leq \delta_G \leq 2j_G.$$

Toinen kiinnostava metriikka on *Ferrandin metriikka*.

Määritelmä 4.16. Olkoon $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ alue, jolla $\text{card}(\partial D) \geq 2$. Tiheysfunktioilla

$$w_D(x) = \sup_{a,b \in \partial D} \frac{|a-b|}{|x-a||x-b|}, \quad x \in D \setminus \{\infty\},$$

määritelty integraali

$$\sigma_D(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{xy}} \int_{\gamma} w_D(t) |dt|$$

antaa silloin *Ferrandin metriikan* (Ferrand 1988, s. 122). Tässä Γ_{xy} on pisteet x ja y yhdistävien suoristuvien käyrien perhe.

Metriikalla on hyviä ominaisuuksia ja yhteys kvasihyperboliseen metriikkaan.

Lause 4.17 (Ferrand 1988). *Olkoon σ_D edellä määritelty metriikka. Silloin*

1. σ_D on Möbius-invariantti.
2. $\sigma_{\mathbb{B}^n}$ ja $\sigma_{\mathbb{H}^n}$ ovat samat kuin hyperboliset metriikat $\rho_{\mathbb{B}^n}$ ja $\rho_{\mathbb{H}^n}$ vastaavissa alueissa.
3. $k_D \leq \sigma_D \leq 2k_D$ kaikilla alueilla $D \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Edelliset lauseet yhdessä kertovat, että luvut k_D/j_D ja σ_D/δ_D ovat olennaisesti samaa suuruusluokkaa kaikilla sopivilla alueilla $D \subsetneq \mathbb{R}^n$. Tätä kautta suhde k_D/j_D ja vakio A_D saavat *kvasi-Möbius-invarianssin*. Käsittely edellyttää silti suurta tarkkavaisuutta, koska metriikoiden määrittelytavoilla on olennaisia eroja. Ongelmaksi voi osoittautua se, ettei k_D saati j_D ole määritelty äärettömyydessä.

Osaltaan tällainen invarianssi valottaa sitä yhteyttä, että kulmallisille alueille ja säteittäin jatkuville alueille saatiin samankaltainen epäyhtälö $A_G \geq A_{D_\alpha}$. Kohtaa vathan suorat (Möbius-kuvausten mielessä) pisteessä ∞ aina samassa kulmassa kuin toisaalla leikkaavat. Silti metriikat k_G ja j_G eivät ole Möbius-invariantteja kuten ei myöskään suhde k_G/j_G ole. Näytämme esimerkin alueesta G ja kuvauksesta $f \in \mathcal{Möb}$, jolla $A_G \neq A_{fG}$. Kun valitsemme erityisesti alueiksi yksikkökiekon $G = \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ ja sen komplementin sisäosan, tulee osoitetuksi, että A_G voi muuttua reunakäyrän ∂G muuttumatta. Näin ollen suora yhtälö arvojen A_G ja $1 + P(\partial G)$ välillä voidaan kiistää.

4.5.1 Yksikkökiekon komplementti invarianssin sovelluksena

Yksi esimerkki alueesta G , jolla epäyhtälö $A_G > 1 + P(\partial G)$ toteutuu, on yksikkökiekon \mathbb{D} sulkeuman komplementti $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Tällä alueella on ympyrä reunakäyränään ja siten

$$P(\partial(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})) = P(\partial\mathbb{D}) = 2.$$

Näytetään alaraja vakiolle A_G toteen alueen $G = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ tapauksessa. Todistukseen käytämme tuloksia puhkaistulle avaruudelle $\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, jossa kvasihyperbolinen metriikka on tarkasti tunnettu.

Lause 4.18 (Martin & Osgood 1986). *Olkoot $x, y \in \mathbb{R}_*^n$ pisteitä puhkaistussa avaruudessa ja olkoon niiden välille origosta avautuva kulma $\varphi = |\angle xy|$. Silloin pisteiden kvasihyperbolinen etäisyys on*

$$k_{\mathbb{R}_*^n}(x, y) = \sqrt{\varphi^2 + \left(\log \frac{|y|}{|x|}\right)^2},$$

ja geodeesinä on (kulmilla $\varphi > 0$) logaritminen spiraali

$$r(\omega) = |x| \exp\left(\frac{\omega}{\varphi} \log \frac{|y|}{|x|}\right).$$

Lindén (2005) on osoittanut, että $A_{\mathbb{R}_*^n} = \pi/(\log 3)$. Käyttämällä hyödyksi edellistä lausetta saamme tämän arvon alarajaksi. Olennaisena osana päätelmää on se, että tarkastelemme nyt puhkaistun avaruuden osajoukkoa $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n} \subset \mathbb{R}_*^n$.

Lause 4.19. *Alueella $G = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ on voimassa*

$$A_G \geq \frac{\pi}{\log 3} > 2.$$

Todistus. Olkoon $x > 1$ reaaliluku, joka samaistetaan pisteeseen $\mathbf{x} = (x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Silloin

$$j_G(-x, x) = \log\left(1 + \frac{2x}{x-1}\right) = \log\left(3 + \frac{2}{x-1}\right),$$

ja toisaalta lause 4.18 antaa alueessa \mathbb{R}_*^n kvasihyperbolisen etäisyyden

$$k_{\mathbb{R}_*^n}(-x, x) = \sqrt{\pi^2 + (\log 1)^2} = \pi.$$

Koska nyt $G = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n} \subset \mathbb{R}_*^n$, niin $k_G \geq k_{\mathbb{R}_*^n}$ koko alueessa G . Saamme raja-arvona

$$\frac{k_G(-x, x)}{j_G(-x, x)} \geq \frac{k_{\mathbb{R}_*^n}(-x, x)}{j_G(-x, x)} = \frac{\pi}{\log(3 + 2/(x-1))} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\log 3},$$

joten on oltava myös $A_G \geq \pi/(\log 3)$. □

On vielä osoittamatta, että $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ on ylipäättänsä uniforminen. Ylärajan todistuksessa käytämme aikaisemmin mainittua Möbius-invarianssia ja tulosta puhkaistulle kuulalle $\mathbb{B}_*^n = \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$.

Lause 4.20 (Lindén 2005). *Alue \mathbb{B}_*^n on uniforminen vakiolla $A_{\mathbb{B}_*^n} = \frac{\pi}{\log 3}$.*

Lause 4.21. *Alue $D = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ on uniforminen, ja sen uniformisuusvakiolle pätee arviot*

$$\frac{\pi}{\log 3} \leq A_G \leq 4 \frac{\pi}{\log 3}.$$

Todistus. Alaraja tuli jo todistetuksi lauseessa 4.19. Ylärajan todistamiseksi otamme kaksi pistettä $x, y \in D \subsetneq \mathbb{R}^n$. Silloin Seittenrannan ja Ferrandin metriikat toteuttavat lauseiden 4.15 ja 4.17 mukaiset epäyhtälöt

$$j_D \leq \delta_D \leq 2j_D \text{ ja} \\ k_D \leq \sigma_D \leq 2k_D.$$

Saamme $k_D/j_D \leq 2\sigma_D/\delta_D$ pisteillä x ja y . Kun nyt kuvaamme alueen kuvauksella $f(z) = 1/z$, $f \in \mathcal{Möb}$, saamme kuvajoukon $fD = \mathbb{B}_*^n$. Koska $x, y \neq \infty$, niin $f(x), f(y) \neq 0$. Erityisesti olemme alueessa $D' = fD = \mathbb{B}_*^n$, jossa metriikoiden väliset epäyhtälöt ovat jälleen voimassa. Kokonaispäätelmänä ylärajaksi tulee

$$\frac{k_D(x, y)}{j_D(x, y)} \leq 2 \frac{\sigma_D(x, y)}{\delta_D(x, y)} = 2 \frac{\sigma_{fD}(f(x), f(y))}{\delta_{fD}(f(x), f(y))} \leq 4 \frac{k_{fD}(f(x), f(y))}{j_{fD}(f(x), f(y))} \leq 4A_{\mathbb{B}_*^n} = 4 \frac{\pi}{\log 3},$$

kuten väitettiin. \square

4.6 Nelikulmiot

Tutkimme uniformisuusvakiota suorakulmioilla ja neljäkkäillä. Viittaamme aluksi Lindénin suorakulmiotulokseen, joka on hyödyksi myös neljäkkäiden käsittelyssä.

Suorakulmiot

Lause 4.22 (Lindén 2005, 5.44). *Jos $R = [0, a] \times [0, b]$ on suorakulmio, jonka sivuista pidempi on $a \geq b > 0$, niin silloin*

$$\frac{2a/b - 2}{\log(2a/b - 1)} \leq A_R \leq 2(1 + (a/b)^2)^2.$$

Tämän lauseen antama alaraja voidaan nähdä oikeaksi seuraavasti: Tarkastellaan suhdetta k_R/j_R pisteiden $x = (b/2, b/2)$ ja $y = (a - b/2, b/2)$ välillä. Koska $d(z, \partial R) \leq b/2$ kaikilla suorakulmion pisteillä $z \in R$ ja yhtälö pätee pisteiden välisellä janalla, niin

$$\frac{k_R(x, y)}{j_R(x, y)} = \frac{\int_{b/2}^{a-b/2} \frac{dx}{b/2}}{\log\left(1 + \frac{a-b}{b/2}\right)} = \frac{2(a-b)/b}{\log(2a/b - 1)}. \quad \square$$

Huomautus 4.23. Lauseen 4.22 alaraja ei saa merkityksellistä arvoa neliöllä. Alarajaa voidaan kuitenkin parantaa, sillä aina

$$A_R \geq 2.$$

Tämä nähdään helposti tarkastelemalla suhdetta k_R/j_R pisteiden $(a/2, b/2 \pm y)$ välillä ja ottamalla raja-arvo $y \rightarrow b/2$. Suhteeksi tulee

$$\frac{2 \int_{b/2}^y \frac{dt}{b-t}}{\log\left(1 + \frac{2y}{b-y}\right)} = 2 \cdot \frac{\log(b/2) - \log(b-y)}{\log(b+y) - \log(b-y)} \xrightarrow{y \rightarrow b/2} 2.$$

Neljäkkäät

Neljäkkäät nähdään uniformisiksi venyttämällä neliötä. Ensinnäkin, lause 4.22 antaa neliölle R uniformisuusvakion ylärajan 8. Toiseksi, neliöstä saadaan neljäkäs kuvauksella f , joka $\tan(\alpha/2)$ -kertaistaa toisen diagonaalin. Jos $\alpha \in (0, \pi/2)$ on tuloksena olevan neljäkkään pienempi kulma, niin kuvaus on L -bilipschitz arvolla $L = 1/\tan(\alpha/2)$, ja apulauseen 4.10 nojalla

$$A_{fR} \leq 8/\tan^4(\alpha/2).$$

Neljäkkään uniformisuusvakiolle saadaan alaraja, joka osoittaa vakion poikkeavan P -arvon perusteella muodostetusta ennusteesta $1 + P$.

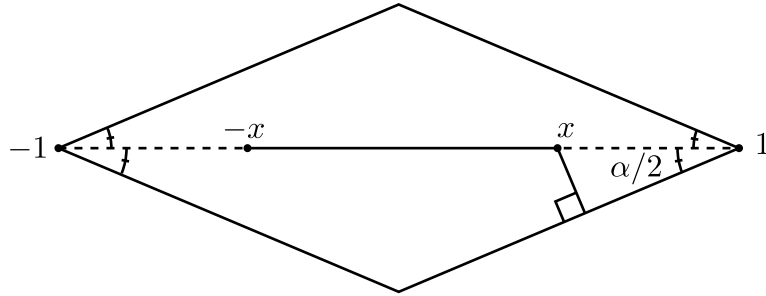
Lause 4.24. Jos G on neljäkäs, jonka pienempi sisäkulma on α , niin silloin

$$A_G \geq \frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Todistus. Valitaan neljäkkään pidemmäksi lävistäjäksi jana $[-1, 1]$ ja janan toiselta puolikkaalta piste $x \in (0, 1)$. Näillä pisteillä etäisyys reunaan on $(1-x)\sin(\alpha/2)$. Kvasihyperboliseksi etäisyydeksi pisteeseen $-x$ tulee

$$k_G(-x, x) = 2 \int_0^x \frac{dt}{d(t, \partial G)} = 2 \int_0^x \frac{dt}{(1-t)\sin(\alpha/2)} = \frac{-2 \log(1-x)}{\sin(\alpha/2)},$$

koska geodeesi on pisteiden yhdyksjana. Näin on siksi, että integraalin painotus kullakin välin $[-x, x]$ osavälillä on pienin juurikin kulmanpuolittajalla, jolla myös lyhin polku sijaitsee.



Kuva 32: Pisteasetelma lauseen neljäkkäällä.

Toisaalta

$$\begin{aligned} j_G(-x, x) &= \log \left(1 + \frac{2x}{(1-x)\sin \frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \log \left(\sin \frac{\alpha}{2} + x \left(2 - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right) - \log \left((1-x)\sin \frac{\alpha}{2} \right), \end{aligned}$$

joten l'Hôpitalin säännöllä ja sievennyksillä saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{k_G(-x, x)}{j_G(-x, x)} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{(1-x)^{-1}}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + x(2 - \sin \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} (2 - \sin \frac{\alpha}{2}) + (1-x)^{-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + x(2 - \sin \frac{\alpha}{2})}{2} \\ &= \frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot 1, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

Alarajan tunteminen neljäkkään tapauksessa antaa samalla myös suorakulmiolle parannuksen alarajaan. Neliöllä on nimittäin $\alpha = \pi/2$ ja siten $A_G \geq 2\sqrt{2}$. Näin ollen saamme apulauseen 4.10 avulla seurauksen.

Seuraus 4.25. Jos R on suorakulmio, jonka sivujen suhde on $a/b \geq 1$, niin silloin

$$A_R \geq 2\sqrt{2} \left(\frac{b}{a} \right)^4.$$

4.7 Kolmiot

Kolmiossa uniformisuusvakio voidaan osoittaa riippuvaksi kahdesta kulmasta. Tässä tulee selkeä ero P -arvoon, joka määräytyy suoraan pienimmästä kulmasta. Lindén (2005) on osoittanut kolmiot uniformisiksi näyttämällä seuraavan ylärajan oikeaksi.

Lause 4.26 (Lindén, 5.38). *Kun Δ on kolmio, jolla on kulmat $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, niin silloin*

$$A_{\Delta} \leq \frac{A_{D_{\alpha}} + A_{D_{\beta}}}{\cos(\gamma/2)} = \frac{1}{\cos(\gamma/2)} \left(2 + \frac{1}{\sin(\alpha/2)} + \frac{1}{\sin(\beta/2)} \right).$$

Muodostamme uniformisuusvakiolle alarajan. Jo seurauksen 4.5 perusteella on tiedossa, että

$$A_{\Delta} \geq 1 + \frac{1}{\sin(\alpha/2)},$$

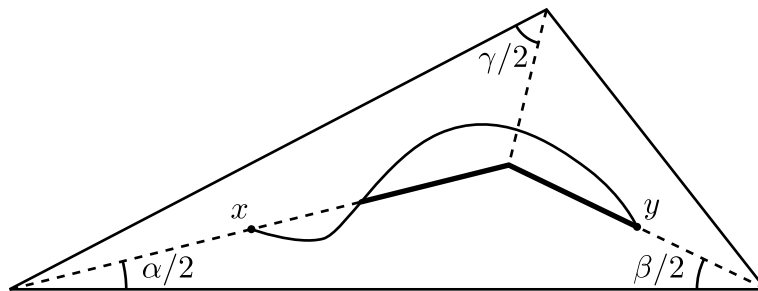
mutta tämä arvio on vielä parannettavissa.

Lause 4.27. *Olkoon Δ kolmio, jolla on kulmat $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Silloin*

$$A_{\Delta} \geq \frac{1}{\sin(\alpha/2)} + \frac{1}{\sin(\beta/2)}.$$

Todistus. Tunnetusti kolmion sisäkulmien puolittajat leikkaavat yhdessä pisteessä. Valitaan kulmien α ja β puolittajilta pisteet x ja y . Tarkastelemme pisteiden välistä kvasihyperbolista geodeesia.

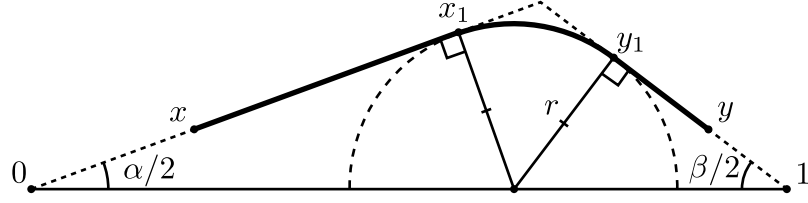
Ensinnäkin, tämän polun on kuljettava kokonaan kulmanpuolittajien rajaamassa osakolmiossa, jonka kulmat ovat $\alpha/2$ ja $\beta/2$. Muulloin mikä tahansa osakolmiosta poikkeava polun osuus voidaan korvata kulmanpuolittajien osalla, kuten kuvasta 33 on nähtävissä. Kulmanpuolittajalla polku on lyhyempi ja sen painotus integraalissa pienempi.



Kuva 33: Pisteiden x ja y välisen geodeesin on oltava (alimmassa) osakolmiossa, jolle molemmat pisteet kuuluvat. Paksulla viivalla polku, joka korvaa poikkeavan osuuden.

Otetaan sitten polku tässä osakolmiossa. Pääty pisteistä lähtevät polun osuudet ovat kulmanpuolittajilla, mutta ne eivät enää palaa samalle suoralle. Muussa tapauksessa poikkeavan osuuden voisi jälleen korvata kulmanpuolittajan osalla. Johtopäätöksenä on se, että geodeesi koostuu korkeintaan kolmesta osasta: Molemmissa päädyissä olevista janoista kulmanpuolittajilla ja kokonaan yhteen osakolmioon sisältyvästä polusta.

Keskimmäisen osuuden painotus integraalissa määräytyy kokonaan kolmion yhden sivun perusteella. Sen vuoksi osuus on puolitason \mathbb{H}^2 geodeesi. Nämä ovat ympyrän kaaria kohtisuorassa itse sivua vastaan. Lisäksi geodeesit tunnetaan sileiksi käyriksi



Kuva 34: Geodeesi sekä pisteet x, x_1, y_1 ja y kulmanpuolittajien rajaamassa osassa.

(Martin 1985), joten saamme kulmanpuolittajia sivuavan ympyrän. Kun kiinnitetään kolmion kantasivu pisteiden 0 ja 1 välille, ympyrän säteeksi voidaan määrittää

$$r = \frac{\sin(\alpha/2) \sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2) + \sin(\beta/2)}.$$

Olkoot x_1 ja y_1 ympyränkaaren pääty pisteet kulmanpuolittajilla kuvan 34 tapaan. Silloin niiden etäisyydet kolmion kulmista ovat $|x_1| = r/\tan(\alpha/2)$ ja $|y_1 - 1| = r/\tan(\beta/2)$. Voimme laskea kvasihyperbolisen etäisyyden toisella kulmanpuolittajalla arvoksi

$$k_{\Delta}(x, x_1) = \int_{|x|}^{|x_1|} \frac{dt}{t \sin(\alpha/2)} = \frac{\log |x_1| - \log |x|}{\sin(\alpha/2)} = \frac{\log r - \log \tan(\alpha/2) - \log |x|}{\sin(\alpha/2)}.$$

Vastaavasti saamme $k_{\Delta}(y_1, y) = (\log r - \log \tan(\beta/2) - \log |y - 1|)/\sin(\beta/2)$.

Täsmennämme vielä pisteen y valintaa sellaiseksi, että $d(y, \partial\Delta) = d(x, \partial\Delta)$. Koska etäisyys reunaan on kohtisuorassa kantasivua vastaan, trigonometrian perusteella tämän ehdon muodoksi tulee $|y - 1| = |x| \sin(\alpha/2)/\sin(\beta/2)$. Tällöin saamme arvion

$$k_{\Delta}(x, y) > k_{\Delta}(x, x_1) + k_{\Delta}(y_1, y) = C + \left(\frac{1}{\sin(\alpha/2)} + \frac{1}{\sin(\beta/2)} \right) (-\log |x|),$$

missä $C \in \mathbb{R}$ on luvusta $|x|$ riippumaton vakio.

Koska pisteet x ja y valittiin yhtä kauaksi reunasta, jana $[x, y]$ on yhdensuuntainen janan $[0, 1]$ kanssa, ja euklidiseksi etäisyydeksi voidaan laskea

$$|x - y| = 1 - |x| \frac{\sin((\alpha + \beta)/2)}{\sin(\beta/2)} = 1 - |x| \cdot D,$$

missä $D > 0$ on vakio. Vastaava etäisyys j -metriikalla on silloin rajoitettu arvolla

$$j_{\Delta}(x, y) = \log \left(1 + \frac{1 - |x| \cdot D}{|x| \sin(\alpha/2)} \right) \leq \log \left(1 + \frac{1}{|x| \sin(\alpha/2)} \right) \leq E - \log |x|,$$

missä $E = \log(1 + (\sin(\alpha/2))^{-1}) > 0$.

Voimme vihdoin arvioida metriikoiden suhdetta. Kun $|x| \rightarrow 0$, niin raja-arvona saadaan

$$\frac{k_{\Delta}(x, y)}{j_{\Delta}(x, y)} \geq \frac{C + \left(\frac{1}{\sin(\alpha/2)} + \frac{1}{\sin(\beta/2)} \right) (-\log |x|)}{E - \log |x|} \xrightarrow{|x| \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(\alpha/2)} + \frac{1}{\sin(\beta/2)}.$$

Erityisesti tämä on uniformisuusvakioiden A_{Δ} alaraja. □

Huomautus 4.28. Lauseen todistuksessa ympyränkaaren muotoisen geodeesin osan pituus ei tullut käytetyksi. Olennaista oli ainoastaan osoittaa keskiosan rajallisuus. Koska kvasihyperbolinen metriikka on puolitasossa sama kuin hyperbolinen (yleisesti on voimassa $k_{\mathbb{H}^n} = \rho_{\mathbb{H}^n}$), niin keskiosan mitaksi voidaan osoittaa

$$k_{\Delta}(x_1, y_1) = \log \left(\frac{\cos((\beta - \alpha)/4) + \sin((\alpha + \beta)/4)}{\cos((\beta - \alpha)/4) - \sin((\alpha + \beta)/4)} \right),$$

joka vain kulmista riippuvana vakiona ei olennaisesti vaikuta rajallemenoprosessissa saatavaan arvoon suhteelle k_{Δ}/j_{Δ} .

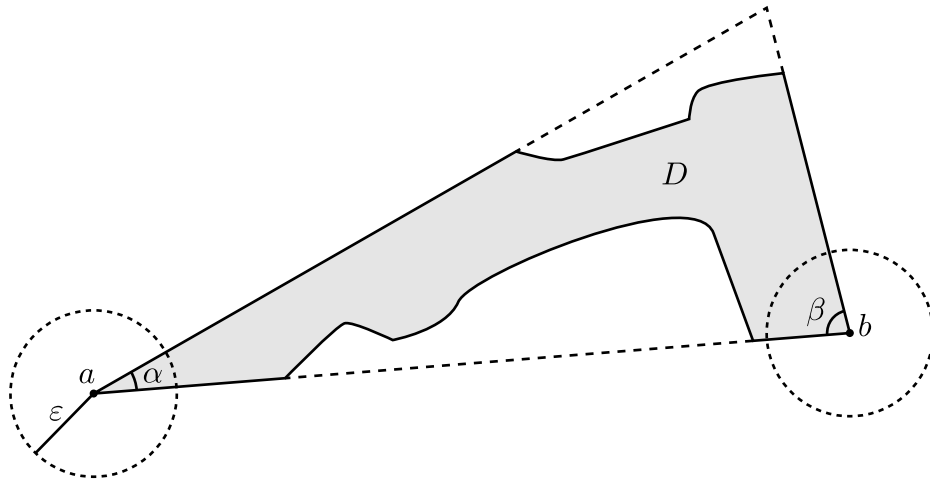
Seuraus 4.29. *Olkoon alue $D \subseteq \Delta$ kolmion yhtenäinen osajoukko, johon kuuluu alkuperäisen kolmion kahden kulman ε -ympäristöt, $\varepsilon > 0$. Toisin sanottuna,*

$$\begin{aligned} D \cap \mathbb{B}(a, \varepsilon) &= \Delta \cap \mathbb{B}(a, \varepsilon) \text{ ja} \\ D \cap \mathbb{B}(b, \varepsilon) &= \Delta \cap \mathbb{B}(b, \varepsilon), \end{aligned}$$

missä a ja b ovat kolmion kulmapisteitä. Jos tällöin kulmapisteitä vastaavat kulmat ovat α ja β , niin

$$A_D \geq \frac{1}{\sin(\alpha/2)} + \frac{1}{\sin(\beta/2)}.$$

Todistus. Osajoukoilla $D \subseteq \Delta$ on aina voimassa $k_D \geq k_{\Delta}$. Toisaalta lauseen 4.27 pisteet x ja y voidaan rajoittaa sisältyviksi vastaavien kulmapisteiden $\varepsilon/2$ -ympäristöihin, koska pisteet lähestyvät kulmia raja-arvoinaan. Tällä rajoituksella on kuitenkin voimassa $d(x, \partial D) = d(x, \partial \Delta)$, $d(y, \partial D) = d(y, \partial \Delta)$ ja $j_D(x, y) = j_{\Delta}(x, y)$, joten alarajan on pidettävä myös suhteelle k_D/j_D sekä vakiolle A_D . \square



Kuva 35: Esimerkki kolmion osajoukosta D , johon seuraus 4.29 soveltuu.

Lause 4.27 sekä ennen kaikkea sen seuraus 4.29 paljastavat yhden merkittävän eron uniformisuusvakion ja P -arvon välillä. Siinä missä paikalliset reunan ominaisuudet vaikuttavat jälkimmäiseen yksittäisissä paikoissa, metriikoilla määritelty vakio yhdistää reunan ominaisuuksia kahdessa päätepisteessä. Palaamme tähän argumenttiin vielä seuraavassa luvussa, johon on kerätty päätelmät kaikista tuloksista.

5 Tulokset ja päätelmät

Viimeiseksi tehtäväksi jää vielä tulosten arviointi ja vertailu. Tässä luvussa esitämme yhteen koottuna kaikki tutkielman päätulokset johtopäätösten perustaksi. Tavoitteena on vahvistaa ymmärrystä tarkastelluista arvoista, mutta myös luoda vankka pohja jatkokysymysten käsittelylle.

Edellisissä luvuissa tulimme selvittäneeksi lukuisia arvoja ja arvioita niin P -arvolle kuin uniformisuusvakioillekin. Kokoamme ensin P -arvoa koskevat tulokset taulukoksi. Taulukon tuloksissa on huomattava, että joidenkin P -arvoa koskevien kulmatulosten yleistys on välitön kulmille $\alpha \in (0, 2\pi)$, koska P -arvon kannalta alueen reunakäyrän kulkusuunnalla ei ole merkitystä.

Alue D tai sen piirre	Reunakäyrän P -arvo $P = P(\partial D) \geq 1$
Reunakäyrä on joko ympyrä tai suora	$P = 1$ (Ptolemaios)
Kulma-alue D_α , jolla on kulma $\alpha \in (0, 2\pi)$	$P = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$ (2.1)
Alueella on kulma $\alpha \in (0, 2\pi)$	$P \geq \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$ (2.3)
Kolmio, sisäkulmat $\alpha_{\min} = \alpha \leq \beta \leq \gamma$	$P = \frac{1}{\sin(\alpha_{\min}/2)}$ *10.8
Kaksikulmainen alue $D_{\alpha,\beta}$, jolla $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ja $\alpha + \beta > \pi$	$P = \frac{1}{\sin(\theta/2)}$, $\theta = \min\{\alpha, \beta, \alpha + \beta - \pi\}$ (2.10)
Monikulmio, n kulmaa	$P \geq \frac{1}{\cos(\pi/n)}$ (3.14)
Suunnikas, jolla on kulma $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ja sivut $r \geq s$	$P \geq \max\left\{\frac{1}{\sin(\alpha/2)}, \sqrt{\left(\frac{r}{2s \sin \alpha}\right)^2 + 1}\right\}$ (3.15)
	$P \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}}{s \sin \alpha} + \frac{s \sin \alpha}{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}} \right)$ (3.17)
	$P \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}}{s \sin \alpha} + \frac{s \sin \alpha}{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}} \right)$ (3.18)
	$P \leq \frac{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \alpha + s^2}}{s \sin \alpha}$ (3.19)
Suorakulmio, jolla on sivut $r \geq s$	$P \geq \max\left\{\sqrt{2}, \sqrt{\frac{r^2}{4s^2} + 1}\right\}$ (3.16)
	$P \leq \sqrt{\frac{r^2}{s^2} + 1}$ (3.17)
Neljäkäs, jolla on kulma $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$	$P = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$ (3.20)
Konvekssi kaari, suuntakulman muutos $\alpha < \pi$	$P \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi - \alpha}{2}}$ (3.23)
Ellipsi, pääakseleiden pituudet $a \geq b$	$P \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$ (3.28)
	$P \leq \left(\sin \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)^{-1} < \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$ (3.31)

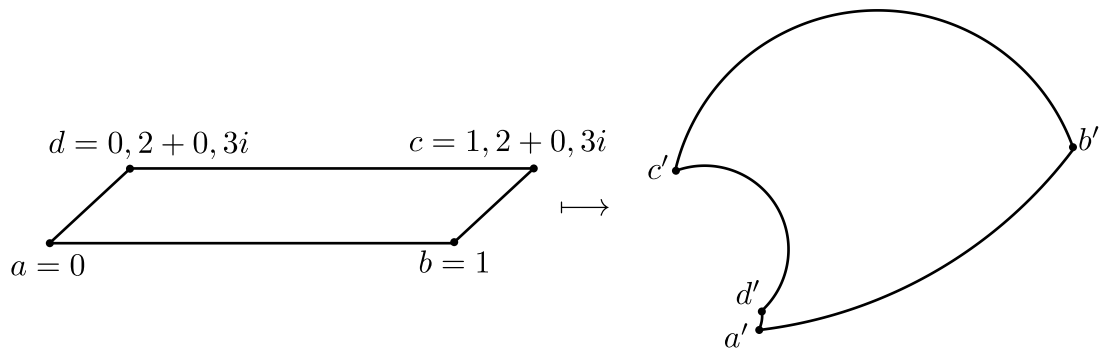
Taulukossa *10.8 viittaa Seittenrannan liseniaatintutkielman (1996) kolmiotulokseen, joka tuli todistetuksi lauseena 4. Muut sulkumerkeissä olevat numeroyhdistelmät ovat viittauksia tämän tutkielman tuloksiin.

Päätelmät P -arvosta käyrien tasaisuuden mittana

Hallitsevana piirteenä saaduissa tuloksissa on käyrien paikallisten ominaisuuksien vahva vaikutus P -arvoon. Tämä on toivottavaa varsin suuressa määrin, mutta kattava piirteiden kartoitus edellyttää vaikutusten tutkimusta myös sellaisilla ominaisuuksilla, jotka eivät ole paikallisia. Tällaiset ominaisuudet ilmenevät lähinnä ellipsejä ja nelikulmioita määrittävien pituuksien suhteista. Toisaalta kolmiota koskevassa tuloksessa kulmat ovat suorassa yhteydessä sivujen pituuksiin, joten tuloksen esitystapa piilottaa osaksi sivujen suhteen vaikutuksen.

Arvolla on tärkeä piirre, että se mittaa käyrän kulmat monotonisesti. Läheisesti kulmia muistuttavat käyrän osat tulevat myös mitatuiksi hyvin samankaltaisella tavalla kuin kulmat, mikä huomattiin konvekseja kaaria käsiteltäessä. Käyrien paikallisten ominaisuuksien luonnehdinnaksi P -arvo on siis epäilemättä hyvä. Tätä tukee myös arvon säilyminen Möbius-kuvauksissa, jotka ovat konformisia kuvauksia.

On vaikeampaa tulkita käyrien yleisempien ominaisuuksien vaikutusta P -arvoon. Ensimmäinen havainto on varmasti se, että kuvioden kokosuhteet ovat useimmissa tuloksissa vahvasti esillä. Tästä on helppoa tehdä päätelmä, että pitkien ja ohuiden alueiden reunakäyrät saavat välttämättäkin suuria P -arvoja. Yksi asia, joka voi jäädä kuitenkin huomaamatta, on se, että Möbius-kuvaukset säilyttävät enimmäkseen vain paikallisia ominaisuuksia. Möbius-invarianssi luvun 2.1.3 hengessä tarkoittaakin sitä, että esimerkiksi suunnikkaat ovat P -arvoiltaan yhteneviä kaikkiin niistä Möbius-kuvauksilla saataviin tasokäyriin. Tällaisesta on esimerkki kuvassa 36.



Kuva 36: Suunnikas ja sen kuvajoukko Möbius-kuvauksessa $z \mapsto (1, 7 - 0, 1i - 1, 5z)^{-1}$.

Kuvan kaltaisessa tapauksessa osana tasaisuuden mittaa voidaan yhä pitää kulmien suuruutta, mutta on eri asia, ovatko yllä olevat kuviot intuitiivisesti enää yhtä tasaisia. Tällaiseen tulokseen päätyminen on vähintäänkin vaikeaa ilman asiallista matemaattista käsittelyä. Tulemme väistämättä yksittäisen luvun kuvaamiskyvyn rajoille, sillä ajatus tasaisuudesta käsittää niin paikallisia kuin yleisiäkin ominaisuuksia.

Kun pidetään mielessä, että jokainen määritetyistä arvoista on keskimäärin lähes monotonisesti riippuvainen kuvioden kokosuhteista ja kulmista, voidaan varauksetta sanoa, että tehty valinta tasaisuuden mitaksi on onnistunut. Lienee kohtuutonta vaatia, että yksittäisellä suureella edes pystyttäisiin täysin kattamaan normaalin kielen luonnehdinta. Jää tosin tulevien tutkimusten pohdittavaksi, kuinka mittamme sopii niille tasokuvioille, joita emme tulleet tutkineeksi.

Uniformisuusvakiosta vertailukohtana

Rakennamme toisen taulukon arvioista uniformisuusvakiolle. Tähdellä (\star) merkityt numerot viittaavat tuloksiin Henri Lindénin (2005) väitöskirjassa. Vertailun pohjaksi taulukkoon on sisällytetty myös tuloksia, joita ei ole vielä aikaisemmin tutkielmassa mainittu. Tällaisia ovat arviot säännöllisille monikulmioille ja kulma-alueille D_α suurilla kulmilla $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.

Alue D tai sen piirre	Uniformisuusvakio $A = A_D$	
Kuula \mathbb{B}^n tai puoliavaruus \mathbb{H}^n	$A = 2$	† 7.56 ○ 2.41
Kulma-alue D_α , jolla on kulma $\alpha \in (0, \pi]$	$A = 1 + \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$	★1.7 (4.3)
Kulma-alue D_α , jolla on kulma $\alpha \in (\pi, 2\pi)$	$A \geq \max \left\{ 2, \frac{2 \log \tan(\alpha/4) + \alpha - \pi}{\log(1 - 2 \cos(\alpha/2))} \right\}$ $A \leq 4 \left(\frac{\alpha}{2\pi - \alpha} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sin(\alpha/2)} \right)$	★1.8 (4.4)
Alueella on kulma $\alpha \in (0, \pi]$	$A \geq A_{D_\alpha} = 1 + \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$	(4.5) (4.7)
Säteittäin kulmaan $\alpha \in (0, 2\pi)$ avautuva alue $D \subseteq D_\alpha$	$A \geq A_{D_\alpha}$ ($A \geq 1 + \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$, jos $\alpha \leq \pi$)	(4.8)
Kolmio, sisäkulmat $\alpha \leq \beta \leq \gamma$	$A \geq \frac{1}{\sin(\alpha/2)} + \frac{1}{\sin(\beta/2)}$ $A \leq \frac{1}{\cos(\gamma/2)} \left(2 + \frac{1}{\sin(\alpha/2)} + \frac{1}{\sin(\beta/2)} \right)$	(4.27) ★5.38
Kolmion osajoukko, jolla on kolmion kulmat α ja β ympäristöineen	$A \geq \frac{1}{\sin(\alpha/2)} + \frac{1}{\sin(\beta/2)}$	(4.29)
Ellipsi, pääakseleiden pituudet $a \geq b$	$A \leq 2(a/b)^4$ $A \geq \max \left\{ 2, \frac{2(\sqrt{a^2 - b^2}/b) \arcsin(\sqrt{a^2 - b^2}/a)}{\log(2(a/b)^2 - 1)} \right\}$	(4.11) (4.13)
Yksikkökuulan komplementti $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}^n$	$\frac{\pi}{\log 3} \leq A \leq \frac{4\pi}{\log 3}$	(4.19) (4.21)
Säännöllinen n -kulmio	$1 + \frac{1}{\cos(\pi/n)} \leq A \leq \frac{2}{\cos^4(\pi/n)}$	★5.39
Suorakulmio, jolla on sivut $a \geq b$	$\frac{2a/b - 2}{\log(2a/b - 1)} \leq A \leq 2(1 + (a/b)^2)^2$ $A \geq \max \left\{ 2, 2\sqrt{2} (b/a)^4 \right\}$	★5.44 (4.22) (4.23) (4.25)
Neljäkäs, jolla on kulma $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$	$A \geq \frac{2}{\sin(\alpha/2)}$ $A \leq 8/\tan^4(\alpha/2)$	(4.24) (4.10)

(† Anderson, Vamanamurthy & Vuorinen 1997; ○ Vuorinen 1988; ★ Lindén 2005)

Taulukon arvioissa tulee jälleen ottaa huomioon se, että alueen D uniformisuus on taattu ainoastaan silloin, kun luvulle A_D on esitetty yläraja.

Lähdimme tutkimaan uniformisuusvakiota hypoteesin $A_G = 1 + P(\partial G)$ pohjalta. Tuloksillamme alkuperäinen hypoteesi tulee kumotuksi, mutta vakion arvot ovat silti muodoltaan miltei vastaavia kuin P -arvot. Kuten jo aikaisemmin mainittiin, alueilla $\mathbb{B}^n, \mathbb{H}^n$ ja D_α ($\alpha \in (0, \pi]$) yhtälö on voimassa. Voidaan myös osoittaa, että ellipseille saadut arviot eivät estä yhtälön voimassaoloa. Suorakulmioilla ero tulee ainoastaan hyvin pienillä arvoilla $a/b \approx 1$ arvioista $A \geq 2\sqrt{2}(b/a)^4 > 1 + \sqrt{(a/b)^2 + 1} \geq 1 + P$. Selkeimmillään erot hypoteesiin ovat yksikkökuulan komplementilla ja kulma-alueilla D_α , kun $\alpha > \pi$. Näissä tapauksissa alue ei ole konvekksi, joten uniformisuusvakio käytäytynee hieman toisin kuin P -arvo alueilla, jotka eivät ole konvekseja.

Heikennetty arvio $A_G \geq 1 + P(\partial G)$ säilyy silti mahdollisena kaikissa tapauksissa. Luvun 4 lopussa saimme hyvän vihjeen uniformisuusvakion ja P -arvon erosta kolmion osajoukkoja koskevan seurauksen 4.29 myötä. Sekä kolmiolla että kolmion osajoukoilla vakio nähtiin määräytyväksi ainakin kahden kulman perusteella. Kun tähän lisätään se, että neljäkkäällekin uniformisuusvakion alaraja saatiin lähestymällä kahta kulmaa, niin voidaan kehittää ajatusta vakion luonteesta.

Kuten edellisen luvun lopussa mainittiin, metriikoilla määritelty uniformisuusvakio näyttää poimivan alueen ominaisuuksia metriikan molempien pisteiden ympäristöistä. Koska yksittäisen pisteen ympäristöstä vakioon aiheutuu nyt mitä todennäköisimmin P -arvon kaltainen termi, uniformisuusvakion arviot kolmiolle ja neljäkkäälle tulevat ymmärrettäväksi. Jatkohypoteesien muodostamisessa onkin otettava huomioon, että uniformisuusvakioon tuovat osansa eri kohdat alueen reunasta. Tulosten ja edellisen hypoteesin nojalla vaikuttaisi siltä, että vakion termi 1 voisi olla saavutettavissa jopa missä tahansa reunan osassa. Sen sijaan termin kasvattaminen ei ole mahdollista, joten otaksoma $A_G \geq 1 + P(\partial G)$ saattaa hyvinkin olla pitävä.

Yllä ei tullut vielä arvioiduksi, miten vakioon vaikuttavat alueen reunan piirteet, jotka eivät ole paikallisia. Arviointia vaikeuttaa vakion ylärajojen koko, mutta alarajat sen sijaan seuraavat lähes lineaarisesti kuvioiden kokosuhteita aivan kuten P -arvokin. Monissa tapauksissa vakion arvo lienee lähempänä alarajaa, mikä vahvistaisi käsitystä arvojen yhteydestä. Tämän tutkimuksen puutteeksi ja arvokkaaksi jatkokysymykseksi jääkin sen selvittäminen, että minkälainen uniformisuusvakion luonne yleisemmin on. Vastaus epäilemättä vaatii kehittyneitä menetelmiä, mutta todennäköisesti saisimme samalla selvityksen yhteydestä P -arvoon.

Tutkimuksen anti

Tässä tutkielmassa kehitimme matemaattisen luonnehdinnan käyrien tasaisuudelle, tutkimme sen ominaisuuksia ja tutustuimme sekä sen tunnettuihin että näennäisiin liitoskohtiin muussa matematiikassa. Päätävänä osuutena teemme vielä katsauksen tutkimuksen sijaintiin suhteessa muihin tutkimuksiin. Tämä on tarpeen, koska toistaiseksi olemme keskittyneet vain tuloksiin pohtimatta kunnolla niiden seurauksia.

Vaikka otimme ensisijaiseksi päämääräksi tasaisuuden mitan luomisen, tutkimuksen välitön hyöty tulee ainoastaan sen jo ennalta tunnetuista seurauksista. Johdannossa lauseena 3 esitetty Ahlforsin (1963) tulos ja seurauksena 2 mainittu Seittenrannan (1996) tulos liittävät tutkitut P -arvot kiinteästi kvasiympyröihin. Toisaalta tutkimus tuo oman lisänsä siihen tarkasteluun, jonka Seittenranta liseniaatintutkielmassaan aloitti. Tässä suhteessa edistymme etenkin menetelmien osalta, ja luvun 3 alkupuolella johdetut tulokset saattavat olla tutkimuksen merkittävin tuote itsenäisinä tuloksina.

Tutkielman luku 4 on katsottava enemmänkin osaksi uniformisuuden tutkimusta kuin alkuperäisen kysymyksen selvittämistä. Näennäisistä uniformisuusvakion ja P -arvon yhteyksistä ei pystytty johtamaan konkreettista riippuvuutta lukujen välille, mutta molempia aihealueita kartoitettiin yhteyksien toivossa. Uniformisuusvakion tutkimuksessa saatiin sentään lisäyksiä tuloksiin, joita pääasiallisesti vain Lindén (2005) on aikaisemmin esittänyt. Jossakin määrin myös tämä tausta oikeuttaa uniformisuuden tarkastelun tässä tutkielmassa.

Kaikkien tulosten jälkeen on pysähdyttävä vielä pohtimaan sitä, mihin tutkimus voi jatkossa suuntautua. Luonnollinen tutkimussuunta olisi P -arvon ja uniformisuusvakion jatkotutkimus, johon on luotu pohjaa sekä Seittenrannan että Lindénin työssä. Nykyistä yleisempiin tuloksiin pääseminen varmasti valottaisi lukujen luonnetta entisestään, ja saattaisi tuoda kaivatun vastauksen siihen kysymykseen, jonka esitimme lukujen yhteydestä. Jää vielä nähtäväksi, joudutaanko hypoteesi hylkäämään, mutta se antaa jatkotutkimukselle hedelmällisen tutkimuskysymyksen, johon tämä tutkielma ei onnistunut vielä vastaamaan.

Yhteenvetona tutkimuksesta voidaan lopulta todeta, että jopa klassisen geometrian pohjalta kehitetyt suureet saattavat kantaa mukanaan mielenkiintoisia yhteyksiä nykymatematiikan aiheisiin. Tutkimus pyrki luomaan katsauksen yhteen geometriseen suureeseen, ja onnistui siinä, vaikkakaan täydellisestä suureen kuvauksesta ei voida puhua. Tulimme tutkineeksi sekä suuretta että sen yhteyksiä, ja etenimme aiheen tarkastelussa odotetusti jonkin verran. Kuten voi olettaakin, jäljelle jäi vastaamattomia kysymyksiä ja parannuskelpoisia tuloksia, mutta samalla ne ovat näyttämässä suuntaa myöhemmille tutkimuksille.

Kirjallisuutta

- [1] Agard, S. & Gehring, F. W. (1965). *Angles and quasiconformal mappings*. Proc. Lond. Math. Soc. 14A, 1–21.
- [2] Ahlfors, L. V. (1963). *Quasiconformal reflections*. Acta Math. 109, 291–301.
- [3] Anderson, G., Vamanamurthy, M. & Vuorinen, M. (1997). *Conformal invariants, inequalities, and quasiconformal maps*. Canad. Math. Soc. Series of Monographs and Advanced Texts. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [4] Astala, K. (2005). *Funktioteoria I*. Luentomoniste. Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos.
- [5] Beardon, A. F. (2005). *Algebra and geometry*. Cambridge University Press.
- [6] Berger, M. (2009). *Geometry I*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [7] Blevins, D. (1973). *Conformal mappings of domains bounded by quasiconformal circles*. Duke Math. J. 40, 877–883.
- [8] Ferrand, J. (1988). *A Characterization of quasiconformal mappings by the behaviour of a function of three points*. Laine, I., Rickman, S. & Sorvali, T. (toim.), Complex Analysis: Joensuu 1987. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1351, 110–123. Springer-Verlag, Berlin.
- [9] Gehring, F. W. & Osgood, B. G. (1979). *Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric*. J. Anal. Math. 36, 50–74.
- [10] Gehring, F. W. & Palka, B. (1976). *Quasiconformally homogeneous domains*. J. Anal. Math. 30, 172–199.
- [11] Lindén, H. (2005). *Quasihyperbolic geodesics and uniformity in elementary domains*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 146. Väitöskirja, Helsingin yliopisto.
- [12] Martin, G. (1985). *Quasiconformal and bi-Lipschitz homeomorphisms, uniform domains and the quasihyperbolic metric*. Trans. Amer. Math. Soc. 292, 169–191.
- [13] Martin, G. & Osgood, B. G. (1986). *The quasihyperbolic metric and the associated estimates on the hyperbolic metric*. J. Anal. Math. 47, 37–53.
- [14] Rickman, S. (1966). *Characterization of quasiconformal arcs*. Ann. Acad. Sci. Fenn. A1 395, 1–29.
- [15] Seittenranta, P. (1996). *Möbius invariant metrics and quasiconformal maps*. Liensiaatintutkielma. Helsingin yliopisto.
- [16] Seittenranta, P. (1999). *Möbius-invariant metrics*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 125, Issue 3, 511–533.
- [17] Vuorinen, M. (1988). *Conformal geometry and quasiregular mappings*. Lecture notes in mathematics, Vol. 1319. Springer-Verlag, Berlin.

- [18] Vuorinen, M. (1990). *Quadruples and quasiconformal mappings*. Math. Z. 205, 617–628.
- [19] Yaglom, I. M. (1968). *Complex Numbers in Geometry*. Academic Press, London.