PIENEMMISTÄ JA SUUREMMISTA EPÄYHTÄLÖISTÄ

Suvi Oikarainen

Pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2018

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

OIKARAINEN, SUVI: Pienemmistä ja suuremmista epäyhtälöistä
Pro gradu -tutkielma, 91 s.
Matematiikka
Kesäkuu 2018

Tässä matematiikan opettajalinjan pro gradu -tutkielmassa tarkastellaan epäyhtälöitä. Epäyhtälö on matemaattinen lause, joka määrittää kaksi suuretta tai lauseketta erisuuriksi ja asettaa ne suuruusjärjestykseen.

Tutkielma voidaan jakaa kahteen osaan. Luvuissa 1 ja 2 määritellään epäyhtälön käsite, käydään läpi epäyhtälöiden perusteita ja esitellään erilaisia epäyhtälötyyppejä ja niiden ratkaisutapoja. Luvussa 2 ratkaistaan polynomiepäyhtälöitä, kaksoisepäyhtälöitä, rationaaliepäyhtälöitä ja itseisarvoepäyhtälöitä sekä trigonometrisia funktioita koskevia epäyhtälöitä.

Luvuissa 3, 4 ja 5 esitellään ja tarkastellaan tunnettuja epäyhtälöitä. Luvuissa 3 käydään läpi niin keskiarvoepäyhtälöt ja suuruusjärjestysepäyhtälö kuin Cauchy–Schwarzin, Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt sekä Tšebyšovin summaepäyhtälö. Luvussa 4 käsitellään kolmioepäyhtälöä, Nesbittin ja Bernoullin epäyhtälöitä sekä Youngin ja Jensenin integraaliepäyhtälöitä. Luvussa 5 käydään läpi trigonometrisia funktioita sisältäviä epäyhtälöitä, Jordanin epäyhtälö, Huygensin epäyhtälö sekä Cusa–Huygensin epäyhtälö. Kunkin epäyhtälön historiaa käsitellään lyhyesti ja käyttöä havainnollistetaan esimerkein. Lisäksi lukujen 2, 3, 4 ja 5 loppuun on koottu harjoitustehtäviä, jotka liittyvät luvussa tarkasteltuihin epäyhtälöihin.

Asiasanat: epäyhtälö.

Sisältö

Johdanto

"Begin at the beginning," the King said gravely,
"and go on till you come to the end: then stop."
— Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

Kuten varmasti jokaiselta pro gradu -tutkielmaa kirjoittavalta opiskelijalta myös minulta on kysytty, mitä aihetta työssäni tutkin. Lähes aina kertoessani kirjoittavani epäyhtälöistä, kysyjä jatkaa kysymyksellä: "Mitä epäyhtälöt ovat?". Monille termi on ollut aivan tuntematon. Olen usein kuullut epäyhtälöiden kuulostavan vaikealta, ja moni on epäillyt, ettei voisi itse osata laskea niitä. Aina vastatessani olen pyrkinyt antamaan termille ensin yksinkertaisen selityksen ja kertonut, kuinka paljon arkielämässämme käytämme epäyhtälöitä, vaikkei termiä epäyhtälö käytetäkään. Todennäköisesti olen joka kerta antanut saman esimerkin epäyhtälöistä. Ensimmäistä vuottaan koulussa käyvä lapsi tietää, että luku yksi on pienempi kuin luku kaksi ja viisi euroa on suurempi rahamäärä kuin puolitoista euroa. Nämä ovat epäyhtälöitä, jotka voidaan kirjoittaa matemaattisin symbolein $1 < 2$ ja $5\,\mathrm{e} > 1{,}50\,\mathrm{e}$. Epäyhtälöt ovat siis yksinkertaisimmillaan lukujen suuruusjärjestyksen vertailua.

Tässä tutkielmassa paneudutaan tarkemmin epäyhtälöihin alkaen epäyhtälöiden perusteista ja päättyen yleisesti tunnettujen epäyhtälöiden todistuksiin. Aluksi luvussa 1 käydään läpi yhtälön ja epäyhtälön määritelmät, minkä jälkeen luvussa 2 tutustutaan esimerkein erityyppisiin yhtälöihin ja epäyhtälöihin ja ratkaistaan näitä. Luvussa 2 tulevat tutuiksi niin polynomifunkioita ja trigonometrisia funktioita koskevat epäyhtälöt kuin kaksoisepäyhtälöt, rationaaliepäyhtälöt ja itseisarvoepäyhtälöt. Luvuissa 3, 4 ja 5 esitellään monia klassisia epäyhtälöitä, kuten Cauchy–Schwarzin epäyhtälö, aritmeettis–geometrinen epäyhtälö, Hölderin epäyhtälö, Bernoullin epäyhtälö, Jensenin epäyhtälö ja Cusa–Huygensin epäyhtälö. Kaikille luvuissa käsitellyille epäyhtälöille on annettu todistukset, ja niiden käyttöä havainnollistetaan esimerkein. Epäyhtälöiden alkuperistä kerrotaan myös lyhyesti, koska niistä on suomenkielisessä kirjallisuudessa melko vähän mainintoja. Lukujen 2, 3, 4 ja 5 loppuun on koottu harjoitustehtäviä kunkin luvun epäyhtälöihin liittyen.

Selvyyden vuoksi tutkielmassa käytetään symbolia $\triangle$ osoittamaan esimerkin ratkaisun päättymistä. Symbolilla $\square$ ilmaistaan tavanomaiseen tapaan, että lemman, lauseen tai seurauksen todistus on valmis. Esimerkeissä ja harjoitustehtävissä esiintyvää lyhennettä IMO (International Mathematical Olympiads) käytetään kun tehtävä on ollut ratkaistavana kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa. Lyhenne MO tai MC puolestaan ilmaisee, että tehtävä on esiintynyt kansallisessa matematiikkakilpailussa.

1 Epäyhtälö

"Farbror Melker, vet du vad? Om du inte kan skriva så att jag förstår det, då kan du lika gärna sluta upp."
— Astrid Lindgren, *Vi på Saltkråkan*

Tässä luvussa esitellään lyhyesti yhtälön ja epäyhtälön käsitteet sekä määritellään muutamia näitä koskevia ominaisuuksia.

1.1 Yhtälö

Matemaattista lausetta, jossa kaksi suuretta tai lauseketta määritellään yhtä suuriksi, kutsutaan *yhtälöksi.* Yhtälössä symboli $=$ ilmaisee yhtäsuuruuden, ja yhtälö $a = b$ luetaan seuraavasti: a on yhtä suuri kuin b.

Määritelmä 1.1. Kaikilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ on voimassa

Refleksiivisyys: $a = a$.

Symmetrisyys: Jos $a = b$, niin $b = a$.

Transitiivisuus: Jos $a = b$ ja $b = c$, niin $a = c$.

Additiivisuus: Jos $a = b$, niin $a + c = b + c$.

Multiplikatiivisuus: Jos $a = b$, niin $ac = bc$.

Lisäksi mainittakoon, että jos $a = b$, niin muuttujan a tilalle voi sijoittaa muuttujan b.

1.2 Epäyhtälön määritelmä

Epäyhtälö on matemaattinen lause, joka määrittää kaksi suuretta tai lauseketta erisuuriksi. Epäyhtälöitä ovat esimerkiksi $1 < 3u$, $-15 \leq 367$, 5 hevosta $>$ 3 autoa ja $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \leq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Epäyhtälössä erisuuruuden ilmaisee jokin seuraavista matemaattisista symboleista: $<, \leq, >$ tai $\geq$. Epäyhtälöä symboloivien merkkien selitykset:

$<$	$a < b$	a on pienempi kuin b
$\leq$	$a \leq b$	a on pienempi tai yhtä suuri kuin b
$>$	$a > b$	a on suurempi kuin b

$\geq$	$a \geq b$	a on yhtä suuri tai suurempi kuin b

Lisähuomiona todettakoon, että myös symboli $\neq$ osoittaa erisuuruuden. Epäyhtälö $a \neq b$ luetaan seuraavasti: a on erisuuri kuin b. Tässä tutkielmassa keskitytään kuitenkin ainoastaan sellaisiin epäyhtälöihin, jotka osoittavat termien suuruusjärjestyksen.

Määritelmä 1.2. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tällöin on voimassa seuraavat ehdot:

Refleksiivisyys: $a \geq a$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

Antisymmetrisyys: Jos $a \geq b$ ja $b \geq a$, niin $a = b$.

Transitiivisuus: Jos $a \geq b$ ja $b \geq c$, niin $a \geq c$.

Trikotomia: Kaikki a, b toteuttavat tasan yhden ehdoista $a < b$, $a > b$ tai $a = b$.

Jos $a > 0$, niin a on *positiivinen*. Vastaavasti jos $a < 0$, niin a on *negatiivinen*. Lisäksi a on *epänegatiivinen*, jos $a \geq 0$, ja a on *epäpositiivinen*, jos $a \leq 0$. Huomionarvoista on, että positiivisen ja negatiivisen määritelmistä poiketen epänegatiivisen ja epäpositiivisen määritelmät sisältävät myös luvun nolla.

Kahden positiivisen reaaliluvun a ja b tulolle on voimassa $ab > 0$. Samoin kahden negatiivisen reaaliluvun c ja d tulolle on voimassa $cd > 0$. Lisäksi mikäli tulossa on pariton määrä negatiivisia tekijöitä, tulo on negatiivinen.

Käydään läpi muutamia epäyhtälöille määriteltyjä ominaisuuksia.

Lause 1.3. *Reaaliluvuille a, b ja c on voimassa*

I Jos $a < b$, niin $a + c < b + c$.

II Jos $a < b$, niin $a - c < b - c$.

III Jos $a < b$ ja $c > 0$, niin $ac < bc$.

IV Jos $a < b$ ja $c < 0$, niin $ac > bc$.

V Jos $a > 0$, niin $\frac{1}{a} > 0$.

VI Jos $0 < a < b$, niin $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

VII Jos $0 < a < b$, niin $a^2 < b^2$.

Kohdat $I - IV, VI$ ja VII ovat voimassa myös, jos $a \leq b$. Tällöin yhtäsuuruus on mahdollinen myös seurauksissa. Lisäksi kohta V on voimassa, kun $a < 0$. Tällöin on voimassa $\frac{1}{a} < 0$.

Todistus. Todistetaan kohdat I–VII yksitellen.

I Koska $a < b$, niin $a-b < 0$. Nyt $(a+c)-(b+c) = a-b+c-c = a-b < 0$, mistä seuraa, että $a + c < b + c$.

II Koska $a < b$, niin $a-b < 0$, ja edelleen $(a-c)-(b-c) = a-b-c+c = a-b < 0$. Epäyhtälöstä seuraa, että $a - c < b - c$.

III Koska $a < b$, niin $a - b < 0$. Lisäksi $c > 0$. Koska negatiivisen ja positiivisen tekijän tulo on negatiivinen, $ac - bc = (a - b)c < 0$ ja edelleen $ac < bc$.

IV Koska $a < b$, niin $a - b < 0$. Lisäksi on voimassa $c < 0$. Nyt $ac - bc = (a-b)c > 0$, koska kahden negatiivisen tekijän tulo on aina positiivinen. Täten on voimassa $ac > bc$.

V Reaaliluvulle $\frac{1}{a}$ on voimassa yksi seuraavista: $\frac{1}{a} > 0$, $\frac{1}{a} < 0$ tai $\frac{1}{a} = 0$. Nyt on osoitettava, että vain ensimmäinen ehto voi olla tosi. Todistetaan tämä vastaoletuksen avulla. Olkoon $\frac{1}{a} \leq 0$ ja $a > 0$. Nyt $1 = a \cdot \frac{1}{a} \leq 0$. Epäyhtälö $1 \leq 0$ on selvästi epätosi, joten oletus $\frac{1}{a} \leq 0$ on myös epätosi. Näin ollen on voimassa $\frac{1}{a} > 0$.

VI Koska $a > 0$ ja $b > 0$, näiden kahden positiivisen tekijän tulo on $ab > 0$. Edelleen kohdan V nojalla $\frac{1}{ab} > 0$. Kerrotaan epäyhtälö $a < b$ puolittain positiivisella termillä $\frac{1}{ab}$, jolloin saadaan $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$. Sievennetään epäyhtälöä ja saadaan $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

VII Oletuksen mukaan $a < b$. Olkoon nyt $c = a$, jolloin kohdan III nojalla saadaan $a^2 = aa < ab$. Vastaavasti sijoittamalla $c = b$ kohdan III epäyhtälöön saadaan $ab < bb = b^2$. Yhdistämällä edellä olevat epäyhtälöt saadaan $a^2 < b^2$.

□

Annetaan lopuksi määritelmät lukuväleille ja niistä käytettäville merkinnöille. Avoimelle lukuvälille $a < x < b$ kuuluvat kaikki luvut, jotka ovat lukujen a ja b välillä. Tälle lukuvälille käytetään merkintää $x \in (a, b)$. Suljetulle lukuvälille $a \leq x \leq b$ kuuluvat puolestaan kaikki luvut lukujen a ja b välillä ja lisäksi luvut a ja b. Tälle välille käytetään merkintää $x \in [a, b]$. Puoliavoimet lukuvälit $a < x \leq b$ ja $a \leq x < b$, joihin kuuluvat luvut välillä a ja b sekä toinen luvuista a ja b, merkitään $x \in (a, b]$ ja $x \in [a, b)$.

Määritellään myös lukujoukkojen merkinnät. Joukkoon $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ kuuluvat kaikki luonnolliset luvut, joukkoon $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ kokonaisluvut ja joukkoon $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ rationaaliluvut. Edelleen joukkoon $\mathbb{R}$ kuuluvat kaikki reaaliluvut, joukkoon $\mathbb{R}_{+} = \{a \mid a \in \mathbb{R}, a > 0\}$ positiiviset reaaliluvut ja joukkoon $\mathbb{R}_{-} = \{a \mid a \in \mathbb{R}, a < 0\}$ negatiiviset reaaliluvut. Määritellään myös joukko $\mathbb{N}_{>2} = \{3, 4, \dots\}$ lukua 2 suuremmille luonnollisille luvuille, joukko $\mathbb{R}_{>1} = \{a \mid a \in \mathbb{R}, a > 1\}$ lukua 1 suuremmille reaaliluvuille ja $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{a \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ nollasta eroaville reaaliluvuille.

2 Epäyhtälötyyppejä

"Do you mean ter tell me," he growled at the Dursleys, "that this boy — this boy! — knows nothin' abou' — about ANYTHING?" Harry thought this was going a bit far. He had been to school, after all, and his marks weren't bad. "I know some things," he said. "I can, you know, do math and stuff."

— J. K. Rowling, *Harry Potter and the Philosopher's Stone*

Tässä luvussa käsitellään erityyppisiä yhtälöitä ja epäyhtälöitä. Polynomiepäyhtälöt, kaksoisepäyhtälöt, rationaaliepäyhtälöt, itseisarvoepäyhtälöt ja trigonometriset epäyhtälöt esitellään edellä mainitussa järjestyksessä. Kunkin yhtälö- ja epäyhtälötyypin kohdalla tarkastellaan tälle tyypillisiä ratkaisumalleja, joita havainnollisestaan esimerkkitehtävin. Luvussa käsiteltyihin epäyhtälöihin liittyviä harjoitustehtäviä on koottu luvun loppuun.

2.1 Polynomiepäyhtälö

Tässä luvussa käydään läpi polynomiyhtälöitä ja -epäyhtälöitä ja niiden ratkaisumalleja. Funktiota

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

missä $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ovat annettuja vakioita, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ja x muuttuja, kutsutaan *polynomifunktioksi.*

Ensimmäisen asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälö sisältää ainoastaan ensimmäistä astetta olevia tuntemattomia muuttujia. Ensimmäisen asteen yhtälön yleinen muoto on

$$a_1x + a_0 = 0,$$

missä x on muuttuja, a_1 ja a_0 ovat annettuja vakioita ja $a_1 \neq 0$.

Yhtälönratkaisun tarkoituksena on löytää kaikki muuttujan arvot, jotka toteuttavat yhtälön. Ensimmäisen asteen yhtälö on ratkaistu, kun yhtälön toisella puolella on ainoastaan muuttuja, jonka kerroin on 1, ja toisella puolella vakiotermi tai vakiotermit. Ensimmäisen asteen yhtälöä ratkaistaessa seuraavat laskutoimitukset ovat sallittuja: puolittain lisääminen ja vähentäminen sekä kertominen ja jakaminen nollasta eroavalla luvulla.

Esimerkki 1. Ratkaise yhtälö $2a + 17 = -a - 2$.

Ratkaisu. Lisätään yhtälöön puolittain muuttuja a ja vähennetään puolittain luku 17, jolloin yhtälön toisella puolella on kaikki muuttujia sisältävät termit ja toisella puolella vakiotermit. Nyt yhtälö on muotoa $3a = -19$. Koska yhtälön vasemmalle puolelle halutaan muuttuja, jonka kerroin on 1, jaetaan yhtälö puolittain luvulla 3, jolloin saadaan $a = -\frac{19}{3}$. Tämä on yhtälön ratkaisu, joka voidaan tarkistaa sijoittamalla se alkuperäiseen yhtälöön muuttujan a paikalle. △

Mikäli yhtälöä ratkaistaessa päädytään tilanteeseen, jossa yhtälössä ei ole enää tuntemattomia muuttujia, yhtälö on joko *identtisesti tosi* tai *identtisesti epätosi*. Identtisesti tosi yhtälö on muotoa $0 = 0$, ja se toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla. Jos yhtälö on muotoa $0 = r$, missä $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se on identtisesti epätosi. Tällöin yhtälö ei toteudu millään muuttujan x arvoilla.

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälö $-\frac{1}{3}(6b + 2) = b - 3(b - 3)$.

Ratkaisu. Avataan ensin laskutoimituksissa olevat sulut, jolloin yhtälö on muotoa

$$-2b - \frac{2}{3} = b - 3b + 9.$$

Siirretään muuttujia sisältävät termit yhtälön vasemmalle puolelle ja vakiotermit yhtälön oikealle puolelle ja saadaan

$$0 = \frac{29}{3},$$

mikä on identtisesti epätosi. Yhtälö ei näin ollen toteudu millään muuttujan b arvolla. △

Ensimmäisen asteen epäyhtälö

Jos ensimmäisen asteen yhtälön yhtäsuuruusmerkki korvataan jollakin epäyhtälömerkillä, saadaan *ensimmäisen asteen epäyhtälö*. Ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaankin oleellisesti samalla tavalla kuin vastaavanlainen yhtälö yhtä poikkeusta lukuun ottamatta: mikäli epäyhtälö kerrotaan tai jaetaan puolittain negatiivisella luvulla, epäyhtälön merkki vaihtuu päinvastaiseksi (Lause 1.3, kohta IV). Yhtälönratkaisun tarkoituksena on löytää kaikki muuttujan arvot, jotka toteuttavat yhtälön.

Esimerkki 3. Ratkaise epäyhtälö $-c + 11 \leq 7(c - 3)$.

Ratkaisu. Avataan ensiksi oikean puolen sulut ja siirretään muuttujia sisältävät termit vasemmalle ja vakiotermit oikealle puolelle, jolloin

$$-8c \leq -32.$$

Epäyhtälö jaetaan puolittain negatiivisella luvulla -8. Nyt epäyhtälön merkki kääntyy ja saadaan

$$c \geq 4.$$

Epäyhtälö $-c + 11 \leq 7(c-3)$ on siis tosi, kun $c \geq 4$. △

Kerrottaessa tai jaettaessa epäyhtälöä puolittain tuntemattomalla muuttujalla on tiedettävä, onko muuttuja positiivinen vai negatiivinen.

Esimerkki 4. Mitä arvoja muuttuja k voi saada, jos $4ka - 4k > a$?

Ratkaisu. Otetaan epäyhtälön vasemmalle puolelle yhteinen tekijä $4k$, jolloin epäyhtälö on muotoa

$$4k(a-1) > a. \tag{1}$$

Jotta epäyhtälö voidaan jakaa puolittain termillä $4(a-1)$, on tiedettävä, onko se positiivinen vai negatiivinen. Tutkitaan nyt erikseen tapaukset $4(a-1) > 0$ ja $4(a-1) < 0$. Jos $a > 1$, niin $4(a-1) > 0$ ja epäyhtälöstä (1) saadaan $k > \frac{a}{4(a-1)}$. Vastaavasti jos $a < 1$, niin $4(a-1) < 0$ ja epäyhtälöstä (1) saadaan $k < \frac{a}{4(a-1)}$. △

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen polynomifunktion yleinen muoto on

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

missä a_2, a_1, a_0 ovat annettuja vakioita ja $a_2 \neq 0$. *Toisen asteen yhtälössä* on siis ainakin yksi muuttuja, joka on toista astetta. Toisen asteen yhtälöä ratkaistaessa pyritään aina ensiksi tilanteeseen, jossa yhtälö on normaalimuotoa $ax^2+bx+c = 0$. Tämä tapahtuu siirtämällä kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle. Yhtälön ollessa normaalimuodossa voidaan käyttää toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Yhtälön voi vaihtoehtoisesti ratkaista myös jakamalla sen tekijöihin tai käyttämällä muistikaavoja.

Esimerkki 5. Ratkaise toisen asteen yhtälö $4x^2 + 5x - 5 = -2x^2 - 6$.

Ratkaisu. Siirretään kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle, jolloin yhtälö on normaalimuodossa $6x^2 + 5x + 1 = 0$. Käytetään seuraavaksi 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaa $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, johon sijoitetaan muuttujat $a = 6$, $b = 5$ ja $c = 1$. Nyt saadaan

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{-5 \pm 1}{12}.$$

Yhtälöllä on siis kaksi ratkaisua, $x = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$ ja $x = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$. $\triangle$

Toisen asteen yhtälön ratkaisujen määrä on tutkitun polynomifunktion nollakohtien määrä. Toisen asteen yhtälöllä ratkaisuja, eli nollakohtia, on aina 0, 1 tai 2. Yhtälön ratkaisujen määrää tutkittaessa ei tarvitse ratkaista koko yhtälöä; riittää kun laskee yhtälön *diskriminantin.* Diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ määrittelee yhtälön reaalisten ratkaisujen määrän. Mikäli diskriminantti D on aidosti positiivinen, ratkaisuja on kaksi. Jos diskriminantti $D = 0$, ratkaisuja on yksi, ja diskriminantin ollessa negatiivinen yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Esimerkki 6. Tutki, kuinka monta ratkaisua toisen asteen yhtälöllä $-4x^2 + 14x - 5 = 20 - 6x$ on.

Ratkaisu. Tutkittaessa yhtälön ratkaisujen määrää riittää, että lasketaan yhtälön diskriminantti. Siirretään ensiksi kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle, jolloin yhtälö on normaalimuodossa $-4x^2 + 20x - 25 = 0$. Sijoitetaan muuttujat $a = -4$, $b = 20$ ja $c = -25$ diskriminantin laskukaavaan $D = b^2 - 4ac$ ja saadaan

$$D = 20^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-25) = 400 - 400 = 0.$$

Koska diskriminantti $D = 0$, yhtälöllä on vain yksi ratkaisu. $\triangle$

Toisen asteen epäyhtälö

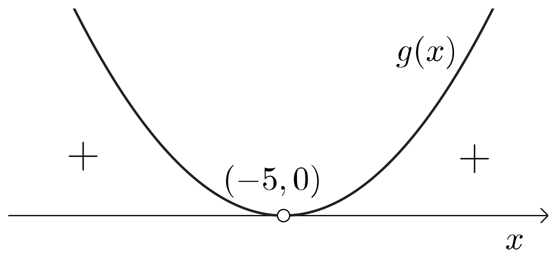
Toisen asteen epäyhtälössä on ainakin yksi muuttuja, joka on toista astetta. Ratkaistaessa toisen asteen epäyhtälöä pyritään aina ensiksi pääsemään tilanteeseen, jossa epäyhtälö on normaalimuotoa $ax^2 + bx + c$? 0, missä ? on jokin epäyhtälömerkki $<$, $\leq$, $>$ tai $\geq$. Koska jatkuvan funktion merkki voi vaihtua ainoastaan funktion nollakohdissa, ratkaistaan epäyhtälöä vastaava toisen asteen yhtälö. Sijoitetaan ratkaisut *merkkikaavioon*, jonka avulla tutkitaan normaalimuotoisen epäyhtälön arvoja nollakohtien ja määrittelyalueen rajaamissa alueissa, jolloin nähdään, millä arvoilla epäyhtälö toteutuu. Vaihtoehtoisesti epäyhtälön arvoja voidaan tutkia kuvaajan avulla, koska toisen asteen yhtälö on paraabeli, jonka aukeamissuunta riippuu vakion a arvosta.

Esimerkki 7. Tutki, millä muuttujan x arvoilla epäyhtälö $-x^2 - 10x < 25$ on tosi.

Ratkaisu. Siirretään kaikki termit epäyhtälömerkin oikealle puolelle, jolloin epäyhtälö on muotoa $x^2 + 10x + 25 > 0$. Ratkaistaan funktion $g(x) = x^2 + 10x + 25$ nollakohdat muistikaavan $(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)^2$ avulla. Saadaan

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 25 &= 0 \\ (x + 5)^2 &= 0, \end{aligned}$$

jolloin funktiolla on kaksoisjuuri $x = -5$. Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa x-akselin tarkalleen kerran pisteessä $(-5, 0)$. Kuvasta 1 nähdään, että funktion $g(x)$ arvot ovat positiivisia kaikkialla lu-



Kuva 1: Funktio $g(x) = x^2 + 10x + 25$ saa positiivisia arvoja, kun $x \neq -5$.

kuun ottamatta pistettä $(-5, 0)$. Epäyhtälö $-x^2 - 10x < 25$ on siis tosi, kun $x \neq -5$. △

Esimerkki 8. Millä vakion k arvoilla funktio $f(x) = -kx^2 - 2kx + 6$ saa vain positiivisia arvoja?

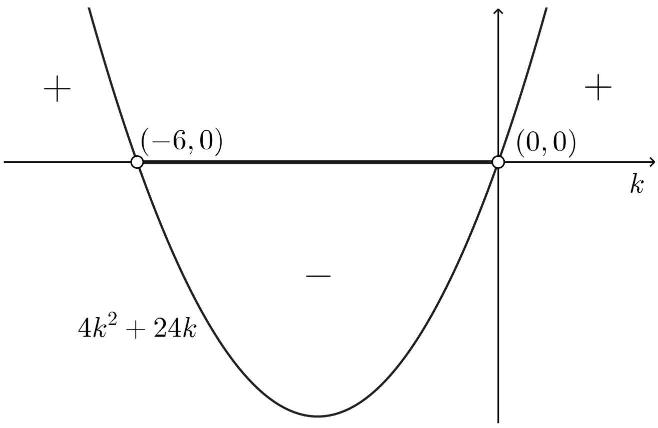
Ratkaisu. Toisen asteen funktio saa ainoastaan positiivisia arvoja silloin, kun se on ylöspäin aukeava paraabeli eikä sillä ole yhtään reaalijuurta. Funktio $f(x)$ aukeaa ylöspäin kun $-k > 0$ eli $k < 0$. Funktiolla ei ole reaalijuuria, jos diskriminantti $D < 0$. Tutkitaan siis funktion $f(x)$ diskriminanttia. Sijoitetaan kertoimet $a = -k$, $b = -2k$ ja $c = 6$ diskriminantin laskukaavaan $D = b^2 - 4ac$, jolloin saadaan

$$D = (-2k)^2 - 4 \cdot (-k) \cdot 6 = 4k^2 + 24k.$$

Koska diskriminantin tulee olla negatiivinen, ratkaistaan seuraavaksi epäyhtälö $4k^2 + 24k < 0$. Lasketaan ensiksi yhtälön $4k^2 + 24k = 0$ ratkaisut, ja tutkitaan sitten kuvaajan avulla epäyhtälön toteutumista. Etsitään yhtälön vasemmalta puolelta yhteinen tekijä

$$\begin{aligned} 4k^2 + 24k &= 0 \\ 4k(k+6) &= 0. \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön nojalla saadaan edelleen $4k = 0$ tai $k + 6 = 0$. Näin saadaan tutkitulle yhtälölle kaksi ratkaisua: $k = 0$ tai $k = -6$. Tutkitaan kuvaajasta, mitä arvoja diskriminantti saa yhtälön ratkaisujen välillä ja niiden ympäristössä.



Kuva 2: Diskriminantin arvo on negatiivinen välillä $-6 < k < 0$.

Kuvasta 2 nähdään, että diskriminantti saa negatiivisia arvoja, kun $-6 < k < 0$. Näin ollen alkuperäinen funktio $f(x) = -kx^2 - 2kx + 6$ saa vain positiivisia arvoja, kun $-6 < k < 0$. △

Korkeamman asteen yhtälö

Korkeamman asteen yhtälön yleinen muoto on

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

missä x on muuttuja, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ovat annettuja vakioita, $a_n \neq 0$ ja $n \in \mathbb{N}_{>2}$. Korkeamman asteen yhtälössä on siis vähintään yksi muuttuja, jonka asteluku on suurempi kuin kaksi. Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöille on olemassa yleiset ratkaisukaavat, mutta useimmiten on helpompaa ratkaista yhtälö muilla menetelmillä. Esimerkiksi kolmannen asteen yhtälön,

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, yleinen ratkaisukaava on muotoa

$$x = \sqrt[3]{\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a} - \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} - \frac{b}{3a},$$

ja neljännen asteen yhtälön yleinen ratkaisukaava on edellistäkin pidempi. Viidennen ja sitä korkeamman asteen yhtälöille ei voida muodostaa yleisiä ratkaisukaavoja.

Kun ratkaistaan korkeamman asteen yhtälöä, siirretään aluksi kaikki termit toiselle puolelle, jolloin toiselle puolelle jää vain luku 0. Seuraavaksi yhtälön termeistä pyritään muodostamaan enintään toista astetta olevien polynomien tulo, eli polynomi jaetaan tekijöihin. Tulon nollasäännön nojalla ainakin yksi saaduista tulontekijöistä on nolla, joten seuraavaksi tulee laskea, millä muuttujan arvoilla kukin polynomin tekijöistä on nolla.

Esimerkki 9. Laske funktion $f(x) = (9x^3 - 12x^5)\left(-\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + x\right)$ nollakohdat.

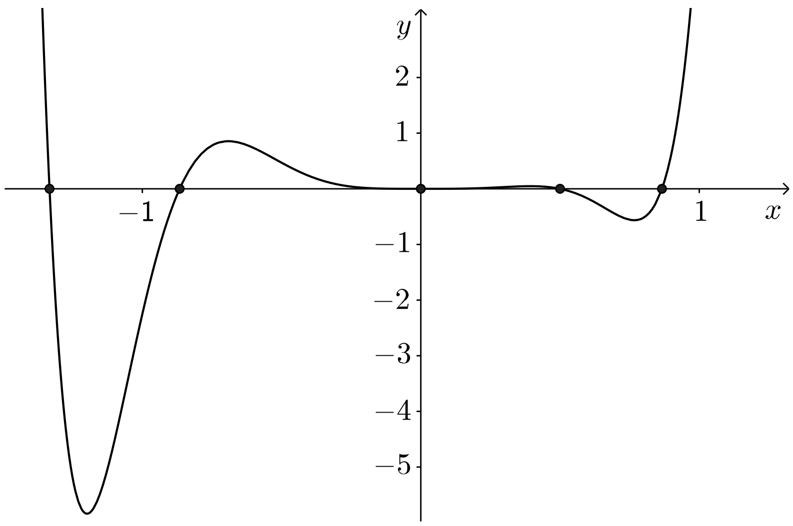
Ratkaisu. Tässä tapauksessa funktion nollakohtien laskemista ei ole järkevää aloittaa sieventämisellä ja sulkeiden poistamisella, koska näin saadusta yhtälöstä

$$18x^8 + 15x^7 - \frac{51}{2}x^6 - \frac{45}{4}x^5 + 9x^4 = 0$$

on selvästi hankalampi edetä kuin alkuperäisestä yhtälöstä, joka on jo valmiiksi tulomuodossa.

Kuvasta 3 nähdään, että funktiolla $f(x)$ on viisi nollakohtaa. Aloitetaan nollakohtien ratkaiseminen etsimällä yhteisiä tekijöitä. Ensimmäisestä tulontekijästä saadaan yhteinen tekijä $-3x^3$ ja jälkimmäisestä tulontekijästä yhteinen tekijä $-\frac{1}{4}x$. Nyt saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}(9x^3 - 12x^5)\left(-\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + x\right) &= 0\\ -3x^3(4x^2 - 3)\left(-\frac{1}{4}x\right)(6x^2 + 5x - 4) &= 0\\ \frac{3}{4}x^4(4x^2 - 3)(6x^2 + 5x - 4) &= 0.\end{aligned}$$



Kuva 3: Funktion $f(x) = (9x^3 - 12x^5)\left(-\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + x\right)$ kuvaaja.

Tulon nollasäännön mukaan ainakin yksi tulontekijöistä on 0, jos tulo on 0. Tämän nojalla saadaan

$$\frac{3}{4}x^4 = 0, \qquad 4x^2 - 3 = 0 \qquad \text{tai} \qquad 6x^2 + 5x - 4 = 0.$$

Vasemmanpuoleisesta yhtälöstä saadaan nelinkertainen nollakohta $x = 0$. Tutkitaan seuraavaksi keskimmäistä yhtälöä $4x^2 - 3 = 0$. Summan ja erotuksen tulon muistikaavaa $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$ käyttäen yhtälön vasemmalle puolelle saadaan tulo $(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})$. Nyt

$$(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3}) = 0,$$

ja edelleen tulon nollasäännön nojalla

$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{3} &= 0 & \quad \text{tai} \quad & & 2x + \sqrt{3} &= 0 \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{2} & & & x &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan lopuksi kolmatta yhtälöä $6x^2+5x-4 = 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttäen saadaan

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4)}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{-5 \pm 11}{12},$$

jolloin $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -\frac{4}{3}$.

Funktiolla $f(x) = (9x^3 - 12x^5)\left(-\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + x\right)$ on siis viisi nollakohtaa: $x = -\frac{4}{3}$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ ja $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\triangle$

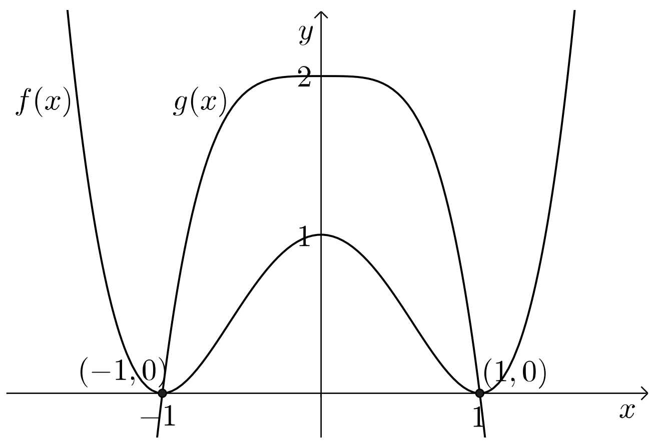
Mikäli yhtälö on *bikvadraattinen*, eli se on muotoa $a_2x^4 + a_1x^2 + a_0 = 0$, voidaan se ratkaista tekemällä sijoitus $x^2 = t$. Tällöin yhtälöstä saadaan toisen asteen yhtälö $a_2t^2 + a_1t + a_0 = 0$, jolla on ratkaisut $t = w_1$ ja $t = w_2$. Koska $x^2 = t$, saadaan nyt $x^2 = w_1$ ja $x^2 = w_2$. Ratkaisemalla nämä muuttujan x suhteen saadaan bikvadraattisen yhtälön ratkaisut.

Esimerkki 10. Mitkä ovat yhtälön

$$(x^2 - 1)^2 = 2(1 - x^4) \tag{2}$$

reaalilukuratkaisut?

Ratkaisu. Ratkaistaan yhtälö kahdella eri tavalla: ensiksi yhteisten tekijöiden ja muistikaavojen avulla ja toiseksi sijoittamalla. Yhtälön graafinen tulkinta kahden funktion, $f(x) = (x^2 - 1)^2$ ja $g(x) = 2(1 - x^4)$, leikkauspisteinä on esitetty Kuvassa 4.



Kuva 4: Funktioiden $f(x) = (x^2 - 1)^2$ ja $g(x) = 2(1 - x^4)$ leikkauspisteet.

Tapa 1:
Siirretään kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle, jolloin yhtälö (2) on muotoa

$$(x^2 - 1)^2 - 2(1 - x^4) = 0. \tag{3}$$

Summan ja erotuksen tulon muistikaavasta $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$ saadaan $(1 - x^4) = (1 - x^2)(1 + x^2)$, jolloin yhtälöstä (3) saadaan

$$\begin{aligned}
(x^2-1)^2 - 2(1-x^4) &= 0 \\
(x^2-1)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2) &= 0 \\
(x^2-1)(x^2-1) + 2(x^2-1)(x^2+1) &= 0.
\end{aligned}$$

Otetaan yhtälön vasemmalle puolelle yhteinen tekijä $(x^2 - 1)$. Nyt

$$\begin{aligned}
(x^2-1)(x^2-1) + 2(x^2-1)(x^2+1) &= 0 \\
(x^2-1)\left(x^2-1+2(x^2+1)\right) &= 0 \\
(x^2-1)(3x^2+1) &= 0,
\end{aligned}$$

josta edelleen tulon nollasäännön nojalla saadaan

$$x^2 - 1 = 0 \qquad \text{tai} \qquad 3x^2 + 1 = 0.$$

Vasemmanpuoleinen yhtälö on summan ja erotuksen tulon muistisääntöä käyttäen

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0,$$

josta käyttäen tulon nollasääntöä saadaan edelleen $x = 1$ tai $x = -1$. Oikeanpuoleisesta yhtälöstä saadaan $x^2 = -\frac{1}{3}$, jolla ei ole ratkaisuja reaalilukujoukossa. Yhtälön $(x^2 - 1)^2 = 2(1 - x^4)$ reaalilukuratkaisut ovat siis $x = 1$ ja $x = -1$.

Tapa 2: Siirretään ensiksi kaikki yhtälön (2) termit vasemmalle puolelle. Nyt

$$(x^2-1)^2 - 2(1-x^4) = 0,$$

josta sieventämällä edelleen

$$\begin{aligned}
x^4 - 2x^2 + 1 - 2 + 2x^4 &= 0 \\
3x^4 - 2x^2 - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan saatuun bikvadraattiseen yhtälöön $x^2 = t$, jolloin se on muotoa

$$3t^2 - 2t - 1 = 0. \tag{4}$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, jolloin yhtälön (4) ratkaisuksi saadaan

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6}.$$

Yhtälön (4) ratkaisut ovat $t = 1$ ja $t = -\frac{1}{3}$. Koska aiemmin tehtiin sijoitus $x^2 = t$, on nyt siis $x^2 = 1$ ja $x^2 = -\frac{1}{3}$. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1, \end{aligned}$$

ja jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole reaalilukuratkaisuja.
Yhtälöllä $(x^2 - 1)^2 = 2(1 - x^4)$ on siis reaalijuuret $x = 1$ ja $x = -1$. $\triangle$

Korkeamman asteen epäyhtälö

Korkeamman asteen epäyhtälössä on ainakin yksi tuntematon muuttuja, jonka aste on korkeampi kuin 2. Korkeamman asteen epäyhtälön ratkaiseminen aloitetaan ryhmittelemällä epäyhtälön termit niin, että kaikki termit ovat epäyhtälön toisella puolella, jolloin toisella puolella on ainoastaan luku 0.

Tarkastellaan polynomifunktiota $P(x)$, joka on identtinen epäyhtälön vasemmalla puolella olevan polynomin kanssa, jolloin näiden nollakohdat ovat samat. Jaetaan polynomifunktio $P(x)$ tekijöihin ja lasketaan edelleen niiden nollakohdat. Tutkitaan polynomifunktion $P(x)$ tekijöiden arvoja nollakohtien ja määrittelyalueen rajaamissa alueissa. Merkitään nämä merkkikaavioon, josta tulon merkkisäännön nojalla nähdään, milloin epäyhtälö toteutuu. Mikäli parillinen määrä tulon tekijöitä on negatiivisia, niiden tulo on positiivinen ja polynomifunktion arvo tällä välillä on positiivinen. Vastaavasti jos pariton määrä tekijöitä on negatiivisia jollakin tutkitulla välillä, tämä väli on negatiivinen.

Jos polynomifunktiolla $P(x)$ ei ole yhtään reaalijuuria, polynomifunktio on kaikkialla joko positiivinen tai negatiivinen riippuen korkeimman asteen termin kertoimesta. Tällöin epäyhtälö on joko tosi kaikilla muuttujan arvoilla tai se ei ole tosi millään muuttujan arvolla.

Esimerkki 11. Ratkaise epäyhtälö $2x^3 - 2(x^2 - 1) + 3(x - 3) \geq x^3 + 6x - 7$.

Ratkaisu. Siirretään aluksi kaikki termit epäyhtälön vasemmalle puolelle ja sievennetään vasen puoli. Nyt epäyhtälö on muotoa $x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0$. Tutkitaan polynomifunktiota $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ ja lasketaan sen nollakohdat. Nyt

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0,$$

mistä saadaan

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

ottamalla muuttuja x yhteiseksi tekijäksi. Tulon nollasääntöä käyttämällä saadaan $x = 0$ tai $x^2 - 2x - 3 = 0$. Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan edelleen ratkaistua nollakohdat $x = -1$ tai $x = 3$. Tutkitaan polynomifunktion $P(x)$ tekijöiden arvoja väleillä $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 3)$ ja $(3, \infty)$ merkkikaavion avulla. Merkitään Taulukkoon 1 pystysarakkeiden väleille nollakohdat $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 3$ ja vaakariveille tekijät x ja $x^2 - 2x - 3$ sekä alkuperäinen polynomi $x^3 - 2x^2 - 3x$.

	-1	0	3
x	|	|	|
$x^2 - 2x - 3$	|	|	|
$x^3 - 2x^2 - 3x$	|	|	|

Taulukko 1: Muodostetaan merkkikaavio funktiolle $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$.

Polynomifunktion tekijöiden arvot saadaan helposti tulkitsemalla niiden kuvaajia. Funktio $f(x) = x$ on suora, joka on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x \geq 0$. Funktio $g(x) = x^2 - 2x - 3$ on ylöspäin aukeava paraabeli, joka on negatiivinen, kun $-1 < x < 3$ ja positiivinen muualla. Täydennetään nämä merkkikaavioon.

		-1		0		3	
x	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$
$x^2 - 2x - 3$	$+$	|	$-$	|	$-$	|	$+$
$x^3 - 2x^2 - 3x$	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

Taulukko 2: Tutkitaan funktion $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ tekijöiden arvoja merkkikaavion avulla.

Taulukossa 2 olevan merkkikaavion alimmalta riviltä nähdään, että epäyhtälö $x^3 - 2x^2 - 3x > 0$ toteutuu, kun $-1 < x < 0$ tai $3 < x < \infty$. Lisäksi $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$, kun $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 3$. Näin ollen alkuperäinen epäyhtälö $2x^3 - 2(x^2 - 1) + 3(x - 3) \geq x^3 + 6x - 7$ toteutuu, kun $-1 \leq x \leq 0$ tai $3 \leq x < \infty$. $\triangle$

2.2 Kaksoisepäyhtälö

Kun lausekkeelle on annettu sekä alaraja että yläraja, on kyseessä *kaksoisepäyhtälö*. Se muodostuu nimensä mukaisesti kahdesta eri epäyhtälöstä. Kaksoisepäyhtälön epäyhtälöt voidaan tapauksesta riippuen ratkaista joko yhdessä tai erikseen. Mikäli epäyhtälöt ratkaistaan erikseen, on lopuksi selvitettävä, millä arvoilla molemmat epäyhtälöt ovat samanaikaisesti voimassa.

Esimerkki 12. Ratkaise epäyhtälö $0 < 12 - 3(x + 1) \leq 8$. Esitä tulos lukuvälinä ja lukusuoralla.

Ratkaisu. Ratkaistaan kaksoisepäyhtälö kahdella eri tavalla. Ensimmäisessä ratkaisussa kaksoisepäyhtälö pidetään yhtenä kokonaisuutena ja sen molemmat osat ratkaistaan samanaikaisesti. Toisessa ratkaisussa jaetaan kaksoisepäyhtälö kahdeksi erilliseksi epäyhtälöksi, joiden ratkaisut yhdistetään lopuksi.

Tapa 1: Suoritetaan laskutoimituksia puolittain, kunnes kaksoisepäyhtälön keskellä on ainoastaan muuttuja x. Aloitetaan vähentämällä luku 12 kaksoisepäyhtälön kaikilta puolilta. Nyt

$$\begin{aligned} 0 < \quad & 12 - 3(x+1) & \leq 8 \\ -12 < \quad & -3(x+1) & \leq -4. \end{aligned}$$

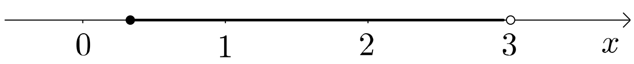
Jaetaan epäyhtälö puolittain negatiivisella luvulla -3, jolloin molemmat epäyhtälömerkit vaihtuvat päinvastaisiksi. Epäyhtälö on nyt muotoa

$$4 > x + 1 \geq \frac{4}{3}.$$

Vähennetään lopuksi puolittain luku 1, jolloin saadaan

$$3 > x \geq \frac{1}{3}.$$

Kaksoisepäyhtälö toteutuu näin ollen, kun $\frac{1}{3} \leq x < 3$. Tämä voidaan ilmaista myös lukuvälinä $x \in [\frac{1}{3}, 3)$. Kaksoisepäyhtälön ratkaisu lukusuoralla on esitetty Kuvassa 5.



Kuva 5: Lukuväli $\frac{1}{3} \leq x < 3$ lukusuoralla.

Tapa 2: Erotellaan kaksoisepäyhtälö kahdeksi epäyhtälöksi,

$$12 - 3(x+1) > 0 \text{ ja } 12 - 3(x+1) \leq 8,$$

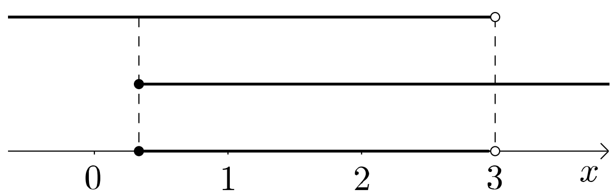
ja ratkaistaan epäyhtälöt. Ensimmäisen epäyhtälön ratkaisu on

$$\begin{aligned} 12 - 3(x+1) &> 0 \\ -3x &> -9 \\ x &< 3, \end{aligned}$$

ja jälkimmäisestä epäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 12 - 3(x+1) &\leq 8 \\ -3x &\leq -1 \\ x &\geq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Yhdistetään saadut epäyhtälöiden ratkaisut, jolloin kaksoisepäyhtälön ratkaisuksi saadaan $\frac{1}{3} \leq x < 3$, mikä voidaan kirjoittaa myös muodossa $x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right)$. Kuvassa 6 on ilmaistu graafisesti epäyhtälöiden $12 - 3(x+1) > 0$ ja



Kuva 6: Lukuvälit $x < 3$, $x \geq \frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{3} \leq x < 3$ lukusuoralla.

$12 - 3(x+1) \leq 8$ ratkaisut sekä niistä yhdistämällä saatu kaksoisepäyhtälön $0 < 12 - 3(x+1) \leq 8$ ratkaisu. △

Esimerkki 13. Matematiikan kurssin arvosana määräytyy neljän välikokeen sekä loppukokeen perusteella. Jokaisesta kokeesta saa 0–100 kokonaista pistettä. Kurssin lopullinen pistemäärä lasketaan painotetun keskiarvon perusteella niin, että loppukokeella on 6-kertainen painoarvo välikokeisiin verrattuna. Taulukosta 3 nähdään, millä pistemäärällä kunkin arvosanan saa.

Pistemäärä	Arvosana
0–49	0
50–59	1
60–69	2
70–79	3
80–89	4
90–100	5

Taulukko 3: Arvosanojen määräytyminen pistemäärän perusteella.

Opiskelijan välikokeista saamat pistemäärät ovat 81, 94, 89 ja 77. Mikä pistemäärä opiskelijan tulee saada loppukokeesta, jotta hän saisi arvosanan neljä?

Ratkaisu. Saadakseen arvosanan neljä tulee koko kurssin pistemääräksi saada 80–89 pistettä. Kurssin loppukokeella on 6-kertainen painoarvo, joten lopullinen pistemäärä saadaan painotettuna aritmeettisena keskiarvona seuraavasti:

$$\bar{x} = \frac{81 + 94 + 89 + 77 + 6a}{4 + 6},$$

missä a on loppukokeen pistemäärä. Koska kurssin lopullisen pistemäärän tulee olla 80–89, saadaan kaksoisepäyhtälö

$$80 \leq \frac{81 + 94 + 89 + 77 + 6a}{4 + 6} \leq 89.$$

Ratkaistaan epäyhtälö vaiheittain niin, että lopulta kaksoisepäyhtälön keskellä on ainoastaan muuttuja a. Nyt

$$\begin{array}{rcl} 80 \leq & \frac{81+94+89+77+6a}{4+6} & \leq 89 \\ 800 \leq & 341 + 6a & \leq 890 \\ 459 \leq & 6a & \leq 549 \\ 76{,}5 \leq & a & \leq 91{,}5. \end{array}$$

Opiskelijan tulee saada loppukokeesta 77–91 pistettä, jotta hän saisi arvosanan neljä. Jos loppukokeen pistemäärä olisi 76 pistettä, arvosana olisi kolme, ja 92 pisteellä arvosana olisi viisi. △

Kaikkia kaksoisepäyhtälöitä ei voida ratkaista niin, että epäyhtälö on yhtenä kokonaisuutena. Tällöin epäyhtälöitä on tarkasteltava erillään, ja niiden ratkaisut on yhdistettävä lopuksi.

Esimerkki 14. Millä muuttujan k arvoilla epäyhtälö $0 < 8k + 2 \leq 1 - 3k^2$ on voimassa?

Ratkaisu. Koska muuttujia on sekä kaksoisepäyhtälön keskellä että sen oikealla puolella, epäyhtälöä on tarkasteltava kahtena erillisenä epäyhtälönä. Ensimmäisestä epäyhtälöstä $0 < 8k + 2$ saadaan helposti $k > -\frac{1}{4}$.

Tarkastellaan nyt epäyhtälöä $8k + 2 \leq 1 - 4k^2$. Siirretään kaikki termit epäyhtälön vasemmalle puolelle, jolloin saadaan $4k^2 + 8k + 1 \leq 0$. Tutkitaan seuraavaksi funktiota $f(k) = 4k^2 + 8k + 1$ ja ratkaistaan sen nollakohdat. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttäen löydetään funktiolle $f(k)$ nollakohdat $k = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $k = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Koska toisen asteen termin kerroin on positiivinen, funktio $f(k)$ on ylöspäin aukeava paraabeli, joka on epäpositiivinen, kun $-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq k \leq -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Yhdistetään lopuksi näiden kahden tutkitun epäyhtälön ratkaisut, jolloin alkuperäisen kaksoisepäyhtälön ratkaisuksi saadaan $-\frac{1}{4} < k \leq -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. △

2.3 Rationaaliepäyhtälö

Rationaaliyhtälö

Rationaaliyhtälö eli murtoyhtälö sisältää vähintään yhden rationaalilausekkeen $\frac{P}{Q}$, missä P ja Q ovat polynomeja ja $Q \neq 0$. Rationaaliyhtälön ratkaisussa keskeistä on rationaalilausekkeen sieventäminen pois. Lisäksi on kiinnitettävä erityistä huomiota määrittelyjoukkoon, sillä muuttujaa ei ole määritelty nimittäjien nollakohdissa.

Esimerkki 15. Millä muuttujan k arvoilla yhtälöllä

$$\frac{k^2 - 2k}{k - 4} = \frac{5k + 4}{3k - 12}$$

on ratkaisu?

Ratkaisu. Tutkitaan ensin, millä muuttujan k arvoilla rationaalilausekkeet on määritelty. Koska rationaalilausekkeen nimittäjä ei voi olla nolla, saadaan tässä tapauksessa molempien lausekkeiden määrittelyehdoksi $k - 4 \neq 0$ eli $k \neq 4$. Kerrotaan ensin yhtälön molemmat puolet lausekkeella $k - 4$, joka määrittelyehdon mukaan on erisuuri kuin 0. Nyt yhtälö on muotoa

$$k^2 - 2k = \frac{5}{3}k + \frac{4}{3}.$$

Siirretään kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle ja sievennetään lauseketta, jolloin saadaan

$$k^2 - \frac{11}{3}k - \frac{4}{3} = 0,$$

ja edelleen

$$\left(k + \frac{1}{3}\right)(k - 4) = 0.$$

Tulon nollasäännön nojalla saadaan $k + \frac{1}{3} = 0$ tai $k - 4 = 0$, joista jälkimmäinen ei kuulu määrittelyjoukkoon. Täten yhtälöllä on ratkaisu ainoastaan, kun $k = -\frac{1}{3}$. Tarkistetaan lopuksi ratkaisu sijoittamalla saatu muuttujan arvo alkuperäiseen yhtälöön. $\triangle$

Rationaaliepäyhtälö

Rationaaliepäyhtälö sisältää rationaaliyhtälön tavoin rationaali- eli murtolausekkeen. Rationaaliepäyhtälön ratkaisemisessa on kuitenkin olennainen ero verrattuna rationaaliyhtälön ratkaisemiseen: epäyhtälöä ei voi kertoa rationaalilausekkeen nimittäjällä ottamatta huomioon, onko se positiivinen vai negatiivinen.

Rationaaliepäyhtälöä ratkaistaessa varminta on siirtää kaikki termit ensin epäyhtälön toiselle puolelle, jolloin toisella puolella on ainoastaan luku 0. Tämän jälkeen lavennetaan termit samannimisiksi ja, mikäli mahdollista, pyritään jakamaan myös osoittaja tekijöihin. Ratkaistaan saadusta rationaalilausekkeesta osoittajan ja nimittäjän nollakohdat, koska rationaalilausekkeen etumerkki voi vaihtua ainoastaan näissä kohdissa ja nimittäjän nollakohdat rajaavat lisäksi määrittelyjoukon. Tutkitaan rationaalilausekkeen arvoja nollakohtien ja määrittelyjoukon rajaamilla alueilla. Merkitään nämä merkkikaavioon, josta tulon merkkisäännön nojalla nähdään, milloin epäyhtälö toteutuu.

Esimerkki 16. Millä muuttujan s arvoilla epäyhtälö

$$\frac{s}{s+1} \geq \frac{s}{s+3}$$

on tosi?

Ratkaisu. Selvitetään ensin muuttujan s määrittelyjoukko. Muuttujaa s ei ole määritelty nimittäjien nollakohdissa, joten $s+1 \neq 0$ ja $s+3 \neq 0$, joista saadaan edelleen $s \neq -1$ ja $s \neq -3$.

Siirretään molemmat rationaalilausekkeet epäyhtälön vasemmalle puolelle ja lavennetaan ne samannimisiksi, jolloin saadaan epäyhtälö

$$\frac{s(s+3)-s(s+1)}{(s+1)(s+3)} \geq 0,$$

ja edelleen

$$\frac{2s}{(s+1)(s+3)} \geq 0.$$

Nimittäjän nollakohdiksi saatiin määrittelyjoukkoa ratkaistaessa $s=-1$ ja $s=-3$. Osoittajan nollakohta on $s=0$. Tehdään merkkikaavio (Taulukko 4), johon merkitään pystysarakkeiden kohdalle saadut nollakohdat ja vaakariveille kaikki tekijät sekä tutkittu rationaalilauseke.

Tutkitaan tekijöiden arvoja väleillä $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 0]$ ja $[0, \infty)$ esimerkiksi tulkitsemalla niiden kuvaajia. Koska kaikki tekijöiden aste on tässä tapauksessa yksi, merkkikaavion täyttäminen sujuu helposti. Rationaalilausekkeen arvo tutkituilla väleillä saadaan tekijöiden arvoista kyseisillä väleillä tulon merkkisääntöä käyttäen. Mikäli parillinen määrä tekijöitä on negatiivisia tutkitulla välillä, rationaalilauseke on negatiivinen tällä välillä. Jos taas parillinen määrä tekijöitä on negatiivisia tutkitulla välillä, rationaalilauseke on positiivinen tällä välillä.

	$-\infty < s < -3$	-3	$-3 < s < -1$	-1	$-1 < s < 0$	0	$s > 0$
$2s$		|		|		|	
$s+1$		|		|		|	
$s+3$		|		|		|	
$\frac{2s}{(s+1)(s+3)}$		|		|		|	

Taulukko 4: Merkkikaavio rationaalilausekkeelle $\frac{2s}{(s+1)(s+3)}$.

		-3		-1		0	
$2s$	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$
$s+1$	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$
$s+3$	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
$\frac{2s}{(s+1)(s+3)}$	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

Taulukko 5: Täydennetty merkkikaavio rationaalilausekkeelle $\frac{2s}{(s+1)(s+3)}$.

Merkkikaaviosta, joka löytyy täydennettynä Taulukosta 5, nähdään, että rationaalilauseke $\frac{2s}{(s+1)(s+3)}$ on määritelty ja epänegatiivinen väleillä $(-3, -1)$ ja $[0, \infty)$. Alkuperäinen rationaaliepäyhtälö on täten voimassa, kun $-3 < s < 1$ ja $s \geq 0$. $\triangle$

2.4 Itseisarvoepäyhtälö

Itseisarvo ja itseisarvoyhtälö

Geometrisesti tarkasteltuna *itseisarvo* kuvaa reaaliluvun suuruutta eli sen etäisyyttä luvusta nolla. Reaaliluvun $r \in \mathbb{R}$ itseisarvo $|r|$ määritellään seuraavasti:

Määritelmä 2.1. Reaaliluvun r itseisarvo on

$$|r| = \begin{cases} r, & \text{kun } r \geq 0 \\ -r, & \text{kun } r < 0. \end{cases}$$

Reaaliluvun itseisarvo on aina epänegatiivinen, eli $|r| \geq 0$ on voimassa kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Itseisarvon määritelmän nojalla kaikilla $r, s \in \mathbb{R}$ on voimassa $|r - s| = |s - r|$ ja $|r \cdot s| = |r| \cdot |s|$. Lisäksi $\left|\frac{r}{s}\right| = \frac{|r|}{|s|}$, kun $r, s \in \mathbb{R}$ ja $s \neq 0$.

Esimerkki 17. Tutki yhtälöä $\left|\frac{1-3t^2}{2t}\right| + \frac{3}{2} = 0$.

Ratkaisu. Vähennetään yhtälöstä puolittain luku $\frac{3}{2}$, jolloin saadaan

$$\left|\frac{1-3t^2}{2t}\right| = -\frac{3}{2}.$$

Koska itseisarvon määritelmän mukaan itseisarvo on aina epänegatiivinen, yhtälö ei ole tosi millään muuttujan t arvoilla. △

Määritelmä 2.2. Funktion $P(x)$ itseisarvo on

$$|P(x)| = \begin{cases} P(x), & \text{kun } P(x) \geq 0 \\ -P(x), & \text{kun } P(x) < 0. \end{cases}$$

Itseisarvoyhtälössä yhtälön toisella tai molemmilla puolilla on itseisarvon sisältävä lauseke. Jos itseisarvoyhtälö on muotoa $|P(x)| = r$, missä $r \in \mathbb{R}_+$, niin sen ratkaisu on $P(x) = \pm r$.

Esimerkki 18. Ratkaise yhtälö $|x| + 1 = 5$.

Ratkaisu. Vähennetään yhtälöstä puolittain luku 1, jolloin yhtälön vasemmalla puolella on ainoastaan itseisarvolauseke. Nyt $|x| = 4$, mistä saadaan kaksi mahdollista ratkaisua, $x = 4$ tai $x = -4$. △

Itseisarvoyhtälöstä $|P(x)| = Q(x)$ saadaan funktion $P(x)$ itseisarvon määritelmää käyttäen kaksi yhtälöä: $P(x) = Q(x)$, kun $P(x) \geq 0$, ja $-P(x) = Q(x)$, kun $P(x) < 0$. Saatujen yhtälöiden ne ratkaisut, jotka toteuttavat yhtälöille asetetut ehdot, ovat itseisarvoyhtälön ratkaisut.

Esimerkki 19. Millä muuttujan a arvoilla yhtälö $6a = |1 - 4a^2| - 3$ on voimassa?

Ratkaisu. Siirretään ensin vakiotermi yhtälön vasemmalle puolelle, jolloin saadaan on $6a + 3 = |1 - 4a^2|$. Nyt

$$|1-4a^2| = \begin{cases} 1-4a^2, & \text{kun } 1-4a^2 \geq 0 \\ -(1-4a^2) = 4a^2-1, & \text{kun } 1-4a^2 < 0. \end{cases}$$

Saadaan siis kaksi yhtälöä, $6a + 3 = 1 - 4a^2$, kun $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$, ja $6a + 3 = 4a^2 - 1$, kun $a < -\frac{1}{2}$ tai $a > \frac{1}{2}$. Ratkaistaan ensin yhtälö $6a + 3 = 1 - 4a^2$. Yhtälölle saadaan kaksi mahdollista ratkaisua, $a = -1$ ja $a = -\frac{1}{2}$. Ensimmäinen ratkaisu $a = -1$ ei toteuta ehtoa $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$, joten se ei voi olla yhtälön $6a + 3 = 1 - 4a^2$ ratkaisu. Ratkaistaan seuraavaksi yhtälö $6a + 3 = 4a^2 - 1$ ja saadaan sen mahdollisiksi ratkaisuiksi $a = -\frac{1}{2}$ ja $a = 2$. Ratkaisu $a = -\frac{1}{2}$ ei toteuta ehtoja $a < -\frac{1}{2}$ tai $a > \frac{1}{2}$, joten se ei voi olla yhtälön $6a + 3 = 4a^2 - 1$ ratkaisu. Itseisarvoyhtälön $6a = |1 - 4a^2| - 3$ toteuttavat näin ollen muuttujan a arvot $a = -\frac{1}{2}$ ja $a = 2$. △

Muotoa $|P(x)| = |Q(x)|$ oleva itseisarvoyhtälö jakautuu itseisarvon määritelmän nojalla kahdeksi eri yhtälöksi, $P(x) = Q(x)$ ja $P(x) = -Q(x)$. Itseisarvoyhtälön $|P(x)| = |Q(x)|$ ratkaisut ovat näin ollen yhtälöiden $P(x) = Q(x)$ ja $P(x) = -Q(x)$ ratkaisut.

Esimerkki 20. Millä muuttujan x arvoilla yhtälö $|3x^2 + 1| - |5x - 1| = 0$ on voimassa?

Ratkaisu. Siirretään aluksi termi $|5x - 1|$ yhtälön toiselle puolelle. Nyt yhtälön kummallakin puolella on itseisarvolauseke, joten se jakautuu kahdeksi yhtälöksi, $3x^2 + 1 = 5x - 1$ ja $3x^2 + 1 = -(5x - 1)$. Ensimmäisen yhtälön ratkaisuiksi saadaan $x = 1$ ja $x = \frac{2}{3}$. Jälkimmäisen yhtälön ratkaisut ovat $x = -\frac{5}{3}$ ja $x = 0$. Yhtälö $|3x^2 + 1| - |5x - 1| = 0$ on täten voimassa, kun $x = -\frac{5}{3}$, $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$ tai $x = 1$. △

Niiden itseisarvoyhtälöiden, jotka eivät ole muotoa $|P(x)| = r$, $|P(x)| = Q(x)$ tai $|P(x)| = |Q(x)|$, ratkaiseminen on työläämpää. Tällaisia itseisarvoyhtälöitä tulee tarkastella osissa sen mukaan, millä muuttujan arvoilla kukin yhtälössä esiintyvistä itseisarvojen sisältämistä lausekkeista on positiivinen tai negatiivinen. Kun ratkaisu on jaettu eri tapauksiin, kukin saaduista yhtälöistä ratkaistaan normaalisti. Ratkaisuista ne, jotka kuuluvat tutkitulle välille, ovat alkuperäisen itseisarvoyhtälön ratkaisuja.

Itseisarvoepäyhtälö

Tarkastellaan aluksi kahta lausetta, joiden avulla voidaan ratkaista muotoa $|r| \leq a$ ja $|r| \geq a$, missä $a \in \mathbb{R}_+$ ja $r \in \mathbb{R}$, olevia *itseisarvoepäyhtälöitä.*

Lause 2.3. *Olkoon $a \geq 0$ reaaliluku. Epäyhtälö $|r| \leq a$ on voimassa kaikilla $r \in \mathbb{R}$, jos ja vain jos $-a \leq r \leq a$.*

Todistus. Todistetaan lause kahdessa osassa. Tutkitaan ensiksi tapausta $r \geq 0$. Nyt on voimassa $|r| = r$. Lisäksi koska $a \geq 0$ ja $|r| \leq a$, saadaan $-a \leq 0 \leq r = |r| \leq a$. Näin ollen on todistettu, että jos $|r| \leq a$, niin $-a \leq r \leq a$. Osoitetaan seuraavaksi, että väite on tosi myös toiseen suuntaan. Oletetaan, että $-a \leq r \leq a$. Koska $|r| = r$ ja $r \leq a$, on voimassa $|r| = r \leq a$.

Todistetaan seuraavaksi tapaus $r < 0$. Alkuehdon $a \geq 0$ nojalla on voimassa $r < 0 \leq a$. Koska $r < 0$, nyt on voimassa $|r| = -r$. Tämän nojalla on voimassa $-r = |r| \leq a$, josta saadaan kertomalla puolittain luvulla -1 epäyhtälö $r \geq -a$. Yhdistetään epäyhtälöt $r < 0 \leq a$ ja $r \geq -a$ ja saadaan $-a \leq r \leq a$. Osoitetaan väite vielä toiseen suuntaan. Oletetaan, että $r < 0$ ja $-a \leq r \leq a$. Epäyhtälöstä $-a \leq r$ saadaan $a \geq -r$ kertomalla se puolittain luvulla -1. Jälleen on voimassa $|r| = -r$, joten edellisestä epäyhtälöstä saadaan edelleen $-a \leq r = |r|$. □

Lisähuomiona todettakoon, että koska reaaliluvun r itseisarvo $|r| \geq 0$, epäyhtälö $|r| \leq a$ on epätosi kaikilla $a < 0$ ja $r \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 21. Ratkaise epäyhtälö $|2i - \sqrt{2}| < 3$ muuttujan i suhteen.

Ratkaisu. Koska $3 \geq 0$, Lauseen 2.3 nojalla on voimassa

$$-3 < 2i - \sqrt{2} < 3.$$

Kaksoisepäyhtälöstä saadaan

$$-3 + \sqrt{2} < 2i < 3 + \sqrt{2}$$

ja edelleen

$$-\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} < i < \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \triangle$$

Lause 2.4. *Olkoon reaaliluku $a \geq 0$. Epäyhtälö $|r| \geq a$ on voimassa kaikilla $r \in \mathbb{R}$, jos ja vain jos $r \geq a$ tai $r \leq -a$.*

Todistus. Todistetaan väite ensin vasemmalta oikealle. Olkoon nyt $|r| \geq a$. Jos $r \geq 0$, niin $|r| = r \geq a$. Jos $r < 0$, niin on voimassa $|r| = -r \geq a$ ja edelleen $r \leq -a$. Väite on nyt siis todistettu vasemmalta oikealle.

Todistetaan väite seuraavaksi oikealta vasemmalle. Olkoon nyt $r \geq a$ tai $r \leq -a$. Jos $r \geq a$, niin on voimassa $r \geq a \geq 0$. Tämän nojalla $|r| = r \geq a$. Vastaavasti jos $r \leq -a$, niin on voimassa $r \leq -a \leq 0$ ja $|r| = -r \geq a$. Koska väite on nyt todistettu molempiin suuntiin, se on tosi. $\square$

Koska reaaliluvun r itseisarvo $|r| \geq 0$, epäyhtälö $|r| > a$, missä $a < 0$, on tosi kaikilla $r \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 22. Millä reaaliluvuilla p on voimassa epäyhtälö

$$|2p + 3| - 1 > \sqrt{2}?$$

Ratkaisu. Lisätään epäyhtälöön aluksi puolittain luku 1. Nyt epäyhtälö on muotoa

$$|2p + 3| \geq \sqrt{2} + 1.$$

Koska $\sqrt{2} + 1 \geq 0$, Lauseen 2.4 nojalla on voimassa $2p + 3 \geq \sqrt{2} + 1$ tai $2p + 3 \leq -(\sqrt{2} + 1) = -\sqrt{2} - 1$. Epäyhtälön $2p + 3 \geq \sqrt{2} + 1$ ratkaisu on $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$, ja epäyhtälön $2p + 3 \leq -\sqrt{2} - 1$ ratkaisu on $x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$. Alkuperäinen epäyhtälö on siis voimassa, kun $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$ tai $x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$. $\triangle$

Kaikilla $r, s \in \mathbb{R}$ on voimassa $|r+s| \leq |r| + |s|$. Tätä kolmioepäyhtälöksi kutsuttua itseisarvoepäyhtälön ominaisuutta käsitellään tarkemmin Lauseessa 4.1 sivulla 57. Lisäksi on voimassa $|r| \leq |s|$, jos ja vain jos $r^2 \leq s^2$. Tätä voidaan käyttää apuna ratkaistaessa epäyhtälöä, jossa on ainoastaan itseisarvolausekkeet epäyhtälön molemmin puolin.

Jos epäyhtälössä on useampia itseisarvolausekkeita ja lisäksi muita termejä, on epäyhtälö ratkaistava jakamalla se osiin. Itseisarvolauseke määritellään paloittain, eli lauseke on erimuotoinen eri reaalilukuväleillä. Tästä syystä epäyhtälöä tulee tarkastella erikseen kullakin välillä ottaen huomioon milloin kukin itseisarvojen sisällä olevista lausekkeista on positiivinen ja milloin negatiivinen.

Esimerkki 23. Millä reaalimuuttujan u arvoilla epäyhtälö

$$\frac{3|u+1| - |2u-3|}{3} < 3 \tag{5}$$

on voimassa?

Ratkaisu. Koska epäyhtälössä on nyt useampi itseisarvolauseke, epäyhtälöä tulee ratkastella osissa. Selvitetään ensiksi, millä muuttujan u arvoilla lausekkeet $u+1$ ja $2u-3$ ovat epänegatiivisia. Lauseke $u+1 \geq 0$, kun $u \geq -1$ ja $2u - 3 \geq 0$, kun $u \geq \frac{3}{2}$. Tarkastellaan nyt epäyhtälöä väleillä $u < -1$, $-1 \leq u < \frac{3}{2}$ ja $u \geq \frac{3}{2}$ ja sijoitetaan itseisarvolausekkeiden paikalle itseisarvomääritelmän mukaan lausekkeen sisältö joko positiivisena tai negatiivisena.

Kun $u < -1$, sekä $u+1 < 0$ että $2u-3 < 0$, joten alkuperäisestä epäyhtälöstä (5) saadaan

$$\frac{-3(u+1) + (2u-3)}{3} < 3$$

ja sieventämällä edelleen $-u < 15$, joten epäyhtälö on tutkitulla välillä voimassa, kun $-15 < u < -1$.

Kun $-1 \leq u < \frac{3}{2}$, $u+1 \geq 0$ ja $2u-3 < 0$. Epäyhtälöstä (5) saadaan täten

$$\frac{3(u+1) + (2u-3)}{3} < 3.$$

Sieventämällä epäyhtälöä saadaan $5u < 9$ ja edelleen $u < \frac{9}{5}$. Epäyhtälö on näin ollen voimassa tutkitulla välillä, kun $-1 \leq u < \frac{3}{2}$.

Kun $u \geq \frac{3}{2}$, on voimassa $u+1 \geq 0$ ja $2u-3 \geq 0$, joten epäyhtälöstä (5) saadaan

$$\frac{3(u+1) - (2u-3)}{3} < 3.$$

Sieventämällä epäyhtälöä saadaan $u < 3$, joten tutkitulla välillä epäyhtälö on voimassa, kun $\frac{3}{2} \leq u < 3$.

Yhdistämällä eri välien ratkaisut saadaan, että epäyhtälö (5) on voimassa, kun $-15 < u < 3$. $\triangle$

2.5 Trigonometrinen epäyhtälö

Käsitellään lyhyesti *trigonometrisiin funktioihin* liittyviä yhtälöitä ja epäyhtälöitä. Yleisimmät trigonometriset funktiot ovat *sini*, *kosini* ja *tangentti* sekä näiden käänteisfunktiot. Oletetaan, että lukija tuntee näiden funktioiden määritelmät ja tärkeimmät ominaisuudet.

Trigonometrinen yhtälö

Trigonometrisia funktioita sisältäviä yhtälöitä ratkaistaessa on tärkeää ottaa huomioon funktioiden jaksollisuus. Mikäli yhtälö on muotoa $s(\alpha) = t$, missä $s(\alpha)$ on jokin trigonometrinen funktio, tarkastellaan sitä ensin tietyllä välillä ja lisätään ratkaisuun funktiolle ominainen jakso. Esimerkiksi muotoa $\sin \alpha = t$ tai $\cos \alpha = t$, missä $t \in [-1, 1]$, olevat yhtälöt ratkaistaan ensin välillä $[0, 2\pi)$ ja ratkaisuun lisätään jakso 2π. Muotoa $\tan \alpha = t$, missä $t \in \mathbb{R}$, olevat yhtälöt ratkaistaan puolestaan ensin välillä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja ratkaisuun lisätään jakso π.

Jos yhtälö sisältää useamman kuin yhden trigonometrisen funktion, yhtälöä ratkaistaessa käytetään hyväksi trigonometristen funktioiden ominaisuuksia ja laskukaavoja, jotta yhtälö saadaan sievennettyä muotoon $s(\alpha) = t$. Tämän jälkeen yhtälö ratkaistaan normaalisti tarkasteluväli huomioon ottaen.

Esimerkki 24. Olkoon $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ ja $\cos \theta = -\frac{12}{13}$. Määritä $\sin 2\theta$.

Ratkaisu. Tarkastellaan yhtälöä $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ja sijoitetaan $\cos \theta = -\frac{12}{13}$. Nyt

$$\sin^2 \theta + \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

ja edelleen

$$\sin^2 \theta = \frac{25}{169},$$

mistä saadaan

$$\sin \theta = \pm \frac{5}{13}.$$

Koska $\sin \theta \geq 0$ välillä $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, on oltava $\sin \theta = \frac{5}{13}$.

Kaksinkertaisen kulman sini on $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$. Sijoittamalla tähän $\sin\theta = \frac{5}{13}$ ja $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ saadaan

$$\sin 2\theta = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}. \qquad \triangle$$

Trigonometrinen epäyhtälö

Trigonometrinen epäyhtälö voi sisältää joko yhden tai useamman trigonometrisen funktion. Epäyhtälöä ratkaistaessa on syytä kiinnittää erityistä huomiota siihen, millä muuttujan arvoilla tarkastelua tehdään. Lisäksi on hyvä muistaa, että funktiot $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ saavat arvoja ainoastaan välillä $[-1, 1]$.

Trigonometrisia epäyhtälöitä voidaan ratkaista siirtämällä ensin kaikki termit epäyhtälön toiselle puolelle ja sieventämällä termejä käyttäen trigonometristen funktioiden ominaisuuksia ja laskukaavoja. Tavoitteena on päästä tilanteeseen $s(\alpha) \mathbin{?} 0$, missä ? on jokin epäyhtälömerkki. Koska trigonometriset funktiot ovat jatkuvia kaikkialla määrittelyjoukossaan, voidaan laskea funktion $s(\alpha)$ nollakohdat ja tarkastella funktion arvoja nollakohtien, välin päätepisteiden ja mahdollisten pisteiden, joita ei ole määritelty, välillä.

Esimerkki 25. Millä muuttujan $\rho \in (0, \frac{\pi}{2})$ arvoilla epäyhtälö

$$2\sin^3\rho \geq \sin^2\rho$$

on tosi?

Ratkaisu. Siirretään ensin kaikki termit epäyhtälön vasemmalle puolelle, jolloin saadaan

$$2\sin^3\rho - \sin^2\rho \geq 0.$$

Tästä saadaan

$$2\sin\rho\sin^2\rho - \sin^2\rho \geq 0$$

ja edelleen

$$\sin^2\rho(2\sin\rho - 1) \geq 0.$$

Funktio $\sin^2\rho \geq 0$, kun $\rho \in (0, \frac{\pi}{2})$. Tulon nollasäännön nojalla epäyhtälö on tosi, kun $2\sin\rho - 1 \geq 0$. Ratkaistaan ensin $\sin\rho = \frac{1}{2}$ ja saadaan ratkaisut $\rho = \frac{\pi}{6}$ ja $\rho = \frac{5\pi}{6}$, joista vain $\rho = \frac{\pi}{6}$ on annetulla välillä $(0, \frac{\pi}{2})$. Funktio $\sin\rho$ on aidosti kasvava välillä $(0, \frac{\pi}{2})$, joten $\sin\rho \geq 0$, kun $\frac{\pi}{6} \leq \rho < \frac{\pi}{2}$.

Epäyhtälö on siis tosi, kun $\frac{\pi}{6} \leq \rho < \frac{\pi}{2}$. $\triangle$

2.6 Harjoitustehtäviä

Tehtävä 1. Ainejärjestö Deltan jäsenistö koostuu pääsääntöisesti Turun Yliopiston matemaattisten ja fysikaalisten tieteiden opiskeijoista. Vuonna 2017 ylemmän korkeakoulututkinnon suorittaneiden matemaattisten ja fysikaalisten tieteiden opiskeijoiden pääaineet jakautuivat siten, että valmistuneista 9 opiskelijan pääaineena oli fysiikka ja $\frac{1}{8}$ pääaineena oli astronomy tai tähtitiede. Lisäksi lopuista tutkinnon suorittaneista puolet oli sovelletun matematiikan tai teoreettisen fysiikan opiskelijoita, ja loput 13 valmistuivat pääaineenaan matematiikka. Kuinka monta Deltan jäsentä vähintään on suorittanut ylemmän korkeakoulututkinnon vuonna 2017, kun oletetaan, että kaikki edellä mainitut valmistuneet opiskelijat olivat Deltan jäseniä?

Tehtävä 2. Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että tällöin on voimassa epäyhtälö

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Vihje: $(a-1)^2 \geq 0$.

Tehtävä 3. Olkoot $p, q \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että tällöin on voimassa epäyhtälö

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2.$$

Tehtävä 4. Mitkä reaalimuuttujan w arvot toteuttavat sekä epäyhtälön

$$4 - w \leq 2(w-2) + 7$$

että epäyhtälön

$$w(5-w) > 2w?$$

Tehtävä 5. Määritä funktion $f(k) = 1 - k^2 + ak - 3k - \frac{a}{2}$ nollakohtien lukumäärä vakion a eri arvoilla.

Tehtävä 6. Millä reaalimuuttujan p arvoilla juurilauseke

$$\sqrt{p^5 - 8p^3 + 4p}$$

on määritelty?

Tehtävä 7. Olkoon $g(x) = x^4 - x$. Millä muuttujan x arvoilla $g(x) \leq 0$, kun $x \in \mathbb{R}_+$?

Tehtävä 8. Millä muuttujan $t \in \mathbb{R}_-$ arvoilla epäyhtälö

$$4 + 3t + t^4 \geq \frac{3}{2}t^3 + 11t^2$$

toteutuu?

Tehtävä 9. (AMC 2004, A15) Olkoon $-4 \leq x \leq -2$ ja $2 \leq y \leq 4$. Mikä on lausekkeen
$$\frac{x+y}{x}$$
suurin mahdollinen arvo?

Tehtävä 10. Millä muuttujan x arvoilla kaksoisepäyhtälö
$$-17 < 2x - 13 \leq 6 - 5x$$
on voimassa?

Tehtävä 11. Ratkaise epäyhtälö
$$\frac{x}{2} + \frac{4}{x} \leq x.$$

Tehtävä 12. Mitkä reaalimuuttujan p arvot toteuttavat epäyhtälön
$$\frac{2p-6}{p-3} - \frac{1}{p^2-1} < 1?$$

Tehtävä 13. Mitkä muuttujan $m \in \mathbb{R}$ arvot toteuttavat epäyhtälön
$$\left|\frac{2}{m+1}\right| < \left|\frac{3}{2m-5}\right|?$$

Tehtävä 14. Millä reaalimuuttujan t arvoilla epäyhtälö
$$|t-\sqrt{2}||t^2-1| \geq |t-\sqrt{2}|$$
on voimassa?

Tehtävä 15. Olkoon
$$|s| \geq |3s-2| - |s-1|.$$
Mitä arvoja muuttuja $s \in \mathbb{R}$ voi saada?

Tehtävä 16. Millä muuttujan μ arvoilla epäyhtälö
$$\cos\mu < \sin 2\mu$$
on tosi?

Tehtävä 17. Mitkä muuttujan ϕ arvot toteuttavat epäyhtälön
$$\frac{\tan\phi + 1}{\tan\phi - 1} \leq 0,$$
kun $\phi \in [0, 2\pi)$?

3 Klassisia epäyhtälöitä

"And don't worry about the bits you can't understand. Sit back and allow the words to wash around you, like music."
— Roald Dahl, *Matilda*

Tässä luvussa esitellään ja todistetaan muutamia klassisimpia epäyhtälöitä. Jokaisen epäyhtälön historiasta ja käyttökohteista kerrotaan muutamalla lauseella, ja kunkin epäyhtälön käytöstä on heti epäyhtälön todistuksen jälkeen esimerkki. Ensiksi tarkastellaan Cauchy–Schwarzin epäyhtälöä ja keskiarvoepäyhtälöä, josta käytetään nimitystä AGHK-epäyhtälö. Näiden jälkeen tulevat Hölderin epäyhtälö, Minkowskin epäyhtälö, suuruusjärjestysepäyhtälö sekä Tšebyšovin summaepäyhtälö. Luvun loppuun on koottu epäyhtälöihin liittyviä harjoitustehtäviä.

3.1 Cauchy–Schwarzin epäyhtälö

Seuraavalla epäyhtälöllä on monta nimeä: Cauchyn epäyhtälö, Schwarzin epäyhtälö, Cauchy–Schwarzin epäyhtälö, Bunjakovski–Schwarzin epäyhtälö ja Cauchy–Bunjakovski–Schwarzin epäyhtälö, joiden lisäksi muitakin kombinaatioita nimistä Cauchy, Schwarz ja Bunjakovski on varmasti löydettävissä. Epäyhtälön on ensimmäisenä määritellyt ranskalainen matemaatikko Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) muistiinpanossaan, joka ilmestyi kirjassa *Cours d'analyse: Analyse Algébrique* [7, s. 373–375] vuonna 1821. Viktor Jakovlevitš Bunjakovski (1804–1889), venäläinen matemaatikko, yleisti epäyhtälön koskemaan integraaleja vuonna 1859 [6]. Bunjakovskin todistus ei ollut yleisesti tunnettu, ja vuonna 1885 myös saksalainen matemaatikko Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) todisti epäyhtälön integraalimuodon [40, s. 315–362]. Epäyhtälön vaiheista on tarkemmin kirjoittanut Steele kirjassaan *The Cauchy–Schwarz Master Class* [44].

Cauchy–Schwarzin epäyhtälöllä on erittäin paljon käyttökohteita niin sarjojen ylä- ja alarajojen tarkastelussa, integraalilaskennassa kuin vektorilaskennassa. Cauchy–Schwarzin epäyhtälö on siksikin erittäin tärkeä, että sen avulla voidaan todistaa lukuisia muita epäyhtälöitä. Myöhemmin, Lemmassa 3.5, todistetaan aritmeettis–kontraharminen epäyhtälö Cauchy–Schwarzin epäyhtälöä käyttäen.

Lause 3.1 (Cauchy–Schwarzin epäyhtälö). *Olkoot* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *ja*

$b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. *Tällöin on voimassa*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \tag{6}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos on olemassa sellainen luku $s \in \mathbb{R}$, että $a_k = s b_k$ kaikilla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Todistus. Todistus pohjautuu Halmetojan [14, s. 70–72] ja Dragomirin [12, s. 9–10] todistuksiin. Määritellään polynomifunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k)^2.$$

Oletetaan, että vähintään yksi luvuista $b_1, b_2, \ldots, b_n$ on nollasta eroava, sillä jos $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, lause on triviaalisti voimassa.
Nyt kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + 2\lambda a_k b_k + \lambda^2 b_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \end{aligned}$$

Koska epäyhtälö $f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k)^2 \geq 0$ on selvästi aina tosi, toisen asteen polynomifunktio $f(\lambda) = \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ on epänegatiivinen kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$. Näin ollen funktiolla $f(\lambda)$ on enintään yksi nollakohta, mistä seuraa, että diskriminantti

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq 0.$$

Siirtämällä toinen termi epäyhtälön oikealle puolella ja jakamalla puolittain luvulla 4 saadaan

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

joten epäyhtälö (6) on tosi.

Todistetaan lopuksi yhtäsuuruusehto. Funktion $f(\lambda)$ diskrimininantti

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0, \tag{7}$$

jos ja vain jos funktiolla $f(\lambda)$ on tarkalleen yksi nollakohta. Nyt

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + \lambda b_k)^2 = 0,$$

jos ja vain jos $a_k + \lambda b_k = 0$ eli $a_k = -\lambda b_k$. Olkoon nyt $s = -\lambda$. Yhtälöstä (7) saatava yhtäsuuruus

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

on täten voimassa, jos ja vain jos on sellainen luku $s \in \mathbb{R}$, että $a_k = sb_k$ kaikilla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. □

Esimerkki 26. Olkoon $a^2+b^2+c^2 = 1$. Määritä yläraja lausekkeelle $7a+5b+c$ käyttäen Cauchy–Schwarzin epäyhtälöä.

Ratkaisu. Cauchy–Schwarzin epäyhtälön (Lause 3.1) nojalla on voimassa

$$(7a + 5b + c)^2 \leq (7^2 + 5^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Sievennetään epäyhtälön oikeaa puolta ja sijoitetaan $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, jolloin saadaan

$$(7a + 5b + c)^2 \leq 75 \cdot 1 = 75.$$

Otetaan epäyhtälöstä puolittain neliöjuuri ja saadaan

$$7a + 5b + c \leq \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Lausekkeelle $7a + 5b + c$ saatiin täten yläraja $5\sqrt{3}$. △

Esitellään Cauchy–Schwarzin epäyhtälön käyttöä myös toisella, lähteestä [54] löytyvällä, esimerkillä.

Esimerkki 27. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellaisia reaalilukuja, että $a_1+a_2+\cdots+a_n = 1$. Osoita, että täten on voimassa

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Ratkaisu. Käytetään Cauchy–Schwarzin epäyhtälöä (Lause 3.1).

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2, \quad (8)$$

missä $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$. Nyt epäyhtälö (8) on muotoa

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) \geq (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 1)$$

ja edelleen

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)n \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n). \quad (9)$$

Ehdon $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ nojalla saadaan epäyhtälöstä (9) edelleen

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)n \geq 1.$$

Jaetaan epäyhtälö puolittain luvulla n. Nyt

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{1}{n},$$

mikä on haluttu epäyhtälö. △

3.2 AGHK-epäyhtälö

Positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ määritellään

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \qquad \text{(Harmoninen keskiarvo)}$$

$$G = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \qquad \text{(Geometrinen keskiarvo)}$$

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \text{ ja} \qquad \text{(Aritmeettinen keskiarvo)}$$

$$K = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}. \qquad \text{(Kontraharmoninen keskiarvo)}$$

Tutkitaan seuraavaksi epäyhtälöitä, jotka koskevat edellä mainittuja keskiarvoja.

Ensiksi esitellään yksi tunnetuimmista ja käytetyimmistä epäyhtälöistä: *aritmeettista keskiarvoa* $A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ ja *geometrista keskiarvoa* $G = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ koskeva epäyhtälö, josta käytetään nyt myös lyhennettyä nimeä AG-epäyhtälö. Euklides on todistanut [17, s. 185–186] epäyhtälön $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ kahdelle positiiviselle luvulle, vaikkakin hänen todistuksensa käsitteli varsinaisesti suuruuksien suhdetta. Cauchy todisti ensimmäisenä epäyhtälön kaikille positiivisille reaaliluvuille. Tämä todistus, jonka Cauchy tekee käyttäen induktiota, löytyy hänen vuonna 1821 ilmestyneestä teoksestaan *Cours d'analyse: Analyse Algébrique* [7, s. 375–377]. Aritmeettis–geometrinen epäyhtälölle löytyy lukuisia eri todistuksia, joista 52 löytyy kirjasta [5, s. 56–89]. Seuraavaksi esitettävä todistus seuraa kirjasta [2, s. 54–59] löytyvää todistusta.

Lemma 3.2 (Aritmeettis–geometrinen epäyhtälö). *Positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on voimassa*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \tag{10}$$

missä yhtäsuuruus pätee, jos ja vain jos $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Todistus. Todistetaan epäyhtälö (10) ensiksi tapauksessa $n = 2^m$, minkä jälkeen jatketaan todistamalla epäyhtälö yleisessä tapauksessa.

Tapaus $n = 1$ on triviaali. Tarkastellaan epäyhtälöä (10) , kun $n = 2$. Saadaan

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2}{2} &\geq \sqrt{a_1 a_2} \qquad (11) \\ \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} + \sqrt{a_1 a_2} &\geq \sqrt{a_1 a_2}. \end{aligned}$$

Vähentämällä puolittain $\sqrt{a_1 a_2}$ saadaan $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$, mikä on tosi, kun muuttujat a_1, a_2 ovat epänegatiivisia. Lisäksi $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = 0$, jos ja vain jos $a_1 = a_2$. Tapauksessa $n = 2$ epäyhtälö (10) on siis voimassa.

Todistetaan epäyhtälö seuraavaksi tapaukselle $n = 4$. Sijoitetaan epäyhtälöön (10) $a_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$ ja $a_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}$, jolloin saadaan

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)}.$$

Toistetaan epäyhtälö (11) oikean puolen juuren sisällä ja saadaan edelleen

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} &\geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)} \\ &\geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} \\ &= \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}. \end{aligned}$$

Toistamalla tätä sijoitusmenetelmää voidaan todistaa epäyhtälö (10), kun $n = 2^m$ ja muuttuja m on epänegatiivinen kokonaisluku.

Seuraavaksi tulee osoittaa, että epäyhtälö on voimassa myös kaikilla muilla positiivisilla reaaliluvuilla. Tarkoituksena on osoittaa, että epäyhtälön ollessa voimassa muuttujalle n, se on yhtä lailla voimassa muuttujalle $n-1$.

Sijoitetaan epäyhtälöön (10) $a_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$, missä $n \geq 2$. Muut muuttujat epäyhtälössä (10) säilyvät muuttumattomina. Nyt epäyhtälöstä (10) saadaan

$$\begin{aligned} &\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n} \\ &\geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \sqrt[n]{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Todistetaan seuraavaksi, että

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}. \tag{13}$$

Tutkitaan ensiksi lauseketta $Q+\frac{Q}{n-1}$, jolle on voimassa

$$Q+\frac{Q}{n-1} = Q\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right) = Q\frac{n}{n-1} = \frac{nQ}{n-1}.$$

Jakamalla saatu yhtälö

$$Q+\frac{Q}{n-1} = \frac{nQ}{n-1}$$

puolittain positiivisella muuttujalla n saadaan

$$\frac{Q+\frac{Q}{n-1}}{n} = \frac{Q}{n-1}.$$

Sijoittamalla tähän $Q = a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ saadaan yhtälö (13), joka on täten tosi.

Sijoitetaan seuraavaksi yhtälö (13) epäyhtälöön (12). Merkitään $R = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$ ja $S = a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, jolloin saadaan

$$R \geq S^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1}{n}}.$$

Tämä epäyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{R}{R^{\frac{1}{n}}} \geq S^{\frac{1}{n}}$$

ja edelleen

$$R^{\frac{n-1}{n}} \geq S^{\frac{1}{n}}.$$

Korottamalla epäyhtälö puolittain potenssiin $\frac{n}{n-1}$ saadaan

$$\left(R^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} \geq \left(S^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}},$$

josta seuraa

$$R \geq S^{\frac{1}{n-1}}.$$

Epäyhtälö (12) on nyt muotoa

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}},$$

mikä on haluttu tulos.

Nämä kaksi saatua tulosta voidaan yhdistää, jolloin saadaan todistettua epäyhtälö (10) kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 1$. □

Esimerkki 28. Suorakulmion piiri on vakio $p = 2x + 2y$. Osoita, että suorakulmion pinta-ala A on mahdollisimman suuri silloin, kun suorakulmio on neliö.

Ratkaisu. Suorakulmion suurin arvo saadaan AG-epäyhtälön avulla. Epäyhtälöstä

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

saadaan korottamalla molemmat puolet neliöön

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

missä $xy = A$. Sijoitetaan saatuun epäyhtälöön $y = \frac{p}{2} - x$. Nyt

$$A \leq \left(\frac{x + \left(\frac{p}{2} - x\right)}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

joten pinta-ala A on aina pienempi kuin $\left(\frac{p}{4}\right)^2$. Yhtäsuuruus pätee, kun $x = y$, jolloin ehdosta $p = 2x+2y = 2x+2x$ saadaan $x = \frac{p}{4}$. Pinta-ala saa näin ollen suurimman arvonsa, $A = \left(\frac{p}{4}\right)^2$, kun $x = y = \frac{p}{4}$ eli suorakulmio on neliö. △

Esimerkki 29. Osoita, että epäyhtälö

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \tag{14}$$

on voimassa positiivisille reaaliluvuille a, b ja c.

Ratkaisu. Käytetään AG-epäyhtälöä epäyhtälön (14) vasemman puolen kahteen ensimmäiseen termiin $\frac{a^2}{b^2}$ ja $\frac{b^2}{c^2}$. Nyt

$$\frac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2}{b^2 \cdot c^2}},$$

mistä saadaan sieventämällä

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = 2\frac{a}{c}. \tag{15}$$

Epäyhtälön (14) vasemman puolen termeistä saadaan vastaavasti myös

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = 2\frac{b}{a} \tag{16}$$

ja

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{b^2}} = 2\frac{c}{b}. \tag{17}$$

Lasketaan epäyhtälöt (15), (16) ja (17) yhteen. Saadaan

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2} \geq 2\frac{a}{c}+2\frac{b}{a}+2\frac{c}{b},$$

josta sieventämällä ja jakamalla luvulla 2 saadaan edelleen

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

Tämä on alkuperäinen epäyhtälö, joka on näin ollen tosi.

Osoitetaan lopuksi, että aritmeettis–geometrista epäyhtälöä ei voida soveltaa suoraan annettuun epäyhtälöön. Käytetään AG-epäyhtälöä ensin epäyhtälön (14) vasemmalle puolelle, jolloin saadaan

$$\frac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^2 \cdot c^2 \cdot a^2}}$$

ja sieventämällä edelleen

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq 1 \cdot 3 = 3.$$

Epäyhtälön (14) oikealle puolelle saadaan vastaavasti AG-epäyhtälöä käyttämällä

$$\frac{\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{b \cdot c \cdot a}{a \cdot b \cdot c}}.$$

Tämä sievenee edelleen muotoon

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 1 \cdot 3 = 3.$$

Edellä saatujen tulosten perusteella ei voida osoittaa, että epäyhtälö (14) olisi tosi. $\triangle$

Seuraavaksi esitellään geometrista keskiarvoa $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ ja *harmonista keskiarvoa* $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$ tarkasteleva GH-epäyhtälö. Epäyhtälön todistus pohjautuu kirjasta [30, s. 27–30] löytyvään todistukseen.

Lemma 3.3 (Geometris–harmoninen epäyhtälö)**.** *Positiivisille reaaliluvuille* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *on voimassa*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \tag{18}$$

Todistus. Epäyhtälön todistus seuraa helposti AG-epäyhtälöstä (10). AG-epäyhtälön mukaan positiivisille kokonaisluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on voimassa

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Koska $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, niin myös niiden käänteisluvut $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n} \in \mathbb{R}_+$, jolloin Lemman 3.2 ehdot täyttyvät. Käyttämällä AG-epäyhtälöä (10) saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} &\geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}},\end{aligned}$$

mistä ottamalla käänteisluvut puolittain saadaan edelleen

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$ $\square$

Esimerkki 30. Osoita, että epäyhtälö

$$\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 3$$

on voimassa, kun reaaliluvut $x, y, z > 0$.

Ratkaisu. Ehdon $x, y, z > 0$ nojalla on voimassa myös $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z} > 0$. Käytetään geometris–harmonista epäyhtälöä (Lemma 3.3) termeille $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ja $\frac{1}{z}$. Epäyhtälö on muotoa

$$\frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{x}} + \frac{1}{\frac{1}{y}} + \frac{1}{\frac{1}{z}}} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}}.$$

Sievennetään epäyhtälöä, jolloin

$$\frac{3}{x+y+z} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}.$$

Koska x, y, z>0, saadaan

$$\frac{3}{x+y+z} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Kerrotaan epäyhtälö puolittain summalla $x + y + z > 0$. Nyt

$$3 \leq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}},$$

mikä on haluttu lopputulos. △

Määritellään myös *aritmeettista keskiarvoa* $A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ ja *harmonista keskiarvoa* $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$ koskeva epäyhtälö, AH-epäyhtälö.

Seuraus 3.4 (Artimeettis–harmoninen epäyhtälö)**.** *Positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on voimassa*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \tag{19}$$

Todistus. Epäyhtälö seuraa Lemmoista 3.2 ja 3.3. □

Esitellään ja todistetaan AK-epäyhtälö aritmeettiselle keskiarvolle $A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ ja *kontraharmoniselle keskiarvolle* $K = \frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$. Epäyhtälön todistus on yksityiskohtaisempi versio Halmetojan [14, s. 3–4] todistuksesta.

Lemma 3.5 (Aritmeettis–kontraharmoninen epäyhtälö)**.** *Positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on voimassa*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}. \tag{20}$$

Todistus. Sovelletaan Cauchy–Schwarzin epäyhtälöä (6). Sijoitetaan $b_k = 1$ kaikilla $k = 1, \ldots, n$ epäyhtälöön (6), jolloin saadaan

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} 1^2$$

ja edelleen

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Jakamalla epäyhtälö puolittain summalausekkeella $\sum_{k=1}^{n} a_k$ saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq n \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

Jaetaan epäyhtälö edelleen puolittain muuttujalla n ja saadaan

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k},$$

mikä on epäyhtälö (20). □

Esimerkki 31. Olkoot $x, y, z > 0$ reaalilukuja. Osoita, että tällöin on voimassa epäyhtälö

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2} \leq 3.$$

Ratkaisu. Sijoitetaan aritmeettis–kontraharmoniseen epäyhtälöön (Lemma 3.5) positiiviset muuttujat x, y ja z. Epäyhtälö on muotoa

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}.$$

Epäyhtälön molemman puolen nimittäjät ovat positiivisia, joten kerrottaessa epäyhtälö puolittain positiivisella termillä $3(x+y+z)$ saadaan

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2).$$

Jaetaan lopuksi positiivisella summalla $(x^2+y^2+z^2)$ ja saadaan

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2} \leq 3. \qquad \triangle$$

Lopulta Lemmoista 3.2, 3.3 ja 3.5 yhdistämällä saadaan monikäyttöinen ja erittäin hyödyllinen epäyhtälö, AGHK-epäyhtälö.

Lause 3.6 (AGHK-epäyhtälö)**.** *Positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ on voimassa*

$$H \leq G \leq A \leq K, \tag{21}$$

missä

$$\begin{aligned} H &= \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}, && \text{(Harmoninen keskiarvo)} \\ G &= \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{n}}, && \text{(Geometrinen keskiarvo)} \\ A &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ ja} && \text{(Aritmeettinen keskiarvo)} \\ K &= \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k}. && \text{(Kontraharmoninen keskiarvo)} \end{aligned}$$

Todistus. Seuraa Lemmoista 3.2, 3.3 ja 3.5. □

3.3 Hölderin epäyhtälö

Esitellään ensin painotetuille keskiarvoille määritelty AG-epäyhtälö, jota käytetään todistettaessa *Hölderin epäyhtälöä.*

Lemma 3.7 (Painotettu aritmeettis–geometrinen epäyhtälö)**.** *Epänegatiivisille reaaliluvuille $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ja positiivisille reaaliluvuille $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, joiden summa $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, on voimassa*

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \cdots u_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n. \tag{22}$$

Todistus. Epäyhtälö voidaan todistaa käyttäen Jensenin epäyhtälöä (Lause 4.13) konkaaville funktiolle $f(x) = \ln x$. Jensenin epäyhtälö esitellään vasta myöhemmin, joten sivuutetaan tarkempi todistus ja jätetään se lukijalle. □

Hölderin epäyhtälön on sen nimestä huolimatta todistanut ensimmäisenä englantilainen matemaatikko Leonard James Rogers (1862–1933). Rogersin todistus julkaistiin vuonna 1888 ilmestyneessä artikkelissa [36]. Vuotta myöhemmin, vuonna 1889, saksalainen matemaatikko Otto Hölder (1859–1937) todisti [19] saman, vaikkakin eri muodossa olevan, epäyhtälön. Nykyisessä muodossaan epäyhtälön on ensimmäisenä esittänyt unkarilainen matemaatikko Frigyes Riesz (1880–1956) [35, s. 455–457]. Epäyhtälöä, joka on tullut tunnetuksi Hölderin epäyhtälönä, voitaisiin tämän perusteella kutsua myös esimerkiksi nimellä Rogers–Hölder–Rieszin epäyhtälö. Hölderin epäyhtälön vaiheista on tarkemmin kirjoitettu teoksissa [25] ja [44].

Hölderin epäyhtälöä käytetään arvioimaan summalausekkeita. Esimerkiksi Minkowskin epäyhtälö (Lause 3.9) voidaan todistaa Hölderin epäyhtälön avulla.

Lause 3.8 (Hölderin epäyhtälö). *Olkoot $p, q > 1$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Kaikilla epänegatiivisilla luvuilla $a_1, \ldots, a_n$ ja $b_1, \ldots, b_n$ on voimassa*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{23}$$

Seuraavaksi läpikäytävä todistus perustuu kirjoissa [30, s. 50–51] ja [44, s. 136] oleviin todistuksiin.

Todistus. Aloitetaan tutkimalla painotettua aritmeettis–geometrista epäyhtälöä (Lemma 3.7) tapauksessa $n = 2$. Epäyhtälö (22) on nyt muotoa

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \leq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2.$$

Sijoitetaan edelliseen $a = u_1^{\alpha_1}$, $b = u_2^{\alpha_2}$, $\frac{1}{p} = \alpha_1$ ja $\frac{1}{q} = \alpha_2$, jolloin saadaan edelleen

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q. \tag{24}$$

Jatketaan todistusta sijoittamalla epäyhtälöön (24) luvut $a = \frac{a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}$ ja $b = \frac{b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}$, missä $k = 1, 2, \ldots, n$. Lasketaan saadut epäyhtälöt yhteen, jolloin niiden summa on epäyhtälö

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{(\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} b_k^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{\left((\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}}\right)^p} + \frac{1}{q} \frac{b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q}{\left((\sum_{k=1}^{n} b_k^q)^{\frac{1}{q}}\right)^q},$$

mikä sievenee muotoon

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{(\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} b_k^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q},$$

ja edelleen muotoon

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{(\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} b_k^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{25}$$

Kertomalla epäyhtälö (25) puolittain vasemman puolen jakajalla, saadaan haluttu epäyhtälö

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad \square$$

Hölderin epäyhtälö tapauksessa $p = q = 2$ tunnetaan Cauchy–Schwarzin epäyhtälönä (Lause 3.1).

Esimerkki 32. Osoita, että positiivisille reaaliluvuille a, b ja c on voimassa epäyhtälö

$$a^4 + b^4 + c^4 \ge a^3b + b^3c + c^3a.$$

Ratkaisu. Sijoitetaan Hölderin epäyhtälöön (23) luvut $a_1 = a^3$, $a_2 = b^3$, $a_3 = c^3$, $b_1 = b$, $b_2 = c$ ja $b_3 = a$, jolloin saadaan

$$a^3b + b^3c + c^3a \le \left(\left(a^3\right)^p + \left(b^3\right)^p + \left(c^3\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b^q + c^q + a^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Määritellään muuttujat p ja q siten, että epäyhtälön oikealla puolella olevien muuttujien eksponentiksi saadaan luku 4. Tämä toteutuu, kun $p = \frac{4}{3}$ ja $q = 4$, jolloin $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, mikä täyttää ehdot Hölderin epäyhtälön (Lause 3.8) toteutumiseen. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} a^3b + b^3c + c^3a &\le \left(\left(a^3\right)^{\frac{4}{3}} + \left(b^3\right)^{\frac{4}{3}} + \left(c^3\right)^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \left(b^4 + c^4 + a^4\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(a^4 + b^4 + c^4\right)^{\frac{3}{4}} \left(a^4 + b^4 + c^4\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= a^4 + b^4 + c^4. \qquad \triangle \end{aligned}$$

3.4 Minkowskin epäyhtälö

Minkowskin epäyhtälö on yleistys Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kolmioepäyhtälölle

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2},$$

missä $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Saksalaisen matemaatikon Hermann Minkowskin (1864–1909) mukaan nimetty epäyhtälö esiintyi ensimmäisen kerran Minkowskin teoksessa *Geometrie der Zahlen* vuonna 1896 [50, s. 205].

Lause 3.9 (Minkowskin epäyhtälö)**.** *Olkoon reaaliluku $r \ge 1$. Olkoot lisäksi epänegatiiviset reaaliluvut $a_1, \ldots, a_n$ ja $b_1, \ldots, b_n$. Tällöin on voimassa*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^r\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{26}$$

Todistus. Todistus seuraa Mitrinovićin todistusta [30, s. 55]. Kirjoitetaan ensiksi epäyhtälön vasemman puolen summalauseke muodossa

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r=\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{r-1}+\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{r-1} \tag{27}$$

ja sovelletaan Lauseessa 3.8 olevaa Hölderin epäyhtälöä (23) saadun yhtälön vasemman puolen summalausekkeisiin. Näin saadaan epäyhtälöt

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{r-1}\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(r-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ja

$$\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{r-1}\le\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(r-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lauseen 3.8 ehtojen mukaan $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$, mistä saadaan $q=\frac{r}{r-1}$. Tällä sijoituksella ja ylläolevia epäyhtälöitä käyttäen epäyhtälö (27) saadaan muotoon

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r &\le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{r}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\quad+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{r}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &=\left(\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{r}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Jakamalla epäyhtälö puolittain oikean puolen jälkimmäisellä tulontekijällä ja käyttämällä aiemmin mainittua sijoitusta $\frac{1}{q}=\frac{r-1}{r}$ saadaan

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right)^{\frac{1}{r}}\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

mikä on alkuperäinen epäyhtälö (26). □

Esimerkki 33. Osoita, että positiivisille reaaliluvuille a ja b on voimassa

$$\sqrt{3a^2+(b+a)^2}+\sqrt{3b^2+(a+b)^2}\ge\sqrt{7}(a+b). \tag{28}$$

Ratkaisu. Sijoitetaan Minkowskin epäyhtälöön

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \tag{29}$$

positiiviset muuttujat $a_1 = \sqrt{3}a$, $a_2 = b + a$, $b_1 = \sqrt{3}b$ ja $b_2 = a + b$. Nyt epäyhtälön (28) vasemmasta puolesta saadaan epäyhtälöä (29) käyttäen

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3a^2 + (b + a)^2} + \sqrt{3b^2 + (a + b)^2} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{3}a\right)^2 + (b + a)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}b\right)^2 + (a + b)^2} \\
&\geq \sqrt{\left(\sqrt{3}a + \sqrt{3}b\right)^2 + ((b + a) + (a + b))^2} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{3}(a + b)\right)^2 + (2(a + b))^2} \\
&= \sqrt{3(a + b)^2 + 4(a + b)^2} \\
&= \sqrt{7}(a + b).
\end{aligned}$$

Epäyhtälö

$$\sqrt{3a^2 + (b + a)^2} + \sqrt{3b^2 + (a + b)^2} \geq \sqrt{7}(a + b),$$

on siis voimassa positiivisille reaaliluvuille a ja b. △

3.5 Suuruusjärjestysepäyhtälö

Suuruusjärjestysepäyhtälön idea on yksinkertaisinta selittää esimerkiksi rahan avulla. Oletetaan, että pöydällä on 5 euron, 20 euron ja 100 euron seteleitä, ja niitä saa ottaa yhteensä kymmenen kappaletta niin, että ensimmäistä seteliä saa ottaa kaksi kappaletta, toista seteliä kolme kappaletta ja kolmatta seteliä viisi kappaletta. Suurimman rahamäärän saa ottamalla aina mahdollisimman vähän pienempiarvoisia seteleitä ja mahdollisimman paljon suurempiarvoisia seteleitä, eli tässä tapauksessa kaksi 5 euron, kolme 20 euron ja viisi 100 euron seteliä, jolloin rahasumma on 570 euroa. Vastaavasti pienimmän summan, 285 euroa, saa ottamalla setelit päinvastaisessa järjestyksessä. Suuruusjärjestysepäyhtälön avulla voidaan siis laskea suurin ja pienin arvo kahden joukon alkioista muodostettujen parien tulojen summalle.

Määritellään aluksi permutaatiofunktio $\sigma(k)$: Muuttujan k käydessä läpi arvot $1, 2, \ldots, n$ permutaatiofunktio $\sigma(k)$ on sellainen, että se saa jokaisen arvoista $1, 2, \ldots, n$ tarkalleen yhden kerran. [15, s. 260]

Lause 3.10 (Suuruusjärjestysepäyhtälö). *Jos reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pätee $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ja $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ ja lisäksi $b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots, b_{\sigma(n)}$ on jokin lukujen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ permutaatio, niin on voimassa*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k. \tag{30}$$

Todistus. Todistus seuraa teoksesta [49, s. 26] löytyvää todistusta. Todistetaan oikeanpuoleinen epäyhtälö. Tutkitaan aluksi tapausta $n = 2$. Olkoot reaaliluvut $a_1 \leq a_2$ ja $b_1 \leq b_2$. Nyt epäyhtälö $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geq 0$ on selvästi voimassa, sillä kumpikin vasemman puolen tulontekijöistä on epänegatiivinen. Kerrotaan vasen puoli auki ja siirretään termejä epäyhtälön toiselle puolelle, jolloin saadaan

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

Tämä on haluttu suuruusjärjestysepäyhtälö, joten lause on voimassa ainakin tapauksessa $n = 2$.

Tutkitaan seuraavaksi yleistä tapausta. Olkoot $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ja $b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots, b_{\sigma(n)}$ lukujen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sellainen permutaatio, että summa $S = a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)}$ saa suurimman arvonsa. Oletetaan, että $i < j$ ja $b_{\sigma(i)} > b_{\sigma(j)}$ jollakin indeksien $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ arvoilla. Tapauksen $n = 2$ nojalla nyt on voimassa $a_i b_{\sigma(j)} + a_j b_{\sigma(i)} \geq a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)}$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että summan S arvo on mahdollisimman suuri. Täten on oltava $a_i = a_j$ kaikilla $i < j$, joille $b_{\sigma(i)} > b_{\sigma(j)}$ tai vaihtoehtoisesti $b_{\sigma(1)} \leq b_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq b_{\sigma(n)}$, jotta summan S arvo on maksimoitu. Ensimmäisessä tapauksessa lukujen $b_{\sigma(i)}$ ja $b_{\sigma(j)}$ järjestystä voidaan vaihtaa, jolloin myös jälkimmäinen ehto $b_{\sigma(1)} \leq b_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq b_{\sigma(n)}$ on voimassa. Näin ollen ehto $b_{\sigma(1)} \leq b_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq b_{\sigma(n)}$ on riittävä ja summa S saa suurimman mahdollisen arvonsa.

Vasemmanpuoleinen epäyhtälö todistetaan vastaavasti sijoittamalla permutaatiofunktion $b_{\sigma(k)}$ sijasta $-b_{\sigma(k)}$. □

Esimerkki 34. Osoita, että luvuille $0 \leq a \leq b \leq c$ on voimassa

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 b + b^3 c + c^3 a.$$

Ratkaisu. Joukkojen $\{a^3, b^3, c^3\}$ ja $\{a, b, c\}$ jäsenet on järjestetty samansuuntaisesti, eli kummassakin joukossa alkiot suurenevat. Nyt voidaan käyttää suuruusjärjestysepäyhtälöä (Lause 3.10), josta saadaan

$$a^3 a + b^3 b + c^3 c \geq a^3 b + b^3 c + c^3 a$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälön

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a$$

kanssa. △

Esimerkki 35. Olkoot x, y, $z \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että Nesbittin epäyhtälö (Lause 4.4)

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

on voimassa.

Ratkaisu. Todistus seuraa kirjasta [26, s. 16] löytyvää Nesbittin epäyhtälön todistusta. Todistetaan epäyhtälö suuruusjärjestysepäyhtälön (Lause 3.10) avulla. Jotta suuruusjärjestyspäyhtälöä voidaan käyttää, muuttujille on määriteltävä suuruusjärjestys. Epäyhtälö on symmetrinen muuttujien x, y ja z suhteen, joten voidaan määritellä $x \geq y \geq z$. Täten voimassa $x + y \geq z + x \geq y + z$, josta saadaan edelleen $\frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{z+x} \geq \frac{1}{x+y}$. Joukkojen $\{x, y, z\}$ ja $\{\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}\}$ jäsenet on nyt järjestetty samansuuntaisesti laskevaan järjestykseen. Suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla näille joukoille on voimassa epäyhtälöt

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} + \frac{x}{x+y}$$

ja

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} + \frac{y}{x+y}.$$

Lasketaan saadut epäyhtälöt yhteen. Nyt

$$2\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right) \geq \frac{y+z}{y+z} + \frac{z+x}{z+x} + \frac{x+y}{x+y}.$$

Sieventämällä saadaan edelleen

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2},$$

mikä on haluttu tulos. △

3.6 Tšebyšovin summaepäyhtälö

Seuraavaksi tarkasteltavasta epäyhtälöstä käytetään nimitystä *Tšebyšovin summaepäyhtälö* erottamaan se todennäköisyyslaskennassa yleisesti esiintyvä Tšebyšovin epäyhtälöstä. Ensimmäinen maininta venäläisen matemaatikon Pafnuti Lvovitš Tšebyšovin (1821–1894) mukaan nimetystä epäyhtälöstä löytyy Tšebyšovin muistiinpanoista [47] vuodelta 1882. Epäyhtälön todistuksen Tšebyšov julkaisi [48] seuraavana vuonna. Summaepäyhtälöstä on hyötyä esimerkiksi muiden epäyhtälöiden todistamisessa, vaikka sen käyttöä rajoittaakin toisinaan ehto muuttujien suuruusjärjestyksestä.

Lause 3.11 (Tšebyšovin summaepäyhtälö)**.** *Jos* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ *ja* $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$*, on voimassa*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k. \tag{31}$$

Todistus. Todistus seuraa Vaderlindin todistusta [49, s. 25–26]. Tarkastellaan aluksi summalauseketta

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_k b_k - a_k b_l) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} a_k b_k - \sum_{l=1}^{n} a_k b_l\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(n a_k b_k - a_k \sum_{l=1}^{n} b_l) \\
&= n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{n} b_l \\
&= n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k. \qquad (32)
\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_l b_l - a_l b_k) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} a_l b_l - b_k \sum_{l=1}^{n} a_l\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_l b_l - \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{l=1}^{n} a_l \\
&= n\sum_{l=1}^{n} a_l b_l - \sum_{l=1}^{n} a_l \sum_{k=1}^{n} b_k \\
&= n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k. \qquad (33)
\end{aligned}$$

Yhtälöistä (32) ja (33) saadaan

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_kb_k - a_kb_l) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_lb_l - a_lb_k) = 2\left(n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k - \sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k\right),$$

josta seuraa, että

$$\begin{aligned} n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k - \sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_kb_k - a_kb_l) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_lb_l - a_lb_k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_kb_k - a_kb_l + a_lb_l - a_lb_k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}((a_k - a_l)(b_k - b_l)). \end{aligned} \tag{34}$$

Oletuksesta $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ ja $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ seuraa, että yhtälön (34) oikean puolen tulontekijät ovat aina samanmerkkiset. Tämän nojalla $((a_k - a_l)(b_k - b_l)) \geq 0$ kaikilla $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tästä saadaan

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}((a_k - a_l)(b_k - b_l)) \geq 0$$

ja edelleen

$$n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k - \sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k \geq 0.$$

Tšebyšovin summaepäyhtälö saadaan edellisestä siirtämällä vasemman puolen jälkimmäisen termin epäyhtälön oikealle puolelle. □

Huomautus. Tšebyšovin summaepäyhtälö esiintyy usein myös muodossa

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

Tämä on täysin yhtäpitävä epäyhtälön (31) kanssa.

Esimerkki 36. Olkoot a, b ja c kolmion sivut ja A, B ja C niitä vastaavat kulmat. Osoita, että näillä ehdoilla on voimassa

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}.$$

Ratkaisu. Valitaan kolmion sivut niin, että niiden pituudet ovat suuruusjärjestyksessä $a \geq b \geq c$, jolloin vastaavasti $A \geq B \geq C$. Nyt Tšebyšovin summaepäyhtälön nojalla

$$3 \cdot (aA + bB + cC) \geq (a + b + c)(A + B + C).$$

Jaetaan epäyhtälö puolittain lausekkeella $3(a + b + c)$, jolloin saadaan

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{(a + b + c)(A + B + C)}{3(a + b + c)} = \frac{A + B + C}{3}.$$

Koska kolmion kulmien summa $A + B + C = \pi$, on

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{A + B + C}{3} = \frac{\pi}{3}. \qquad \triangle$$

3.7 Harjoitustehtäviä

Tehtävä 18. (Irlanti MO, 1999) Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja, joiden summa on 1. Osoita, että

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2},$$

missä yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.
Vihje: Cauchy–Schwarzin epäyhtälö.

Tehtävä 19. Osoita Cauchy–Schwarzin epäyhtälöä apuna käyttäen, että positiivisille reaaliluvuille x, y, z on voimassa

$$(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9.$$

Tehtävä 20. (Lemman 3.3 todistus) Geometris–harmonisen epäyhtälön mukaan positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on voimassa

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Todista yllä oleva epäyhtälö Cauchy–Schwarzin epäyhtälöä

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

apuna käyttäen.

Tehtävä 21. Osoita, että positiivisille reaaliluvuille a, b ja c on voimassa

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Tehtävä 22. Olkoon $x > 0$ reaaliluku. Todista epäyhtälö

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Vihje: AG-epäyhtälö.

Tehtävä 23. [22, s. 13] Osoita, että epäyhtälö

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}$$

on voimassa kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a ja b, $a \neq b$.

Tehtävä 24. Todista epäyhtälö

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \leq n^n,$$

missä $n \in \mathbb{N}$, käyttäen apuna aritmeettis–geometrista epäyhtälöä.

Tehtävä 25. Todista epäyhtälö

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \leq n^n,$$

missä $n \in \mathbb{N}$, käyttäen apuna aritmeettis–geometrista epäyhtälöä.

Tehtävä 26. (Lemman 3.2 todistus, yhtälö (13)) Osoita, että seuraava yhtälö on tosi, kun muuttujat a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja:

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Tehtävä 27. (Lemman 3.2 todistus) Muuttujat a_1, a_2 ja a_3 ovat positiivisia reaalilukuja. Todista, että epäyhtälö

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3}\sqrt[4]{\frac{a_1+a_2+a_3}{3}}$$

on tosi.

Tehtävä 28. Mikä on pienin arvo, jonka lauseke $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ voi saada, jos positiivisten reaalilukujen a, b, c ja d summa on 1?
Vihje: AH-epäyhtälö.

Tehtävä 29. Aritmeettis–harmonista epäyhtälöä apuna käyttäen osoita, että epäyhtälö

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \geq 9$$

on voimassa positiivisille reaaliluvuille x, y, z.

Tehtävä 30. Osoita geometris–harmonisen epäyhtälön avulla, että positiivisille reaaliluvuille a ja b on voimassa

$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2} \geq \ 2.$$

Tehtävä 31. Mikä on suurin arvo, jonka lauseke

$$\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{d^2}{a^2}}$$

voi saada, jos a, b, c, $d \in \mathbb{R}_+$?
Vihje: Sijoita AK-epäyhtälöön $a_1 = \frac{a}{b}$.

Tehtävä 32. Olkoot muuttujat a, b, c, $d \in \mathbb{R}_+$ sellaiset, että $a^7 + b^7 \leq 1$ ja $c^7 + d^7 \leq 1$. Osoita Hölderin epäyhtälöä (23) käyttäen, että tällöin on voimassa epäyhtälö

$$a^5c^2 + b^5d^2 \leq 1.$$

Tehtävä 33. (Valko-Venäjä MO, 2000) Todista epäyhtälö

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a, b, c, x, y ja z.
Vihje: Hölderin epäyhtälö.

Tehtävä 34. Todista Cauchy–Schwarzin epäyhtälö

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ käyttäen apuna Hölderin epäyhtälöä

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

missä $p, q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ ja $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ ovat epänegatiivisia reaalilukuja.

Tehtävä 35. Laske summan

$$\sqrt{a^8+16}+\sqrt{b^8+4}+\sqrt{c^8+1},$$

missä a, b, $c \in \mathbb{R}_+$, pienin arvo, kun $a^3+b^3+c^3=24$.
Vihje: Minkowskin epäyhtälö.

Tehtävä 36. Osoita, että epäyhtälö

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2(1-a)^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

missä a, b, $c \in \mathbb{R}_+$, on tosi.
Vihje: Minkowskin epäyhtälö.

Tehtävä 37. Osoita, että positiivisille reaaliluvuille a, b ja c on voimassa

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{a+b+c}{abc}.$$

Vihje: Suuruusjärjestysepäyhtälö.

Tehtävä 38. (Lauseen 3.10 todistus) Reaaliluvuille a_1, a_2, a_3 ja b_1, b_2, b_3 on voimassa $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ ja $b_1 \leq b_2 \leq b_3$. Osoita, että näillä ehdoilla on voimassa

$$\sum_{k=1}^{3} a_k b_{n-k+1} \leq \sum_{k=1}^{3} a_k b_k.$$

Tehtävä 39. Jos $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ ja $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, on voimassa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Todista yllä oleva Tšebyšovin summaepäyhtälö suuruusjärjestysepäyhtälön avulla.

Tehtävä 40. (Puola MO, 2006) Olkoot a, b, c positiivisia reaalilukuja, jotka totetuttavat ehdon $ab+bc+ca=abc$. Osoita, että

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq 1.$$

Vihje: Tšebyšovin summaepäyhtälö.

Tehtävä 41. [57, s. 12–13] Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että epäyhtälö

$$a^5+b^5+c^5+d^5 \geq abcd(a+b+c+d)$$

on tosi. Vihje: AG-epäyhtälö ja Tšebyšovin summaepäyhtälö.

4 Muita tunnettuja epäyhtälöitä

Läs mera! ropade Sniff. Hur gick det sen? Försökte dronten trampa ihjäl er? Nästa gång, sa muminpappan mystiskt. Det var spännande, va? Men ser du, det är en av knixarna med skriveri att sluta ett kapitel just när det är som hemskast.

— Tove Jansson, *Muminpappans memoarer*

Tässä luvussa, kuten edellisessä luvussa, tarkastellaan muutamia tunnetuimmista epäyhtälöistä. Kutakin epäyhtälöä käsitellessä kerrotaan muutamalla lauseella sen historiasta ja käyttökohteista. Epäyhtälöt todistetaan ja niiden käyttöä havainnollistetaan esimerkkien avulla. Ensiksi tarkastellaan kolmioepäyhtälöä ja siitä seuraavaa käänteistä kolmioepäyhtälöä. Kolmioepäyhtälöiden jälkeen esitellään ja todistetaan hieman vähemmän tunnettu Nesbittin epäyhtälö, Bernoullin epäyhtälöt sekä Youngin ja Jensenin integaaliepäyhtälöt. Luvun loppuun on koottu käsiteltyihin epäyhtälöihin liittyviä harjoitustehtäviä.

4.1 Kolmioepäyhtälö

Kolmioepäyhtälö on yksi keskeisimmistä epäyhtälöistä matematiikassa. Kolmioepäyhtälöä käytetään niin geometriassa, matemaattisessa analyysissä kuin vektoriavaruudessa, ja se voidaankin sanallistaa useammalla tavalla käyttöyhteydestä riippuen. Kolmioepäyhtälön geometrinen tulkinta tulee kolmion sivujen pituudesta: kolmion minkä tahansa kahden sivun yhteenlaskettu pituus ei voi olla pienempi kuin jäljelle jäävän kolmannen sivun pituus. Kolmioepäyhtälöstä saadaan myös kahden pisteen lyhimmäksi etäisyydeksi suora näiden kahden pisteen välillä. Reaaliluvuille kolmioepäyhtälö antaa ylärajan kahden luvun summalle. Tasogeometriassa kahden vektorin, $\vec{u}$ ja $\vec{v}$, ja näiden summavektorin $\vec{u}+\vec{v}$ pituudet $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ ja $|\vec{u}+\vec{v}|$ muodostavat kolmion, jos vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat erisuuntaisia. Nyt kolmioepäyhtälön mukaan summavektorin pituus $|\vec{u}+\vec{v}|$ on aina pienempi kuin vektorien $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ pituuksien $|\vec{u}|$ ja $|\vec{v}|$ summa.

Kolmioepäyhtälö esiintyy kirjallisuudessa ensimmäisen kerran Eukleides Aleksandrialaisen (n. 300 eaa.) teoksessa *Stoikheia*, *Alkeet*. Teoksen 1. kirjassa, 20. lauseessa Eukleides toteaa, että kolmion kahden sivun summa on suurempi kuin jäljelle jäävä sivu. [16, s. 286–287] Yleisesti uskotaan, että *Alkeet* on kokoomateos, joka sisältää antiikin kreikassa tunnettuja matemaattisia perusteita ja määritelmiä. Kolmioepäyhtälöä, kuten muitakin teoksessa esiintyviä lauseita, on näin ollen käytetty jo ennen kuin Eukleides kirjoitti teoksensa.

Lause 4.1 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ on voimassa*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Todistus. Koska $x \leq |x|$ ja $y \leq |y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, saadaan

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Koska lisäksi $-x \leq |x|$ ja $-y \leq |y|$ kaikilla x,$y \in \mathbb{R}$, saadaan

$$-(x+y) = -x - y = -x + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Edellisistä saadaan

$$\max\{x+y, -(x+y)\} \leq |x| + |y|$$

eli

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \qquad \square$$

Huomautus. Kolmioepäyhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa $|x-y| \leq |x| + |y|$. Koska $|y| = |-y|$, todistus on sama kuin yllä.

Esimerkki 37. Olkoot a ja b reaalilukuja, joille on voimassa $|a| \leq \sqrt{2}$ ja $|b| \leq 2\sqrt{2}$. Osoita kolmioepäyhtälöä käyttäen, että tällöin on voimassa epäyhtälö

$$|a^2 - b^2| \leq 3\sqrt{2}|a-b|.$$

Ratkaisu. Tarkastellaan epäyhtälön vasenta puolta. Nyt

$$|a^2 - b^2| = |a+b||a-b|,$$

ja edelleen kolmioepäyhtälöä (Lause 4.1) sekä lukujen a ja b määrittelyjoukkoa käyttäen

$$|a+b||a-b| \leq (|a| + |b|)|a-b| \leq (\sqrt{2} + 2\sqrt{2})|a-b| = 3\sqrt{2}|a-b|. \qquad \triangle$$

Käänteinen kolmioepäyhtälö seuraa olennaisesti kolmioepäyhtälöstä. Geometrinen tulkinta käänteiselle kolmioepäyhtälölle kuuluu seuraavasti: kolmion minkä tahansa sivun pituus on suurempi kuin kahden muun sivun pituuksien erotus.

Lause 4.2 (Käänteinen kolmioepäyhtälö)**.** *Kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ on voimassa*

$$||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

Todistus. Todistus seuraa kirjasta [28, s. 2–3] löytyvää todistusta. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

mistä saadaan edelleen

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Vastaavasti

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|,$$

mistä seuraa

$$|y| - |x| \leq |y - x|$$

ja edelleen

$$-(|x| - |y|) \leq |x - y|.$$

Edellisistä saadaan

$$\max\{|x| - |y|, -(|x| - |y|)\} \leq |x - y|,$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälön

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

kanssa. □

Huomautus. Käänteinen kolmioepäyhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa $||x| - |y|| \leq |x + y|$. Koska $|y| = |-y|$, todistukseksi riittää yllä oleva todistus.

Kolmioepäyhtälö ja käänteinen kolmioepäyhtälö antavat kahden luvun, x ja y, summalle sekä ala- että ylärajan.

Seuraus 4.3. *Kaikilla x,$y \in \mathbb{R}$ on voimassa*

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Todistus. Seuraa Lauseista 4.1 ja 4.2. □

Esimerkki 38. Tutkitaan muuttujan x arvoja, kun x, $y \in \mathbb{R}$, $1 < |y| < 3$ ja $|x - y| \leq 1$.

Ratkaisu. Käänteisestä kolmioepäyhtälöstä (Lause 4.2) saadaan

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq 1.$$

Tämän perusteella $|x| - |y| \leq 1$ ja $|y| - |x| \leq 1$, joten

$$|y| - 1 \leq |x| \leq |y| + 1,$$

mistä saadaan edelleen

$$0 \leq |x| \leq 4.$$ △

4.2 Nesbittin epäyhtälö

A. M. Nesbitt esitti [33, s. 37–38] vuonna 1903 epäyhtälön, joka on sittemmin nimetty hänen mukaansa. *Nesbittin epäyhtälö* on hyvin yksinkertainen, mutta monikäyttöinen. Epäyhtälö voi olla avuksi esimerkiksi ratkaistaessa kolmioihin liittyviä epäyhtälöitä. Nesbittin epäyhtälön voi todistaa lukuisilla eri tavoilla, joista esitetään kaksi.

Lause 4.4 (Nesbittin epäyhtälö)**.** *Olkoot $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$. Tällöin on voimassa epäyhtälö*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_1} + \frac{x_3}{x_1+x_2} \geq \frac{3}{2}. \tag{35}$$

Todistus. Koska muuttujat ovat positiivisia reaalilukuja, todistuksessa voidaan käyttää aritmeettis–harmonista epäyhtälöä (Seuraus 3.4). Tämä on hyvin yleinen tapa (katso esimerkiksi [31, s. 440]) osoittaa Nesbittin epäyhtälö todeksi.

Kun muuttujia on kolme, aritmeettis–harmoninen epäyhtälö (19) on muotoa

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}.$$

Kerrotaan tämä puolittain positiivisella termillä $3(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3})$, jolloin saadaan

$$(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right) \geq 9. \tag{36}$$

Olkoot nyt $a_1 = x_1 + x_2$, $a_2 = x_2 + x_3$ ja $a_3 = x_3 + x_1$. Sijoitetaan nämä epäyhtälöön (36), joka on nyt muotoa

$$((x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1))\left(\frac{1}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_2+x_3}+\frac{1}{x_3+x_1}\right) \geq 9.$$

Tämä on edelleen

$$2(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_2+x_3}+\frac{1}{x_3+x_1}\right) \geq 9,$$

josta saadaan

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1+x_2}+\frac{x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_1+x_2+x_3}{x_3+x_1} \geq \frac{9}{2}$$

ja sieventämällä edelleen

$$\frac{x_3}{x_1+x_2}+\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+3 \geq \frac{9}{2}.$$

Vähentämällä vielä puolittain luku kolme saadaan haluttu epäyhtälö

$$\frac{x_3}{x_1 + x_2} + \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} \geq \frac{3}{2},$$

joka on näin ollen tosi. $\square$

Esimerkissä 35 sivulla 49 on käyty läpi toinen todistus Lauseelle 4.4.

Esimerkki 39. Olkoot $å$, $ä$ ja $ö$ kolmion sivujen pituudet. Osoita, että tällöin on voimassa

$$\frac{ä + ö}{å} + \frac{ö + å}{ä} + \frac{å + ä}{ö} \geq 3. \tag{37}$$

Ratkaisu. Koska muuttujat $å$, $ä$ ja $ö$ ovat kolmion sivujen pituudet, on oltava $å$, $ä$, $ö \in \mathbb{R}_+$. Tämän perusteella nyt on voimassa epäyhtälö

$$\frac{ä + ö}{å} + \frac{ö + å}{ä} + \frac{å + ä}{ö} > \frac{ä + ö - å}{å} + \frac{ö + å - ä}{ä} + \frac{å + ä - ö}{ö}. \tag{38}$$

Keskitytään seuraavaksi tutkimaan epäyhtälön (38) oikeaa puolta

$$\frac{ä + ö - å}{å} + \frac{ö + å - ä}{ä} + \frac{å + ä - ö}{ö}.$$

Määritellään muuttujat $å = x_2 + x_3$, $ä = x_3 + x_1$ ja $ö = x_1 + x_2$, missä $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$. Sijoitetaan muuttujat yllä olevaan lausekkeeseen, joka on sievennyksen jälkeen muotoa

$$\frac{2x_1}{x_2 + x_3} + \frac{2x_2}{x_3 - x_1} + \frac{2x_3}{x_1 + x_2}.$$

Käytetään seuraavaksi Nesbittin epäyhtälöä (Lause 4.4), jolloin saadaan

$$2 \cdot \left(\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \right) \geq 2 \cdot \frac{3}{2}. \tag{39}$$

Yhdistetään epäyhtälöt (38) ja (39), jolloin saadaan

$$\frac{ä + ö}{å} + \frac{ö + å}{ä} + \frac{å + ä}{ö} > 2 \left(\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \right) \geq 3,$$

eli alkuperäinen epäyhtälö (37) on tosi. $\triangle$

Vuonna 1954 yhdysvaltalainen matemaatikko Harold S. Shapiro esitti [41, s. 571] seuraavan ongelman: Olkoon $x_i \geq 0$, kun $i = 1, 2, \ldots, n$. Osoita, että

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \frac{n}{2}, \tag{40}$$

missä yhtäsuuruus toteutuu vain, jos kaikki nimittäjät ovat yhtä suuria.

Lisähuomiona todettakoon, että yllä oleva virheellinen ehto $x_i \geq 0$ on Shapiron määrittelemä. Lauseessa 4.5 epäyhtälön ehto on määritelty oikein koskemaan vain muuttujan x_i positiivisia arvoja.

Vuosien mittaan useat matemaatikot ovat todistaneet epäyhtälön eri tapauksissa. Shapiro todisti itse tapaukset $n = 3$ ja $n = 4$, mutta näitä todistuksia ei ole julkaistu. [10, s. 60-62] F. H. Northover oli ensimmäinen, joka julkaisi todistuksen osoittaakseen, että epäyhtälö (40) ei ole tosi kaikilla muuttujan n arvoilla. Vuonna 1956 julkaistussa todistuksessa [42, s. 191-192] hän osoittaa vastaesimerkin avulla, että tapauksessa $n = 20$ epäyhtälö on epätosi. Northover kiittää M. J. Lighthilliä vastaesimerkistä, joten tällekin kuulunee kunnia todistuksesta. Tapaus $n = 12$ oli parillisista luvuista viimeinen, joka todistettiin paikkansapitäväksi. Tämän tekivät E. K. Godunova ja V. I. Levin vuonna 1976 [13, s. 510–517]. Lopulta vuonna 1989 B. A. Trösch todisti [46, s. 657–664], että tapauksessa $n = 23$ epäyhtälö (40) on tosi. Tröschin todistus oli merkittävä, sillä $n = 23$ oli viimeinen tapaus, jota ei ollut aiemmin osoitettu todeksi tai epätodeksi. Shapiron mukaan nimetty epäyhtälö on lopullisessa muodossaan seuraava:

Lause 4.5 (Shapiron epäyhtälö)**.** *Olkoon n luonnollinen luku, ja olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Epäyhtälö*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq \frac{n}{2}, \tag{41}$$

missä $x_{k+1} = x_1$ ja $x_{k+2} = x_2$, on voimassa, jos toinen seuraavista ehdoista täyttyy: luku n on parillinen ja $n \leq 12$, tai n on pariton luku ja $n \leq 23$.

Todistus. Todistus sivuutetaan. □

Lisähuomiona todettakoon, että Shapiron epäyhtälö tapauksessa $n = 3$ on Nesbittin epäyhtälö.

Esimerkki 40. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että epäyhtälö

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k+1} + x_{k+2}}{x_{k+1} + x_{k+2}} \geq (\sqrt{2} - 1)n \tag{42}$$

on tosi tapauksessa $n = 5$.

Ratkaisu. Käytetään ratkaisussa selkeyden vuoksi muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_5$ sijaan muuttujia a, b, c, d ja e. Tapauksessa $n = 5$ epäyhtälön (42) vasen puoli on muotoa

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+d}{c+d} + \frac{c+d+e}{d+e} + \frac{d+e+a}{e+a} + \frac{e+a+b}{a+b},$$

mikä voidaan sieventää muotoon

$$\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+d} + 1 + \frac{c}{d+e} + 1 + \frac{d}{e+a} + 1 + \frac{e}{a+b} + 1.$$

Arvioidaan yllä olevaa lauseketta alaspäin ja saadaan

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}+5 > \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}.$$

Saadun epäyhtälön oikeaan puoleen voidaan käyttää Shapiron epäyhtälöä (Lause 4.5), jolloin saadaan

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

Koska $\frac{5}{2} > (\sqrt{2} - 1) \cdot 5$, on nyt osoitettu, että epäyhtälö

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+d}{c+d} + \frac{c+d+e}{d+e} + \frac{d+e+a}{e+a} + \frac{e+a+b}{a+b} > (\sqrt{2} - 1) \cdot 5$$

on tosi. $\triangle$

4.3 Bernoullin epäyhtälö

Bernoullin epäyhtälön merkitys matematiikassa on suuri. Sen avulla voidaan arvioida muotoa $(1 + h)^n$ olevien termien suuruutta, mutta myös todistaa lukuisia eri epäyhtälöitä. Bernoullin epäyhtälö on nimetty sveitsiläisen matemaatikon Jacob Bernoullin (1654–1705) mukaan. Bernoulli esitti epäyhtälön teoksessaan *Positiones Arithmeticae de Seriebus Infinitis* [4] vuonna 1689. Bernoulli ei kuitenkaan ole ensimmäinen, joka on keksinyt Bernoullin epäyhtälönä tunnetun epäyhtälön. Vuonna 1670 pitämällään luennolla englantilainen matemaatikko Isaac Barrow (1630–1677) on käsitellyt epäyhtälöä [9, s. 83–85], ja Hofmannin [18, s. 176–179] mukaan epäyhtälö esiintyy tätäkin aiemmin, vuonna 1668 ilmestyneessä René François de Slusen (1622–1685) teoksessa *Mesolabum* [43, s. 114–117]. Bernoullin epäyhtälön historiaa käsitellään enemmän artikkelissa [24].

Lause 4.6 (Bernoullin epäyhtälö luonnollisille luvuille)**.** *Olkoon n luonnollinen luku ja $h > -1$ reaaliluku. Nyt on voimassa epäyhtälö*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh. \tag{43}$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla. Jos $n = 1$, epäyhtälö (43) on selvästi yhtäpitävä. Tapaus $n = 2$ on myös tosi, sillä $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 \geq 1 + 2h$. Oletetaan, että epäyhtälö (43) pätee, kun $n = k$, jolloin

$$(1+h)^k \geq 1 + kh. \tag{44}$$

Kerrotaan saatu epäyhtälö puolittain positiivisella termillä $1 + h$, jolloin saadaan

$$(1+h)^{k+1} \geq (1+h)(1+kh),$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälön

$$(1+h)^{k+1} \geq 1 + (1+k)h + kh^2$$

kanssa. Edelleen saadaan

$$(1+h)^{k+1} \geq 1 + (1+k)h,$$

koska termi kh^2 on positiivinen. Saatu epäyhtälö seuraa täten suoraan epäyhtälöstä (44), mikä todistaa lauseen. □

Esimerkki 41. Osoita, että

$$\frac{\sqrt{3^n}}{n} > \sqrt{3} - 1$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

Ratkaisu. Koska $n \in \mathbb{N}$, käytetään Bernoullin epäyhtälöä luonnollisille luvuille (Lause 4.6.). Sijoitetaan $h = \sqrt{3} - 1$, jolloin $h > -1$, epäyhtälöön (43). Nyt

$$\left(1 + \sqrt{3} - 1\right)^n \geq 1 + n(\sqrt{3} - 1),$$

ja edelleen

$$\sqrt{3^n} \geq 1 + n(\sqrt{3} - 1) > n(\sqrt{3} - 1).$$

Jakamalla epäyhtälö $\sqrt{3^n} > n(\sqrt{3} - 1)$ puolittain muuttujalla n saadaan

$$\frac{\sqrt{3^n}}{n} > \sqrt{3} - 1. \qquad \triangle$$

Lause 4.7 (Bernoullin epäyhtälö rationaaliluvuille)**.** *Olkoon* $r = \frac{p}{q}$ *rationaaliluku ja* $h > -1$ *reaaliluku. Nyt on voimassa epäyhtälöt*

$$(1+h)^r \leq 1 + rh, \text{ kun } 0 \leq r \leq 1 \tag{45}$$

ja

$$(1+h)^r \geq 1 + rh, \text{ kun } r \leq 0 \text{ tai } r \geq 1. \tag{46}$$

Lauseen 4.7 todistukset epäyhtälölle (45) ja epäyhtälölle (46) tapauksessa $r \geq 1$ seuraavat läheisesti Saxenan todistusta [56]. Vastaavasti epäyhtälön (46) todistus tapauksessa $r \leq 0$ seuraa todistusta [53, s. 3] korjaten todistuksessa esiintyvät virheet.

Todistus. Todistetaan ensin epäyhtälö (45), missä $0 \leq r \leq 1$. Olkoot $1, \ldots, 1, (1+h), \ldots, (1+h)$ q kappaletta lukuja niin, että lukuja $(1+h)$ on p kappaletta. Nyt näiden lukujen aritmeettinen keskiarvo on $\frac{q+ph}{q} = 1 + \frac{p}{q}h$ ja geometrinen keskiarvo on $(1+h)^{\frac{p}{q}}$. Aritmeettis–geometrisen epäyhtälön (10) nojalla saadaan

$$(1+h)^{\frac{p}{q}} \leq 1 + \frac{p}{q}h, \tag{47}$$

josta saadaan epäyhtälö (45) sijoittamalla $r = \frac{p}{q}$.

Jaetaan epäyhtälön (46) todistus jaetaan kahteen osaan. Todistetaan erikseen tapaukset $r \geq 1$ ja $r \leq 0$.

Tapaus 1: $r \geq 1$. Tarkastellaan epäyhtälöä (47), joka on muotoa

$$(1+h)^{\frac{p}{q}} \leq 1 + \frac{p}{q}h,$$

missä $\frac{p}{q} \leq 1$. Korotetaan epäyhtälö puolittain potenssiin $\frac{q}{p} \geq 1$ ja saadaan

$$1 + h \leq \left(1 + \frac{p}{q}h\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{48}$$

Olkoon nyt $\frac{p}{q}h = a$, jolloin on myös $h = \frac{q}{p}a$. Sijoitetaan nämä epäyhtälöön (48) ja saadaan

$$1 + \frac{q}{p}a \leq (1+a)^{\frac{q}{p}}.$$

Ehdoista $h > -1$ ja $\frac{p}{q} \geq 1$ sekä sijoituksesta $a = \frac{p}{q}h$ saadaan $a > -1$. Olkoon lisäksi $r = \frac{q}{p} \geq 1$, jolloin edellisestä saadaan

$$1 + ra \leq (1+a)^r.$$

Tapaus $r \geq 1$ on täten todistettu.

Tapaus 2: $r \leq 0$. Olkoon sellainen $n > 0$, että $n \geq |r|$, jolloin $0 \leq -\frac{r}{n} \leq 1$. Olkoon n lisäksi sellainen, että on voimassa $n > -rh$ ja $n > rh$, joista yhdessä seuraa $-1 < \frac{rh}{n} < 1$. Koska $-\frac{r}{n} \in [0,1]$, epäyhtälöstä (45) saadaan

$$(1+h)^{-\frac{r}{n}} \leq 1 - \frac{r}{n}h. \tag{49}$$

Korotetaan saatu epäyhtälö potenssiin $-n$. Nyt epäyhtälö (49) on muotoa

$$(1+h)^r \geq \left(1 - \frac{r}{n}h\right)^{-n} = \left(\left(1 - \frac{r}{n}h\right)^{-1}\right)^n. \tag{50}$$

Tutkitaan seuraavaksi epäyhtälöä

$$1 \geq 1 - \left(\frac{r}{n}h\right)^2 = \left(1 - \frac{r}{n}h\right)\left(1 + \frac{r}{n}h\right)$$

ja jaetaan se puolittain positiivisella termillä $\left(1 - \frac{r}{n}h\right)$, jolloin saadaan

$$\left(1 - \frac{r}{n}h\right)^{-1} \geq 1 + \frac{r}{n}h. \tag{51}$$

Käytetään epäyhtälöä (51) aiemmin saadun epäyhtälön (50) oikealle puolelle saatuun lausekkeeseen. Nyt

$$\left(\left(1 - \frac{r}{n}h\right)^{-1}\right)^n \geq \left(1 + \frac{r}{n}h\right)^n, \tag{52}$$

mistä saadaan edelleen Lauseen 4.6 nojalla

$$\left(1 + \frac{r}{n}h\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{r}{n}h\right) = 1 + rh. \tag{53}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (50), (52) ja (53), saadaan epäyhtälö

$$(1+h)^r \geq 1 + rh,$$

mikä on haluttu epäyhtälö (46). $\square$

Esimerkki 42. Onko epäyhtälö

$$\sqrt[5]{\left(2+\sqrt{x}\right)^2} \leq \frac{7+2\sqrt{x}}{5},$$

missä $x \in \mathbb{R}_+$, tosi?

Ratkaisu. Tutkitaan aluksi epäyhtälön vasenta puolta. Nyt

$$\sqrt[5]{\left(2+\sqrt{x}\right)^2} = \left(2+\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(1+1+\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{5}}, \tag{54}$$

johon voidaan käyttää Bernoullin epäyhtälöä rationaaliluvuille (Lause 4.7.). Sijoitetaan $h = 1+\sqrt{x}$ ja $r = \frac{2}{5}$ epäyhtälöön (45), jolloin saadaan

$$\left(1+1+\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{5}} \leq 1 + \frac{2}{5}(1+\sqrt{x}) = \frac{7+2\sqrt{x}}{5}. \tag{55}$$

Yhdistämällä lopuksi yhtälö (54) ja epäyhtälö (55) saadaan

$$\sqrt[5]{\left(2+\sqrt{x}\right)^2} \leq \frac{7+2\sqrt{x}}{5},$$

joten väite on tosi. △

Bernoullin epäyhtälö on yleistettävissä koskemaan kaikkia reaalilukuja $r \in \mathbb{R}$.

Lause 4.8 (Bernoullin epäyhtälö reaaliluvuille)**.** *Kaikilla $h > -1$ ja $r \in \mathbb{R}$ on voimassa*

$$(1+h)^r \leq 1 + rh, \textit{ kun } 0 \leq r \leq 1, \tag{56}$$

ja

$$(1+h)^r \geq 1 + rh, \textit{ kun } r \leq 0 \textit{ tai } r \geq 1. \tag{57}$$

Todistetaan seuraavaksi Lause 4.8 lukujonon avulla. Idea todistukseen on Korovkinin teoksesta *Inequalities* [22, s. 18–21].

Todistus. Olkoon $h > -1$, ja olkoot $r_1, r_2, r_3, \ldots$ sellainen ääretön rationaalilukujono, että muuttujan i lähestyessä ääretöntä r_i lähestyy lukua r. Jaetaan todistus kolmeen osaan. Jos $r = 0$ tai $r = 1$, niin väite on tosi.
Todistetaan seuraavaksi lause tapauksessa $0 < r < 1$. Jos luku $0 < r < 1$, niin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $0 < r_i < 1$ kaikilla $i \geq n$. Nyt Lauseen 4.7 nojalla on voimassa $(1+h)^{r_i} \geq 1 + r_i h$ kaikilla $i \geq n$. Täten

$$(1+h)^r = \lim_{i\to\infty}(1+h)^{r_i} \geq \lim_{i\to\infty}(1+r_i h) = 1 + rh.$$

Todistetaan lause tapauksessa $r < 0$. Jos $r < 0$, on olemassa sellainen $m \in \mathbb{N}$, että $r_i < 0$ kaikilla $i \geq m$. Lauseen 4.7 nojalla kaikilla $i \geq m$ saadaan $(1+h)^{r_i} \leq 1 + r_i h$ ja siten

$$(1+h)^r = \lim_{i\to\infty}(1+h)^{r_i} \leq \lim_{i\to\infty}(1+r_i h) = 1 + rh.$$

Tapaus $r > 1$ todistetaan vastaavasti. □

Seuraava esimerkki perustuu epäyhtälöön, joka löytyy artikkelista [1].

Esimerkki 43. Osoita, että epäyhtälö

$$(1+\frac{1}{\sqrt{a}})^a > \sqrt{a}$$

on tosi kaikilla $a \in \mathbb{R}_{>1}$.

Ratkaisu. Koska $a \in \mathbb{R}$ ja $a > 1$, osoitetaan epäyhtälön paikkansapitävyys Lausetta 4.8 ja Bernoullin epäyhtälöä (57) apuna käyttäen. Sijoitetaan $h = \frac{1}{\sqrt{a}}$ epäyhtälöön (57), jolloin se on muotoa

$$(1+\frac{1}{\sqrt{a}})^a \geq 1 + a \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Edelleen saadaan

$$(1+\frac{1}{\sqrt{a}})^a \geq 1 + \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1 + \sqrt{a} > \sqrt{a},$$

joten annettu epäyhtälö on tosi. △

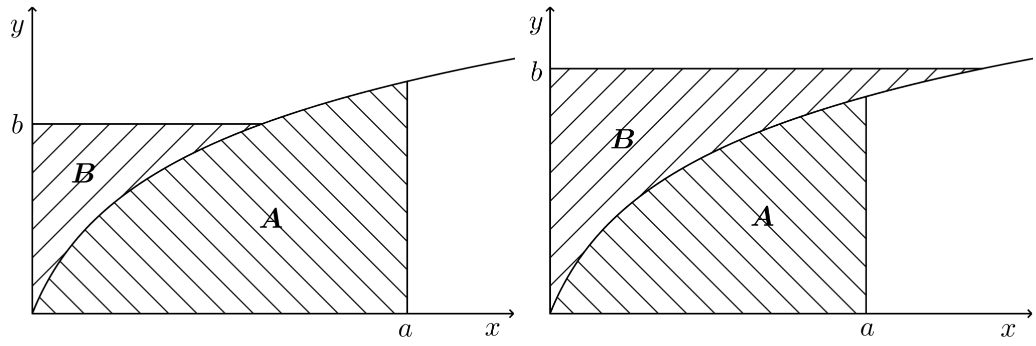
4.4 Youngin epäyhtälö

Youngin epäyhtälö esiintyy ensimmäisen kerran vuonna 1912 julkaistussa artikkelissa *On classes of summable functions and their Fourier series* [51], jonka on kirjoittanut englantilainen matemaatikko William Henry Young (1863–1942). Yksinkertaisen todistuksen Youngin epäyhtälölle antoivat Hardy, Littlewood ja Polya vuonna 1934 ilmestyneessä kirjassaan *Inequalities* [15, s. 111]. Tämä todistus esitellään alla. Ensimmäisen vain analyyttisiä menetelmiä käyttävän todistuksen esittivät Diaz ja Metcalf. Heidän todistuksensa [11] on julkaistu vuonna 1970. Youngin epäyhtälöä käyttäen voidaan todistaa niin Cauchyn (Lause 3.1), Hölderin (Lause 3.8) kuin Minkowskin (Lause 3.9) epäyhtälöt, kuten Tolsted on artikkelissaan [45] osoittanut.

Lause 4.9 (Youngin epäyhtälö)**.** *Olkoon f jatkuva ja aidosti kasvava funktio välillä $[0, c]$, missä $c > 0$, ja $f(0) = 0$. Määritellään lisäksi f^{-1} funktion f käänteisfunktioksi. Kaikilla $a \in [0, c]$ ja $b \in [0, f(c)]$ on voimassa*

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Todistetaan lause helposti kuvan avulla, kuten Hardy ym. [15, s. 111]. Vastaava todistus löytyy myös esimerkiksi kirjoista [3, s. 15] ja [29, s. 20–21].



(a) Tapaus $b < f(a)$.

(b) Tapaus $b > f(a)$.

Kuva 7: Funktion $f(x)$ määrätty integraali A välillä $[0,a]$ ja funktion f käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ määrätty integraali B välillä $[0,b]$.

Todistus. Olkoon funktion $f(x)$ määrätty integraali $A = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ ja funktion f käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ määrätty integraali $B = \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$.

Kuvista 7a ja 7b nähdään, että määrättyjen integraalien A ja B yhteenlaskettu pinta-ala on aina vähintään yhtä suuri kuin origon ja muuttujien a ja b määrittelemän suorakulmion pinta-ala. Kuvien perusteella voidaan lisäksi nähdä, että yhtäsuuruus on selvästi voimassa, jos ja vain jos $b = f(a)$. $\square$

Esimerkki 44. Onko epäyhtälö

$$e^2 \leq \int_0^e \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_0^e \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

tosi?

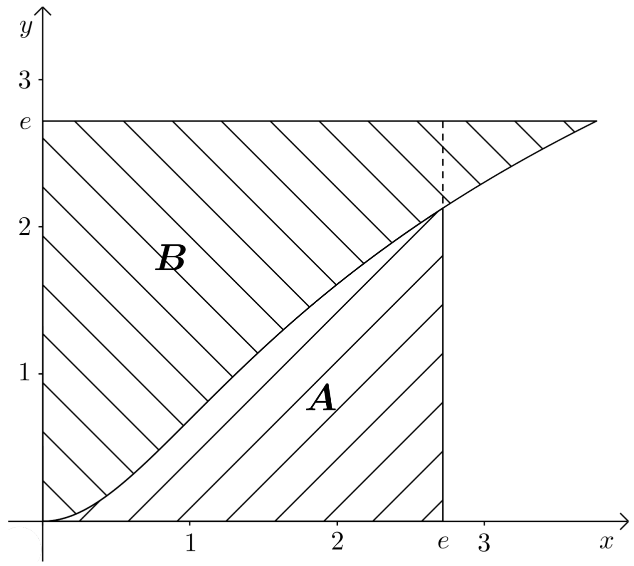
Ratkaisu. Funktio $f(x) = \ln(x^2+1)$ on jatkuva ja aidosti kasvava välillä $[0, e]$ ja $f(0) = 0$. Koska tällä välillä funktiolla $f(x)$ on lisäksi käänteisfunktio $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$, funktio $f(x)$ ja sen käänteisfunktio $f^{-1}(x)$ toteuttavat Youngin epäyhtälön (Lause 4.9) ehdot. Käyttämällä Youngin epäyhtälöä saadaan suoraan annettu epäyhtälö, joka näin ollen on tosi. Kuvassa 8 esitetään lisäksi tehtävän graafinen tarkastelu.

$\triangle$

Seuraus 4.10. *Youngin epäyhtälöstä seuraa, että epäyhtälö*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

missä $a, b \in \mathbb{R}_+$, $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on tosi.



Kuva 8: Määrätyt integraalit $A = \int_0^e \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ ja $B = \int_0^e \sqrt{e^y - 1}\,\mathrm{d}y$.

Seuraavaksi läpikäytävä todistus seuraa kirjasta [45, s. 4–5] löytyvää todistusta.

Todistus. Youngin epäyhtälön (Lause 4.9) mukaan $ab \leq \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$. Riittää siis, että löydetään Youngin epäyhtälön ehdot täyttävä funktio $f(x)$ ja sen käänteisfunktio $f^{-1}(y)$, joille on voimassa

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Funktio $f(x) = x^r$, $r > 0$ ja sen käänteisfunktio $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}}$ toteuttavat ehdot, joiden mukaan funktion f on oltava jatkuva ja aidosti kasvava funktio ja lisäksi $f(0) = 0$. Täten saadaan

$$ab \leq \int_0^a x^r\,\mathrm{d}x + \int_0^b y^{\frac{1}{r}}\,\mathrm{d}y = \Big/_{0}^{a} \frac{1}{r+1}x^{r+1} + \Big/_{0}^{b} \frac{1}{\frac{1}{r}+1}y^{\frac{1}{r}+1} = \frac{a^{r+1}}{r+1} + \frac{b^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1}.$$

Olkoon $r + 1 = p$ ja $\frac{1}{r} + 1 = q$, jolloin edellisestä saadaan

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Todetaan lopuksi, että valinta $p = r + 1$, $q = \frac{1}{r} + 1$ on ekvivalentti ehdon $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ kanssa. Valitsemalla muuttujat p ja q kuten edellä, summa

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{\frac{1}{r}+1} = \frac{1}{r+1} + \frac{r}{r+1} = \frac{1+r}{r+1} = 1. \qquad \square$$

Seuraus 4.10 on AG-epäyhtälö (Lemma 3.2), kun $p = q = 2$. Lisäksi Seuraus 4.10 on erityistapaus painotetusta AG-epäyhtälöstä.

Esimerkki 45. Osoita, että luvuille $a, b, c, d \in R_+$ on voimassa epäyhtälö

$$a^5c^3 + b^5d^3 \leq 1,$$

kun $a^8 + b^8 \leq 1$ ja $c^8 + d^8 \leq 1$.

Ratkaisu. Valitaan $p = \frac{8}{5}$ ja $q = \frac{8}{3}$, jolloin $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$. Seurausta 4.10 käyttämällä saadaan

$$a^5c^3 \leq \frac{5}{8}\left(a^5\right)^{\frac{8}{5}} + \frac{3}{8}\left(c^3\right)^{\frac{8}{3}} = \frac{5}{8}a^8 + \frac{3}{8}c^8, \tag{58}$$

ja vastaavasti

$$b^5d^3 \leq \frac{5}{8}\left(b^5\right)^{\frac{8}{5}} + \frac{3}{8}\left(d^3\right)^{\frac{8}{3}} = \frac{5}{8}b^8 + \frac{3}{8}d^8. \tag{59}$$

Laskemalla epäyhtälöt (58) ja (59) saadaan

$$a^5c^3 + b^5c^3 \leq \frac{5}{8}a^8 + \frac{3}{8}c^8 + \frac{5}{8}b^8 + \frac{3}{8}d^8 = \frac{5}{8}\left(a^8 + b^8\right) + \frac{3}{8}\left(c^8 + d^8\right).$$

Koska alkuehtojen mukaan $a^8 + b^8 \leq 1$ ja $c^8 + d^8 \leq 1$, on tämä edelleen

$$a^5c^3 + b^5c^3 \leq \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1,$$

mikä oli todistettavana. △

4.5 Jensenin epäyhtälö

Määritellään aluksi *konveksi* ja *aidosti konveksi* funktio. Geometrisesti määriteltynä funktio $f(x)$ on konveksi, jos mitkä tahansa kaksi funktion pistettä $(x_1, f(x_1))$ ja $(x_2, f(x_2))$ yhdistävä jana on aina funktion f kuvaajan yläpuolella. Kuvassa 9 esitetään funktion konveksisuuden määritelmä graafisesti.

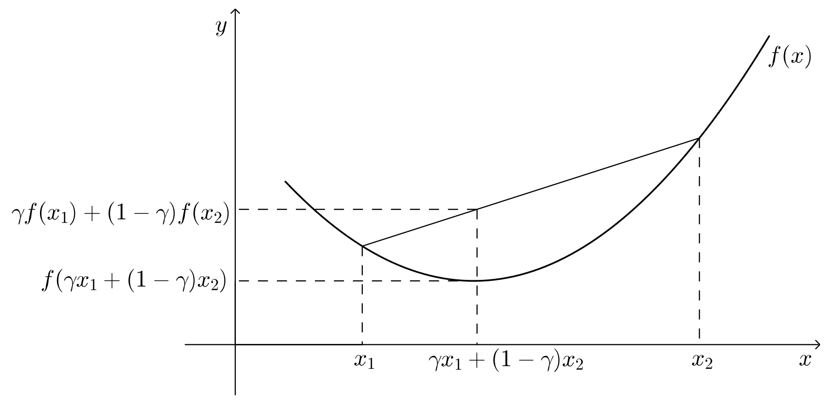
Määritelmä 4.11. Reaalifunktio f on *konveksi* välillä L, jos ja vain jos reaalilukuvälillä L epäyhtälö

$$f(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) \leq \gamma f(x_1) + (1-\gamma)f(x_2) \tag{60}$$

toteutuu kaikilla $x_1, x_2 \in L$ ja $\gamma \in [0, 1]$.

Vastaavasti funktio f on *aidosti konveksi* välillä L, jos kaikilla $x_1, x_2 \in L$, $x_1 \neq x_2$ on voimassa aito epäyhtälö

$$f(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) < \gamma f(x_1) + (1-\gamma)f(x_2). \tag{61}$$



Kuva 9: Pisteet x_1 ja x_2 yhdistävä jana on aina konveksin funktion $f(x)$ kuvaajan yläpuolella.

Huomautus. Jos funktio $-f$ on konveksi välillä L, funktio f on *konkaavi* tällä välillä. Konkaaville funktiolle ja aidosti konkaaville funkiolle on voimassa epäyhtälöitä (60) ja (61) vastaavat epäyhtälöt

$$f(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) \geq \gamma f(x_1) + (1-\gamma)f(x_2)$$

ja

$$f(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) > \gamma f(x_1) + (1-\gamma)f(x_2).$$

Määritelmä 4.12. Olkoon funktio $f(x)$ kahdesti derivoituva reaalilukuvälillä L. Funktio f on konveksi välillä L, jos sen toinen derivaatta $f''(x) \geq 0$. Vastaavasti jos funktion f toinen derivaatta $f''(x) \leq 0$, funktio on konkaavi.

Jensenin epäyhtälöllä voidaan tutkia konveksin tai konkaavin funktion arvoja. Sen on ensimmäisenä johtanut saksalaisen matemaatikko Otto Hölder (1859–1937) teoksessaan *Über einen Mittelwertsatz* [19] vuonna 1889. [32, s. 341] Epäyhtälö on kuitenkin saanut nimensä tanskalaisen insinöörin Johan Ludwig William Valdemar Jensenin (1859–1925) mukaan. Jensen todisti epäyhtälön artikkelissaan *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes* [20] vuonna 1906 käyttäen todistuksessaan konveksin funktion määritelmää.

Lause 4.13 (Jensenin epäyhtälö)**.** *Olkoon $f(x)$ konveksi funktio jollakin välillä L. Lisäksi olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Nyt kaikilla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ on voimassa*

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \cdots + a_nf(x_n). \qquad (62)$$

Mikäli funktio f on konkaavi, epäyhtälön merkki on vastakkainen.

Todistetaan nyt lause induktiolla kuten esimerkiksi kirjoissa [32, s. 339–314] ja [44, s. 87–89].

Todistus. Tutkitaan ensiksi tapausta $n = 2$. Nyt epäyhtälö (62) on muotoa

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2).$$

Koska $a_1 + a_2 = 1$, epäyhtälö on tosi konveksisuuden määritelmän nojalla.

Oletetaan, että epäyhtälö (62) on tosi, kun $n = k$ ja tutkitaan tapausta $n = k + 1$. Epäyhtälön (62) vasemmasta puolesta saadaan

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_ix_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{k} a_ix_i + a_{k+1}x_{k+1}\right) \\ &= f\left((1-a_{k+1})\frac{1}{1-a_{k+1}}\sum_{i=1}^{k} a_ix_i + a_{k+1}x_{k+1}\right). \end{aligned}$$

Koska tapaus $n = 2$ on tosi ja $(1 - a_{k+1}) + a_{k+1} = 1$, yllä olevalle lausekkeelle on Määritelmän 4.11 nojalla voimassa

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_ix_i\right) &\leq (1-a_{k+1})f\left(\frac{1}{1-a_{k+1}}\sum_{i=1}^{k} a_ix_i\right) + a_{k+1}f(x_{k+1}) \\ &= (1-a_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1-a_{k+1}}x_i\right) + a_{k+1}f(x_{k+1}). \end{aligned} \tag{63}$$

Oletuksen mukaan $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 1$, joten $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1 - a_{k+1}$ ja edelleen $\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1-a_{k+1}} = 1$. Koska nyt on induktio-oletuksen nojalla voimassa

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1-a_{k+1}}x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1-a_{k+1}}f(x_i),$$

epäyhtälöstä (63) saadaan edelleen

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_ix_i\right) &\leq (1-a_{k+1})\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{1-a_{k+1}}f(x_i) + a_{k+1}f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_if(x_i) + a_{k+1}f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} a_if(x_i). \end{aligned}$$

Väite on tämän perusteella tosi kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

Tutkitaan lopuksi epäyhtälöä (62) tilanteessa, jossa funktio $g(x)$ on konkaavi. Funktio $g(x)$ on konkaavi välillä L, jos ja vain jos funktio $-g(x)$ on konveksi tällä välillä. Yllä olevan todistuksen nojalla konveksille funktiolle $-g$ on voimassa

$$\begin{aligned}-g(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) &\leq -a_1g(x_1) - a_2g(x_2) - \cdots - a_ng(x_n)\\ &= -\left(a_1g(x_1) + a_2g(x_2) + \cdots + a_ng(x_n)\right).\end{aligned}$$

Kertomalla tämä puolittain luvulla -1 saadaan edelleen

$$g(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \geq a_1g(x_1) + a_2g(x_2) + \cdots + a_ng(x_n), \tag{64}$$

joten Jensenin epäyhtälö konkaaville funktiolle on todistettu. □

Aritmeettis–geometrinen epäyhtälö (Lemma 3.2) on Jensenin epäyhtälön erikoistapaus.

Esimerkki 46. Olkoot muuttujat a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille on voimassa $a + b + c = 1$. Osoita, että näillä ehdoilla on voimassa

$$a^ab^bc^c \leq a^2 + b^2 + c^2. \tag{65}$$

Ratkaisu. Otetaan epäyhtälöstä (65) puolittain luonnollinen logaritmi, jolloin epäyhtälö on muotoa

$$\ln(a^ab^bc^c) \leq \ln(a^2 + b^2 + c^2).$$

Tutkitaan epäyhtälön vasenta puolta. Logaritmien laskusääntöjen nojalla

$$\ln(a^ab^bc^c) = \ln a^a + \ln b^b + \ln c^c = a\ln a + b\ln b + c\ln c. \tag{66}$$

Määritelmän 4.12 nojalla logaritmifunktio $\ln(x)$ on aidosti konkaavi välillä $(0,\infty)$, koska funktion toinen derivaatta $-\frac{1}{x^2} < 0$ tällä välillä. Lisäksi oletuksen mukaan $a + b + c = 1$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, joten Jensenin epäyhtälön (Lause 4.13) ehdot täyttyvät. Sijoitetaan $f(x) = \ln(x)$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ ja $a_3 = c$ epäyhtälöön (64) ja saadaan

$$a\ln a + b\ln b + c\ln c \leq \ln(a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c) = \ln(a^2 + b^2 + c^2). \tag{67}$$

Yhdistämällä yhtälö (66) ja epäyhtälö (67) saadaan

$$\ln(a^ab^bc^c) \leq \ln(a^2 + b^2 + c^2),$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälön

$$a^ab^bc^c \leq a^2 + b^2 + c^2$$

kanssa, koska funktio $\ln x$ on kasvava tutkitulla välillä. △

Seuraus 4.14. *Olkoon funktio $f(x)$ konveksi välillä L, ja olkoot lisäksi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$. Näillä ehdoilla on voimassa epäyhtälö*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}. \tag{68}$$

Mikäli funktio f on konkaavi, epäyhtälön merkki on vastakkainen.

Todistus. Epäyhtälö seuraa suoraan Jensenin epäyhtälöstä (Lause 4.13). Olkoon nyt $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$. Lauseen 4.13 ehdosta $a_1 + \cdots + a_n = 1$ saadaan $n \cdot a = 1$ ja edelleen $a = \frac{1}{n}$, jolloin epäyhtälö (62) konveksille funktiolle on muotoa

$$f\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n\right) \leq \frac{1}{n}f(x_1) + \frac{1}{n}f(x_2) + \cdots + \frac{1}{n}f(x_n)$$

ja edelleen

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Jos funktio f on konkaavi, epäyhtälö todistetaan vastaavasti käyttäen epäyhtälöä (62) konkaaville funktiolle. □

Esimerkki 47. Osoita, että mille tahansa kolmiolle $\triangle ABC$, jonka vastaavat kulmat ovat α, β ja γ, on voimassa

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ratkaisu. Kulmat α, β ja γ ovat välillä $(0, \pi)$. Lisäksi funktio $\sin x$ on Määritelmän 4.12 nojalla aidosti konkaavi välillä $(0, \pi)$, koska sen toinen derivaatta $-\sin x < 0$ välillä $(0, \pi)$, joten voidaan käyttää Jensenin epäyhtälöä (68) konkaaveille funktioille. Tästä saadaan

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq \sin\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right).$$

Koska kolmion kulmien summa on aina $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, edellisestä saadaan

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kerrotaan tämä puolittain luvulla 3 ja saadaan

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$ △

4.6 Harjoitustehtäviä

Tehtävä 42. Olkoot x, y ja z kolmion sivut. Osoita kolmioepäyhtälöä käyttäen, että
$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}<2.$$

Tehtävä 43. (AMC 2006, 10B) Tarkastellaan kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat kokonaislukuja. Kolmion yhden sivun pituus on kolminkertainen toisen sivun pituuteen verrattuna ja kolmannen sivun pituus on 15. Mikä on suurin mahdollinen kolmion piirin pituus?

Tehtävä 44. Anna luvulle $|x^2-2x\sin x|$ yläraja, kun $x\in[\frac{1}{2},2]$.
Vihje: Kolmioepäyhtälö.

Tehtävä 45. Arvioi lukua $|a+b-4|$ kolmioepäyhtälön avulla, kun $|a+2|\leq\frac{1}{2}$ ja $|b-6|<3$.

Tehtävä 46. Olkoot muuttujat a, b, ja c kolmion sivut. Todista, että epäyhtälö
$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$
on aina tosi.
Vihje: AG-epäyhtälö ja kolmioepäyhtälö.

Tehtävä 47. Osoita, että positiivisille reaaliluvuille x, y ja z on voimassa epäyhtälö
$$\frac{1+x^2}{y+z}+\frac{1+y^2}{z+x}+\frac{1+z^2}{x+y}\geq 3.$$
Vihje: Nesbittin epäyhtälö.

Tehtävä 48. Osoita, että epäyhtälö
$$a^a-a\geq(a-1)^2$$
on tosi, kun $a\in\mathbb{N}$.
Vihje: Bernoullin epäyhtälö, Lause 4.6.

Tehtävä 49. Osoita, että epäyhtälö
$$q\geq\frac{\ln(1+xq)}{\ln(1+x)}$$
on tosi, kun $q\in\mathbb{Q}$, $q\geq 1$ ja $x>0$.
Vihje: Bernoullin epäyhtälö, Lause 4.7.

Tehtävä 50. Todista Bernoullin epäyhtälö rationaaliluvuille, $(1+h)^r \geq 1 + rh$, tapauksessa $r \geq 1$ ja $1 + rh > 0$ epäyhtälön (45) avulla.
Vihje: Ehdosta $r \geq 1$ saadaan $0 \leq \frac{1}{r} \leq 1$.

Tehtävä 51. Osoita, että epäyhtälö

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 - x$$

on tosi, kun $n > x > 1$ ja $n, r \in \mathbb{R}$.
Vihje: Sijoita $h = -\frac{x}{n}$ Lauseeseen 4.8.

Tehtävä 52. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että nyt on voimassa epäyhtälö

$$xy \leq x \log x - x + e^b.$$

Vihje: Youngin epäyhtälö. Sijoita $f(x) = \log x + 1$.

Tehtävä 53. Osoita, että positiivisille reaaliluvuille x ja y on voimassa

$$3\sqrt[3]{x}\, y \leq x + 2y\sqrt{y}.$$

Vihje: Youngin epäyhtälö, Seuraus 4.10.

Tehtävä 54. Funktio f on konveksi välillä $[0, 2]$. Osoita, että epäyhtälö

$$f\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{6}\right) \leq \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{3} + \frac{f(x_3)}{6}$$

on voimassa kaikilla $x_1, x_2, x_3 \in [0, 2]$.
Vihje: Jensenin epäyhtälö.

Tehtävä 55. Osoita, että luvuille $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ on voimassa

$$x^x y^y z^z \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}.$$

Vihje: Jensenin epäyhtälö, Seuraus 4.14.

Tehtävä 56. Olkoot $u,\ v > 0$ ja $u + v = 1$. Määritä alaraja lausekkeelle

$$\left(u + \frac{1}{u}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{v}\right)^2$$

Jensenin epäyhtälöä käyttäen.
Vihje: Seuraus 4.14. Sijoita $x_1 = u + \frac{1}{u}$.

5 Trigonometrisia epäyhtälöitä

But Piglet is so small that he slips into a pocket, where it is very comfortable to feel him when you are not quite sure whether twice seven is twelve or twenty-two.

— A. A. Milne, *Winnie-the-Pooh*

Tässä luvussa tarkastellaan trigonometrisiin funktioihin liittyviä epäyhtälöitä kuten Jordanin epäyhtälöä, Cusa–Huygensin epäyhtälöä ja Huygensin epäyhtälöä. Näiden jälkeen esitellään muutama toistaiseksi nimetön trigonometrinen epäyhtälö. Luvun loppuun on koottu harjoitustehtäviä, jotka liittyvät luvussa esiintyviin epäyhtälöihin. Nyt esitettyjä, ja lukuisia muita, epäyhtälöitä käytetään määrittelemään raja-arvoja trigonometrisille funktioille. Lisäksi monet geometriaan, ja erityisesti kolmioihin, liittyvät ongelmat voidaan ratkaista trigonometrisia epäyhtälöitä käyttäen.

5.1 Jordanin epäyhtälö

Jordanin epäyhtälön uskotaan saaneen nimensä ranskalainen matemaatikon Camille Jordanin (1838–1922) mukaan. Varmaa tietoa tästä ei kuitenkaan ole, sillä epäyhtälön alkuperästä on hyvin vähän tietoa, kuten myös artikkelissa [34] todetaan. Jordanin epäyhtälöstä johdettuja epäyhtälöitä käsitellään enemmän esimerkiksi artikkelissa [21].

Lause 5.1 (Jordanin epäyhtälö)**.** *Kaksoisepäyhtälö*

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \tag{69}$$

on voimassa, kun $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Todistuksen pohjana on käytetty Mitrinovićin todistusta [30, s. 33].

Todistus. Tutkitaan aluksi tunnettua epäyhtälöä $\frac{1}{\cos^2\theta} \geq 1$, missä $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Integroidaan epäyhtälö puolittain välillä $[0, \theta]$, jolloin saadaan

$$\tan\theta \geq \theta \tag{70}$$

kaikilla $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

Tutkitaan seuraavaksi termin $\frac{\sin\theta}{\theta}$ kulkua derivaatan avulla. Nyt saadaan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\theta^2} = \frac{\cos\theta}{\theta^2}(\theta - \tan\theta).$$

Koska välillä $(0, \frac{\pi}{2}]$ on voimassa $\frac{\cos\theta}{\theta^2} \geq 0$ ja epäyhtälön (70) nojalla välillä $[0, \frac{\pi}{2})$ on voimassa $\theta - \tan\theta \geq 0$, on edellisten nojalla välillä $(0, \frac{\pi}{2}]$ voimassa epäyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) \leq 0.$$

Koska funktio $\frac{\sin\theta}{\theta}$ on näin ollen jatkuva ja vähenevä välillä $(0, \frac{\pi}{2}]$, se saa pienimmän arvonsa $\frac{\pi}{2}$, kun $\theta = \frac{\pi}{2}$. Kaksoisepäyhtälön (69) vasemmanpuoleinen epäyhtälö on nyt todistettu.

Todistetaan kaksoisepäyhtälön oikeanpuoleinen epäyhtälö jakamalla tunnettu epäyhtälö $\sin\theta < \theta$, missä $\theta < 0$, puolittain positiivisella termillä θ, jolloin saadaan

$$\frac{\sin\theta}{\theta} < 1.$$

Alkuperäinen kaksoisepäyhtälö

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

saadaan yhdistämällä saadut epäyhtälöt. □

Eräs hieno ja yksinkertainen todistus Jordanin epäyhtälölle on esitelty artikkelissa [52].

Esimerkki 48. Osoita, että funktio $f(x) = \sin x$ on funktioiden $g(x) = x$ ja $h(x) = \frac{2}{\pi}x$ välillä, kun $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

Ratkaisu. Välillä $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ on voimassa Jordanin epäyhtälö

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

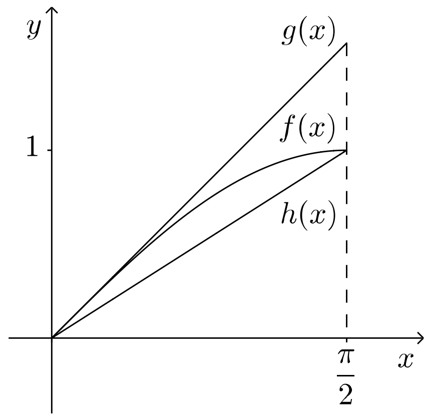
Kerrotaan epäyhtälö puolittain muuttujalla $x \neq 0$. Nyt epäyhtälö on muotoa

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x. \tag{71}$$

Täten funktio $f(x) = \sin x$ on funktioiden $g(x) = x$ ja $h(x) = \frac{2}{\pi}x$ välillä, kun $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Epäyhtälön graafinen tarkastelu esitetään Kuvassa 10. △

5.2 Huygensin epäyhtälö

Seuraavaksi tarkastellaan kahta hyvin samankaltaista trigonometrisia funktioita arvioivaa epäyhtälöä, *Cusa–Huygensin epäyhtälöä* ja *Huygensin epäyhtälöä*.



Kuva 10: Funktioiden $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ ja $h(x) = \frac{2}{\pi}x$ kuvaajat välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Cusa–Huygensin epäyhtälön on ensimmäisenä esittänyt saksalainen pappi Nicholas Cusa (1401–1464), ja sen todisti alankomaalainen matemaatikko Willebrord van Roijen Snell (1581–1626) vuonna 1631 ilmestyneessä teoksessaan *Cyclometicus*. Snellin todistus ei kuitenkaan ollut täydellinen. Kiistattoman todistuksen epäyhtälölle esitti lopulta alankomaalainen fyysikko Christiaan Huygens (1629–1695). Vuonna 1654 ilmestyneessä teoksessaan *De Circuli Magnitudine Inventa* [23, s. 91–215] Huygens käyttää Cusa–Huygensin epäyhtälöä π:n likiarvon arvioimiseen. [39] Cusa–Huygensin epäyhtälön avulla on johdettu kasvava määrä uusia epäyhtälöitä, joita on esitetty esimerkiksi artikkeleissa [8], [21] ja [38].

Lause 5.2 (Cusa–Huygensin epäyhtälö)**.** *Kaikilla* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *on voimassa epäyhtälö*

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{\cos x + 2}{3}. \tag{72}$$

Todistus. Sievennetään aluksi epäyhtälöä (72). Koska $x > 0$, epäyhtälö voidaan kertoa puolittain termillä $3x$, jolloin saadaan

$$3\sin x < x\cos x + 2x$$

ja edelleen

$$x\cos x - 3\sin x + 2x > 0. \tag{73}$$

Tutkitaan funktiota $h(x) = x\cos x - 3\sin x + 2x$. Jos funktio $h(x) > 0$ kaikilla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, myös alkuperäinen epäyhtälö (72) on tosi. Tutkitaan funktion $h(x)$

kulkua sen derivaatan avulla. Funktion derivaattafunktio on

$$\begin{aligned} h'(x) &= -x\sin x + \cos x - 3\cos x + 2 \\ &= -x\sin x - 2\cos x + 2, \end{aligned}$$

josta edelleen saadaan

$$\begin{aligned} h''(x) &= -x\cos x - \sin x + 2\sin x \\ &= \sin x - x\cos x \\ &= \cos x\tan x - x\cos x \\ &= \cos x\,(\tan x - x)\,. \end{aligned}$$

Koska $\cos x > 0$ ja $\tan x - x > 0$ kaikilla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, on toinen derivaattafunktio $h''(x) = \cos x(\tan x - x) > 0$ kaikilla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Derivaattafunktio $h'(x)$ on täten kasvava. Kun lisäksi $h'(0) = 0$, on $h'(x) > 0$ kaikilla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tästä saadaan edelleen, että funktio $h(x)$ on kasvava. Lisäksi $h(0) = 0$, joten $h(x) > 0$. Täten epäyhtälö (73) on voimassa, joten myös alkuperäinen epäyhtälö (72) on tosi. □

Esimerkki 49. Olkoon $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Osoita, että nyt on voimassa epäyhtälö

$$2\sin x\cos x < x\cos 2x + 2x.$$

Ratkaisu. Koska $0 < x < \frac{\pi}{4}$, on lisäksi voimassa $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$. Täten Lauseen 5.2 nojalla Cusa-Huygensin epäyhtälö

$$\frac{\sin 2x}{2x} < \frac{\cos 2x + 2}{3}$$

on voimassa. Kerrotaan epäyhtälö puolittain positiivisella termillä $3x$, jolloin saadaan epäyhtälö

$$\frac{3}{2}\sin 2x < x\cos 2x + 2x.$$

Sijoitetaan epäyhtälöön $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ja saadaan

$$3\sin x\cos x < x\cos 2x + 2x,$$

mistä alaspäin arvioimalla saadaan edelleen

$$2\sin x\cos x < x\cos 2x + 2x. \qquad \triangle$$

Seuraavaksi esitellään ja todistetaan epäyhtälö, josta käytetään nimeä Huygensin epäyhtälö. Kuten edellä tarkastellun Cusa–Huygensin epäyhtälön, Huygensin epäyhtälön todisti Snell kirjassaan *Cyclometicus* vuonna 1654. Todistus oli kuitenkin monin paikoin epämääräinen, ja vuonna 1654 ilmestyneessä teoksessaan *De Circuli Magnitudine Inventa* [23, s. 91–215] Huygens todisti myös tämän epäyhtälön. [39] Huygensin epäyhtälön avulla johdettuja epäyhtälöitä tarkastellaan esimerkiksi artikkelissa [37].

Lause 5.3 (Huygensin epäyhtälö)**.** *Kaikilla* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ *on voimassa epäyhtälö*

$$2\sin x + \tan x \geq 3x. \tag{74}$$

Todistus. Tutkitaan funktiota

$$f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x.$$

Jotta epäyhtälö (74) olisi tosi, on oltava $f(x) \geq 0$. Funktion arvo pisteessä $x = 0$ on $f(0) = 0$. Derivoidaan funktio $f(x)$ muuttujan x suhteen. Koska sinifunktio $\sin x$ on derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja tangenttifunktio $\tan x$ on derivoituva kaikilla $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, funktio $f(x)$ on derivoituva kaikilla $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Funktion $f(x)$ derivaattafunktio on

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \\ &= \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Kaikilla $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ derivaattafunktion nimittäjä $\cos^2 x > 0$. Mikäli osoittaja $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1 \geq 0$, on $f'(x) > 0$. Olkoon $t = \cos x$ ja $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$, missä $t \in [0, 1)$. Funktio

$$\begin{aligned} g(t) &= 2t^2 - 3t^2 + 1 \\ &= (t^2 - 2t + 1)(2t + 1) \\ &= (t - 1)^2(2t + 1) \end{aligned}$$

on selvästi positiivinen kaikilla $t \in [0, 1)$. Nyt $f(0) = 0$ ja $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, joten funktio $f(x)$ on kasvava tällä välillä. Koska nyt $f(x) \geq 0$, epäyhtälö (74) on tosi. □

Esimerkki 50. Osoita, että epäyhtälö

$$\frac{\tan x}{2} \geq x - \sin x$$

on voimassa kaikilla $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ratkaisu. Välillä $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ on voimassa Huygensin epäyhtälö (74), jonka nojalla

$$2\sin x + \tan x \geq 3x.$$

Jakamalla tämä puolittain luvulla 2 saadaan

$$\sin x + \frac{\tan x}{2} \geq \frac{3}{2}x,$$

josta arvioimalla alaspäin saadaan edelleen

$$\sin x + \frac{\tan x}{2} \geq x.$$

Vähennetään lopuksi puolittain funktio $\sin x$. Nyt

$$\frac{\tan x}{2} \geq x - \sin x. \qquad \triangle$$

5.3 Muita trigonometrisia epäyhtälöitä

Esitellään ja todistetaan muutamia trigonometrisia ja hyperbolisia funktioita sisältäviä epäyhtälöitä. Seuraaville epäyhtälöille ei muista epäyhtälöistä poiketen ole esimerkkejä eikä Lausetta 5.4 lukuun ottamatta harjoitustehtäviä.

Seuraava epäyhtälö ja sen todistus löytyvät artikkelista [55, s. 8–9].

Lause 5.4. *Kaikilla* $\theta \in [-\pi, \pi]$ *on voimassa*

$$|\theta| \leq \pi \left|\sin \frac{\theta}{2}\right|.$$

Todistus. Määritellään aluksi funktio $f(\theta) = \pi \sin\theta - 2\theta$, jolle on voimassa $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$. Derivoidaan funktio kahdesti, jolloin saadaan ensiksi

$$f'(\theta) = \pi\cos\theta - 2$$

ja edelleen

$$f''(\theta) = -\pi\sin\theta.$$

Koska funktion toinen derivaatta $f''(\theta)$ on aina negatiivinen välillä $(0, \frac{\pi}{2}]$, funktion ensimmäinen derivaatta $f'(\theta)$ on aidosti vähenevä välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$. Koska $f'(0) = \pi - 2 > 0$ ja $f'(\frac{\pi}{2}) = -2 < 0$, on välillä $(0, \frac{\pi}{2})$ oltava jokin piste θ_0, jolle $f'(\theta_0) = 0$. Tällöin funktio $f(\theta)$ on kasvava välillä $[0, \theta_0]$ ja vähenevä välillä $[\theta_0, \frac{\pi}{2}]$. Lisäksi välillä $(0, \frac{\pi}{2})$ on voimassa $f(x) > 0$. Koska funktio $f(\theta)$ on pariton, kaikilla $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on voimassa

$$|2\theta| \leq \pi|\sin\theta|.$$

Tämä on yhtäpitävä epäyhtälön

$$|\theta| \leq \pi|\sin\frac{\theta}{2}|,$$

missä $\theta \in [-\pi, \pi]$, kanssa. $\square$

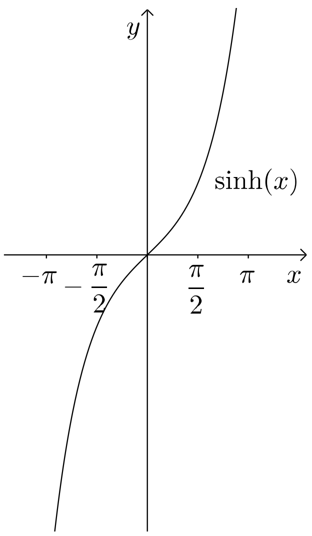
Ennen seuraavan lauseen käsittelyä määritellään hyperboliset funktiot *hyperbolinen sini*, $\sinh(x)$, ja *hyperbolinen kosini*, $\cosh(x)$, eksponenttifunktion avulla. Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

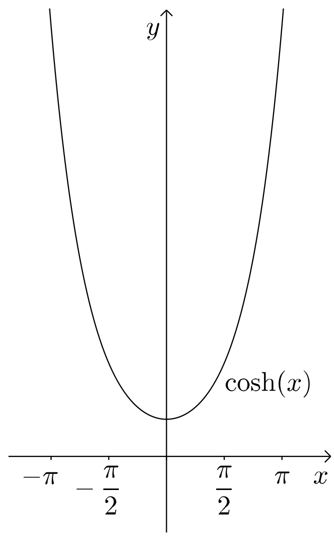
ja

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sekä yhtäsuuruus $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Lisäksi mainittakoon, että hyperbo-



Kuva 11: Hyperbolisen sinin $\sinh(x)$ kuvaaja.



Kuva 12: Hyperbolisen kosinin $\cosh(x)$ kuvaaja.

lisen sinin ja hyperbolisen kosinin derivaattafunktiot ovat $\mathrm{D}\sinh x = \cosh x$ ja $\mathrm{D}\cosh x = \sinh x$.

Seuraava hyperbolisia funkioita koskeva epäyhtälö todistuksineen löytyy artikkelista [21, s. 9].

Lause 5.5. *Kaikilla $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ on voimassa*

$$\cosh\theta < \frac{\cos\theta}{\sqrt{(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2}}. \tag{75}$$

Todistus. Määritellään funktio $g(\theta) = \cos^2\theta - \cosh^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. Funktio $g(\theta)$ on valittu niin, että mikäli se on positiivinen välillä $(0, \frac{\pi}{4})$, epäyhtälö (75) on tosi tällä välillä. Derivoidaan funktio $g(\theta)$ kahdesti, jolloin saadaan

$$g'(\theta) = \sin(2\theta)\sinh(2\theta) - \cos(2\theta)\cosh(2\theta)$$

ja

$$g''(\theta) = 4\sin(2\theta)\sinh(2\theta).$$

Koska $g''(\theta)$ on kahden positiivisen luvun tulona positiivinen välillä $(0, \frac{\pi}{4})$, ensimmäiselle derivaatalle on voimassa $f'(\theta) > f'(0) = 0$. Edelleen saadaan $f(\theta) > f(0) = 0$, mikä todistaa epäyhtälön (75) paikkansapitävyyden. □

Lopuksi tutkitaan kahta artikkelista [38, s. 148] löytyvää epäyhtälöä. Viitatussa artikkelissa seuraavat epäyhtälöt on virheellisesti määritelty kaikilla $\theta \geq 0$ oikean määrittelyvälin $\theta \in [-\pi, \pi]$ sijaan. Tämä epäyhtälöiden määritelmissä ja todistuksissa oleva virhe korjataan alla.

Lause 5.6. *Kaikilla* $\theta \in [-\pi, \pi]$ *on voimassa*

$$\cos\theta\cosh\theta \leq 1. \tag{76}$$

Todistus. Nähdään helposti, että tapaus $\theta = 0$ on tosi. Määritellään funktio $s(\theta) = \cos\theta\cosh\theta - 1$, missä $\theta \in [-\pi, \pi]$. Koska funktio $s(\theta)$ on symmetrinen, riittää, että tutkitaan funktiota välillä $(0, \pi]$. Derivoidaan funktio kahdesti, jolloin saadaan

$$s'(\theta) = \cos\theta\sinh\theta - \sin\theta\cosh\theta$$

ja edelleen

$$s''(\theta) = -2\sin\theta\sinh\theta.$$

Koska funktion toinen derivaatta $s''(\theta)$ on negatiivinen välillä $(0, \pi]$, funktion ensimmäinen derivaatta $s'(\theta)$ on aidosti vähenevä tällä välillä. Nyt on voimassa $s'(\theta) < s'(0) = 0$ kaikilla $\theta \in (0, \pi]$. Koska funktion derivaatta on negatiivinen välillä $(0, \pi]$, saadaan edelleen $s(\theta) < s(0) = 0$, mikä on yhtäpitävä epäyhtälön (76) kanssa. □

Lause 5.7. *Kaikilla* $\theta \in [-\pi, \pi]$ *on voimassa*

$$\sin\theta\sinh\theta \leq \theta^2. \tag{77}$$

Todistus. Tutkitaan aluksi tapausta $\theta = 0$. Tämä on selvästi tosi. Määritellään funktio $t(\theta) = \theta^2 - \sin\theta\sinh\theta$. Koska funktio on symmetrinen, riittää, että todistetaan epäyhtälön olevan voimassa välillä $(0, \pi]$. Funktion ensimmäinen ja toinen derivaatta ovat muotoa

$$t'(\theta) = 2\theta - \cos\theta \sinh\theta - \sin\theta\cosh\theta$$

ja

$$t''(\theta) = 2(1 - \cos\theta\cosh\theta).$$

Funktion toinen derivaatta $t''(\theta)$ on positiivinen kaikilla $\theta \in (0, \pi]$ epäyhtälön (76) nojalla. Tästä seuraa, että funktion ensimmäinen derivaatta $t'(\theta)$ on aidosti kasvava tällä välillä. Nyt on voimassa $t'(\theta) > t'(0) = 0$ kaikilla $\theta \in (0, \pi]$. Nyt funktio $t(x)$ on vastaavasti aidosti kasvava, joten saadaan $t(\theta) > t(0) = 0$. Tämä on yhtäpitävä epäyhtälön (77) kanssa, joten lause on tosi. □

5.4 Harjoitustehtäviä

Tehtävä 57. [29, s. 110] Osoita, että epäyhtälö

$$1 - \frac{2}{\pi}\alpha \leq \cos\alpha \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$$

on tosi, kun $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Tehtävä 58. Olkoon $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Määritä lausekkeelle

$$\frac{\tan\beta}{\beta}\frac{\cos\beta}{\beta}$$

ylä- ja alaraja tällä välillä.

Tehtävä 59. Osoita, että epäyhtälö

$$\sin\frac{\pi}{\gamma} \geq \frac{2}{\gamma}$$

on tosi, kun $0 < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$.
Vihje: Jordanin epäyhtälö.

Tehtävä 60. Olkoon $0 < \delta < \frac{\pi}{6}$. Osoita, että nyt on voimassa

$$\frac{6}{\pi}\delta < \delta\cos 3\delta + 2\delta.$$

Vihje: Jordanin epäyhtälö ja Cusa–Huygensin epäyhtälö.

Tehtävä 61. Osoita Huygensin epäyhtälöä käyttäen, että epäyhtälö

$$\sin 2\lambda + \sin \lambda \geq \lambda \cos \lambda$$

on tosi, kun $0 \leq \lambda < \frac{\pi}{2}$.

Tehtävä 62. Osoita, että on voimassa

$$\frac{2}{\pi} \leq \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right|,$$

kun $0 < |\omega| \leq \frac{\pi}{2}$.
Vihje: Lause 5.4, sijoita $\theta = 2\omega$.

Viitteet

[1] Armitage, D. H.: *Two Applications of Bernoulli's Inequality.* The Mathematical Gazette, Vol. 66, No. 438, 1982. s. 309-310

[2] Beckenbach, E. ja Bellman, R.: *Anneli Lax New Mathematical Library, Volume 3 : Introduction to Inequalities.* Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1961.

[3] Beckenbach, E. ja Bellman, R.: *Inequalities.* Springer, Berliini, 1961.

[4] Bernoulli, J. ja Fritz, J. J.: *Positiones Arithmeticae De Seriebus Infinitis Earumq(ue) Summa Finita.* Mechel, 1704.

[5] Bullen, P. S., Mitrinović, D. S. ja Vasić, P. M.: *Means and Their Inequalities*, Springer Science & Business Media, Dordrecht, 1988.

[6] Bunjakovski, V. J.: *Sur quelques inégalités concernant les intégrales aux différences finies.* Mémoires de l'Academie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, 7e Série, Tome 1, No 9, 1859.

[7] Cauchy, A.-L.: *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, 1ère partie: Analyse algébrique.* Pariisi, 1821.

[8] Chen, C.-P. ja Cheung W.-S.: *Sharp Cusa and Becker–Stark inequalities.* J. Ineq. Appl., Vol. 1, 2011. s. 136

[9] Child, J. M..: *The geometrical lectures of Isaac Barrow.* The Open Court Publishing Company, Lontoo, 1916.

[10] Diananda, P. H.: *Inequalities for some cyclic sums.* Proc. Singapore Mat. Coll., Part 2. Math. Medley 5, 1977. s. 171–177

[11] Diaz, J. B. ja Metcalf, F. T.: *An Analytic Proof of Young's Inequality.* The American Mathematical Monthly, Vol. 77, No. 6, 1970. s. 603–609

[12] Dragomir, S. S.: *A Survey on Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type discrete inequalities.* Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol. 4, Issue 3, Article 63, 2003.

[13] Godunova, E. K. ja Levin, V. I.: *A cyclic sum with 12 terms.* Mathematical Notes, Vol. 19, Issue 6, 1976. s. 510–511

[14] Halmetoja, M.: *Keskiarvoja ja epäyhtälöitä.* Tampereen Yliopisto, 2014.

[15] Hardy, G., Littlewood, J. E. ja Pólya, G.: *Inequalities.* Cambridge University Press, Cambridge, 2. painos, 1952.

[16] Heath, T. L.: *The thirteen books of Euclid's Elements, Vol 1.* Dover Publications, New York, 2. painos, 1956.

[17] Heath, T. L.: *The thirteen books of Euclid's Elements, Vol 2.* Dover Publications, New York, 2. painos, 1956.

[18] Hofmann, J. E.: *Über die Exercitatio geometrica des M. A. Ricci.* Centaurus, Nro 9, 1963. s. 139–193

[19] Hölder, O.: *Über einen Mittelwertsatz.* Göttinger Nachrichten, 1889. s. 38–47

[20] Jensen, J. L. W. V.: *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.* Acta mathematica, 30, 1, 1906. s. 175–193

[21] Klén, R., Visuri, M. ja Vuorinen, M.: *On Jordan type inequalities for hyperbolic functions.* J. Inequal. Appl., 2010.

[22] Korovkin, P. P.: *Inequalities.* Pergamon, Oxford, 1961.

[23] Huygens, C.: *Œuvres complètes de Christiaan Huygens: Travaux de mathématiques pures, 1652–1656, Tome 12.* Société hollandaise des sciences, 1910.

[24] Maligranda, L.: *Nierówność Bernoulliego: ponad 300 lat historii.* Teoksessa XIX All Polish Conference on History of Mathematics "Around Bernoullis", Politechnika Lubelska, Lublin, 2006. s. 31–62

[25] Maligranda, L.: *Why Hölder's inequality should be called Rogers' inequality.* Mathematical Inequalities & Applications, Vol. 1, No. 1, 1998. s. 69–83

[26] Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G. ja Delgado, R. V.: *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach.* Birkhäuser, 2009.

[27] Markov, A. A., ja Sonin, N.: *Œuvres de P. L. Tchebychef.* Commissionaires de l'Academie imperiale des sciences, Pietari, 1907.

[28] Mercer, P. R.: *More calculus of a single variable.* Springer Science & Business Media, New York, 2014.

[29] Mitrinović, D. S.: *Elementary Inequalities.* P. Noordhoff, Groningen, 1964.

[30] Mitrinović, D. S.: *Analytic Inequalities.* Springer-Verlag, Berliini, 1970.

[31] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E. ja Fink, A. M.: *Classical and New Inequalities in Analysis.* Springer Science & Business Media, Dordrecht, 1993.

[32] Nahin, P. J.: *When Least Is Best: How Mathematicians Discovered Many Clever Ways to Make Things as Small (or As Large) as Possible.* Princeton University Press, 2007.

[33] Nesbitt, A. M.: *Problem 15114.* The Educational Times, 2, 1903.

[34] Qi, F., Niu, D. W. ja Guo, B. N.: *Refinements, Generalizations, and Applications of Jordan's Inequality and Related Problems.* Journal of Inequalities and Applications, 2009.

[35] Riesz, F.: *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen.* Mathematische Ann., Vol. 69, 1910. s. 449–497

[36] Rogers, L. J.: *An extension of a certain theorem in inequalities.* Messenger of Math., Vol. 17, 1888. s. 145–150

[37] Sándor, J.: *On Huygens Inequalities and the Theory of Means.* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2012.

[38] Sándor, J. ja Oláh-Gál, R.: *On Cusa-Huygens type trigonometric and hyperbolic inequalities.* Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 4, 2, 2012. s. 145–153

[39] Sándor, J. ja Bencze, M: *On Huygen's trigonometric inequality.* RGMIA Research Report Collection, Vol. 8, No. 3, 2005. s. 1–4

[40] Schwarz, H. A.: *Über ein Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung.* Acta Societatis Scientiarum Fennicae, tomus XV, 1885.

[41] Shapiro, H. S.: *Problem 4603.* The American Mathematical Monthly, Vol. 61, No. 8, 1954. s. 571–572

[42] Shapiro, H. S, ja Northover, F. H.: *Problem 4603.* The American Mathematical Monthly, Vol. 63, No. 3, 1956. s. 191–192

[43] Sluse, R. F.: *Mesolabum.* 1668.

[44] Steele, J. M.: *Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*. Cambridge University Press, New York, 2004.

[45] Tolsted, E.: *An Elementary Derivation of the Cauchy, Holder, and Minkowski Inequalities from Young's Inequality*. Mathematics Magazine, Vol. 37, No. 1, 1964. s. 2–12

[46] Troesch, B. A.: *The Validity of Shapiro's Cyclic Inequality*. Mathematics of Computation, Vol. 53, No. 188, 1989. s. 657–664

[47] Tšebyšov, P. L.: *Sur les expressions approximatives des intégrales définies par les autres prises entre les même limites*. 1882. Sisältyy kokoelmaan [27, s. 716–719].

[48] Tšebyšov, P. L.: *Sur une série qui fournit les valeurs extrêmes des intégrales, lorsque la fonction sous le signe est décomposée en deux facteurs*. 1883. Sisältyy kokoelmaan [27, s. 404–417].

[49] Vaderlind, P.: *The Undeniable Charm of Inequalities: A Short Guided Tour through the Jungle of Algebraic Inequalities*. Stockholms universitet, 2004.

[50] Woeginger, G. J.: *When Cauchy and Hölder Met Minkowski: A Tour through Well-Known Inequalities*. Mathematics Magazine, Vol. 82, No. 3, 2009. s. 202-207

[51] Young, W. H.: *On Classes of Summable Functions and their Fourier Series*. Proc. Royal Soc., Series A, 87, 1912. s. 225–229

[52] Yuefeng, F.: *Proof without words: Jordan's Inequality*. Mathematics Magazine, Vol. 69, No. 2, 1996. s. 126

[53] Bernoulli's inequality, Queen's College, Hong Kong. http://www.qc.edu.hk/math/Resource/AL/Bernoulli%20inequality.pdf. Luettu 12.5.2017.

[54] Bormashenko, O.: *Inequality problems*. Putnam problem-solving seminar, University of Texas, 2012. https://www.ma.utexas.edu/users/olenab/s12-PutnamInequalitiesQs(3rd).pdf. Luettu 2.6.2017.

[55] Payne, S.: *Trigonometric Identities and Inequalities: A Preview of Fourier Analysis*. 2007.

[56] Saxena, S.: *A Simple Proof of Bernoulli's Inequality*. Indian Institute of Technology, Kanpur, 2012.

[57] Simonovikj, S.: *Introduction to Olympiad Inequalities*. MIT, 2017.

Kiitokset

Procrastinate now, don't put it off.

— Ellen DeGeneres

Lopuksi haluan kiittää

vanhempiani ja sisaruksiani kaikesta. Te olette pienempiä kuin kolme.

ohjaajaani FT Riku Kléniä erittäin hyvästä ja kannustavasta ohjauksesta.

Viljaa, joka halusi tulla mainituksi erikseen.

ystäviäni kaikesta kivasta, jonka on voinut laittaa opiskelun edelle.

opiskelutovereitani yhteisistä lounashetkistä.

sukulaisiani ja tuttujani, jotka ovat odottaneet pääsevänsä syömään kakkua.

kaikkia, jotka ovat osoittaneet kiinnostusta graduani kohtaan.

Graduni ei olisi valmistunut ilman teitä.