Luottoriskimallien implikoimat konkurssitodennäköisyydet

Samuel Virtanen

Pro gradu -tutkielma
Joulukuu 2019

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

VIRTANEN, SAMUEL: Luottoriskimallien implikoimat konkurssitodennäköisyydet
Pro gradu -tutkielma, 50 s.
Matematiikka
Joulukuu 2019

Tämä pro gradu -tutkielma käsittelee luottoriskimallien avulla saatavia yrityksen konkurssitodennäköisyyksiä.

Luottoriskimallit voidaan jakaa karkeasti redusoituihin ja rakenteellisiin malleihin. Rakenteelliset mallit tutkivat riskiä yrityksen sisäisestä näkökulmasta. Siinä velkakirjan hinta esitetään yhtäpitävästi optioiden hinnan avulla. Rakenteellisissa malleissa yrityksen arvolle määritetään raja, jonka alittaessa konkurssi tapahtuu. Usein yrityksen arvoprosessin oletetaan noudattavan geometrista Brownin liikettä. Redusoidut mallit käsittelevät riskiä ulkoiseen informaatioon perustuen. Niissä konkurssin oletetaan olevan Poisson-tapahtuma, joka riippuu konkurssi-intensiteetistä.

Rakenteellisista malleista tarkennutaan erityisesti sekä Mertonin että Black–Coxin malliin. Mertonin mallille esitetään parametrien estimointimenetelmä käyttäen suurimman uskottavuuden estimointia. Redusoiduissa malleissa käsitellään velkakirjan hinnoittelua intensiteettikäsitteen avulla. Tämän jälkeen tarkastellaan Markov-malliin perustuvaa intensiteettimallia. Lopuksi käsitellään, miten rakenteellisen ja redusoidun mallin hyvät puolet on mahdollista yhdistää.

Asiasanat: luottoriskimalli, redusoitu malli, rakenteellinen malli, Mertonin malli, konkurssiraja, konkurssitodennäköisyys.

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Teoreettiset taustatiedot **3**
2.1 Velkakirjat . . . 3
2.2 Korko ja nykyarvottaminen . . . 3
2.2.1 Jatkuva-aikainen korko . . . 4
2.2.2 Luottospredi . . . 5
2.3 Optiot . . . 6
2.3.1 Rajaoptiot . . . 8
2.3.2 Yhdistetyt optiot . . . 9
2.3.3 Black–Scholes-mallin ongelmia . . . 9
2.4 Riskineutraali todennäköisyysmitta . . . 10
2.5 Brownin liike ja Itôn lemma . . . 12

3 Rakenteelliset luottoriskimallit **15**
3.1 Mertonin malli . . . 15
3.1.1 KMV-malli . . . 19
3.1.2 Mertonin mallin ongelmia . . . 19
3.2 Kuponkikorolliset velkakirjat . . . 20
3.3 Black–Cox-malli . . . 21
3.3.1 Yhdistetty konkurssien määritelmä . . . 24
3.3.2 Ajasta riippuvainen konkurssiraja . . . 26
3.3.3 Usean senioriteetin lainat . . . 27
3.3.4 Black–Cox-mallin ongelmia . . . 27
3.4 Mertonin mallin parametrien μ ja σ estimointi . . . 28

4 Redusoidut luottoriskimallit **33**
4.1 Intensiteettiin nojautuva malli . . . 33
4.1.1 Takaisinmaksutermi jatkuvana funktiona . . . 36
4.2 Luottoluokituksiin liittyvä Markov-malli . . . 37

5 Rakenteellisen ja redusoidun mallin yhdistäminen **41**
5.1 Konkurssirajaa ei havaita: I^2-malli . . . 41
5.2 Satunnainen konkurssiraja . . . 43
5.3 Epätäydellinen informaatio yrityksen arvoprosessista . . . 45

6 Päätelmät **47**

Merkintöjä

Alla listattuna oleellisimmat käytössä olevat merkinnät:

$\mathbb{1}_A$ = Indikaattorifunktio

A = Kumulatiivinen hasardifunktio

B_t^T = Velkakirjan hinta.

$\bar{B}_t^T$ = Riskittömän velkakirjan hinta

C = Osto-optio

D = Konkurssiraja

DIC =Down-and-in-osto-optio

DOC =Down-and-out-osto-optio

E_t = Oman pääoman määrä

K = Velkakirjan nimellisarvo

L = Velkavipusuhde

M_t = Yrityksen arvon historiallinen minimi

$m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ = Normaalijakauma parametreilla μ ja σ^2

$N(t, \omega)$ = Indikaattori, joka kertoo onko yritys konkurssissa, kun ollaan tilassa (t, ω)

P = Myyntioptio

$\Phi(x)$ = Standardinormaalijakauman kertymäfunktio

r = Korko

τ = Konkurssihetki

V_t = Yrityksen arvoprosessi

W_t = Brownin liike

1 Johdanto

Rahoitusmarkkinat koostuvat eri riskisistä instrumenteista. Jokaisen instrumentin hinnan voidaan ajatella olevan riippuvainen kohde-etuutena olevan yrityksen konkurssiriskistä. Osakkeen tai velkakirjan saa sitä halvemmalla, mitä todennäköisempi instrumenttiin liittyvän yrityksen konkurssi on. Koska konkurssiriskin nousu laskee osakkeen hintaa, vaikutus kohdistuu tällöin myös optioihin ja kaikkiin muihin yritykseen liittyviin instrumentteihin. Täten varsinkin isojen institutionaalisten sijoittajien voi olla tarpeellista miettiä sijoituksiaan myös konkurssiriskin kannalta.

Yrityksen itsensäkin on hyvä olla tietoinen omista riskeistään. Jokaiseen investointiin liittyy riski, joka tällöin lisää myös oman yrityksen konkurssiriskiä. Täten ennen uusia, erityisesti riskillisempiä, investointeja tehdessä nykyisen riskitason tunteminen voi olla tarpeellista. Osana riskienhallintaa on mahdollista katsoa sen hetkistä oman yrityksen konkurssitodennäköisyyttä ja verrata sitä todennäköisyyteen joka saadaan, jos investointi tehdään. Toisaalta, jos vastapuoliriski koetaan merkittäväksi, myös investointiin liittyvän yrityksen konkurssiriskiä voidaan arvioida.

Luottoriskimallit voidaan jakaa karkeasti kahteen kategoriaan: rakenteellisiin ja redusoituihin malleihin. Rakenteelliset mallit pyrkivät mallintamaan yrityksen arvon kehittymistä ja selvittämään, milloin yrityksen arvo alittaa ennalta määrätyn konkurssirajan. Tällöin tarvitaan tietoa yrityksen pääomarakenteesta. Useissa malleissa yrityksen arvon oletetaan noudattavan geometrista Brownin liikettä. Redusoiduissa malleissa keskitytään täysin ulkoisiin tekijöihin. Rakenteellisen mallin voidaan ajatella olevan lähtöisin Mertonin mallista [32], joka pohjautuu Black–Scholes-optiohinnoittelumalliin [4]. Vastaavasti redusoitujen mallien alkuna voidaan pitää Jarrowin ja Turnbullin artikkelia [25].

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä erilaisia tapoja tutkia yrityksen konkurssitodennäköisyyksiä luottoriskimallien avulla. Työssä keskitytään käsittelemään muutamaa mallia tarkemmin. Mertonin mallille esitellään tapa estimoida mallin parametrit.

Tutkielman rakenne etenee seuraavasti. Luvussa kaksi esitellään tarvittavia matemaattisia ja rahoitusteoreettisia käsitteitä ja määritelmiä. Mittateoreettiseen käsitteistöön voi tutustua tarkemmin kirjan [2] avulla. Luvussa kolme käsitellään redusoituja malleja. Ensin käsitellään Mertonin mallia, joka perustuu ajatukselle, että lainan päättymishetkellä tutkitaan, onko yrityksellä varaa maksaa velkansa pois. Jos varoja ei ole, yritys asetetaan konkurssiin. Toinen käsiteltävä malli on Black–Cox-malli, jossa konkurssi voi tapahtua kesken laina-ajan. Malli antaa myös mahdollisuuden asettaa erillisen konkurssirajan. Konkurssirajan asetustavasta riipuen, yritys voi joutua konkurssiin, vaikka se olisikin kykenevä maksamaan velkansa. Luvun kolme lopussa esitellään, miten Mertonin mallin parametrit voidaan estimoida suurimman uskottavuuden menetelmällä.

Luvussa neljä siirrytään tarkastelemaan redusoituja malleja, joiden kantavana voimana toimii konkurssi-intensiteetin käsite. Redusoiduissa malleissa konkurssin oletetaan tapahtuvan yllättäen. Alussa esitellään tapoja hinnoitella velkakirja olettamalla jotain takaisinmaksun suuruudesta, kun konkurssi tapahtuu. Luvun loppupuoli käsittelee Markov-mallia.

Viidennessä luvussa tutkitaan redusoidun ja rakenteellisen mallin yhdistämistä. I^2-mallissa oletetaan, että konkurssiraja on havaitsematon satunnaismuuttuja, jonka arvo vaihtelee. Toisessa lähestymistavassa käsitellään kiinnitettyä konkurssirajaa, joka on satunnainen. Kolmas käsiteltävä malli olettaa markkinoilla olevan informaation sisältävän kohinaa.

Kuudennessa luvussa tehdään yhteenveto opinnäytetyöstä.

2 Teoreettiset taustatiedot

2.1 Velkakirjat

Velkakirja tai *bondi* on kahden osapuolen – lainan myöntäjän eli sijoittajan ja lainan saajan – välinen sopimus, jossa lainan myöntäjä myöntää rahaa lainan saajalle. Lainan saaja lupautuu maksamaan lainan pois määrätyllä korolla ja määrätyn ajanjakson aikana. Velkakirjan *nimellisarvoksi* kutsutaan summaa, joka maksetaan laina-ajan päättyessä, lukuun ottamatta mahdollista kuponkikorkoa. *Maturiteetti* kertoo velkakirjan laina-ajan, eli lopullisen hetken, jolloin laina maksetaan takaisin. Velkakirjalle on voitu määritellä *kuponkikorko*. Tällöin ennalta määrätyin väliajoin maksetaan korko, joka on ilmaistu prosentteina nimellisarvosta. Velkakirjasta saataviksi *rahavirroiksi* kutsutaan kaikkia lainan myöntäjälle syntyviä saamisia, eli kuponkikorot sekä lainan lyhennykset. Velkakirjaa, joka ei maksa kuponkikorkoja, kutsutaan *nollakuponkilainaksi*. Nollakuponkilainassa lainan myöntäjä myöntää lainaa alle nimellisarvon verran ja vastineeksi hän saa maturiteetissa takaisin koko nimellisarvon. Myönnetyn summan ja nimellisarvon ero kuvaa sijoittajan saamaa tuottoa. [14, s.1–4]

2.2 Korko ja nykyarvottaminen

Rahalla on aika-arvo: euro tänään on arvokkaampi kuin euro huomenna. Rahan hintaa kuvaa *korko*. *Termiinikorolla* tarkoitetaan nykyisen korkotason implikoimaa tulevaisuuden korkotasoa. Jos esimerkiksi tunnetaan vuoden ja kahden vuoden riskitön korko, näiden avulla voidaan määrittää oletettu vuoden kuluttua noteerattava vuoden pituinen korko. [28] Nykyarvottamisella eli *diskonttaamisella* tarkoitetaan metodia, jossa tulevaisuudessa hetkellä t ilmenevä rahamäärä arvotetaan jollekin aikaisemmalle ajanhetkelle $t - k$. Tämän avulla eri ajanhetkien rahamäärät saadaan keskenään vertailukelpoisiksi. Vastaavasti metodia, jossa nykyhetken raha arvotetaan jollekin tulevaisuuden hetkeksi, kutsutaan *korkouttamiseksi*. Diskonttaaminen voidaan ajatella siis käänteisoperaationa tulevaisuuden rahan arvon määrittämiselle. Havainnollistetaan tätä tutkimalla yksinkertaista pankkitalletusta. Sijoitetaan pankkitilille s euroa rahaa, jolle maksetaan r suuruinen prosentuaalinen korko nimellisarvosta. Pankkitilillä on vuoden jälkeen $s(1+r)$ euroa ja n vuoden jälkeen $s(1+r)^n$ euroa. Käänteisesti on helppo huomata, että jos tavoitteena on saada n vuodessa säästötilille w verran rahaa korolla r, saadaan vaadittu

Diskonttaus

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[rr, bend right, "\cdot(1+r)^n"'] & & w \arrow[ll, bend right, "\frac{1}{(1+r)^n}\cdot"']
\end{tikzcd}$$

Korkoutus

Kuva 1: Säästösumman s korkoutus ja säästötavoitteen w diskonttaus.

sijoitussumma ratkaisemalla seuraavasta yhtälöstä s.

$$\begin{aligned}
w &= s(1+r)^n \\
s &= \frac{w}{(1+r)^n}.
\end{aligned}$$

Siirrytään tutkimaan $n \in \mathbb{N}$ vuoden pituisen velkakirjan nykyarvottamista, jossa velkakirja maksaa vuosittain p suuruisen prosentuaalisen koron. Olkoon velkakirjan nimellisarvo on FV ja käytettävä diskonttokorko r. Nyt jokaisen vuoden korkotulon rahavirta täytyy diskontata eri tekijällä. Ensimmäinen korko, joka maksetaan vuodenpäästä, diskontataan tekijällä $1+r$ ja toisen vuoden korko tekijällä $(1+r)^2$. Viimeisenä vuonna diskontataan sekä korko että nimellisarvo tekijällä $(1+r)^n$. Velkakirjan nykyarvo PV voidaan laskea seuraavasti:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{FV \cdot p}{(1+r)^i} + \frac{FV}{(1+r)^n}.$$

Jos koron maksu sekä diskonttaus suoritetaan m kertaa vuodessa (p verran vuodessa), lasketaan velkakirjan nykyarvo seuraavasti:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{FV \cdot \frac{p}{m}}{(1+\frac{r}{m})^{i\cdot m}} + \frac{FV}{(1+r)^{n\cdot m}}.$$

[29]

2.2.1 Jatkuva-aikainen korko

Palataan aiempaan pankkitiliesimerkkiin ja tutkitaan, miten koron voi maksaa jatkuva-aikaisesti. Oletetaan, että talletukselle s maksetaan korkoa m

kertaa vuodessa, ja r kuvaa vuotuista korkoprosenttia. Tällöin pankkitilille kertyy ajan saatossa summa

$$w = s \cdot (1 + \frac{r}{m})^{n \cdot m}.$$

Kun halutaan maksaa korkoja jatkuvassa ajassa, tällöin $m \longrightarrow \infty$. Saadaan

$$\begin{aligned} w &= \lim_{m \to \infty} s \cdot (1 + \frac{r}{m})^{n \cdot m} \\ &= s \cdot \lim_{m \to \infty} (1 + \frac{1}{m/r})^{n \cdot r \frac{m}{r}}. \end{aligned}$$

Merkitään $x = \frac{m}{r}$. Kun $m \to \infty$, niin $x \to \infty$, jolloin jatkuva korko saadaan muotoon

$$\begin{aligned} w &= s \cdot (\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^{x})^{rn} \\ &= s \cdot e^{rn}. \end{aligned}$$

[29]

2.2.2 Luottospredi

Luottoriskimalleja vertailtaessa on hyvä tutkia mallin hinnoittelemia tuottoja ja verrata niitä riskittömään tuottoon. Tätä voidaan tutkia luottospredin S avulla. *Luottospredi* kuvaa riskittömän ja riskillisen velkakirjan tuottoeroa, kun velkakirjat ovat muilta osin identtiset. Se lasketaan suoraan tuottojen erotuksena. Mielivaltainen velkakirja b voidaan esittää tuoton y avulla muodossa $b(t, T) = e^{-y(t,T)(T-t)}$. Tästä saadaan laskettua y

$$\begin{aligned} b(t, T) &= e^{-y(t,T)(T-t)} \\ \ln b(t, T) &= -y(t, T)(T - t) \\ y(t, T) &= -\frac{1}{T - t} \ln b(t, T). \end{aligned}$$

Näin ollen luottospredi on

$$S(t, T) = y_B - y_{\bar{B}} = -\frac{1}{T - t} \ln(\frac{B_t^T}{\bar{B}_t^T}), \quad T > t.$$

[18]

2.3 Optiot

Optiot ovat sijoitusinstrumentteja, jotka voidaan jakaa kahteen luokkaan, osto-optioihin ja myyntioptioihin. Osto-option haltijalla on oikeus, mutta ei velvollisuutta, ostaa kohde-etuus ja myyntioption haltijalla on oikeus, mutta ei velvollisuutta, myydä kohde-etuus määrättynä ajankohtana ennalta määrättyyn toteutushintaan. Option toisen osapuolen eli asettajan täytyy suorittaa kyseinen toimeksianto, jos option haltija näin haluaa. Optiot voidaan jakaa myös amerikkalaisiin ja eurooppalaisiin optioihin. Amerikkalainen optio voidaan toteuttaa milloin tahansa, kun taas eurooppalainen optio voidaan toteuttaa vain maturiteetissa. Tässä opinnäytetyössä käsiteltävät optiot ovat aina eurooppalaisia optioita.

Optiosopimuksessa määritellään option toteutushinta K sekä sen viimeinen toteutuspäivä. Osto-option haltija toteuttaa option vain, jos toteutushinta K on pienempi kuin kohde-etuuden markkinahinta V_T. Tällöin option haltija saa kohde-etuuden hinnalla K ja voi myydä sen eteenpäin markkinahintaan V_T. Näin tekemällä option haltija saa tuottoa erotuksen $V_T - K$. Vastaavasti option asettaja jää yhtä paljon tappiolle. Jos kohde-etuuden hinta on matalampi kuin osto-option toteutushinta, option haltija saa saman kohde-etuuden halvemmalla ostamalla sen markkinoilta markkinahintaan. Myyntioptiossa logiikka on käänteinen. Optio toteutetaan ainoastaan silloin, kun kohde-etuuden hinta on korkeampi kuin markkinahinta. Osto-option C ja myyntioption P hinta maturiteetissa T voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned} C &= \max(V_T - K, 0) = -\min(K - V_T, 0) \\ P &= \max(K - V_T, 0) = -\min(V_T - K, 0). \end{aligned}$$

Black–Scholes-kaava antaa eurooppalaiselle optiolle hinnan hetkelle $t = 0$, kun oletetaan ettei kohde-etuutena oleva arvopaperi maksa osinkoja:

$$\begin{aligned} C &= V_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \\ P &= Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - V_0\Phi(-d_1), \end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(V_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= \frac{\ln(V_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d1 - \sigma\sqrt{T}, \end{aligned}$$

$\Phi(x)$ on normaalijakauman kertymäfunktio, σ kohde-etuuden volatiliteetti ja r riskitön korko. [22, s. 246–248] Black–Scholes-hinta on aidosti kasvava volatiliteetin suhteen. Tämän osoittamista varten esitellään seuraava aputulos.

Lemma 2.1. Kun $\Phi'(x)$ on standardinormaalijakauman tiheysfunktio ja d_1 ja d_2 ovat määritelty kuten aiemmin, tällöin

$$V\Phi'(d_1) - Ke^{-rT}\Phi'(d_2) = 0.$$

Todistus. Standardinormaalijakauman tiheysfunktio on $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, joten

$$\begin{aligned}
&V\Phi'(d_1) - Ke^{-rT}\Phi'(d_2)\\
&= V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} - K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\\
&= e^{\ln V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} - e^{\ln K}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(d_1-\sigma\sqrt{T})^2}{2}}\\
&= e^{\ln V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} - e^{\ln K}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2-2\sigma\sqrt{T}d_1+\sigma^2T}{2}-rT}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\left(e^{\ln V} - e^{\ln K - \frac{-2\sigma\sqrt{T}d_1+\sigma^2T}{2}-rT}\right).
\end{aligned}$$

Koska tavoitteena on saada lauseke nollaan, tutkitaan suluissa olevaa lauseketta. Koska molempien kantaluku on sama, riittää tutkia eksponentteja. On siis osoitettava, että

$$\ln V = \ln K - \frac{-2\sigma\sqrt{T}d_1 + \sigma^2T}{2} - rT.$$

Sijoitetaan kaavaan termin d_1 laaja muoto, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&= \ln K + \sigma\sqrt{T}\frac{\ln\frac{V}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma^2T}{2} - rT\\
&= \ln K + \ln V - \ln K + rT + \frac{\sigma^2T}{2} - \frac{\sigma^2T}{2} - rT = \ln V.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$e^{\ln V} - e^{\ln K - \frac{-2\sigma\sqrt{T}d_1+\sigma^2T}{2}-rT} = 0,$$

jonka nojalla alkuperäinen väite on tosi. □

Edellistä tulosta hyväksikäyttäen voidaan osoittaa, että Black–Scholes-hinta on aidosti kasvava volatiliteetin suhteen.

Lause 2.2. Black–Scholes-mallin osto-option hinta

$$C = V_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

on aidosti kasvava volatiliteetin σ suhteen, jossa d_1 ja d_2 on määritelty kuten edellä.

Todistus. Osoitetaan derivoimalla lauseke muuttujan σ suhteen. Merkintä d' viittaa funktion d derivaattaa muuttujan σ suhteen. Ketjusäännön avulla $\frac{\partial \Phi(d_1(\sigma))}{\partial \sigma} = \Phi'(d_1(\sigma))d_1'(\sigma)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \sigma} &= V\frac{\partial \Phi\big(d_1(\sigma)\big)}{\partial \sigma} - Ke^{-rT}\frac{\partial \Phi\big(d_1(\sigma) - \sigma\sqrt{T}\big)}{\partial \sigma} \\
&= V\Phi'\big(d_1(\sigma)\big)d_1'(\sigma) - Ke^{-rT}\Phi'\Big(d_1(\sigma) - \sigma\sqrt{T}\Big)\Big(d_1'(\sigma) - \frac{\partial}{\partial \sigma}\sigma\sqrt{T}\Big) \\
&= d_1'(\sigma)\,\Big[V\Phi'\big(d_1(\sigma)\big) - Ke^{-rT}\Phi'\big(d_1(\sigma) - \sigma\sqrt{T}\big)\Big] \\
&\qquad + \sqrt{T}Ke^{-rT}\Phi'\big(d_1(\sigma) - \sigma\sqrt{T}\big).
\end{aligned}$$

Lemman 2.1 nojalla suluissa oleva lauseke on nolla. Koska K ja T ovat positiivisia vakioita ja tiheysfunktio saa aina epänegatiivisia arvoja, saadaan

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = \sqrt{T}Ke^{-rT}\Phi'\big(d_1(\sigma) - \sigma\sqrt{T}\big) > 0 \quad \forall\, \sigma > 0.$$

Näin ollen osto-option hinta on aidosti kasvava volatiliteetin σ suhteen. $\square$

2.3.1 Rajaoptiot

Rajaoptiot (barrier options) ovat optioita, jotka sisältävät lisäehtoja tavallisiin optioihin verrattuna. On olemassa osto-optioita, joissa määritellään raja, jonka osakkeen arvon on ylitettävä tai alitettava, ennen kuin optio tulee voimaan. Jos kyseistä rajaa ei saavuteta, option osto-oikeus ei tule voimaan. Vastaavasti voidaan määritellä raja siten, että jos osakkeen arvo ylittää tai alittaa tämän rajan, menettää optio osto-oikeuden ja optio muuttuu arvottomasti. Myyntioptioissa voidaan toimia vastaavalla tavalla. Optiot, joiden täytyy ensin saavuttaa raja ennen voimaantuloa, kutsutaan "knock-in" -optioiksi. Vastaavasti, jos rajan saavuttaminen mitätöi option oikeuden, kutsutaan niitä "knock-out" -optioiksi. Esitellään kaavat down-and-in- ja down-and-out-osto-optioiden hinnoille CDI ja CDO, kun oletetaan, että kohde-etuus ei maksa osinkoja.

Kun $H < K$, down-and-in-osto-option hinta on

$$CDI = V_0\Big(\frac{H}{V_0}\Big)^{2\lambda}\Phi(h) - Ke^{-rT}\Big(\frac{H}{V_0}\Big)^{2\lambda-2}\Phi(h - \sigma\sqrt{T}),$$

jossa

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma^2} \\
h &= \frac{\ln(H^2/(KV_0))}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}.
\end{aligned}$$

Tämän avulla saadaan down-and-out-osto-optio

$$CDO = C - CDI.$$

Kun $H \geq K$, down-and-out-osto-option hinta on

$$\begin{aligned} CDO = V_0\Phi(h_1) - Ke^{-rT}\Phi(h_1 - \sigma\sqrt{T}) - V_0\Big(\frac{H}{V_0}\Big)^{2\lambda}\Phi(h_2) \\ + Ke^{-rT}\Big(\frac{H}{V_0}\Big)^{2\lambda-2}\Phi(h_2 - \sigma\sqrt{T}), \end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma^2} \\ h_1 &= \frac{\ln(V_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \\ h_2 &= \frac{\ln(H/V_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Down-and-in-osto-option hinta saadaan edellisten optioiden avulla seuraavasti:

$$CDI = C - CDO.$$

[22, s.439–441]

2.3.2 Yhdistetyt optiot

Yhdistetty optio (compound option) on optio, jonka kohde-etuutena on jokin toinen optio. Yhdistetyllä optiolla on kaksi toteutushintaa ja kaksi maturiteettia: toinen liittyy yhdistettyyn optioon ja toinen kohde-etuutena olevaan optioon. Tutkitaan osto-optiota C_A, joka oikeuttaa ostamaan toisen option C_B. Optiolla C_A on toteutushinta K_A ja maturiteetti T_A ja vastaavasti optiolla C_B on toteutushinta K_B ja maturiteetti T_B. Tässä siis optio C_A on yhdistetty optio ja sen hintaan vaikuttavat muun muassa muuttujat K_A, K_B, T_A ja T_B. [22, s.437–438]

2.3.3 Black–Scholes-mallin ongelmia

Black–Scholes-malli käyttää geometrista Brownin liikettä osakkeen hintaprosessin mallina. Osakkeen hintaan vaikuttaa kuitenkin useat tekijät, joten täysin satunnaisesta prosessista ei todellisuudessa ole kyse. On myös olemassa näyttöä, että normaalijakaumaoletus aliarvioi epätodennäköiset tapahtumat ja että tuottojen jakauma on pitkähäntäinen. Mallissa on muitakin epärealistisia oletuksia, kuten transaktiokustannusten puuttuminen, markkinoiden täydellinen likviditeetti sekä vakiona pidettävä riskitön korko ja volatiliteetti. Esimerkiksi pörssiromahduksen aikana markkinoiden likviditeetti pienenee. [39]

2.4 Riskineutraali todennäköisyysmitta

Sijoitusinstrumenttien hintaan vaikuttavat useat tekijät. Vaikka näiden tekijöiden vaikutukset hintaan tunnettaisiin, hinnan esiintymistodennäköisyyksistä olisi silti vaikea sanoa mitään. Todennäköisyydet olisi kuitenkin hyvä tietää, sillä sijoitusinstrumenttien hinnoittelu perustuu odotettujen kassavirtojen nykyarvoihin. Jotta odotusarvoja voidaan laskea, tarvitaan tietoa eri maailmantilojen todennäköisyyksistä. Käyttämällä riskineutraalia todennäköisyysmittaa, voidaan todennäköisyydet suhteuttaa nykyisiin markkinahintoihin. Riskineutraalin todennäköisyysmitan olemassaolo tarkoittaa, että markkinat ovat arbitraasittomat [24, s.25]. Markkinat ovat arbitraasittomat, jos ei ole olemassa sijoitusinstrumenttia A, joka tuottaa täysin varmasti paremmin kuin sijoitusinstrumentti B, jollakin aikavälillä.

Jotta voidaan määritellä riskineutraali todennäköisyysmitta, on ensin määriteltävä σ-algebra, todennäköisyysmitta sekä martingaali.

Määritelmä 2.3. [2] Olkoon Ω jokin joukko ja $\mathcal{F}$ joukko, joka sisältää joukon Ω kaikki osajoukot eli $\mathcal{F}$ on joukon Ω potenssijoukko, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Joukkoa $\mathcal{F}$ kutsutaan *σ-algebraksi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- Jos $A \in \mathcal{F}$, niin $A^c \in \mathcal{F}$.
- Jos $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Määritelmä 2.4. [2] Todennäköisyysmitta σ-algebrassa $\mathcal{F}$ on funktio $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, jolle pätee

$$\mathbb{P}\Big[\bigcup_{i \in I} A_i\Big] = \sum_{i \in I} \mathbb{P}[A_i],$$

jossa $A_1, A_2, ...$ muodostaa äärellisen tai numeroituvasti äärettömän kokoelman erillisiä joukkoja σ-algebrassa $\mathcal{F}$.

Määritelmä 2.5. [21, s.126] Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ perhe, joka koostuu σ-algebroista avaruudessa Ω, joille

- $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall t \geq 0$ ja
- $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, jos $s \leq t$.

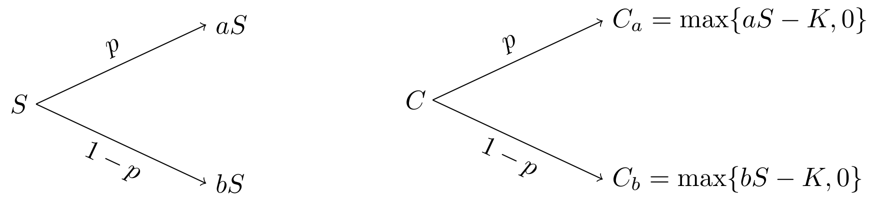
Tällöin joukkoa $\mathbb{F}$ kutsutaan *filtraatioksi.*

Määritelmä 2.6. [2] Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ei-vähenevä perhe σ-algebran $\mathcal{F}$ ali-σ-algebroja. Perhe satunnaismuuttujia $(X_t)_{t\geq 0}$ on *martingaali* perheen $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ suhteen silloin ja vain silloin kun seuraavat ehdot toteutuvat:

- jokainen X_t on $\mathcal{F}_t$-mitallinen ja integroituva, ja
- $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ melkein varmasti, jos $0 \leq s < t$.

Määritelmä 2.7. [24] Olkoon $\mathbb{P}^Q$ mitta, jonka alaisuudessa diskontattu hintaprosessi $D(t)S(t)$ on martingaali, jossa $D(t)$ on diskonttausprosessi. Lisäksi jokaiselle tapahtumalle A on toteuduttava ehto $\mathbb{P}[A] = 0$ silloin ja vain silloin kun $\mathbb{P}^Q[A] = 0$. Tällöin $\mathbb{P}^Q$ on *riskineutraali mitta.*

Perustellaan riskineutraalin todennäköisyysmitan käyttöä seuraavan esimerkin avulla. Olkoon C osto-option hinta hetkellä $t+1$, jonka arvo riippuu osakkeen arvosta S hetkellä $t+1$. Oletetaan, että osakkeen hinnoittelu tapahtuu diskreetein aikavälein $t, t+1, t+2, ...$ ja yhden aikavälin kuluttua osakkeen hinta on joko aS tai bS, jossa $a > b \geq 0$. Näin ollen sijoittaja toivoo, että päädytään maailmantilaan aS . Maailmantilan aS oletetaan tapahtuvan todennäköisyydellä p ja tilan bS todennäköisyydellä $1-p$. Kuva 2 havainnollistaa tilannetta.



Kuva 2: Vasemmalla osakkeen ja oikealla option mahdolliset maailmantilat.

Riskitön korko r oletetaan vakioksi. Jotta sijoitusympäristö on arbitraasiton, on oltava $a > 1 + r > b$. Nyt voidaan luoda portfolio, joka koostuu Δ määrästä osakkeita S sekä B suuruisesta riskittömästä sijoituksesta korolla r. Näin ollen hetkellä t luodun portfolion $S\Delta + B$ arvo hetkellä $t+1$ on

$$\begin{cases} aS\Delta + (1+r)B, & \text{todennäköisyydellä } p \\ bS\Delta + (1+r)B, & \text{todennäköisyydellä } 1-p. \end{cases}$$

Jos arvot C_a ja C_b tunnetaan, edellä mainittu portfolio − joka siis koostuu riskittömästä sijoituksesta sekä osakkeista − voidaan painottaa siten, että se vastaa osto-option C arvoa. Toisin sanoen yhtälöparille

$$\begin{cases} aS\Delta + (1+r)B = C_a \\ bS\Delta + (1+r)B = C_b \end{cases}$$

saadaan ratkaisu

$$\begin{cases} \Delta = \frac{C_a - C_b}{(a-b)S} \\ B = \frac{aC_b - bC_a}{(a-b)(1+r)}. \end{cases}$$

Jotta arbitraasia ei tapahdu, osto-option on oltava saman arvoinen kuin osto-optiota replikoiva portfolio eli

$$\begin{aligned} C &= S\Delta + B \\ &= \frac{C_a - C_b}{a-b} + \frac{aC_b - bC_a}{(a-b)(1+r)} \\ &= \frac{1}{1+r}\Big(\frac{(1+r)-b}{a-b}C_a + \frac{a-(1+r)}{a-b}C_b\Big). \end{aligned}$$

Nyt voidaan huomata, että option arvo ei ole millään tavoin riippuvainen todennäköisyydestä p. Jos asetetaan $q = \frac{(1+r)-b}{a-b}$, saadaan

$$C = \frac{1}{1+r}\big(qC_a + (1-q)C_b\big),$$

jossa termit q ja $1-q$ kuvaavat riskineutraaleja todennäköisyyksiä. [20] Koska hetkien t ja $t+1$ option arvot ovat yhtä suuret, pätee määritelmän 2.6 martingaaliehto, jossa yhtälön oikea puoli kuvaa odotusarvoa $\mathbb{E}^Q\big[C(t+1)|C(t)\big]$, ja jossa $\mathbb{E}^Q$ on odotusarvo riskineutraalin todennäköisyysmitan $\mathbb{P}^Q$ alla.

2.5 Brownin liike ja Itôn lemma

Vuonna 1900 julkaistussa Louis Bachelierin väitöskirjassa esitellään johdannaisten hinnoitelua varten Brownin liikkeeseen pohjautuva malli. Väitöskirjassa analysoidaan johdannaisinstrumenttien hinnan liikettä olettaen, että sijoittajat käyttäisivät hyödykseen kaiken markkinoilla olevan informaation. Bachelier esittää osakkeiden hinnan liikkeen aritmeettisen Brownin liikkeen avulla, jolloin osakkeiden hintojen oletetaan noudattavan normaalijakaumaa. Yhtenä ongelmana kyseisessä oletuksessa on, että se antaa positiivisia todennäköisyyksiä negatiivisille osakkeiden hinnoille. Tämän vuoksi useimmat mallit käyttävät geometrista Brownin liikettä, jolloin logaritmisten hintojen oletetaan noudattavan normaalijakaumaa, ei hintojen itsessään. [7] [36] [37]

Brownin liike on jatkuvaa satunnaisliikettä. Sen matemaattinen malli voidaan konstruoida satunnaiskävelyn avulla. Kiinnitetään aloituspiste x_0 aloitushetkellä $t = 0$. Seuraavalla ajanhetkellä siirrytään etäisyys Δx joko ylös tai alas. Molempien siirtymien todennäköisyydet ovat yhtä suuret. Tämä siirtymä ei ole riippuvainen ajasta tai siirtymää edeltävästä tilasta. Kun $\Delta x \to 0$ ja $\Delta t \to 0$ sopivalla tavalla, saadaan jatkuva-aikainen Brownin liike, jossa siirtymät ovat myös jatkuvia. [35, s.2–5]

Määritelmä 2.8. [35, s.2–5] Brownin liike on stokastinen prosessi $W = (W_t)_{t \geq 0}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

- $W_0 = 0$ melkein kaikkialla.
- Prosessilla W on riippumattomat lisäykset eli
  $W_t - W_{t-1}, \ldots, W_1 - W_0$ ovat toisistaan riippumattomia.
- Prosessilla W on stationaariset lisäykset eli $W_t - W_s \sim W_{t+h} - W_{s+h}$.
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.
- $t \mapsto W_t$ on jatkuva.

Määritelmä 2.9. [33, s.25] Olkoon $\{\mathcal{N}_t\}_{t \geq 0}$ kasvava perhe σ-algebroja. Prosessia $g(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ kutsutaan $\mathcal{N}_t$*-sopeutuneeksi*, jos jokaiselle $t \geq 0$ funktio

$$\omega \to g(t, \omega)$$

on $\mathcal{N}_t$-mitallinen.

Määritelmä 2.10. [33, s.25–44] Olkoon W_t yksiulotteinen Brownin liike avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Oletetaan, että u ja v ovat funktioita

$$u(t, \omega), v(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R},$$

jossa funktiolla v on seuraavat ominaisuudet:

(i) $(t, \omega) \to v(t, \omega)$ on $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$-mitallinen, jossa $\mathcal{B}$ on Borel σ-algebra välillä $[0, \infty)$.

(ii) On olemassa kasvava perhe σ-algebroja $\mathcal{H}_t, t \geq 0$ jolle

  a) W_t on martingaali sigma-algebran $\mathcal{H}_t$ suhteen ja

  b) f_t on $\mathcal{H}_t$-sopeutunut.

(iii) $\mathbb{P}\big[\int_S^T v(s, \omega)^2 < \infty\big] = 1$.

Lisäksi oletetaan, että funktio u on $\mathcal{H}_t$-sopeutunut, jossa σ-algebralle $\mathcal{H}_t$ pätee edellä esitetty ehto (ii), ja

$$\mathbb{P}\Big[\int_0^t |u(s,\omega)|ds < \infty \;\forall t \geq 0\Big] = 1.$$

Nyt Itô -prosessi on stokastinen prosessi X_t avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, joka on muotoa

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dW_s.$$

Stokastisen differentiaaliyhtälön $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$ ratkaisua kutsutaan geometriseksi Brownin liikkeeksi. Se voidaan esittää myös muodossa $\int_0^t \frac{dX_t}{X_t} = \mu t + \sigma W_t$. Esitellään seuraavaksi Itôn lemma, jota tarvitaan Itô-prosesseja laskettaessa.

Lause 2.11. [33, s.44] Itôn lemma. Olkoon X_t Itô -prosessi, jolle pätee

$$dX_t = udt + vdW_t.$$

Olkoon $g(t,x)$ kaksi kertaa differentioituva alueessa $[0,\infty) \times \mathbb{R}$. Tällöin myös

$$Y_t = g(t, X_t)$$

on Itô -prosessi, jolle pätee

$$dY_t = \frac{\partial g(t,X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial g(t,X_t)}{\partial X_t}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial g(t,X_t)}{\partial^2 X_t^2}(dX_t)^2,$$

ja jossa pätee säännöt

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0, \quad dW_t \cdot dW_t = dt.$$

3 Rakenteelliset luottoriskimallit

Oletetaan, että yritystä rahoitetaan ainoastaan omalla pääomalla, sekä nollakuponkilainalla, jonka nimellisarvo on K ja maturiteetti T. Yrityksen täytyy siis maksaa summa K pois hetkellä T. Yrityksen omalla pääomalla E_t tarkoitetaan vieraan pääoman vähentämisen jälkeen yritykseen jäävää pääoman määrää, joka kuuluu osakkeen omistajille [30]. Oletetaan myös, että finanssimarkkinat ovat kitkattomat, kaupankäynti tapahtuu jatkuvassa ajassa, riskitön korko on positiivinen vakio ja yrityksen arvo V_t noudattaa geometrista Brownin liikettä. Lisäksi tutkittava yritys on yleisen kaupankäynnin kohteena. [18]

3.1 Mertonin malli

Mertonin malli [32] nojautuu velkakirjan maturiteetissa vallitsevaan tilanteeseen. Jos yrityksellä ei ole varaa maksaa velkojaan pois velkasopimuksen umpeutuessa, joutuu se tällöin konkurssiin. Velkakirjan hintaa lähdetään muodostamaan Black–Scholes-optiohinnoittelumallin avulla. Määritellään konkurssiajanhetki τ seuraavasti:

$$\tau = \begin{cases} T, & \text{jos } V_T < K \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Jos yritys joutuu konkurssiin, tällöin velkojat ottavat yrityksen haltuunsa. [18]

Yrityksen arvoa V ei voida suoraan havaita, mutta arvoprosessin voi ajatella funktiona, jossa yrityksen oma pääoma kuvautuu yrityksen todelliseksi arvoksi [8]. Yrityksen arvon kehittymisen oletetaan noudattavan geometrista Brownin liikettä:

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad V_0 > 0,$$

jossa $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ja W_t on Brownin liike [18]. Tutkitaan logaritmimuunnosta

$$g(t, x) = \ln x,$$

jossa g on kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Käytetään Itôn lemmaa 2.11, ja suoritetaan ensin derivointi. Funktio g ei riipu suoraan muuttujasta t, jonka vuoksi ensimmäinen osittaisderivaatta on nolla.

$$\begin{aligned} dg(t, x) &= \underbrace{\frac{\partial g(t, x)}{\partial t}}_{=0} dt + \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial x^2} (dx)^2 \\ &= 0 + \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} (dx)^2. \end{aligned}$$

Sijoittamalla $x = V_t$ saadaan siis

$$dg(t, V_t) = d\ln V_t = \frac{1}{V_t}dV_t + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial V_t}(dV_t)^2.$$

Sijoitetaan jälkimmäiseen termiin $dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t$, jolloin

$$\begin{aligned} d\ln V_t &= \frac{1}{V_t}dV_t - \frac{1}{2}\frac{1}{V_t^2}(dV_t)^2 \\ &= \frac{1}{V_t}dV_t - \frac{1}{2}\frac{1}{V_t^2}\big(\mu V_t dt + \sigma V_t dW_t\big)^2 \\ &= \frac{1}{V_t}dV_t - \frac{1}{2}\frac{1}{V_t^2}\Big[(\mu V_t dt)^2 + 2\mu V_t^2 \sigma dt W_t + (\sigma V_t dW_t)^2\Big]. \end{aligned}$$

Koska $(dt)^2 = dtW_t = 0$ ja $(dW_t)^2 = dt$, saadaan

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{V_t}dV_t - \frac{1}{2}\frac{V_t^2}{V_t^2}\sigma^2 dt \\ &= \frac{1}{V_t}dV_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt. \end{aligned}$$

Sijoitetaan seuraavaksi edelliseen yhtälöön alkuperäinen ehto $\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t$ ja integroidaan puolittain välillä $[0, t]$. Määritelmän nojalla $W_0 = 0$. Saadaan

$$\begin{aligned} d\ln V_t &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ \int_0^t d\ln V_s &= \int_0^t \big(\mu ds + \sigma dW_s - \frac{1}{2}\sigma^2 ds\big) \\ \ln V_t - \ln V_0 &= ut + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t. \end{aligned}$$

Siirretään lopuksi $\ln V_0$ toiselle puolelle ja käytetään logaritmin määritelmää

$$\begin{aligned} \ln V_t &= ut + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \ln V_0 \\ V_t &= e^{ut + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \ln V_0} = V_0 e^{(u - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}. \ [33, s.62] \end{aligned}$$

Merkitään vielä $m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, jolloin

$$V_t = V_0 e^{mt + \sigma W_t}.$$

	Yrityksen arvo	Velkakirjan arvo	Oma pääoma
Ei konkurssia	$V_T \geq K$	K	$V_T - K$
Konkurssi	$V_T < K$	V_T	0

Taulukko 1: Velkakirjan ja oman pääoman arvot tilanteessa, jossa konkurssi on joko tapahtunut tai ei ole tapahtunut.

Koska $W_T \sim \mathcal{N}(0,T)$, standardoiduksi muuttujaksi saadaan $Z = \frac{W_T - \mu}{\sigma} = \frac{W_T}{\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ eli $W_T = Z\sqrt{T}$. Tämän avulla saadaan konkurssin todennäköisyys $p(T)$:

$$\begin{aligned}
p(t) &= \mathbb{P}\big[V_T < K\big] = \mathbb{P}\big[V_0 e^{mT+\sigma W_T} < K\big] \\
&= \mathbb{P}\left[e^{mT+\sigma W_T} < \frac{K}{V_0}\right] = \mathbb{P}\big[\ln e^{mT+\sigma W_T} < \ln L\big] && \Big| L = \frac{K}{V_0} \\
&= \mathbb{P}\big[mT + \sigma W_T < \ln L\big] = \mathbb{P}\big[\sigma Z\sqrt{T} < \ln L - mT\big] && \Big| W_T = Z\sqrt{T} \\
&= \mathbb{P}\left[Z < \frac{\ln L - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] = \Phi\left(\frac{\ln L - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right), && (3.2)
\end{aligned}$$

jossa $L = \frac{K}{V_0}$ on alkuhetken velkavipusuhde. Asettamalla parametrin μ arvoksi riskittömän koron r, saadaan vastaava riskineutraali todennäköisyys:

$$\mathbb{P}^Q\big[V_T < K\big] = \Phi\left(\frac{\ln L - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad [17].$$

Kun oletetaan, että yritys ei voi ostaa omia osakkeitaan tai ottaa uutta lainaa, voidaan tilannetta kuvata taulukon 1 avulla. Jos velkakirjan maturiteetissa yrityksen arvo ylittää velkakirjan nimellisarvon ($V_T \geq K$), tällöin yritys maksaa velkansa pois, jonka jälkeen omaa pääomaa on jäljellä $V_T - K$. Jos velkakirjan nimellisarvo on yrityksen arvoa korkeampi ($V_T < K$), tällöin yritys menee konkurssiin ja velkojat ottavat yrityksen haltuunsa. Velkojat saavat konkurssipesästä summan V_T, joten he kärsivät tappioita yhteensä summan $K - V_T$. Täten joukkovelkakirjan B_T^T arvo hetkellä T koostuu näiden kahden mahdollisen maailmantilan minimistä:

$$B_T^T = \min(K, V_T) = K - \max(0, K - V_T) = K - P(\sigma, T, K, r, V_0).$$

Kaavassa (3.2) normaalijakauman sisällä olevaa termiä $\frac{\ln L - mT}{\sigma\sqrt{T}}$ kutsutaan myöhemmin konkurssi-etäisyydeksi (distance to default).

Kyseinen joukkovelkakirja vastaa portfoliota, joka sisältää yhden riskittömän lainan nimellisarvolla K ja maturiteetilla T sekä asetetun eurooppalaisen myyntioption toteutushinnalla K ja päättymishetkellä T. Täten joukkovelkakirjan B_T^T luottoriskin voidaan ajatella tulevan osto-optiosta. Yrityksen oman pääoman määrä E_T hetkellä T on vastaavasti:

$$E_T = \max(0, V_T - K) = C(\sigma, T, K, r, V_0). \tag{3.3}$$

Oman pääoman määrä on siis sama kuin eurooppalaisen osto-option arvo toteutushinnalla K ja maturiteetilla T.

Oman pääoman E_T sekä luottoriskilainan B_T^T hinta voidaan siis esittää optiohintojen avulla. Black–Scholes-hinta osto-optiolle antaa oman pääoman arvoksi

$$E_0 = C(\sigma, T, K, r, V_0) = V_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \tag{3.4}$$

jossa

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(V_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\ln(V_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Oman pääoman määrä E_T on monotonisesti kasvava yrityksen volatiliteetin suhteen, kuten todettiin lauseessa 2.2, joten osakkeenomistaja hyötyy aina yrityksen volatiliteetin kasvusta.

Edellä johdettiin nollakuponkilainalle kaava

$$B_0^T = Ke^{-rT} - P(\sigma, T, K, r, V_0).$$

Sijoittamalla tähän Black–Scholes-myyntioption hinnan, saadaan

$$\begin{aligned} B_0^T &= Ke^{-rT} - \left[Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - V_0\Phi(-d_1)\right] \\ &= Ke^{-rT} - \left[Ke^{-rT}\big(1 - \Phi(d_2)\big) - V_0\big(1 - \Phi(d_1)\big)\right] \\ &= Ke^{-rT} - \left[Ke^{-rT} - Ke^{-rT}\Phi(d_2) - V_0 + V_0\Phi(d_1)\right] \\ &= Ke^{-rT}\Phi(d_2) + V_0 - V_0\Phi(d_1). \end{aligned}$$

Yhtälöä hieman muokkaamalla saadaan yrityksen arvo määritettyä velkakirjan arvon ja oman pääoman summana käyttäen tietoa, että oma pääoma voidaan esittää osto-option avulla:

$$\begin{aligned} V_0 &= B_0^T + V_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \\ &= B_0^T + C(\sigma, T, K, r, V_0) \\ &= B_0^T + E_0. \end{aligned}$$

Aikaisemmin todettiin, että oma pääoma E_0 ja velkakirjan hinta B_0^T riippuvat velkavipusuhteesta $L = \frac{K}{V_0}$. Nyt huomataan, että näiden summa ei kuitenkaan riipu siitä. [18]

3.1.1 KMV-malli

KMV-malli noudattaa hyvin paljon Mertonin mallia, mutta se sisältää muutamia muunnelmia. Mertonin mallissa velan oletetaan koostuvan yksittäisestä lainasta. Todellisuudessa yrityksellä voi olla useita eripituisia lainoja, joista jotkin ovat lyhytaikaisia ja toiset pitkäaikaisia. KMV-mallissa erotellaan pitkät ja lyhyet lainat. Näin ollen KMV-mallissa muuttujan K tulkinta muuttuu ja se määritellään lyhyiden ja pitkien lainojen summana, jossa pitkät lainat saavat painotuskertoimen 0,5:

$$K = \text{lyhyet lainat} + 0{,}5 \cdot \text{pitkät lainat}.$$

Toinen mallissa tapahtuva muutos on siihen sovellettava historiallinen data. Mertonin konkurssitodennäköisyyden kaava (3.2) asettaa konkurssietäisyyden $\frac{\ln L - mT}{\sigma\sqrt{T}}$ normaalijakaumaan, kun taas KMV vertaa konkurssietäisyyttä historialliseen dataan. Tällöin otetaan historiallisesta datasta huomioon ne yritykset, joiden etäisyys konkurssiin on ollut saman suuruinen ja tutkitaan kuinka monta näistä yrityksistä on mennyt konkurssiin tietyn ajan sisällä. Saatu historiallinen todennäköisyys on nyt siis myös tutkittavan yrityksen konkurssitodennäköisyys samalle aikavälille. [38] [6]

3.1.2 Mertonin mallin ongelmia

Mertonin mallin etuna on, että siihen voidaan soveltaa Black–Scholesin optiohinnoittelumallia. Tätä varten täytyy kuitenkin tehdä oletuksia, joilla sovitetaan yrityksen markkina-arvoprosessi, korkotaso ja pääomarakenne Black–Scholes-mallin vaatimusten mukaisiksi. Mertonin malli on helppokäyttöinen, mutta sen oletukset eivät vastaa hyvin todellisuutta.

Mertonin mallin ongelmana on sen yksinkertainen konkurssin määrittely. Yritys ei voi mennä konkurssiin ennen laina-ajan päättymistä, tapahtuipa yrityksen arvolle mitä tahansa. Vasta laina-ajan päättyessä katsotaan yrityksen arvoa ja todetaan mahdollinen konkurssi. Mertonin mallille ominaista on myös konkurssin ennustettavuus. Koska yrityksen arvoprosessin oletetaan noudattavan geometrista Brownin liikettä ja konkurssi tapahtuu vasta maturiteetissa, ennustaminen helpottuu, kun lähestytään lainan maturiteettia. Tämän seurauksena konkurssi ei tule yllätyksenä ja mallin implikoima luottospredi pysyy pienenä. Ongelmana on myös yrityksen pääomarakenne, joka on todellisuudessa paljon monimutkaisempi, kuin mitä malli olettaa. Vakiona pidettävä korkokanta on saanut myös kritiikkiä. Stokastisena käsiteltävä korkokanta voisi parantaa mallin tarkkuuta. [13]

3.2 Kuponkikorolliset velkakirjat

Oletetaan, että yritys, joka ei maksa osinkoja, laskee liikkeelle kupongillisen velkakirjan. Kuponkimaksuja X_{t_i} on yhteensä n kappaletta ja ne tapahtuvat ajanhetkillä t_i, jossa $i = 1, ..., n$ kertoo kuinka monennesta kuponginmaksuhetkestä on kyse. Yritys rahoittaa kuponkimaksut keräämällä uutta omaa pääomaa osakkeen omistajilta laskemalla liikkeelle yhdistetyn option, jonka toteutushinta on kuponkikoron X_{t_i} suuruinen. Optio kohdistuu uuteen optioon, jolla maksetaan seuraava kuponkikorko aina velkakirjan maturiteettiin asti. Viimeisellä maksuhetkellä t_n option toteuttaminen takaa, ettei velkojat ota yritystä haltuunsa. Velkakirjan maturiteettihetkellä option hinta on velkakirjan nimellisarvo lisättynä kuponkikorolla X_{t_n}. Jos jollakin hetkellä optiota ei toteuteta yritys menee konkurssiin ja velkojat ottavat yrityksen haltuunsa.

Olkoon t_i^+ hetki heti kupongin i maksamisen jälkeen ja t_i^- juuri ennen kuponginmaksuhetkeä. Hetkellä t_{n-1}^- velkakirjan arvo on

$$B_{t_{n-1}^-} = \min(V_{t_{n-1}}, X_{t_{n-1}} + B_{t_{n-1}^+}).$$

Vastaavasti hetkellä t_{n-2}^- velkakirjan arvo on

$$B_{t_{n-2}^-} = \min(V_{t_{n-2}}, X_{t_{n-2}} + B_{t_{n-2}^+})$$

ja näin ollen

$$B_{t_i^-} = \min(V_{t_i}, X_{t_i} + B_{t_i^+}) \quad \forall i = 1, ..., n-1.$$

Kuponki kannattaa maksaa ainoastaan, jos maksun jälkeen yrityksen arvo on suurempi kuin yrityksen velat eli $V_{t_{n-1}} > \hat{V}_{t_{n-1}}$, jossa $\hat{V}_{t_{n-1}}$ on yhtälön $E_{t_{n-1}}(V) - X_{t_{n-1}} = 0$ ratkaisu. Tässä $E_{t_{n-1}}$ viittaa option hintaan kuten kaavassa (3.4). Jos velat ovat suuremmat kuin yrityksen arvo, tällöin option haltia ei suostu toteuttamaan optiota ja kuponki jää maksamatta. Näin ollen yritys menee konkurssiin ja velkojat ottavat yrityksen haltuunsa.

Koska kyseessä on yhdistetty optio, täytyy hinnoittelu suorittaa rekursiivisesti: hetkellä nolla optio A kohdistuu toiseen optioon B, joten on ensin selvitettävä option B hinta, jotta voidaan hinnoitella optio A. Velkakirjaa hinnoiteltaessa on huomioitava jokaiseen maksuun sisältyvä epävarmuus. Artikkelissa [15] saadaan kupongillisen velkakirjan hinta seuraavaan muotoon, huomioiden jokaiseen maksuun sisältyvän epävarmuuden:

$$P_0 = \sum_t \mathbb{E}[X_t Z_t],$$

jossa Z_t on stokastinen diskonttaustekijä, toiselta nimeltään hinnoitteluydin (pricing kernel) [5, s.6–7]. Tämän pohjalta artikkelissa [15] hinnoitellaan velkakirja yhdistetyn option avulla. Monimutkaisuutensa vuoksi hinnoittelukaava ja sen johtaminen sivuutetaan. [15]

Väitöskirjassa [23] tutkitaan Lehman Brothersin konkurssitodennäköisyyksiä käyttäen muun muassa edellä esitettyä kuponkikorkomallia. Lehman Brothers meni konkurssiin 15. syyskuuta 2008 [41]. Väitöskirjassa todetaan, että malli antoi maaliskuun 2008 tiedoilla yli 35% todennäköisyyden sille, että pankki joutuu konkurssiin seuraavan vuoden sisällä ja yli 60% todennäköisyyden konkurssin tapahtumiselle seuraavan kahden vuoden sisällä. Seuraavan vuoden sisällä tapahtuvan konkurssin todennäköisyys huhti-kesäkuussa oli alle 5%, mutta heinä-elokuussa todennäköisyydet nousivat noin 10%:iin. Kahden vuoden konkurssitodennäköisyyksissä huhtikuun-kesäkuun arvot ovat alle 11% ja tämän jälkeiset havainnot ylittävät yli 20% todennäköisyyden. Maaliskuussa malli siis selvästi näkee konkurssin todellisen uhkan.

Väitöskirjassa todetaan, että pankki sai touko-kesäkuussa lisää lyhytaikaisia varoja, joiden avulla konkurssiriski aleni. Tämän voinee selittää, miksi ainoastaan maaliskuussa konkurssitodennäköisyydessä näkyy selvä piikki. Kyseinen tulos ei yksinään riitä sanomaan mitään mallin validiteetista. Sen enempää syy-seuraus suhteeseen paneutumatta voidaan kuitenkin todeta, että malli ainakin onnistui antamaan korkean konkurssitodennäköisyyden Lehman Brothersille vain puoli vuotta ennen konkurssin tapahtumista.

3.3 Black–Cox-malli

Mertonin mallin konkurssin määritelmän ongelmana on, että konkurssi ei voi tapahtua kesken laina-ajan. Yritys on voinut kuluttaa kaikki rahansa heti lainan saannin jälkeen siten, ettei tulevia kassavirtoja ole odotettavissa. Tässäkin tapauksessa Mertonin mallin määritelmän mukaan yritys ajautuu konkurssiin vasta lainan erääntyessä.

Monimutkaistetaan mallia muokkaamalla konkurssin määritelmää. Otetaan käyttöön käsite konkurssiraja $D \in (0, V_0)$, joka kertoo alimman mahdollisen yrityksen arvon, jolla yritys ei vielä joudu konkurssiin. Muokataan konkurssiajankohdan $\tau \in (0, \infty]$ määritelmä ajanhetkeksi, jolloin yrityksen arvo V_t alittaa ensimmäisen kerran konkurssirajan D. Yleisesti

$$\tau = \inf\{t > 0 : V_t < D\}. \tag{3.5}$$

Olkoon M_t aikavälin $(0, t]$ alin arvo:

$$M_t = \min_{s \leq t} V_s.$$

Koska konkurssihetkellä $V_\tau = D$, muokataan yrityksen arvonmuodostusta siten, että sen alaraja on D:

$$V_t = \begin{cases} V_0 e^{mt + \sigma W_t}, & \text{jos } V_t \geq D \\ D, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Nyt konkurssirajan ylityksen todennäköisyys on

$$\begin{aligned} p(T) = \mathbb{P}\big[M_T < D\big] &= \mathbb{P}\big[\min_{s<T}(V_0 e^{ms + \sigma W_s}) < D\big] \\ &= \mathbb{P}\big[\min_{s<T}(ms + \sigma W_s) < \ln\left(\frac{D}{V_0}\right)\big]. \end{aligned}$$

Aritmeettisen Brownin liikkeen historian minimiarvo on jakautunut käänteisen Gaussisen jakauman tavoin (inverse Gaussian), jonka avulla saadaan

$$p(T) = \Phi\Big(\frac{\ln(D/V_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\Big) + \Big(\frac{D}{V_0}\Big)^{\frac{2m}{\sigma^2}} \Phi\Big(\frac{\ln(D/V_0) + mT}{\sigma\sqrt{T}}\Big).$$

Tämäkään konkurssin määritelmä ei ole itsenäisesti täysin toimiva. Se toimii hyvin, jos konkurssiraja asetetaan suuremmaksi kuin velkakirjan arvo ($D \geq K$). Tällöin velkakirjasijoittajat ovat suojassa konkurssiriskiltä. Sijoittaja saa maturiteetissa koko lainan nimellisarvon takaisin, jos yrityksen arvo ei tipu laina-aikana konkurssirajan alapuolelle ($M_T \geq D$). Jos yrityksen arvo alittaa konkurssirajan ($D > M_T > K$), tällöinkin velkojan rahat on turvattu. Yritys asetetaan konkurssiin, jolloin sijoittajat ottavat yrityksen haltuunsa. Yrityksen omistajat eivät saa mitään, vaikka velkojen maksun jälkeen yritykselle jäisikin rahaa. Täten sijoittajat saavat itselleen summan D eli enemmän kuin mitä olisivat saaneet, jos konkurssia ei olisi tapahtunut.

$D \geq K$	$M_T \geq D$	$M_T < D$
Velkakirjan arvo	K	D

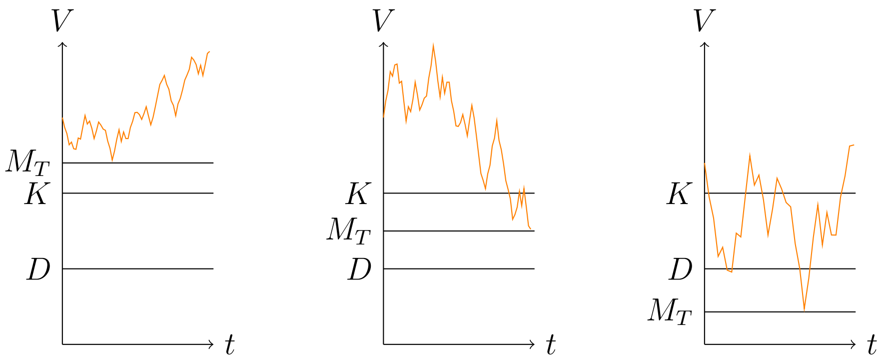
Taulukko 2: Velkakirjan arvo tilanteessa, jossa konkurssiraja on asetettu velkakirjan nimellisarvon yläpuolelle.

Konkurssin määritelmä ei anna kuitenkaan täyttä turvaa velkakirjasijoittajille, jos konkurssiraja asetetaan velkakirjan nimellisarvoa alemmalle tasolle ($D < K$). Jos yrityksellä menee hyvin ja sen arvo maturiteetissa on yli

$D < K$		$M_T \geq D$	$M_T < D$
Velkakirjan	$V_T \geq K$	K	D
arvo	$V_T < K$	V_T	D

Taulukko 3: Velkakirjan arvo tilanteessa, jossa konkurssiraja on asetettu velkakirjan nimellisarvon yläpuolelle.

velkakirjan nimellisarvon, ongelmaa ei ole. Jos yrityksen arvo alittaa konkurssirajan D, tällöin yritys menee konkurssiin ja velkojat saavat ainoastaan summan $D < K$. Jos yrityksen arvo jää kuitenkin konkurssirajan ja velkakirjan nimellisarvon väliin ($D < V_T < K$), yrityksellä ei ole varaa maksaa velkojaan. Uuden määritelmän nojalla yritys ei ole konkurssissa, vaikka se ei pysty maksamaan velkojaan. Asettamalla konkurssiraja velkakirjan nimellisarvo alemmalle tasolle, sijoittajat ovat alttiita konkurssiriskille. Tämä ongelma voidaan ratkaista yhdistämällä esitetty uusi konkurssin määritelmä ja Mertonin mallin konkurssin määritelmä. Vaihtoehtoisesti voidaan tehdä konkurssiraja riippuvaiseksi ajasta siten, että maturiteetissa konkurssiraja on $D(T) = K$. [18]



(a) $M_T \geq K$ *(b) $K > M_T \geq D$* *(c) $M_T < D$*

Kuva 3: Oranssi prosessi kuvaa yrityksen mahdollista arvoprosessia, kun konkurssiraja on asetettu velkakirjan nimellisarvoa alemmalle tasolle $D < K$. Kuvassa (a) tapaus $M_T > K$, kuvassa (b) tapaus $K > M_T > D$ ja kuvassa (c) tapaus $M_T < D$. Ainoastaan tapauksessa (c) yritys on mennyt konkurssiin.

3.3.1 Yhdistetty konkurssien määritelmä

Merkitään Black–Cox-mallin konkurssin määritelmää τ^1 ja Mertonin mallin konkurssin määritelmää τ^2 (katso kaavat (3.5) ja (3.1)). Yritys on konkurssissa, jos yrityksen arvo on laskenut alle konkurssirajan D tai jos velkakirjan maturiteetissa yrityksen arvo on alle velkakirjan nimellisarvon. Yrityksen konkurssihetki on siis edellä esitettyjen konkurssimääritelmien minimi. Formaalisti määritellään

$$\tau = \min(\tau^1, \tau^2).$$

Uusi määritelmä takaa konkurssiin joutumisen, jos velkoja ei pystytä maksamaan pois. Nyt todennäköisyys, että yritys on mennyt konkurssiin hetkeen T mennessä, on

$$\begin{aligned}
p(T) &= 1 - \mathbb{P}\big[\min(\tau^1, \tau^2) > T\big] \\
&= 1 - \mathbb{P}\big[\tau^1 > T, \tau^2 > T\big] \\
&= 1 - \mathbb{P}\big[M_T > D, V_T > K\big] \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big[\min_{t<T}(mt + \sigma W_t) > \ln\left(\frac{D}{V_0}\right),\ mT + \sigma W_T > \ln L\Big].
\end{aligned}$$

Käyttämällä yhdistettyä jakaumaa aritmeettisesta Brownin liikkeestä ja sen historiallisesta minimistä, saadaan

$$p(T) = \Phi\Big(\frac{\ln L - mT}{\sigma\sqrt{T}}\Big) + \Big(\frac{D}{V_0}\Big)^{\frac{2m}{\sigma^2}}\Phi\Big(\frac{\ln\big(D^2/(KV_0)\big) + mT}{\sigma\sqrt{T}}\Big).$$

Saatu todennäköisyys on nyt korkeampi kuin Mertonin mallin antama todennäköisyys. Tämä johtuu osittain uudesta konkurssin määritelmästä. Uuden konkurssin määritelmän nojalla yritys joutuu konkurssiin heti, kun konkurssiraja alitetaan. Mertonin mallissa yrityksen arvo saattoi pudota alle lainan nimellisarvon, mutta nousta takaisin nimellisarvon yli lainan päättymishetkeen mennessä. Näin ollen uusi konkurssin määritelmä havaitsee enemmän konkursseja, joka näkyy kaavassa konkurssitodennäköisyyden nousuna.

Toisena konkurssitodennäköisyyteen vaikuttaa konkurssiraja, jota nostamalla yritys ajautuu helpommin konkurssiin. Konkurssirajasta riippumatta Black–Cox-malli ei anna Mertonin mallia pienempiä todennäköisyyksiä. Jos asetetaan konkurssiraja $D \to 0$, tällöin termi $\ln D \to -\infty$, joten kertymäfunktion arvo lähestyy nollaa. Myös termi $\frac{D}{V_0}$ lähestyy nollaa. Jäljelle jää ainoastaan lausekkeen ensimmäinen termi, joka vastaa Mertonin mallin antamaa todennäköisyyttä. Tämä kuitenkin tarkoittaa Black–Cox-mallissa sitä, että yritys menee konkurssiin vasta, kun se on arvoton ($V_t = 0$). Mertonin mallissa konkurssihetkellä yrityksen arvo voi olla paljon suurempi. Tässä mielessä konkurssitodennäköisyydet eivät ole vertailukelpoisia.

Oman pääoman määrä maturiteetissa on

$$E_T = \max(0, V_T - K)\mathbb{1}_{\{M_T \geq D\}},$$

jossa $\mathbb{1}_{\{A\}}$ on indikaattorifunktio, jolle pätee

$$\mathbb{1}_{\{A\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Oman pääoman määrä on sama kuin down-and-out-osto-optio, jossa yrityksen arvo on V, toteutushinta K, konkurssiraja $D < K$ ja maturiteetti T. Down-and-out-osto-optio on arvoton, jos oman pääoman arvo tippuu alle konkurssirajan D. Näin ollen

$$E_0 = C(\sigma, T, K, r, V_0) - V_0\Big(\frac{D}{V_0}\Big)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi(h_+) + Ke^{-rT}\Big(\frac{D}{V_0}\Big)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi(h_-),$$

jossa C on tavallisen osto-option hinta, ja jossa

$$h_\pm = \frac{(r \pm \sigma^2/2)T + \ln\big(D^2/(KV_0)\big)}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Nyt voidaan huomata, että down-and-out-osto-optio on korkeintaan saman arvoinen kun tavallinen osto-optio. Vastaavalla tavalla kuin todennäköisyyttä tutkittaessa, muuttujan D lähestyessä nollaa, termit $\frac{D}{V_0}$ ja $\Phi(h_\pm)$ lähestyvät nollaa ja jäljelle jää tavallisen osto-option hinta.

Vastaavasti velkakirjan arvo maturiteetissa on

$$B_T^T = K - (K - V_T)^+ + (V_T - K)^+\mathbb{1}_{\{M_T < D\}}.$$

Viimeinen termi $(V_T - K)^+\mathbb{1}_{\{M_T < D\}}$ kertoo lisän, jonka velkojat saavat konkurssipesästä, jos konkurssiraja D on asetettu korkeammalle tasolle kuin velan nimellisarvo K. Velkakirjan arvo maturiteettihetkellä on aina vähintään D siinäkin tapauksessa, että konkurssiraja on asetettu alle velkakirjan nimellisarvon. Jos yrityksen arvo olisi alittanut konkurssirajan aiemmin, velkojat olisivat ottaneet välittömästä alitushetkellä yrityksen haltuun, jolloin velkakirja ei enää olisi olemassa maturiteettihetkellä.

Velkakirjan arvo voidaan esittää myös portfolion avulla, joka koostuu maturiteetilla T ja toteutushinnalla K olevasta osto-optiosta sekä down-and-in-osto-optiosta DIC sekä riskittömästä velkakirjasta maturiteetilla T ja nimellisarvolla K:

$$B_0^T = Ke^{-rT} - P(\sigma, T, K, r, V_0) + DIC(\sigma, T, K, D, r, V_0).$$

Velkakirjan arvo on siis sama kuin Mertonin mallin antama velkakirjan arvo lisättynä down-and-in-osto-optiolla:

$$B_0 = V_0 - C(\sigma, T, K, r, V_0) + V_0\Big(\frac{D}{V_0}\Big)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi(h_+) + Ke^{-rT}\Big(\frac{D}{V_0}\Big)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi(h_-).$$

[18]

3.3.2 Ajasta riippuvainen konkurssiraja

Vaihtoehtoisesti voidaan määritellä konkurssiraja ajasta riippuvan funktion $D(t)$ avulla, jossa $D(t) \leq K$ jokaisella $t \leq T$. Tutkitaan konkurssirajafunktiota

$$D(t) = Ke^{-r(T-t)},$$

jota voidaan ajatella velkakirjan nimellisarvon K diskonttaamiseksi ajanhetkeen t korolla r. Yritys menee konkurssiin hetkellä

$$\tau = \inf\{t > 0 : V_t < D(t)\}.$$

Todetaan, että

$$\begin{aligned} V_t < D(t) &\Leftrightarrow V_0 e^{mt+\sigma W_t} < Ke^{-r(T-t)} \\ &\Leftrightarrow mt + \sigma W_t < \ln\frac{K}{V_0} - r(T-t) \\ &\Leftrightarrow (m-r)t + \sigma W_t < \ln L - rT. \end{aligned}$$

Tämän avulla saadaan konkurssin todennäköisyys

$$p(T) = \mathbb{P}\big[\min_{t<T}\big((m-r)t + \sigma W_t\big) < \ln L - rT\big].$$

Seuraavaksi tarvitaan aritmeettisen Brownin liikkeen historiallisen minimin jakauma ajautumaparametrilla $m - r$, jonka avulla saadaan

$$p(T) = \Phi\Big(\frac{\ln L - mT}{\sigma\sqrt{T}}\Big) + (Le^{-rT})^{\frac{2}{\sigma^2}(m-r)}\Phi\Big(\frac{\ln L + (m-2r)T}{\sigma\sqrt{T}}\Big).$$

Omaa pääomaa E_T vastaava portfolio hetkellä T muodostuu eurooppalaisesta down-and-out-osto-optiosta toteutushinnalla K ja ajasta riippuvaisesta konkurssirajasta $D(T)$:

$$E_T = (V_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{M_T \geq D(T)\}},$$

jossa $M_t = \min_{s<T} V_0 e^{(m-r)s+\sigma W_s}$ on yrityksen arvon historiallinen minimi muokattuna aritmeettisella kasvutekijällä $m - r$ ja konkurssirajalla $D(T) = K$.

Velkakirjaa B_T^T hetkellä T vastaava portfolio koostuu down-and-in-osto-optiosta, myyntioptiosta sekä käteisestä K:

$$B_T^T = K - (K - V_T)^+ + (V_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{M_T < D(T)\}}.$$

[18]

3.3.3 Usean senioriteetin lainat

Yrityksellä voi olla usean eri senioriteetin lainoja. Lainojen senioriteetti määrää, missä järjestyksessä velat maksetaan pois. Tämä on oleellista silloin, kun yritys ei pysty maksamaan kaikkia velkojaan pois. Tällöin korkeimman senioriteetin laina maksetaan ensin pois. Vasta tämän jälkeen siirrytään matalamman senioriteetin lainojen maksamiseen. Seniorilaina on takaisinmaksutilanteessa etuoikeutetussa asemassa verrattuna juniorilainaan.

Senioriteetti	$V < K_1$	$K_1 \leq V < K_1 + K_2$	$V \geq K_1 + K_2$
Seniorlaina	V	K_1	K_1
Juniorlaina	0	$V - K_1$	K_2
Osake	0	0	$V - K_1 - K_2$

Taulukko 4: Arvopapereiden arvot eri yrityksen varallisuustilanteissa.

Velkakirjan hetken t hinta $B(V, t; K, D)$ on yrityksen arvon V funktio ja lisäksi se riippuu sopimuksessa määritellystä velkakirjan arvosta K ja konkurssirajasta D. Näin ollen juniorilainan $J(V, t)$ hinta on

$$J(V, t) = B(V, t; K_1 + K_2, D) - B(V, t; K_1, D),$$

jossa ensimmäinen termi viittaa yhdistettyyn lainan arvoon eli seniorlaina + juniorlaina, vähennettynä seniorlainan arvolla. Jos $V < K_1$, tällöin $B(V, t; K_1 + K_2, D) = B(V, t; K_1, D)$ eli juniorvelkakirja on arvoton. [3]

3.3.4 Black–Cox-mallin ongelmia

Black–Cox-menetelmä on itsessään jo monimutkainen ja se monimutkaistuu, jos korkorakenne ajatellaan stokastisena tai konkurssiraja asetetaan yrityksen tunnusluvuista riippuvaiseksi. Täten on vaikea esittää yrityksen arvoa tai konkurssitodennäköisyyksiä suljetussa muodossa.

Kuten Mertonin mallissa, myös Black–Cox-mallissa yrityksen konkurssin ennustettavuus paranee, kun laina-aika lyhenee. Konkurssi ei ole yllätyksellinen tapahtuma ja näin ollen lyhyen ajan luottospredi on lähellä nollaa. [13]

3.4 Mertonin mallin parametrien μ ja σ estimointi

Kun tavoitteena on estimoida Mertonin mallin parametrit μ ja σ, yhtenä vaihtoehtona on ratkaista yhtälöpari. Ensimmäisessä yhtälössä voidaan käyttää hyväksi kaavassa (3.3) käytettyä identiteettiä $E_t = f(V_t, t)$, jossa $f(x, t)$ on Black–Scholes-hinta eurooppalaiselle osto-optiolle. Yhtälöparin toinen osa on $E_t = \frac{\sigma}{\sigma^E} f_x(V_t)V_t$, joka on saatu käyttämällä Itôn kaavaa aikaisempaan kaavaan (3.3) [18]. Tämä yhtälöpari voidaan ratkaista numeerisesti [34]. Artikkelissa [8] nähdään kyseisessä ratkaisutavassa yhtenä ongelmana sen, että yhtälöparin toinen yhtälö on johdettu käyttäen ensimmäistä yhtälöä.

Toisena vaihtoehtona voidaan käyttää suurimman uskottavuuden menetelmää. Esitellään tämä menetelmä tarkemmin. Ennen sitä on kuitenkin saatava yhteys yrityksen arvon V_t ja sen oman pääoman E_t välille.

Olkoon X n-ulotteinen vektori, joka koostuu satunnaismuuttujista, joita ei voida havaita ja joiden jakauma kuuluu perheeseen $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$, jossa Θ on joukon $\mathbb{R}^k$ avoin osajoukko. Oletetaan, että sen tiheysfunktio $f(x; \theta)$ on olemassa ja se on kahdesti differentioituva molempien parametrien suhteen. Vektori havaittavia satunnaismuuttujia Y saadaan havaitsemattoman vektorin X muunnoksena. Tämä muunnosfunktio $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on injektio ja ottaa parametrikseen havaitsemattoman vektorin $\theta \in \Theta$ sekä muunnettavan vektorin X. Täten $Y = T(X; \theta)$, joten $X = T^{-1}(Y; \theta)$. Oletetaan myös, että T on jatkuva ja kahdesti differentioituva molempien parametrien suhteen.

Logaritminen uskottavuusfunktio havaitulle datalle Y on $l(Y; \theta)$. Suurimman uskottavuuden estimoinnissa pyritään löytämään jokin $\theta^* \in \bar{\Theta}$ eli joukon Θ sulkeumasta alkio, jolle

$$l(Y; \theta^*) = \sup_{\theta \in \Theta} l(Y; \theta).$$

Seuraavan lauseen avulla saadaan yhteys vektorien X ja Y uskottavuusfunktioille.

Lause 3.1. [8] Jos muunnos vektorista X vektoriin Y tapahtuu alkioittain eli $y_i = T_i(x_i; \theta)$ jokaiselle i, niin silloin

$$l(Y; \theta) = l_X(\hat{x}_i(\theta), i = 1, ..., n; \theta) - \sum_{i=1}^{n} \ln \left| \frac{dT_i(\hat{x}_i(\theta); \theta)}{dx_i} \right|,$$

jossa $\hat{x}_i(\theta) = T_i^{-1}(y_i; \theta)$.

Aiemmin saatiin, että $V_t = V_0 e^{mt+\sigma W_t}$. Tämän avulla saadaan

$$\begin{aligned}
V_t &= V_0 e^{mt+\sigma W_t} = V_0 e^{m(t-1+1)+\sigma(W_{t-1}+W_t-W_{t-1})} \\
&= V_0 e^{m(t-1)+\sigma W_{t-1}} e^{m+\sigma(W_t-W_{t-1})} \\
&= V_{t-1} e^{m+\sigma(W_t-W_{t-1})} \\
\frac{V_t}{V_{t-1}} &= e^{m+\sigma(W_t-W_{t-1})} \\
\ln \frac{V_t}{V_{t-1}} &= m + \sigma(W_t - W_{t-1}) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma(W_t - W_{t-1}).
\end{aligned}$$

Ominaisuuksien $W_t - W_{t-1} \sim \mathcal{N}(0,1)$ ja $a + b\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$ avulla voidaan todeta, että

$$\ln \frac{V_t}{V_{t-1}} \sim \mathcal{N}(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2).$$

Tämän avulla voidaan muodostaa logaritminen uskottavuusfunktio havaitsemattomalle muuttujalle V_t. Artikkelin [9] mukaan tiheysfunktio tulee kertoa termillä $\frac{1}{V_i}$, koska muuttuja V_t ei ole suoraan havaittavissa. Koska $X_i = \ln \frac{V_i}{V_{i-1}}$ ja ensimmäinen havainnon indeksi $i = 1$, niin uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned}
L_V(V_t, t = 1, ..., n, \mu, \sigma^2) &= \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(- \frac{(X_i - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \Big) \frac{1}{V_i} \\
&= \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \Big)^{n-1} \exp\Big(- \sum_{i=2}^{n} \frac{(X_i - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \Big) \prod_{i=2}^{n} V_i^{-1} \\
&= \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \Big)^{n-1} \exp\Big(- \sum_{i=2}^{n} \frac{(X_i - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \Big) \prod_{i=2}^{n} \exp\big(- \ln(V_i) \big) \\
&= \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \Big)^{n-1} \exp\Big(- \sum_{i=2}^{n} \frac{(X_i - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \Big) \exp\big(- \sum_{i=2}^{n} \ln(V_i) \big)
\end{aligned}$$

ja vastaava logaritminen uskottavuusfunktio

$$\begin{aligned}
&l_V(V_t, t = 1, ..., n, \mu, \sigma^2) \\
&= \ln \Big[\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \Big)^{n-1} \exp\Big(- \sum_{i=2}^{n} \frac{(X_i - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \Big) \exp\Big(- \sum_{i=2}^{n} \ln V_i \Big) \Big] \\
&= (n-1) \ln \big((2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \big) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2)^2}{2\sigma^2} - \sum_{i=2}^{n} \ln V_i \\
&= -\frac{n-1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^{n} \big[\ln \Big(\frac{V_t}{V_{t-1}} \Big) - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \big]^2 - \sum_{i=2}^{n} \ln V_i.
\end{aligned}$$

Lauseen 3.1 nojalla saadaan logaritminen uskottavuusfunktio havaitulle muuttujalle E_t:

$$\begin{aligned} l_E &= l_V(T^{-1}(E_i;\theta), i = 1, ..., n; \theta) - \sum_{i=1}^{n} \ln \Big| \frac{dT(T^{-1}(E_i;\theta);\theta)}{dV_i(\sigma)} \Big| \\ &= -\frac{n-1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^{n} \big[\ln + \Big(\frac{V_t(\sigma)}{V_{t-1}(\sigma)} \Big) - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \big]^2 \\ &\quad - \sum_{i=2}^{n} \ln V_i(\sigma) - \sum_{i=2}^{n} \ln \Big| \frac{dT(T^{-1}(E_i;\theta);\theta)}{dV_i(\sigma)} \Big|. \end{aligned}$$

Koska $T(T^{-1}(E_i)) = E_i$, saadaan

$$\sum_{i=2}^{n} \ln \Big| \frac{dT(T^{-1}(E_i;\theta);\theta)}{dV_i(\sigma)} \Big| = \sum_{i=2}^{n} \ln \Big| \frac{dE_i}{dV_i(\sigma)} \Big| = \sum_{i=2}^{n} \ln \big| \Phi(d_1) \big|,$$

sillä lemman 2.1 nojalla

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_i}{\partial V_i} &= \frac{\partial}{\partial V_i(\sigma)} V_i(\sigma) \Phi \Big(\frac{\ln(V_i(\sigma)/K) + (r + \sigma^2/s)T}{\sigma\sqrt{T}} \Big) \\ &\quad - Ke^{-rT} \Phi \Big(\frac{\ln(V_i(\sigma)/K) + (r - \sigma^2/s)T}{\sigma\sqrt{T}} \Big) \\ &= \Phi(d_1) + V_i \Phi'(d_1) \frac{1}{V_i(\sigma)} - Ke^{-rT} \Phi'(d_2) \frac{1}{V_1(\sigma)} = \Phi(d_1). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} l_E = -\frac{n-1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^{n} \big[\ln \Big(\frac{V_t(\sigma)}{V_{t-1}(\sigma)} \Big) - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \big]^2 \\ - \sum_{i=2}^{n} \ln V_i(\sigma) - \sum_{t=2}^{n} \ln \Phi(d_1). \text{ [8]} \end{aligned}$$

Osittaisderivoimalla uskottavuusfunktiota parametrin μ suhteen saadaan suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\mu}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\mu} l_E &= \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}\Big[\ln\Big(\frac{V_i(\sigma)}{V_{i-1}(\sigma)}\Big)^2 - 2(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\ln\Big(\frac{V_i(\sigma)}{V_{i-1}(\sigma)}\Big) + (\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)^2\Big]\\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\sum_{i=2}^{n}\Big[-2\mu\ln\Big(\frac{V_i(\sigma)}{V_{i-1}(\sigma)}\Big) + \mu^2 - \frac{1}{2}\mu\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^4\Big]\\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}\Big[-2\ln\Big(\frac{V_i(\sigma)}{V_{i-1}(\sigma)}\Big) + 2\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big]\\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\Big[(n-1)(2\mu-\frac{1}{2}\sigma^2) - \sum_{i=2}^{n}\ln\Big(\frac{V_i(\sigma)}{V_{i-1}(\sigma)}\Big)\Big] = 0\\
&\Rightarrow 2\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\ln\frac{V_i(\sigma)}{V_{i-1}(\sigma)}\\
&\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=2}^{n}\ln\frac{V_i(\sigma)}{V_{i-1}(\sigma)}.
\end{aligned}
$$

Suurimman uskottavuuden estimaatin $\hat{\mu}$ esitys on riippuvainen muuttujasta $V_t(\sigma)$. Uskottavuusfunktiota ei voida derivoida muuttujan σ suhteen, koska $V_t(\sigma)$ ei ole analyyttista muotoa. Näin ollen muuttujan $V_t(\sigma)$ arvot on ratkaistava muilla keinoin. Kiinnittämällä muuttuja σ saadaan Black–Scholes-yhtälöstä (3.4) ratkaistua $V(\sigma)$ numeerisesti. Valitaan n kappaletta testattavia volatiliteetin arvoja, joiden joukosta valitaan paras estimaattori. Olkoon tämä valittu volatiliteettien joukko

$$\Sigma = \{\sigma_i \in (0,s) \mid \sigma_{i+1} - \sigma_i = \epsilon > 0, \quad \forall i = 1,...,n\}.$$

Ylärajaksi s voidaan asettaa esimerkiksi luku 0,8, sillä osakemarkkinoiden volatiliteetti pysyy suurella todennäköisyydellä sen alapuolella. Esimerkiksi VIX-indeksi, joka kuvaa odotettua 30 päivän volatiliteettia, on saanut historiassaan suurimmaksi volatiliteetin arvoksi noin 0,8 [42][40].

Seuraavaksi valitaan jokaista oman pääoman määrää E_t kohden sellainen $V_t(\sigma^*)$, jolle

$$\big|E_t - C\big(\sigma^*, T, K, r, V(\sigma^*)\big)\big| < \big|E_t - C\big(\sigma_i, T, K, r, V(\sigma_i)\big)\big| \quad \forall \sigma_i \neq \sigma^* \in \Sigma. \tag{3.6}$$

Jos σ^* ei ole yksikäsitteinen, tällöin voidaan esimerkiksi valita sellainen σ^*, joka antaa pienimmän arvon muuttujalle V_t.

Nyt muodostetaan uusi joukko Σ^*, joka sisältää ne joukon Σ alkiot, joille on olemassa sellainen havainto E_t, että ehto (3.6) pätee. Näin ollen on olemassa kuvaus $h : (E, \Sigma^*) \to V$. Täten havaintoaineiston E ja volatiliteettijoukon Σ^* avulla saadaan odotusarvolle μ suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\mu}$. Tämän jälkeen saadaan myös volatiliteetille suurimman uskottavuuden estimaatiksi

$$\hat{\sigma} = \arg\max_{\sigma \in \Sigma^*} l_E(\hat{\mu}; E).$$

4 Redusoidut luottoriskimallit

Konkurssitodennäköisyyttä voidaan myös tutkia ilman, että käsitellään yrityksen sisäistä tilannetta. Tällaisessa käsittelyssä ei oteta kantaa konkurssin syihin. Konkurssi tapahtuu Poisson-prosessin hyppyhetkellä, jolloin konkurssi tapahtuu yllättäen.

Monet luottoriskien kanssa tekemisissä olevat ammattilaiset taipuvat redusoitujen mallien puoleen, koska ne ovat matemaattisesti helpommin seurattavia. Lisäksi redusoidut mallit ovat sopivampia, koska ei ole mahdollista saada täydellistä informaatiota konkurssihetkestä eikä odotetusta konkurssista selviytymisintensiteetistä. Väitteet nojaavat oletukseen, että mallin käyttäjällä on yhtä paljon tietoa kuin markkinoilla yleisesti, tehden redusoidusta mallista realistisemman. Redusoidun mallin heikkoutena on taloustieteellisen näkökulman puute. [1, s.3]

Artikkelissa [27] pohditaan rakenteellisten ja redusoitujen mallien käyttötarkoituksia ja niiden informaatiojoukkojen eroa. Rakenteellisen ja redusoidun mallin erona voidaan ajatella olevan informaatiojoukon valinta: redusoidussa malleissa informaation oletetaan olevan markkinoiden havainnoimaa, kun taas rakenteellisessa mallissa tarvitaan tietoja yrityksen sisäisestä tilanteesta. Tämä täytyy huomioida mallia valitessa. Jos yritys haluaa tutkia yrityksensä konkurssiriskiä, tällöin rakenteellinen malli sopii tilanteeseen paremmin. Jos taas halutaan arvioida riskejä sijoittajan näkökulmasta, tällöin redusoidut mallit toimivat paremmin.

4.1 Intensiteettiin nojautuva malli

Merkitään muuttujia $T_1, T_2, ...$ jonkin tapahtuman tapahtumisajoiksi. Jono (T_i) on homogeeninen Poisson-prosessi intensiteetillä λ, jos tapahtumien väliset ajat eli $T_{i+1} - T_i$ ovat toisistaan riippumattomia ja eksponentiaalisesti jakautuneet parametrilla λ. Tapahtumien lukumäärä N_t välillä $[0, t]$ on

$$N_t = \sum_i \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}}.$$

Nyt $N = (N_t)_{t \geq 0}$ on homogeeninen Poisson-prosessi intensiteetillä λ, jos lisäykset $N_t - N_s$ ovat toisistaan riippumattomia ja ne ovat Poisson-jakautuneet parametrilla $\lambda(t-s)$ jokaiselle $s < t$.

Intensiteettiperustaisen lähestymistavan perusoletuksena on, että konkurssihetki asetetaan yhtä suureksi ensimmäisen hyppyhetken kanssa. Konkurssihetki on

$$\tau = \inf\{t > 0 \mid N_t > 0\}.$$

Konkurssihetki $\tau = T_1$ on eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla τ ja konkurssitodennäköisyydeksi saadaan

$$F(T) = \mathbb{P}[\tau \leq T] = 1 - e^{-\lambda T}.$$

Konkurssi-intensiteetti λ saadaan laskemalla konkurssiin siirtymisvauhti ehdolla, että konkurssia ei ole vielä tapahtunut:

$$\begin{aligned}\lambda &:= \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}\big[\tau \in (t, t+h] \bigm| \tau > t\big]}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}\big[t < \tau \leq t+h\big]}{h\mathbb{P}[\tau > t]} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t+h) - F(t)}{h\big(1 - F(t)\big)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \cdot \frac{1}{1 - F(t)} \\ &= \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Konkurssiriskisten nollakuponkisten velkakirjojen hinnoittelu on suoraviivaista intensiteettiperustaisella lähestymistavalla. Tutkitaan tapaa nimeltä nimellisarvon takaisin saanti (recovery of face value). Korostetaan riskittömän nollakuponkilainan merkintää yläviivan avulla merkinnällä $\bar{B}$. Oletetaan, että konkurssin tapahtuessa, velkojat saavat takaisin osuuden $R \in [0, 1]$ yksikköhintaisesta velkakirjasta, jonka maturiteetti on T. Oletetaan, että korko $r > 0$ on vakio. Täten riskittömän nollakuponkilainan hinta on $\bar{B} = e^{-rT}$. Jos takaisinmaksuosa R maksetaan hetkellä T, tällöin saadaan konkurssiriskisen velkakirjan hinta hetkellä nolla:

$$\begin{aligned} B_0^T &= \mathbb{E}^Q\big[e^{-rT}(\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R\mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}})\big] \quad = e^{-rT}\big(e^{-\bar{\lambda}T} + R(1 - e^{-\bar{\lambda}T})\big) \\ &= e^{-rT}\big(e^{-\bar{\lambda}T} + R - Re^{-\bar{\lambda}T}\big) \quad = e^{-rT}\big(e^{-\bar{\lambda}T}(1 - R) + R\big) \\ &= e^{-rT}\big(e^{-\bar{\lambda}T}(1 - R) + R + (1 - R) - (1 - R)\big) \\ &= e^{-rT}\big((1 - R)(e^{-\bar{\lambda}T - 1} - 1) + R + (1 - R)\big) \\ &= e^{-rT}\big(- (1 - R)(1 - e^{-\bar{\lambda}T}) + 1\big) \\ &= \bar{B}_0^T\big(1 - (1 - R)(1 - e^{-\bar{\lambda}T})\big) \\ &= \bar{B}_0^T - \bar{B}_0^T(1 - R)\mathbb{P}^Q[\tau \leq T]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Tämän avulla riskillistä velkakirjaa voidaan käsitellä riskittömänä, kun käytetään riskineutraalia intensiteettiä $\bar{\lambda}$. Tämä on intensiteettiperustaisen lähestymistavan keskeinen ominaisuus.

Toinen mahdollinen tapa on nimeltään samanarvoinen takaisinsaanti (equivalent recovery). Yrityksen mennessä konkurssiin, velkoja saa takaisin osuuden $R \in [0, 1]$ vastaavasta riskittömästä nollakuponkilainasta. Erona ensimmäiseen tapaan on, että lasketaanko osuus R riskittömästä vai riskillisestä velkakirjasta.

Kolmatta tapaa kutsutaan osittaiseksi takaisinmaksuksi (fractional recovery). Siinä velkoja saa takaisin juuri ennen konkurssihetkeä olevasta markkinahinnasta $B_{\tau^-}^T = \lim_{t\to\tau} B_t^T$ osuuden $R \in [0,1]$. Tämän jälkeen havaitaan, onko yritys mennyt konkurssiin. Jos konkurssi ei toteudu, velkojille ei koidu tappioita. Kun R oletetaan vakioksi ja takaisinmaksu tapahtuu konkurssihetkellä τ, saadaan

$$B_0^T = \mathbb{E}^Q\big[e^{-rT}\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} + e^{-r\tau}RB_{\tau^-}^T\mathbb{1}_{\{\tau\le T\}}\big].$$

Tämä voidaan tulkita seuraavasti: jos konkurssia ei tapahdu, velkoja saa rahansa täysimääräisenä takaisin. Jos konkurssi tapahtuu, todennäköisyydellä R^* velkoja saa rahansa täysimääräisenä takaisin ja todennäköisyydellä $1-R^*$ velkoja ei saa mitään. Velkojan näkökulmasta "merkityksetön konkurssi" tapahtuu siis intensiteetillä $\bar{\lambda}R^*$. Vastaavasti konkurssi, jossa velkoja ei saa takaisin mitään, tapahtuu intensiteetillä $\bar{\lambda}(1-R^*)$. Jos asetetaan konkurssissa tuleva takaisinmaksuosa R nollaksi kaavassa (4.2), saadaan

$$\begin{aligned} B_0^T &= \bar{B}_0^T - \bar{B}_0^T(1-R)\mathbb{P}^Q[\tau\le T] = \bar{B}_0^T - \bar{B}_0^T\big(1-\mathbb{P}^Q[\tau>T]\big)\\ &= \bar{B}_0^T\mathbb{P}^Q[\tau>T] = \bar{B}_0^T e^{-\bar{\lambda}T} = e^{-(r+\bar{\lambda})T}. \end{aligned}$$

Kun tähän syötetään saatu ehtoa $R=0$ vastaava konkurssi-intensiteetti $\bar{\lambda}(1-R^*)$, saadaan

$$B_0^T = e^{-(r+(1-R^*)\bar{\lambda})T}.$$

Konkurssitilanteessa velkojat menettävät ennen konkurssihetkeä olevasta markkinahinnasta $B_{\tau^-}^T$ osuuden $1-R\in[0,1]$. Uudelleenorganisoinnin jälkeen yritys voi päästä pois konkurssitilasta, mutta myöhemmin ajautua siihen uudelleen. Tämän vuoksi esitetään maturiteetin T omaavan velkakirjan tuotto satunnaismuuttujan R^{N_T} avulla, jossa $N_T\in\mathbb{N}$ on tapahtuneiden konkurssien lukumäärä hetkeen T mennessä. Kun R on vakio ja konkurssien lukumäärä noudattaa Poisson-jakaumaa, velkakirjan hinnaksi saadaan

$$\begin{aligned} B_0^T &= \mathbb{E}^Q[e^{-rT}R^{N_T}] = e^{-rT}\sum_{k=0}^{\infty}R^k\mathbb{P}^Q[N_T=k]\\ &= e^{-rT}\sum_{k=0}^{\infty}R^k\frac{(\bar{\lambda}T)^k}{k!}e^{-\bar{\lambda}T} && \Big|\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z\\ &= e^{-(r+\bar{\lambda})T}e^{R\bar{\lambda}T} = e^{-(r+\bar{\lambda}-Q\bar{\lambda})T}\\ &= e^{-(r+(1-R)\bar{\lambda})T}. \end{aligned}$$

Täten useamman kerran tapahtuva konkurssi laina-aikana ei vaikeuta mallin käytettävyyttä.

Yksinkertainen homogeeninen Poisson-prosessi voidaan yleistää seuraavalla tavalla: muuttujaa N kutsutaan epähomogeeniseksi Poisson-prosessiksi parametrinaan deterministinen intensiteettifunktio $\lambda(t)$, jos lisäykset $N_t - N_s$ ovat riippumattomia ja

$$\mathbb{P}[N_t - N_s = k] = \frac{1}{k!}\Big(\int_s^t \lambda(u)du\Big)^k e^{-\int_s^t \lambda(u)du},$$

kun $s < t$. Tällöin konkurssitodennäköisyydeksi saadaan

$$\mathbb{P}[\tau \leq T] = 1 - \mathbb{P}[N_T = 0] = 1 - e^{-\int_0^T \lambda(u)du}.$$

[17]

4.1.1 Takaisinmaksutermi jatkuvana funktiona

Tutkitaan lainaa, joka on konkurssitilanteessa arvoton. Oletetaan, että $c_T = c(X_T)$ on summa, joka velkakirjasta saadaan maturiteetissa T. Olkoon c rajoitettu mitallinen funktio. Oletetaan, että korko on $r_t = g(X_t)$, jossa g on rajoitettu mitallinen funktio. Velkakirjan hinta liikkeellelaskuhetkellä on

$$B_0 = \mathbb{E}^Q[e^{-\int_0^T r_s ds} c_T \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}].$$

Odotusarvon ominaisuuksien avulla saadaan

$$B_0 = \mathbb{E}^Q[e^{-\int_0^T r_s ds} c_T \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}] = \mathbb{E}^Q\big[\mathbb{E}^Q[e^{-\int_0^T r_s ds} c_T \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | (X_s)_{s \leq T}]\big].$$

Kun prosessi X on tiedossa, tällöin c ja r tunnetaan, jolloin saadaan

$$= \mathbb{E}^Q\big[e^{-\int_0^T r_s ds} c_T \mathbb{P}^Q[\tau > T | (X_s)_{s \leq T}]\big].$$

Koska konkurssihetki on epähomogeenisen Poisson-prosessin ensimmäinen hyppyhetki, saadaan

$$= \mathbb{E}^Q[e^{-\int_0^T r_s ds} c_T e^{-\int_0^T \lambda_s ds}] = \mathbb{E}^Q[c_T e^{-\int_0^T (\lambda_s + r_s) ds}].$$

Tutkitaan nyt tilannetta, jossa konkurssitilanteessa velkakirjasijoittajat saavat takaisin summan R_τ. Oletetaan, että R on rajoitettu stokastinen prosessi. Oletetaan edelleen korkorakenne stokastiseksi. Määritellään $B_0 = B_0^F + B_0^R$, jossa B_0^F on velkakirjan arvo hetkellä 0, kun konkurssia ei tapahdu ja B_0^R velkakirjan arvo, kun konkurssi tapahtuu:

$$B_0^F = \mathbb{E}^Q[e^{-\int_0^T r_s ds} c_T \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}],$$
$$B_0^R = \mathbb{E}^Q[e^{-\int_0^\tau r_s ds} R_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}].$$

Termiä B_0^R voidaan muokata käyttäen odotusarvon ominaisuuksia sekä Fubinin lausetta integrointijärjestyksen vaihtoa varten. Saadaan

$$\begin{aligned}
B_0^R &= \mathbb{E}^Q[\mathbb{E}^Q[e^{-\int_0^\tau r_s ds} R_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} | (X_s)_{s \leq T}]] \\
&= \mathbb{E}^Q\Big[\int_0^\infty e^{-\int_0^u r_s ds} R_u \mathbb{1}_{\{u \leq T\}} k(u) du\Big] \\
&= \int_0^T \mathbb{E}^Q[e^{-\int_0^u r_s ds} R_u k(u)] du,
\end{aligned}$$

jossa $k(u)$ on ehdollisen konkurssitodennäköisyyden tiheysfunktio, kun tunnetaan polku $(X_s)_{s \leq T}$ jokaiselle $0 \leq u \leq T$. Black–Cox-mallissa tämä funktio on

$$k(u) = \frac{d}{du}\mathbb{P}^Q[\tau \leq u | (X_s)_{s \leq T}] = \frac{d}{du}(1 - e^{-\int_0^u \lambda_s ds}) = \lambda_u e^{-\int_0^u \lambda_s ds}.$$

Tämän avulla saadaan

$$B_0^R = \int_0^T \mathbb{E}^Q[e^{-\int_0^u (r_s + \lambda_s) ds} R_u \lambda_u] du.$$

[18]

4.2 Luottoluokituksiin liittyvä Markov-malli

Tutkitaan konkurssitodennäköisyyksiä luottoluokitusten avulla. Kuvataan eri luottoluokituksia äärellisellä joukolla $S = \{1, 2, ..., K\}$, jossa 1 kuvaa riskittömintä luokkaa, $K-1$ kuvaa riskillisintä luokkaa ja K kuvaa konkurssitilaa. Oletetaan, että konkurssitilaan joutuessaan yritys ei voi enää tehdä mitään poistuakseen konkurssista. Konkurssitila K on siis absorboiva tila eli tila, josta ei voi siirtyä enää muihin tiloihin.

Jatkuva-aikainen aikahomogeeninen Markovin ketju $\{\eta_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ voidaan määritellä $K \times K$ kokoisen siirtymämatriisin

$$\Lambda = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \dots & \lambda_{1,K} \\
\lambda_{2,1} & \lambda_2 & \lambda_{2,3} & \dots & \lambda_{2,Y} \\
\vdots & & & & \\
\lambda_{K-1,1} & \lambda_{K-1,2} & \lambda_{K-1,3} & \dots & \lambda_{K-1,K} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

avulla, jossa $\lambda_{ij} \leq 0$ jokaiselle i, j ja

$$\lambda_i = -\sum_{j=1, j \neq i}^{K} \lambda_{ij}, \qquad i = 1, ..., K.$$

Matriisin termit λ_{ij} kuvaavat intensiteettejä, joilla tilasta i siirrytään tilaan j. Matriisin viimeinen rivi kuvaa absorboivaa tilaa, joten sen jokaisen siirtymän intensiteetin on oltava 0.

Oletetaan, että on olemassa yksikäsitteinen riskineutraali mitta $\mathbb{P}^Q$, joka tekee normalisoinnin jälkeen kaikista riskittömistä ja riskillisistä velkakirjahinnoista martingaaleja. Normalisoinnissa kaikkien arvopapereiden hinnat on suhteutettu yhteen valittuun arvopaperiin [10, s.5]. Tämän oletuksen nojalla markkinat ovat täydelliset ja arbitraasittomat. Oletetaan lisäksi, että riskineutraalin todennäköisyysmitan alla generaattorimatriisi voidaan esittää muodossa

$$\widetilde{\Lambda} = U(t)\Lambda = \begin{pmatrix} \widetilde{q}_1 & \widetilde{q}_{1,2} & \widetilde{q}_{1,3} & \cdots & \widetilde{q}_{1,K} \\ \widetilde{q}_{2,1} & \widetilde{q}_2 & \widetilde{q}_{2,3} & \cdots & \widetilde{q}_{2,Y} \\ \vdots & & & & \\ \widetilde{q}_{K-1,1} & \widetilde{q}_{K-1,2} & \widetilde{q}_{K-1,3} & \cdots & \widetilde{q}_{K-1,K} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

jossa $U(t) = \mathrm{diag}(\mu_1(t), ..., \mu_{K-1}(t), 1)$ ja $\widetilde{q}_{i,j}$ kuvaa riskineutraalia siirtymisintensiteettiä riskiluokasta i riskiluokkaan j. Jokainen μ_i on deterministinen, aidosti positiivinen funktio, jolle pätee

$$\int_0^T \mu_i(t)dt < \infty, \quad i = 1, ..., K-1.$$

Todennäköisyys sille, että riskiluokassa i oleva velkakirja ($\eta_t = i$) ei mene konkurssiin hetkeen T mennessä havainnointihetkellä t, on

$$\mathbb{P}_t^Q[\tau^* > T] = \sum_{j \neq K} \widetilde{q}_{ij}(t,T) = 1 - \widetilde{q}_{iK}(t,T),$$

jossa $\tau^* = \inf\{s \geq t : \eta_s = K\}$. Lauseke seuraa suoraan oletuksesta, että konkurssitila on absorboiva. Tämän avulla voidaan laskea ehdollinen selviytymistodennäköisyys kiinnitetylle riskiluokan i lainalle:

$$\mathbb{P}_t^Q[\tau^* > T+1 | \tau^* > T] = \frac{\mathbb{P}_t^Q[\tau^* > T+1 \ \cap \ \tau^* > T]}{\mathbb{P}_t^Q[\tau^* > T]} = \frac{\mathbb{P}_t^Q[\tau^* > T+1]}{\mathbb{P}_t^Q[\tau^* > T]}.$$

Nyt on mahdollista laskea velkakirjahinnat riskillisille nollakuponkilainoille. Määritellään maturiteettihetken T omaaville velkakirjoille hetken t hinnat, jossa $v(t,T)$ on riskillisen velkapaperin ja $p(t,T)$ on vastaava riskittömän velkapaperin hinta. Riskittömän velkapaperin hinta on tällöin

$$p(t,T) = \mathbb{E}_t^Q\Big[\frac{B(t)}{B(T)}\Big]$$

ja riskillisen

$$v(t,T) = \mathbb{E}_t^Q\Big[\frac{B(t)}{B(T)}\big(R\mathbb{1}_{\{\tau^*\le T\}} + \mathbb{1}_{\{\tau^*>T\}}\big)\Big],$$

jossa $R < 1$ kuvaa riskillisen velkakirjan konkurssitilanteessa maksamaa osuutta. Kun oletetaan stokastista prosessia noudattavan riskittömän koron olevan riippumaton konkurssiriskistä riskineutraalin mitan $\mathbb{P}^Q$ alaisuudessa, saadaan

$$\begin{aligned} v(t,T) &= \mathbb{E}_t^Q\Big[\frac{B(t)}{B(T)})\mathbb{E}_t^Q(R\mathbb{1}_{\{\tau^*\le T\}} + \mathbb{1}_{\{\tau^*>T\}}\Big] \\ &= p(t,T)\big(R + (1-R)\mathbb{P}^Q[\tau^* > T]\big). \end{aligned}$$

Tässä siis saadaan takaisin summa R todennäköisyydellä yksi ja loppusumma $(1-R)$ saadaan takaisin todennäköisyydellä, että konkurssia ei tapahdu. Termi $p(t,T)$ diskonttaa tuotot hetkeen t. Huomionarvoista on, että jos yritys on ajautunut konkurssitilaan ennen hetkeä t, tällöin velkapaperin $v(t,T)$ odotettu tuotto on $R \cdot \mathbb{E}^Q[\frac{B(t)}{B(T)}] = R \cdot p(t,T)$. Koska konkurssi on absorboiva tila, velkapaperilla ei ole enää mahdollisuutta saada koko nimellisarvoaan takaisin. Näin ollen konkurssissa olevan yrityksen velkapaperin termiinikorolle pätee $f^i(t,T) = f(t,T)$, jossa f^i kuvaa riskiluokan i termiinikorkoa ja f vastaavaa riskitöntä termiinikorkoa.

Termiinikorko $f^i(t,T)$ riskiluokan i nollakuponkilainalle on $f^i(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}\ln v^i(t,T)$, joten sijoittamalla tähän v saadaan

$$\begin{aligned} f^i(t,T) &= -\frac{\partial}{\partial T}\ln v^i(t,T) \\ &= -\Bigg(\frac{-Rr(T)p(t,T) - (1-R)r(T)p(t,T)\mathbb{P}^Q[\tau > T]}{p(t,T)\big(R + (1-R)\mathbb{P}^Q[\tau > T]\big)} \\ &\qquad + \frac{(1-R)p(t,T)\frac{\partial}{\partial T}\mathbb{P}^Q[\tau > T]}{p(t,T)\big(R + (1-R)\mathbb{P}^Q[\tau > T]\big)}\Bigg) \\ &= \frac{\delta r(T) + (1-R)r(T)\mathbb{P}^Q[\tau > T] - (1-R)\frac{\partial}{\partial T}\mathbb{P}^Q[\tau > T]}{R + (1-R)\mathbb{P}[\tau > T]} \\ &= \frac{\Big(R + (1-R)\mathbb{P}^Q[\tau > T]\Big)r(T) - (1-R)\frac{\partial}{\partial T}\mathbb{P}^Q[\tau > T]}{R + (1-R)\mathbb{P}^Q[\tau > T]} \\ &= r(T) - \frac{(1-R)\frac{\partial}{\partial T}\mathbb{P}^Q[\tau > T]}{R + (1-R)\mathbb{P}^Q[\tau > T]}, \end{aligned}$$

kun $t < \tau^*$. Yleisemmässä muodossa saadaan

$$f^i(t,T) = f(t,T) - \mathbb{1}_{\{\tau^*>t\}}\frac{(1-R)\frac{\partial}{\partial T}\mathbb{P}^Q[\tau > T]}{R + (1-R)\mathbb{P}^Q[\tau > T]}.$$

Jälkimmäinen termi on kokonaisuudessaan positiivinen, sillä

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T}\mathbb{P}^Q[\tau > T] &= \frac{\partial}{\partial T}(1 - \mathbb{P}^Q[\tau \leq T]) \\ &= -\frac{\partial}{\partial T}\int_0^T f_\tau(T) = -f_\tau(T) \leq 0.\end{aligned}$$

[26]

5 Rakenteellisen ja redusoidun mallin yhdistäminen

Edellä todettiin, että rakenteelliset luottoriskimallit tuottavat pieniä sprede-jä: konkurssi ei siis ole yllättävä tapahtuma. Jotta konkurssista saadaan yllättävä tapahtuma on irtauduttava täydellisen informaation oletuksista. Vaihtoehtoina on olettaa, ettei yrityksen arvoprosessia V tai konkurssirajaa D pystytä päättelemään

Jokainen luottoriskimalli perustuu konkurssihetkeen $\tau(\omega)$. Se on satunnaismuuttuja, jonka arvo riippuu maailmantilasta ω. Konkurssihetki ei kuitenkaan ole tiedossa. Luottoriskimallia käytetään konkurssihetken jakauman sekä velkakirjan hinnan estimoinnissa. Käsitellään konkurssihetkeä indikaattorin $N(t,\omega)$ avulla, jossa

$$N(t,\omega) = \begin{cases} 0, & t < \tau(\omega) \\ 1, & \text{muulloin} \end{cases} .$$

Käsitellään konkurssiprosessia havaittavan informaation avulla. Olkoon $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$ ehdollinen odotusarvo satunnaismuuttujasta X. Todennäköisyys konkurssin tapahtumiselle ennen hetkeä t, ehdolla, että prosessi $\mathcal{F}_t$ tunnetaan, on

$$F(t,\omega) = \mathbb{E}[N(t)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{P}[\tau \leq t|\mathcal{F}_t].$$

5.1 Konkurssirajaa ei havaita: I^2-malli

Rakenteellisessa I^2-mallissa sijoittajat havaitsevat yrityksen arvoprosessin V, joka noudattaa geometrista Brownin liikettä. He eivät kuitenkaan havaitse konkurssirajaa. Yritys menee konkurssiin, kun yrityksen arvo laskee alle konkurssirajan. Tällöin konkurssi tapahtuu yllättäen. Mikä tahansa yrityksen yrityksen arvo voi olla konkurssirajana. I^2 -mallissa konkurssiraja oletetaan havaitsemattomaksi, jatkuvaksi satunnaismuuttujaksi, jonka todennäköisyysjakauma G on funktio $G : (0, V(0)) \to [0,1]$. Funktion G jakauma on riippumaton yrityksen arvoprosessista. Funktio $G\big(M(t,\omega)\big)$ kertoo todennäköisyyden, että hetkellä t maailmantilassa ω konkurssiraja on välillä $[0, M(t,\omega)]$. Tämä raja pitää alittaa, jotta yritys on konkurssissa. Kun hetkellä t ollaan maailmantilassa ω, yritys on silloin konkurssissa todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}[\tau \leq t|\mathcal{F}_t] = F(t,\omega) = 1 - G\big(M(t,\omega)\big) \quad t > 0,$$

jossa $M(t,\omega)$ on pienin yrityksen arvo hetkeen t mennessä. Määritellään seuraavaksi hasardifunktio luottoriskimalleja varten. Hasardifunktio λ antaa ehdollisen konkurssi-intensiteetin. Se määritellään todennäköisyydeksi, että yritys menee konkurssiin lyhyellä aikavälillä dt ehdolla, että yritys ei ole mennyt konkurssiin aiemmin. [31] Kumulatiivinen hasardifunktio A on jatkuva, ei-vähenevä funktio, joka voidaan esittää muodossa

$$A(t,\omega) = -\ln\big(1 - F(t,\omega)\big). \tag{5.1}$$

Redusoidussa mallissa kumulatiivinen hasardifunktio vastaa kumulatiivista intensiteettiä:

$$A(t,\omega) = \int_0^t \lambda(s,\omega)ds.$$

I^2-mallissa kumulatiivinen hasardifunktio on

$$A(t,\omega) = -\ln G\big(M(t,\omega)\big).$$

I^2 -mallissa kumulatiivista hasardifunktiota ei voida määrittää intensiteetin h avulla. Jos näin olisi, kumulatiivinen hasardifunktio voitaisiin esittää integraalina muodossa

$$A(t,\omega) = \int_0^t h(s,\omega)ds,$$

jota derivoimalla muuttujan t suhteen saataisiin intensiteettifunktio h. Oletetaan funktion G olevan differentioituva. Sisäfunktio $M(t,\omega)$ on äärettömän monessa kohtaa vähenevä, mutta tämä joukko on nollamittainen [21, s.15]. Täten sisäfunktion derivaatta on melkein kaikkialla 0, jolloin myös $h = 0$.

Kun kumulatiivisen hasardifunktion polut oletetaan jatkuviksi, tällöin velkakirjojen hintoja voidaan estimoida. Tutkitaan valtion liikkeelle laskemaa nollakuponkilainaa, joka maksaa maturiteetissa T yhden euron takaisin. Konkurssin tapahtuessa, sijoittaja ei saa takaisin mitään. Merkitään riskitöntä korkoa muuttujalla $r(t,\omega)$. Velkakirjan hinta hetkellä $t < \tau$ on

$$p(t,T) = \mathbb{E}_t[e^{-\int_t^T r(s)ds + A(t) - A(T)}] \qquad t \leq T,$$

jos prosessi p on jatkuva konkurssihetkellä. Erityistapauksessa, kun asetetaan $r = 0$ saadaan konkurssitodennäköisyydeksi

$$\mathbb{P}[\tau \leq t] = 1 - p(0,t) = 1 - \mathbb{E}[e^{-A(t)}].$$

Kumulatiivisen hasardifunktion määritelmää (5.1) voidaan käyttää aina, kunhan mallin ehdollinen konkurssitodennäköisyys on monotoninen, jatkuva ja sille pätee $F(t,\omega) < 1$. Viimeinen ehto takaa, että yrityksellä on aina mahdollisuus välttää konkurssi. Kun $F(t,\omega) < 1$, kumulatiivinen hasardifunktio on hyvinmääritelty. Joillekin malleille kaikki edellä mainitut ehdot eivät kuitenkaan päde, jolloin niitä varten on käytettävä yleisempää kumulatiivisen hasardifunktion määritelmää. Esimerkiksi, jos yrityksen arvoprosessi sisältää hyppyjä, sen minimiprosessi saattaa sisältää hyppyjä, jolloin ehdollinen konkurssitodennäköisyys ei ole jatkuva. Hyppyjä varten otetaan käyttöön kompensaattoritermi. Sen tarkoituksena on kompensoida tapahtunutta hyppyä [16]. Määritellään kumulatiivinen hasardifunktio yleisemmin seuraavasti:

$$A(t, \omega) = \int_0^t \frac{dK(s, \omega)}{1 - F(s^-, \omega)},$$

jossa $K(t, \omega)$ on ehdollisen konkurssitodennäköisyyden $F(t, \omega)$ kompensaattori. Kompensaattorilla on seuraavat ominaisuudet: Kompensaattori on eivähenevä ja alkaa nollasta. Stokastisen prosessin Z ja sen kompensaattorin erotus on martingaali. Kompensaattori on ennustettava prosessi, vaikka taustalla oleva prosessi Z ei olisikaan ennustettavissa. Lisäksi, konkurssi on mahdotonta ennustaa silloin ja vain silloin, kun kompensaattorin polut ovat jatkuvia. [19]

5.2 Satunnainen konkurssiraja

Kiinnitettyä konkurssirajaa voidaan myös käsitellä satunnaismuuttujana. Määritellään konkurssiraja D todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \varepsilon, \mathbb{P})$, joka kuvaa markkinoiden satunnaisprosessia. Todennäköisyysavaruus on varustettu filtraatiolla $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, joka sisältää tiedon yrityksen kaikista varoista. Konkurssirajan D oletetaan riippuvan yrityksen kokonaisarvosta $(V_t)_{t \geq 0}$. Merkitään kertymäfunktiota $F_D(S) = \mathbb{P}[D < S] = \int_0^S f_D(u)du$, jossa $F_D(S) \in (0, 1)$ jokaiselle $S \leq M_t$. Se kertoo todennäköisyyden, että havaintoarvo S on konkurssirajan D yläpuolella. Muuttuja M_t on yrityksen historiallinen minimi eli $M_t = \min_{s \leq t} V_s$. Konkurssihetki on edelleen $\tau = \inf\{t \geq 0, V_t \leq D\}$ ja lisäksi voidaan todeta, että $\{\tau_D > t\} = \{D < M_t\}$. Satunnainen konkurssiraja D tiheysfunktiolla f voidaan tulkita epähomogeenisen Poisson-prosessin ensimmäiseksi hyppyhetkeksi, jossa konkurssirajaintensiteetti on λ_D. Intensiteetti λ_D saadaan derivoimalla hasardifunktiota $A_D(M_t) = \int_0^{M_t} \lambda_D(u)du$.

Konkurssiraja D noudattaa konkurssi-intensiteettimallia, jos on olemassa positiivinen, oikealta jatkuva ja vasemman raja-arvon omaava $\mathcal{F}_t$-sopeutunut prosessi A_D sekä ε-mitallinen satunnaismuuttuja $\xi \sim \text{Exp}(1)$, joka on riippumaton sigma-algebrasta $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n \geq 1} \mathcal{F}_t$ toteuttaen ehdon

$$D = \inf\{S \in [0, M_t) \ : \ A_D(S) \geq \xi\}.$$

Määritelmässä 2.9 todettiin prosessin X olevan $\mathcal{F}_t$-sopeutunut, jos prosessi X on $\mathcal{F}_t$-mitallinen jokaisella ajanhetkellä t.

Konkurssi-intensiteetin λ_D voi tulkita todennäköisyydeksi, että konkurssiraja D alitetaan pienellä aikavälillä dt. Prosessi $(M_s)_{t>s\geq 0}$ sijaitsee rajan D yläpuolella kunnes saavutaan ajanhetkeen t, jolloin rajan alituksen todennäköisyys on

$$\lambda_D(M_t) = \frac{f_D(M_t)}{1 - F_D(M_t)} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}[M_{t+h} < D < M_t]}{h\mathbb{P}[D < M_t]}.$$

Olkoon $H_{M_t} = \mathbb{1}_{\{D\geq M_t\}}$ ja sen filtraatio $\mathscr{H}_{M_t} = \sigma\{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2, s \leq t \setminus D \geq M_s, M_t \leq M_s\} = \sigma(D \vee M_t)$. Oletetaan, että markkinoilta saatava informaatiojoukko koostuu konkurssirajan havaintovirrasta. Mallin ajatuksena on, että jokainen $\mathscr{H}_{M_t}$-mitallinen satunnaismuuttuja Y voidaan kirjoittaa muodossa

$$Y = h(D \vee M_t) = h(D)\mathbb{1}_{\{D\geq M_t\}} + h(M_t)\mathbb{1}_{\{D<M_t\}},$$

jossa h on Borel-funktio.

Oletetaan, että $u \geq t$. Tavoitteena on selvittää todennäköisyys, että yritys ei ole konkurssissa hetkellä u, kun tila t tunnetaan eli $\mathbb{P}[D < M_u|\mathscr{H}_{M_t}]$. Tämän vuoksi johdetaan esitysmuoto funktiolle $h(M_t)$. Oletetaan, että konkurssi-intensiteettifunktio λ_D on olemassa ja satunnaismuuttuja $Y = h(D)$ on $\mathscr{H}_\infty$ -mitallinen jollekin Borel-mitalliselle funktiolle $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Erityisesti Y on $\mathscr{H}_{M_u}$-mitallinen, jolloin

$$\mathbb{E}[Y|\mathscr{H}_{M_u}] = h(D)\mathbb{1}_{\{D\geq M_u\}} + h(M_u)\mathbb{1}_{\{D<M_u\}}. \tag{5.2}$$

Kun kerrotaan tämä yhtälö puolittain termillä $\mathbb{1}_{\{D<M_u\}}$ ja otetaan puolittain odotusarvo, saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|\mathscr{H}_{M_u}]\mathbb{1}_{\{D<M_u\}}\big] &= \mathbb{E}\big[h(D)\mathbb{1}_{\{D\geq M_u\}}\mathbb{1}_{\{D<M_u\}} + h(M_u)\mathbb{1}_{\{D<M_u\}}\mathbb{1}_{\{D<M_u\}}\big] \\ \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{\{D<M_u\}}] &= \mathbb{E}[h(M_u)\mathbb{1}_{\{D<M_u\}}] = h(M_u)\mathbb{P}[D < M_u].\end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöstä $h(M_t)$. Koska Y on riippuvainen konkurssirajasta D, se voi saada minkä tahansa arvon $h(D)$, jossa $D \in [0, M_t)$. Odotusarvon sisällä oleva indikaattorifunktio $\mathbb{1}_{\{D<M_t\}}$ rajoittaa integroinnin ylärajan tasolle M_t. Saadaan

$$\begin{aligned}h(M_t) = \frac{\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{\{D<M_u\}}]}{\mathbb{P}[D < M_t]} &= \frac{\int_0^{M_t} h(M_u)f_D(M_u)dA_D(M_t)}{F_D(M_t)} \\ &= \frac{\int_0^{M_t} h(M_u)e^{-A_D(M_u)}dA_D(M_u)}{1 - e^{-A_D(M_t)}}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Nyt sijoittamalla yhtälö (5.3) yhtälöön (5.2), saadaan

$$\mathbb{E}[Y|\mathscr{H}_{M_t}] = h(D)\mathbb{1}_{\{D\geq M_t\}} + \frac{\mathbb{1}_{\{D<M_t\}}}{1 - e^{-A_D(M_t)}} \int_0^{M_t} h(M_u)e^{-A_D(M_u)}dA_D(M_u).$$

Oletetaan, että konkurssirajaa ei ole alitettu hetkeen t mennessä. Asetetaan $Y = h(D) = \mathbb{1}_{\{D<M_t\}}$, jolloin satunnaismuuttuja Y kuvaa yrityksen konkurssitilan binääriseksi muuttujaksi oletuksella, että konkurssirajan D on voimassa. Jos kyseinen raja johtaa konkurssitilaan, tällöin $Y = 0$, muulloin $Y = 1$. Näin ollen odotusarvo satunnaismuuttujasta Y huomioi jokaisen mahdollisen konkurssirajan $D \in [0, M_t)$ ja vastaa todennäköisyyttä, että yritys ei joudu konkurssiin. Näin ollen todennäköisyys, että yritys ei ole konkurssissa hetkellä t, on

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[D < M_u|\mathscr{H}_{M_t}] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{D<M_u\}}|\mathscr{H}_{M_t}] \\
&= \frac{\mathbb{1}_{\{D<M_t\}}}{1-e^{-A_D(M_t)}} \int_0^{M_u} e^{-\int_0^{M_v} \lambda_D(M_\alpha)d\alpha} dA_D(M_v) \\
&= \frac{\mathbb{1}_{\{D<M_t\}}}{1-e^{-A_D(M_t)}} \int_0^{M_u} \lambda_D(M_u) e^{-\int_0^{M_v} \lambda_D(M_\alpha)d\alpha} dM_v,
\end{aligned}$$

kun $t \leq u$. Integrandi on muotoa $-f'(x)g'(f(x))$, joten saadaan

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{1}_{\{D<M_t\}}}{1-e^{-A_D(M_t)}} \Big/_{0}^{M_u} -e^{-\int_0^{M_v} \lambda_D(M_\alpha)d\alpha} \\
&= \frac{\mathbb{1}_{\{D<M_t\}}}{1-e^{-A_D(M_t)}} (1 - e^{\int_0^{M_u} \lambda_D(M_\alpha)d\alpha}).
\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M_u \leq D < M_t|\mathscr{H}_{M_t}] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{M_u \leq D<M_t\}}|\mathscr{H}_{M_t}] \\
&= \frac{\mathbb{1}_{\{D<M_t\}}}{1-e^{-A_D(M_t)}} \int_{M_u}^{M_t} \lambda_D(M_v) e^{-\int_0^{M_v} \lambda_D(M_\alpha)d\alpha} dM_v \\
&= \frac{\mathbb{1}_{\{D<M_t\}}}{1-e^{-A_D(M_t)}} \Big/_{M_u}^{M_t} -e^{-\int_0^{M_v} \lambda_D(M_\alpha)d\alpha} \\
&= \frac{\mathbb{1}_{\{D<M_t\}}}{1-e^{-A_D(M_t)}} (e^{\int_0^{M_u} \lambda_D(M_\alpha)d\alpha} - e^{\int_0^{M_t} \lambda_D(M_\alpha)d\alpha}) \\
&= \frac{\mathbb{1}_{\{D<M_t\}}}{1-e^{-A_D(M_t)}} (1 - e^{\int_{M_u}^{M_t} \lambda_D(M_\alpha)d\alpha})(e^{\int_0^{M_u} \lambda_D(M_\alpha)d\alpha}).
\end{aligned}$$

[12]

5.3 Epätäydellinen informaatio yrityksen arvoprosessista

Kun velkakirja on jälkimarkkinoilla, velkakirjasijoittajia ei pidetä täysin informoituna yrityksen tilasta. He eivät voi suoraan havaita yrityksen arvoprosessia V, vaan saavat ajoittain kohinallista tietoa $\hat{V}_t$ jokaisella ajanhetkellä

t. Oletetaan, että $Y(t) = \ln \hat{V}_t = Z(t) + U(t)$, jossa $U(t)$ on normaalisti jakautunut ja riippumaton prosessista $Z(t)$. Jokaisella hetkellä $t \in [0, \infty)$ myös havaitaan, onko yritys jo viety konkurssiin. Täten havaittava informaatiojoukko eli filtraatio on jälkimarkkinoilla

$$\mathscr{H}_t = \sigma(\{Y(t_1), ...Y(t_n), \mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}} : 0 \leq s \leq t\}),$$

jossa $t_n \leq t$.

Yksinkertaisuuden vuoksi mallissa oletetaan, että osakekauppaa ei käydä julkisilla markkinoilla. Lisäksi omistajat, jotka johtavat yhtiötä eivät voi käydä kauppaa julkisilla velkakirjamarkkinoilla. Tämän johdosta informaatiojoukko pysyy yksinkertaisessa muodossa ja voidaan välttää monimutkaiset epäsymmetriseen informaatioon liittyvät ongelmat. [11]

6 Päätelmät

Rakenteellinen malli keskittyy yrityksen sisäisiin asioihin. Malli vaatii toimiakseen tietoa yrityksen varoista. Tavallisen sijoittajan silmin tätä prosessia ei voida suoraan havaita. Konkurssin määritelmän vuoksi konkurssi ei ole yllättävä tapahtuma. Kun laina lähestyy maturiteettia, ennustettavuus paranee ja tämän vuoksi velkakirjojen tuotto on hyvin lähellä riskitöntä tuottoa. Mertonin mallin parametreja estimoitaessa artikkelissa [8] oletetaan, että yrityksen arvo kuvautuu yrityksen oman pääoman määräksi ja tämän käänteiskuvausta hyväksikäyttäen saadaan arvioita yrityksen arvosta. Mikään ei kuitenkaan takaa, että kyseinen kuvaus on edes olemassa.

Redusoiduissa malleissa päästään irti yrityksen sisäisistä oletuksista. Velkakirja hinnoitellaan riskittömän ja riskillisen osuuden avulla. Näin ollen saatu konkurssitodennäköisyys on täysin markkinoiden implikoima. Jos oletetaan markkinoiden olevan tehokkaat, tällöin velkakirjan hinta sisältää kaiken markkinainformaatio ja näin ollen on oikein hinnoiteltu. Näin ollen konkurssitodennäköisyys vastaa markkinoilta saatua informaatiota.

Markov-mallissa velkakirjat luokitellaan omiin luottoluokkiin, joiden avulla tehdään päätelmiä konkurssitodennäköisyyksistä historiallisen informaation avulla. Alun perin yritykset siis luokitellaan omiin luottoluokkiinsa. Historiallisen datan avulla on mahdollista määrittää siirtymäintensiteetit eri luottoluokitusten välillä. Luottoluokitusmetodeita pyritään kuitenkin aina parantelemaan. Tällöin annettava luottoluokitus on riippuvainen aikakaudesta, jolloin luokitus annetaan. Jos eri ajanjaksoina on käytetty eri luottoluokitusmetodia, tällöin näiden aikakausien tulokset eivät ole keskenään täysin vertailukelpoisia.

Toisaalta, luottoluokitukset ovat tehty, jotta yrityksen riskit saataisiin vertailukelpoisiksi. Näin ollen on kohtuullista olettaa, että luottoluokitukset ovat riittävän tarkkoja antamaan suuntaa antavia lukuja. Konkurssitodennäköisyyksien tarkoituksena on antaa yleismaallinen kuva konkurssiriskistä. Malli ei kuitenkaan pysty erottelemaan saman luottoluokituksen sisällä olevia asioita.

Rakeenteellisen ja redusoidun mallin yhdistämisessä pyritään tuomaan molempien menetelmien hyvät puolet esille. Rakenteellinen malli kuvaa hyvin yrityksen sisäistä tilannetta, mutta siinä konkurssi ei ole yllättävä tapahtuma. Ottamalla rakenteelliseen malliin mukaan lisää satunnaisuutta, saadaan konkurssin tapahtumisesta yllättävä.

Viitteet

[1] N. Arora, J.R. Bohn, F. Zhu: *Reduced-form versus structural models of credit risk: A case study of three models*. The Credit Market Handbook: Advanced Modeling Issues, Wiley 2012.

[2] R.B. Ash, C. Doleans–Dade: *Probability and measure theory*. Academic Press. 2. painos, 2000.

[3] F. Black, J.C. Cox: *Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions*. The Journal of Finance, vol. 31, s. 351–367, 1976.

[4] F. Black and M. Scholes: *The pricing of options and corporate liabilities.* Journal of Political Economy, vol. 81, s. 637–654, 1973.

[5] J.H. Cochrane: *Asset pricing: Revised edition.* Princeton University Press 2005.

[6] P. Crosbie, J. Bohn: *Default risk*. Moody's KMV, 2003.

[7] R.W. Dimand: *The case of Brownian motion: A note on Bachelier's contribution.* The British Journal for the History of Science, vol. 26, 1993, s. 233–234.

[8] J. Duan: *Maxium likelihood estimation using price data of the derivative contract*. Mathematical Finance, vol. 4, s. 155–167, 1994.

[9] J. Duan: *Correction: Maxium likelihood estimation using price data of the derivative contract.* Mathematical Finance, vol. 10, s. 461–462, 2000.

[10] D. Duffie: *Martingales, Arbitrage, and Portfolio Choice*. First European Congress of Mathematics Paris, s. 3–21, 1992.

[11] D. Duffie, D. Lando:*Term structures of credit spreads with incomplete accounting information.* Econometrica, vol. 69, s. 633–664, 2001.

[12] M. Elhiwi: *Default barrier intensity model for credit risk evaluation*. Statistics and Probability Letters, vol. 95, s. 125–131, 2014.

[13] A. Elizade: *Credit risk models II: Structual models.* CEMFI and UPNA, 2005.

[14] F.J. Fabozzi: *Bond markets, analysis and strategies*. Prentice–Hall, kolmas painos, 1996.

[15] R. Geske: *The valuation of corporate liabilities as compound options.* Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 12, s. 542–552, 1977.

[16] K. Giesecke: *Default compensator, incomplete information, and the term structure of credit spreads.* Department of Economics, Humboldt–Universität zu Berlin, 2001.

[17] K. Giesecke: *Credit risk modelling and valuation: an introduction.* Humboldt–Universität zu Berlin, 2002.

[18] K. Giesecke: *Credit risk modelling and valuation: an introduction.* Cornell university, 2004.

[19] K. Giesecke, L. Goldberg: *Forecasting default in the face of uncertainty.* Journal of Derivatives, forthcoming, 2004.

[20] L. Giordano, G. Siciliano: *Real-world and risk-neutral probabilities in the regulation on the transparency of structured products.* ESMA Working Paper, 2015.

[21] J.M. Harrison: *Brownian motion and stochastic flow systems.* Wiley, 1985.

[22] J.C. Hull: *Options, futures and other derivatives.* Prentice–Hall cop., viides painos, 2003.

[23] M.B. Imerman: *Structural credit risk models in banking with applications to the financial crisis.* Väitöskirja, Newark, New Jersey, 2011.

[24] G. Iyer: *Stochastic calculus for finance brief lecture notes.* 2013.

[25] R.A. Jarrow, S.M. Turnbull: *Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk.* The Journal of Finance, vol. 50, s. 53–85, 1995.

[26] R.A. Jarrow, D. Lando, S.M. Turnbull: *A Markov model for the term structure of credit risk spreads.* The Review of Financial Studies, vol. 10, s. 481–523, 1997.

[27] R.A. Jarrow ja P. Protter: *Structural versus reduced form models: A new information based perspective.* The Credit Market Handbook: Advanced Modeling Issues, Wiley 2012.

[28] S. Jha: *Interest rate markets: A practical approach to fixed income.* Wiley, ensimmäinen painos, 2011.

[29] A.L. Jothi: *Financial mathematics*. Himalaya Pub. House, ensimmäinen painos, 2009.

[30] S. Knupfer, V. Puttonen: *Moderni rahoitus*. Alma Talent, 9. painos, 2017.

[31] E.T. Lee, J.W. Wang: *Statistical methods for survival data analysis*. Wiley, neljäs painos, 2013. Luku 2.

[32] R.C. Merton: *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*. The Journal of Finance, vol. 29, 1974.

[33] B. Øksendal: *Stochastic differential equations: An introduction with applications*. Springer, viides painos 1998.

[34] E.I. Ronn ja A.K. Verma: *Pricing risk-adjusted deposit insurance: An option-based model*. 1986, The Journal of Finance, vol. 41, s. 871–895.

[35] R.L. Schilling ja P. Lothar: *Brownian motion: An introduction to stochastic processes*. De Gruyter, 2014.

[36] C.W. Smith Jr.: *Option pricing. A review*. Journal of Financial Economics 3, s. 3–51, 1976.

[37] E.J. Sullivan, T.M. Weithers : *Louis Bachelier: The father of modern option pricing theory*. The Journal of Economic Education vol. 22, s. 165–171, 1991.

[38] R.K. Sundaram: *The Merton/KMV approach to pricing credit risk*. Working paper, 2001.

[39] O.H. Yalincak: *Criticism of the Black–Scholes model: But why is it still used? (The answer is simpler than the formula)*. MPRA Paper, 2005.

[40] *White paper: Cboe volatility index*. 2019.

[41] https://www.investopedia.com/articles/economics/09/lehman-brothers-collapse.asp. Katsottu 14.10.2019

[42] http://www.cboe.com/vix. Katsottu 6.11.2019