



Matemaattinen kielentäminen sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa

Markus Bildo

Pro gradu -tutkielma  
Toukokuu 2025

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

**Tarkastajat:**

Prof. Vesa Halava

Dos. Kalle Parvinen

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

**Pääaine:** Matematiikka

**Tekijä:** Markus Bildo

**Otsikko:** Matemaattinen kielentäminen sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa

**Ohjaaja:** Prof. Vesa Halava

**Sivumäärä:** 32 sivua

**Aika:** Toukokuu 2025

---

*Matemaattinen kielentäminen* on jonkin asian, kuten ilmiön tai ongelman, kuvaamista matematiikan kielen avulla. Tässä tutkielmassa tarkastellaan, millä tavoin matemaattinen kielentäminen esiintyy opiskelijoiden matematiikan ylioppilaskoeratkaisuihin, ja löytyykö matemaattisessa kielentämisessä eroja lyhyen ja pitkän matematiikan ylioppilaskoeratkaisuiden välillä. Matemaattinen kielentäminen on keskeinen osa matematiikan osaamista ja sen arviointia. Lukion matematiikan sähköistymisen myötä sen opiskelu on muuttunut erilaiseksi, koska opettajille ja opiskelijoille on tullut käyttöön erilaisia sähköisen oppimisympäristön työkaluja. Kynää ja paperia käytetään nykyään vain vähän opiskeltaessa. Sähköisten työkalujen käyttö voi johtaa virheellisiin ratkaisuihin, jos niiden käyttäjä ei ymmärrä niitä täysin.

Tutkielma perustuu neljään matematiikan ylioppilaskoetehtävään vuosilta 2019-2022, joissa esiintyy matemaattista kielentämistä. Aineisto on saatu Ylioppilastutkintolautakunnalta. Se on korpusaineisto, joka sisältää anonyymisti sadan kokelaan ratkaisun neljästä eri ylioppilaskoetehtävästä. Kaksi aineiston tehtävää on lyhyen matematiikan ja kaksi pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta.

Tutkielmassa käytettiin niin sanottua kolmen kielen mallia, jossa kielinä ovat matematiikan symbolinen kieli, luonnollinen kieli ja kuviokieli. Kaikkia kolmea kieltä käytettiin kaikissa paitsi yhdessä tehtävässä. Eniten opiskelijat käyttivät matematiikan symbolikieltä ja vähiten he käyttivät kuviokieltä ratkaistessaan tehtäviä. Useamman kuin yhden kielen ratkaisuja oli useita, mutta myös yhden kielen ratkaisuita löytyi aineistosta. Kolmen kielen avulla ratkaistuja tehtäviä oli jonkin verran, mutta selkeästi vähemmän kuin kahden kielen ratkaisuja. Ratkaisumallit jaoteltiin Jorma Joutsenlahden esittämien mallien mukaan. Ratkaisumalleista suosituin oli kertomusmalli ja toiseksi suosituin oli tiekarttamalli. Myös standardimallia ja muita ratkaisumalleja oli jonkin verran. Vähiten ratkaisumalleista käytettiin päiväkirja- ja kommenttimallia.

Asiasanat: Matematiikan ylioppilaskoe, matemaattinen kielentäminen, kolmen kielen malli, ratkaisutavat, sähköinen ylioppilaskoe



# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria</b>	<b>3</b>
2.1	Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe . . . . .	3
2.2	Matemaattinen kielentäminen . . . . .	4
2.2.1	Kolmen kielen malli . . . . .	4
2.2.2	Ratkaisumallit . . . . .	5
2.2.3	Matemaattisen kielentämisen hyödyt . . . . .	6
2.3	Matemaattinen kielentäminen lukion opetussuunnitelmassa . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Tutkimuksen toteutus</b>	<b>9</b>
3.1	Tutkimuskysymykset . . . . .	9
3.2	Tutkimusaineisto . . . . .	9
3.3	Analyysiprosessi . . . . .	10
3.4	Tehtävänannot, hyvän vastauksen piirteet ja malliratkaisut . . . . .	11
3.4.1	Syksy 2019, pitkä oppimäärä, tehtävä 5. Polynomiepäyhtälö . . . . .	11
3.4.2	Kevät 2019, lyhyt oppimäärä, tehtävä 11. Harrin palkka . . . . .	12
3.4.3	Kevät 2022, pitkä oppimäärä, tehtävä 8. Jatkuva, mutta ei derivoituva funktio . . . . .	13
3.4.4	Syksy 2022, lyhyt oppimäärä, tehtävä 11. Lintujen talviruokinta . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Tutkimustulokset</b>	<b>18</b>
4.1	Syksy 2019, pitkä oppimäärä, tehtävä 5. Polynomiepäyhtälö . . . . .	18
4.2	Kevät 2019, lyhyt oppimäärä, tehtävä 11. Harrin palkka . . . . .	20
4.3	Kevät 2022, pitkä oppimäärä, tehtävä 8. Jatkuva, mutta ei derivoituva funktio . . . . .	21
4.4	Syksy 2022, lyhyt oppimäärä, tehtävä 11. Lintujen talviruokinta . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Pohdinta</b>	<b>27</b>
5.1	Luotettavuus . . . . .	27
5.2	Tulosten tarkastelu . . . . .	27
5.3	Johtopäätökset . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Viitteet</b>	<b>31</b>



# 1 Johdanto

Matematiikan ylioppilaskirjoitukset kokivat muutoksen vuonna 2019, kun matematiikan ylioppilaskoe siirtyi paperisesta kokeesta sähköiseksi (Yle abitreffit, 2016). Tämä muutos loi opetukseen, arviointiin ja myös itse matematiikan ongelmien ratkaisuihin uusia haasteita. Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe tehdään abittijärjestelmässä, jossa opiskelijalla on käytössään monia erilaisia työkaluja (Ylioppilastutkintolautakunta). Näiden työkalujen, kuten esimerkiksi GeoGebran ja kaavaeditorin, avulla opiskelijan on tuotettava ratkaisunsa.

Matematiikan opetus ja oppiminen on muuttunut sähköisten kokeiden myötä. Lukio-opiskelijoiden ja opettajien on osattava tuottaa matematiikkaa sähköisesti. Tämä on suuri muutos, varsinkin juuri lukion aloittaville opiskelijoille, jotka vielä yläkoulussa opiskelivat matematiikkaa pääasiallisesti kynällä ja paperilla. Lukiossa heidän on opittava uusi tapa luoda matematiikkaa uusilla välineillä ja työkaluilla. Tämä voi aiheuttaa vaikeuksia, koska matematiikan oppimisen lisäksi heidän on opittava uusien sähköisten työkalujen käyttö. Tämä niin sanottu kulttuurishokki voi aiheuttaa motivaation puutetta, joka vaikeuttaa matematiikan ymmärtämistä. Matematiikan opiskelu ei ole pelkästään laskimen käytön osaamista ja asioiden ulkoa oppimista, vaan aihepiirien asiat on myös ymmärrettävä. Kun opiskelija sisäistää ja ymmärtää opiskeltavan asian, hän pystyy yhdistämään sen muihin aiheisiin matematiikassa (Opetushallitus, 2015). Monien lukiomatematiikan kurssien aihepiirit liittyvät toisiinsa tai ainakin joitain opiskeltavia aiheita tarvitaan useammassa kurssissa.

Matemaattisella kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisevista kielen avulla suullisesti tai kirjallisesti (Joutsenlahti 2009). Se on keskeinen osa matematiikan osaamista ja sen arviointia (Morgan, 2001). Sen avulla opiskelija kykenee ilmaisemaan omia matemaattisia ajatuksiaan selkeästi ja jäsentämään niitä sekä kirjallisesti että symbolisesti (Joutsenlahti & Perkkilä, 2022). Kielentämisen käyttö opiskeltaessa voi myös auttaa opiskelijoita ymmärtämään aihepiirin asioita paremmin. Matematiikan sähköisissä ylioppilaskokeissa vaaditaan opiskelijoilta perusteluita omiin ratkaisuihinsa sekä kykyä kuvata ajatusprosessiaan ymmärrettävästi digitaalisessa muodossa. Sähköiset työkalut mahdollistavat monipuolisen ilmaisun, kuten tekstin, kaavojen ja visuaalisten esitysten käytön (Joutsenlahti & Kulju, 2010). Matemaattinen kielentäminen ei ole pelkästään yhden ilmaisutavan osaamista, vaan monen ilmaisutavan samanaikaista monipuolista käyttöä ymmärrettävästi. Tämän takia matematiikan kielentämisen idea näkyy myös lukion opetussuunnitelmassa.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan, millä eri tavoin matemaattinen kielentäminen esiintyy opiskelijoiden ylioppilaskoetehtävien ratkaisuisissa. Tutkimuksen päämääränä on tunnistaa erilaiset opiskelijoiden käyttämät ratkaisumallit sekä kielet, joita heidän ratkaisuisaan esiintyy. Tutkimuksen toinen päämäärä on tutkia esiintyykö pitkän ja lyhyen matematiikan ylioppilaskoeratkaissuissa kielentämisen eroja. Tutkimusaineisto perustuu neljään eri matematiikan sähköiseen ylioppilaskoetehtävään vuosilta 2019-2022, joista kaksi on pitkän matematiikan ja kaksi lyhyen matematiikan ylioppilaskokeista. Näiden vuosien ylioppilaskokeet perustuvat vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteisiin. Ylioppilastutkintolautakunnalta saatu korpusaineisto on tutkimuskäyttöön tarkoitettu sadan kokelaan ratkaisuja sisältävä ai-

neisto. Jokainen ratkaisu on anonyymi ja satunnaisesti valittu.

Tämä tutkielma etenee teorian kautta aineiston tarkasteluun ja siitä tutkimustuloksiin ja johtopäätöksiin. Tutkielman toinen luku käsittelee sähköisiä ylioppilas-kirjoituksia, matemaattisen kielentämisen teoriaa ja sen hyötyjä sekä lukion opetus-suunnitelman näkökulmaa siihen. Luvussa kolme käsitellään tutkimuskysymykset, tutkimusaineisto ja analyysiprosessin kuvaus. Luku kolme sisältää myös tutkittavien tehtävien tehtävänannot, hyvän vastauksen piirteet sekä malliratkaisut. Luvussa neljä käsitellään tutkimuksen tulokset tehtäväkohtaisesti ja luvussa viisi pohditaan tutkimuksen luotettavuutta ja tuloksia.

## 2 Teoria

Tässä luvussa käsitellään tutkimukseen liittyvien aiheiden teoriaa. Kappaleessa 2.1 käsitellään matematiikan sähköistä ylioppilaskoetta, kappaleessa 2.2 käsitellään matemaattisen kielentämisen teoriaa ja kappaleessa 2.3 kerrotaan miten matemaattinen kielentäminen esiintyy vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmassa.

### 2.1 Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe

Tässä kappaleessa käsitellään matematiikan sähköistä ylioppilaskoetta ja sen rakennetta, työkaluja ja eri tehtävätyyppejä vuosilta 2019-2022. Vuoden 2022 jälkeisiä muutoksia ei tässä työssä huomioida. Kappaleen pääasiallisena lähteenä toimii Ylioppilastutkintolautakunnan verkkosivusto (Ylioppilastutkintolautakunta).

Lukion ylioppilaskirjoitukset kokivat astettaisen sähköistymisen vuosina 2016-2019. Matematiikan ylioppilaskirjoitukset sähköistyivät viimeisenä oppiaineena vuonna 2019. Ensimmäistä kertaa ylioppilaskirjoitukset olivat täysin sähköiset vuoden 2019 kevään kirjoituksissa. Kokeiden sähköistymisen ideana oli esimerkiksi aineistojen laajentaminen, kuten videoiden lisääminen aineistoihin. Sähköistymisen tavoitteena oli myös harjoittaa opiskelijoiden kykyä hyödyntää tietoteknisiä apuvälineitä ja sähköisiä tiedon lähteitä. Ylioppilaskirjoitusten muutos sähköiseen muotoon helpotti myös huomattavasti logistiikkaa, koska paperikokeet jäivät pois. (Yle abitreenit, 2016)

Matematiikan ylioppilaskoe on Ylioppilastutkintolautakunnan laatima koe, jonka tarkoituksena on mitata onko opiskelija omaksunut lukion opetussuunnitelman mukaiset tiedot ja taidot matematiikassa. Lisäksi opiskelijoilta odotetaan lukiokoulutuksen tavoitteiden mukaista kypsyyttä. Ensin kokeen tarkastaa lukion matematiikan opettaja ja lopullisen tarkastuksen tekee Ylioppilastutkintolautakunta. Koe tehtävien arvioinnissa huomioidaan vastaus ja tehtävänannon mukaisesti myös opiskelijan perustelut ja välivaiheet lopputuloksen tueksi.

Matematiikan ylioppilaskoe on kolmiosainen koe, jossa on vastattava kymmenen tehtävään kolmestatoista tehtävästä. Tehtävät arvioidaan pistein 0-12 eli kokeen enimmäispistemäärä on 120. Kokeen kolme osaa ovat A, B1 ja B2. Tehtävätyypit A- ja B-osan välillä ovat erilaisia, koska A-osassa ei ole käytössä kaikkia työkaluja joita matematiikan ylioppilaskokeessa on tarjolla. A-osan palautettua opiskelija saa käyttöönsä kaikki työkalut, mutta tämän jälkeen hän ei voi palata enää A-osan tehtäviin. A-osassa tehtävätyypit voivat olla esimerkiksi valinta-, yhdistelytehtäviä ja myös kirjoittamista vaativia yksinkertaisia tuottamistehtäviä. B1- ja B2-osa sisältävät monipuolisempia matemaattisten ongelmien ratkaisuja sekä tiedon yhdistämistä ja analysointia vaativia tehtäviä. B-osien tehtävissä on valinnavaraa, kun taas A-osassa kaikki tehtävät ovat pakollisia.

Teknisiä työkaluja on useita matematiikan ylioppilaskokeessa. Teknisillä työkaluilla tarkoitetaan esimerkiksi laskinohjelmia ja matematiikkaeditoria. Matematiikkaeditori toimii opiskelijoiden ratkaisuiden kirjoitusalueena. A-osassa on käytössä vain rajoitettu määrä teknisiä työkaluja. Esimerkiksi SpeedCrunch-laskinohjelma, GNOME-laskin ja KCalc ovat A-osassa käytössä olevia työkaluja. Näiden avulla voi suorittaa yksinkertaisia laskutoimituksia, mutta ei soveltavia laskuja tai graafisia

piirustuksia. B-osassa opiskelijalla on kaikki tekniset työkalut käytössään. Esimerkiksi GeoGebra, TI-Nspire CAS ja LibreOffice Calc ovat opiskelijan käytössä. Näiden B-osan työkalujen avulla opiskelija pystyy suorittamaan vaativampia laskuja ja piirtämään kuvaajia esimerkiksi tehtävien havainnoinnin avuksi. Näiden laskinohjelmien lisäksi opiskelijalla on koko kokeen aikana käytössä MAOL-digitaulukko, jossa on matematiikassa tarvittavia kaavoja ja termejä.

## 2.2 Matemaattinen kielentäminen

Matemaattisella kielentämisellä tarkoitetaan jonkin asian, kuten ilmiön tai ongelman, kuvaamista matematiikan kielen avulla. Tämän avulla jokin reaali maailman ongelma voidaan muuntaa matemaattiseksi malliksi ja toisin päin. (Joutsenlahti & Perkkilä, 2022) Yhtälöt, kaavat, graafit ja matemaattiset lausekkeet ovat esimerkkejä matemaattisista malleista. Matemaattinen kielentäminen on työkalu omaan ajatteluun sekä arviointiin (Joutsenlahti & Rättyä, 2015).

### 2.2.1 Kolmen kielen malli

Kirjallinen matemaattinen kielentäminen voidaan jakaa niin sanotusti kolmen kielen malliin, joihin kuuluvat matematiikan symbolinen kieli, kuviokieli ja luonnollinen kieli. Kolmen kielen mallissa käytetään rinnakkain näitä kolmea eri kieltä (Joutsenlahti & Kulju, 2010). Tämän sisäistäminen auttaa opiskelijaa ymmärtämään sekä esittämään omaa matemaattista ajattelua.

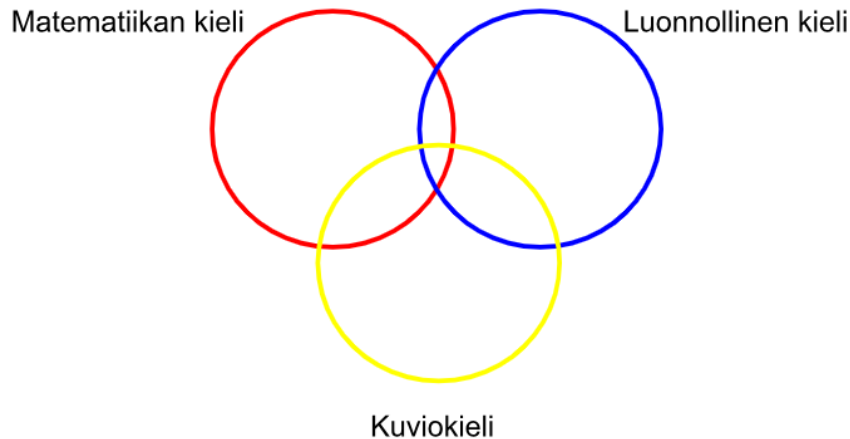
Kolmen kielen mallista voidaan tehdä neljän kielen malli, kun puhutaan matemaattisen kielentämisen kirjallisen osuuden lisäksi suullisesta ja toiminnallisesta osuudesta. Neljättä kieltä kutsutaan taktilliseksi toiminnan kieleksi. Tähän kuuluvat esimerkiksi toimintamateriaalit ja kehollisuus. Toimintamateriaalit voivat olla esimerkiksi alakoulussa käytettävät murtokakkupalat tai lukion oppikirjoissa tehtäviin liitetyt appletti-tehtävät, jossa tietokoneen hiirellä voi ohjata virtuaalista materiaalia. (Joutsenlahti & Rättyä, 2015)

Matematiikan symbolisen kielen avulla pyritään ilmaisemaan tehtävien matemaattisia ratkaisuja. Kieli koostuu esimerkiksi matemaattisista kaavoista, yhtälöistä ja merkinnöistä. Tämä on tiivis ja tarkka tapa ilmaista matematiikkaa. Matemaattista ratkaisua voi olla vaikea ulkopuolisen ymmärtää, jos se sisältää pelkästään matematiikan symbolista kieltä.

Joskus voi olla hankala hahmottaa matemaattista ongelmaa pelkän symbolisen kielen avulla. Graafit ja kuvat ovat hyvä keino mallintaa ja hahmottaa ongelmaa. Myös omaa ajatusta hahmottava piirustus tai tarkemmat piirustukset esimerkiksi geometriassa, auttavat opiskelijoita tehtävän ratkaisussa ja asian ymmärtämisessä. Kuviokielen avulla on hyvä tukea omaa ajattelua ja muita kolmen kielen mallin kieliä.

Luonnollinen kieli on hyvin tärkeä osa matemaattista kielentämistä. Varsinkin nuorille opiskelijoille on tärkeää saada matemaattinen kieli selitettyä heille heidän omalla äidinkielellään. Tämä auttaa opiskelijoita ymmärtämään aiheita ja yhdistämään niitä toisiinsa. Luonnollinen kieli auttaa opiskelijoita jäsentämään omaa ajatteluaan.

Matemaattiset tehtävät lukiossa vaativat näitä kaikkia kolmea kieltä jollain tavalla. Joskus riittää ratkaisu pelkällä symbolisella kielellä ja joskus voi tarvita vain kahta näistä kolmesta kielestä. On myös tehtäviä, joiden ratkaiseminen edellyttää kaikkien kolmen kielen käyttöä. Luonnollisen kielen käyttö matematiikan tehtävissä auttaa myös opiskelijoita ymmärtämään tekemäänsä ja opettajia ymmärtämään ratkaisussa käytettyä ajattelua.



Kuva 1. Kolmen kielen malli, perustuu lähteeseen (Joutsenlahti & Kulju 2010).

### 2.2.2 Ratkaisumallit

Matemaattinen kielentäminen voi esiintyä opiskelijoiden ratkaisuisissa monilla eri tavoilla. Tässä luvussa käydään läpi Jorma Joutsenlahden rakentamia malleja matematiikan tehtävien ratkaisemiseksi (Joutsenlahti, 2009 & 2010). Käydään läpi viisi erilaista ratkaisumallia, joiden avulla matemaattisen tehtävän ratkaisu voidaan esittää. Nämä mallit ovat standardi-, kertomus-, tiekartta-, kommentti- ja päiväkirjamalli. Kuvassa 2 on visuaalinen näkymä miltä jokainen näistä ratkaisumalleista näyttää. (Joutsenlahti 2009)

Standardimalli on yksinkertaisin näistä viidestä ratkaisumallista. Siinä ratkaisu esitetään pelkästään matematiikan symbolikielillä. Ratkaisu etenee tehtävänannosta suoraan laskujen kautta ratkaisuun ja vain lopputuloksessa on mahdolliset yksiköt. Opiskelija, joka käyttää standardimallia tehtävien ratkaisemiseksi, pyrkii toistamaan esimerkkitehtävistä tai kirjasta opittua mallia siitä, miten tehtävä esitetään. Tämä ratkaisumalli ei tue ratkaisun esittämistä muille vaan joudutaan luottamaan siihen, että ratkaisun lukija ymmärtää ratkaisun pelkän matematiikan symbolikielen avulla. Tässä mallissa myös huolimattomuusvirheet voivat pilata koko ratkaisun, jos väli vaiheista ei ymmärretä, mitä opiskelija on yrittänyt tehdä. Tämä ratkaisumalli so- pii hyvin esimerkiksi aritmeettisiin tehtäviin, sekä monivalinta tehtävien ratkaisun löytämiseen.

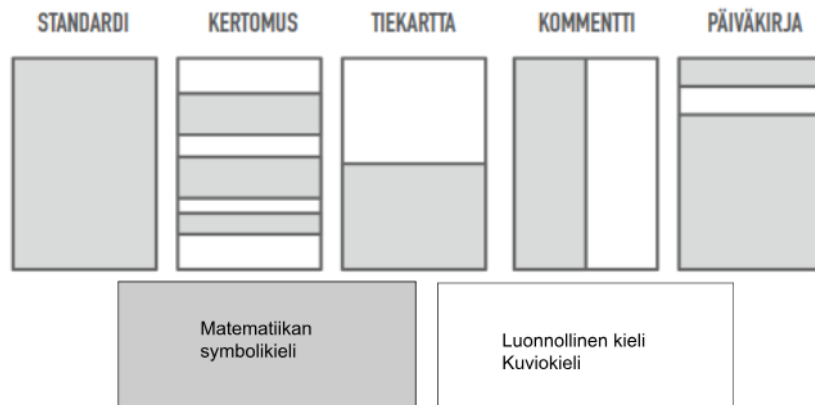
Kertomusmallissa selitetään ja perustellaan vaiheittain, mitä tehtävän ratkaisus- sa tapahtuu. Tämä on vaiheittainen ratkaisumalli matemaattiselle tehtävälle, jossa käytetään sekä matematiikan symbolikieltä että luonnollista ja kuviokieltä. Tämän tapaisen ratkaisun esittäminen muille on paljon mieluisampaa kuin standardimallin

esittäminen, koska siinä kerrotaan mitä milläkin vaiheella tarkoitetaan. Luonnollisen kielen ja kuviokielen tehtävänä on tukea matematiikan symbolikieltä, jolloin ratkaisun ymmärtäminen ja seuraaminen on helpompaa. Tämä ratkaisumalli sopii hyvin esimerkiksi lukion tehtävien ratkaisuihin.

Tiekarttamalli muistuttaa standardimallia, mutta siinä on alussa luonnollista kieltä ja kuviokieltä tukemassa matematiikan symbolikieltä. Tehtävän ratkaisun lukija näkee heti ratkaisun alussa opiskelijan ajatukset ja perustelut omalle tulokselleen. Tämä ratkaisumalli sopii hyvin esimerkiksi lyhyisiin tehtäviin, koska pidemmissä tehtävien ratkaisuisa lukija voi kadottaa opiskelijan ajatuksen.

Kommenttimallissa on kaksi saraketta, joista toinen on matematiikan symbolikielelle ja toinen luonnolliselle kielelle ja kuviokielelle. Ratkaisun jokaista välivaihetta kommentoidaan. Tämä ratkaisumalli sopii hyvin pedagogiseen käyttöön, jossa opettaja opettaa laskujen eri vaiheita. Kommenttimalli ja kertomusmalli ovat hyvin samankaltaisia ratkaisumalleja, mutta luonnollinen kieli ja kuviokieli on sijoitettu ratkaisuisa vain eri paikkoihin.

Päiväkirjamalli etenee standardimallin mukaisesti, mutta siinä on kohta, jossa opiskelija käyttää luonnollista kieltä tai kuviokieltä. Tämä kohta on usein ongelma-kohta opiskelijalle, jossa hän käyttää tukena muita kieliä kuin vain matematiikan symbolikieltä. Tämä ei ole lukijalle paras mahdollinen malli, mutta pedagogisesti ajatellen siinä usein näkyy kohta, jossa opiskelijalla on ollut vaikeuksia. Vaikeissa kohdissa opiskelija voi mahdollisesti kokea oppimista ja joutua jäsentämään matemaattista ajatustaan.



Kuva 2. Ratkaisumallit, perustuu lähteeseen (Joutsenlahti 2009).

### 2.2.3 Matemaattisen kielentämisen hyödyt

Matemaattisen kielentämisen hallitseminen on hyvin tärkeä osa matemaattista osaamista ja ajattelua. Se auttaa jäsentämään ja ratkaisemaan matemaattisia ongelmia, ja sen avulla monimutkaiset pulmat voidaan pilkkoa pienempiin ja selkeämpiin osiin. Myös matemaattiset mallit on helpompi yhdistää muihin eri tilanteisiin, kun hallitsee matemaattisen kielentämisen taidon.

Opiskelijan monipuolinen kirjoittaminen matemaattisissa tehtävissä edistää matematiikan oppimista, kehittää matemaattista ymmärtämistä, parantaa opiskelijoiden asenteita matematiikkaa kohtaan ja helpottaa opettajan arviointityötä (Morgan,

2001). Perustelu on matematiikan soveltamista, jossa opiskelijan on käytettävä matemaattista ajattelun taitoa. (Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen, 2004) Tämä edellyttää rakenteiden ymmärtämistä ja matematiikan yhdistämistä reaali maailman asioihin.

Matemaattisen kielentämisen taito luo myös mahdollisuuksia luoda uudenlaisia ajattelumalleja ja niiden kautta tuoda uusia näkökulmia ongelmanratkaisuihin. Kun opiskelija kielentää matematiikkaa, hän jäsentää omaa matemaattista ajatteluaan. Hänen itsetuntonsa saattaa myös kasvaa ja hän uskaltaa ilmaista omaa ajatteluaan enemmän ja koko ajan paremmin.

Opiskelijat voivat myös tukea toisiaan keskustelemalla eri näkökulmista ja ratkaisuvaihtoehtoista. Toisten opiskelijoiden kanssa keskustelu voi myös avata ja opettaa uusia käsitteitä opiskelijoille. Muiden opiskelijoiden tehtävien ratkaisujen tarkistaminen ja niistä keskusteleminen voi auttaa näkemään virheitä ja oikeita ratkaisutapoja, mikä edistää omaa oppimista. Myös omien tehtävien läpikäyminen sanallisesti auttaa opiskelijaa tunnistamaan omia virheitään.

Matemaattisen kielentämisen osaaminen auttaa opetuksessa ja opiskelijan arvioinnissa. Matemaattista kielentämistä harjoittava opettaja voi saada luokkahuoneissa aikaiseksi hyviä matematiikkaan liittyviä keskusteluja ja tämä auttaa opettajaa kehittymään kuuntelijana. Keskustelu matematiikasta ja siihen liittyvistä aiheista auttaa opiskelijoita kehittämään omaa matemaattista ajatteluaan ja jäsentämään eri matematiikan ongelmia. Opiskelijoiden oppimisprosessi on helpompi huomata, kun he kielentävät matematiikkaa ja kertovat luonnollisen kielen avulla miten he ovat esimerkiksi ratkaisseet kyseisen tehtävän. (Joutsenlahti 2003, Joutsenlahti & Kulju 2010)

## 2.3 Matemaattinen kielentäminen lukion opetussuunnitelmassa

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmaa, koska tutkittavat tehtävät ovat vuosilta 2019-2022. Vasta kevään 2023 ylioppilaskokeessa huomioitiin sekä vuoden 2015 että vuoden 2019 lukion opetussuunnitelmat ja syksystä 2025 lähtien ylioppilaskokeet ovat vuoden 2019 opetussuunnitelman mukaiset. Tämän kappaleen pääasiallisena lähteenä toimii vuoden 2015 opetussuunnitelma (Opetushallitus, 2015).

Lukion opetussuunnitelmassa esiintyy matemaattinen kielentäminen eri tavoin. Matemaattisen kielentämisen tavoitteena on vahvistaa opiskelijoiden kykyä käyttää ja ymmärtää matematiikan kieltä, mikä on keskeistä sekä jatko-opinnoissa että arkielämässä. Myös opetuksen tehtävä liitetään matemaattiseen kielentämiseen ja siinä otetaan huomioon, kuinka opiskelijoita on opetettava käyttämään sekä puhuttua, että kirjoitettua matematiikan kieltä.

Matemaattisen kielentämiseen liittyviä tavoitteita on monia lukion opetussuunnitelmien perusteissa. Opiskelijoita rohkaistaan ilmaisemaan ajatuksiaan matemaattisesti, suullisesti sekä kirjallisesti. Tässä keskeistä on looginen päättelykyky sekä perusteluiden esittely. Myös erilaisten esitystapojen, kuten symbolisen, suullisen ja graafisen esitystavan, hallitseminen on opiskelijoille tärkeää. Näiden esitystapojen osaamisen taito auttaa opiskelijoita käyttämään matemaattisia käsitteitä ja merkin-

töjä ymmärrettävästi. Lukion opetussuunnitelmassa todetaankin, että opiskelijaa tulee tukea ja rohkaista käyttämään ajattelua tukevia piirustuksia, kuvia ja välineitä. Näillä matemaattisen kielentämisen taidoilla opiskelija myös pystyy argumentoimaan matemaattisesti paremmin.

Pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoilta odotetaan ymmärrettävästi eri tasoisia asioita. Pitkän matematiikan opiskelijalta odotetaan kykyä arvioida perustelujen pätevyyttä, sekä laatimaan ratkaisuilleen perusteluita. Lyhyen matematiikan osalta perusteluja ei mainita suoraan, mutta heidän on myös osattava kuvailla matemaattisia ilmiöitä ja selittää niitä matematiikkaa apuna käyttäen. Vaikka eroja pitkän ja lyhyen matematiikan tavoitteissa on, molemmissa on selkeä yhteinen tavoite. Sekä pitkässä että lyhyessä matematiikassa opiskelijoilta ei odoteta ulkoa opettelun taitoa vaan matematiikan ymmärtämistä.

## 3 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa käsitellään kaikki tutkimuksen toteuttamiseen vaiheet. Luku 3.1 käsittelee tutkimuskysymykset, luku 3.2 käsittelee tutkimuksessa käytetyn aineiston ja luvussa 3.3 on analyysiprosessin kuvaus. Luvussa 3.4 esitellään tutkimuksessa käytetyt tehtävät ja niiden tehtävänannot, hyvän vastauksen piirteet sekä malliratkaisut. Tässä työssä käytetyt malliratkaisut on laadittu tutkijan toimesta.

### 3.1 Tutkimuskysymykset

Tutkimuksessa pyritään löytämään vastauksia seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

- 1) Millä eri tavoilla matemaattinen kielentäminen esiintyy opiskelijoiden matematiikan ylioppilaskoeratkaissuissa?
- 2) Esiintyykö matemaattisen kielentämisen eroja pitkän ja lyhyen matematiikan ylioppilaskoeratkaissuissa?

### 3.2 Tutkimusaineisto

Tämän tutkimuksen tavoitteena on tutkia millä eri tavoin matemaattinen kielentäminen esiintyy opiskelijoiden matematiikan ylioppilastehtäväratkaissuissa. Tutkimuksen tavoitteena on myös selvittää esiintyykö matemaattisen kielentämisen eroja pitkän ja lyhyen matematiikan ylioppilaskoeratkaissuissa. Tutkimuksessa perehdytään yksittäisten matematiikan sähköisten ylioppilaskoe tehtävien ratkaisuihin aikavälillä 2019-2022.

Tutkimusaineiston tehtävät ovat Ylen abitreeni sivuilta löydetty selailen vanhoja ylioppilaskokeita (Yle Abitreenit, 2015). Tutkimuksen toteuttamiseksi haettiin Ylioppilastutkintolautakunnalta tutkimuslupaa kahdeksaan eri ylioppilaskokeen tehtävään. Tehtävät sisältävät 100 satunnaisesti valittua anonyymia ratkaisua kuhunkin analysoitavaan tehtävään. Tutkimuksen lopulliseksi tehtävämääräksi valittiin sadusta aineistoista neljä sopivinta tehtävää.

Kaksi valituista tehtävistä ovat lyhyen matematiikan ylioppilaskokeesta ja kaksi pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta. Pitkän matematiikan tehtävät ovat B1-osion tehtäviä ja lyhyen matematiikan tehtävät ovat molemmat B2-osioista. Jokaisessa neljässä tehtävässä pyydetään opiskelijoita joko perustelemaan ratkaisunsa tai selittämään sanallisesti tehtävään liittyviä asioita. Kahdessa tehtävässä voidaan myös hyödyntää kuviokieltä ja yhdessä tehtävässä sitä vaaditaan. Tehtävät valittiin tutkimukseen, koska niiden ratkaissuissa opiskelijat käyttävät paljon matemaattisen kielentämisen eri kieliä ja täten myös ratkaisumalleja.

### 3.3 Analyysiprosessi

Aineiston analyysi jaettiin eri vaiheisiin. Ensimmäisessä vaiheessa tarkasteltiin kaikkien kahdeksan valitun tehtävän ratkaisuja ja tutkittiin, mitkä tehtävät ovat sopivia tähän tutkimukseen. Tämä vaihe karsi pois puolet tehtävistä ja jäljelle jäi neljän tehtävän ratkaisut tutkittavaksi. Puolet aineistosta karsittiin pois, koska ne eivät sopineet tarpeeksi hyvin tämän tutkielman aiheeseen.

Toisessa vaiheessa analysoitiin aineiston neljää jäljellä olevaa tehtävää tarkemmin matemaattisen kielentämisen näkökulmasta. Tässä vaiheessa tutkittiin kaikki sata ratkaisua jokaisesta tehtävästä uudelleen ja kirjattiin ylös tilastoa opiskelijoiden käyttämistä ratkaisumalleista ja eri kolmen kielen mallin kielistä. Ratkaisumallit kirjattiin ylös (standardi-, kertomus-, tiekartta-, kommentti- ja päiväkirjamalli) ja ratkaisut laitettiin niihin sopivaan kategoriaan. Tässä vaiheessa kaikkia ratkaisumalleja ei saatu omaan kategoriaan, joten ne kirjattiin ylös uutta analyysia odottamaan. Ratkaisumallien lisäksi analysoitiin, mitä eri kolmen kielen mallin kieliä (matematiikan symbolinen kieli, luonnollinen kieli ja kuviokieli) opiskelijat käyttivät ratkaisuisissaan. Aina, kun jokin kieli esiintyi opiskelijan ratkaisussa, se kirjattiin ylös taulukkoon. Jos jossain ratkaisussa käytettiin kaikkia kolmea kieltä, lisättiin taulukkoon jokaisen kielen kohdalle uusi lukema.

Kolmannessa vaiheessa analysoitiin vielä kerran ilman ratkaisumallikategoriaa olevia ratkaisuja. Jos tälläkään analysointikerralla niitä ei saatu sijoitettua ratkaisumallikategoriaan, niin ne sijoitettiin uuteen kategoriaan nimeltä "muu." Tällaisia ratkaisuja olivat esimerkiksi tyhjät ratkaisut tai ilman matematiikan symbolista kieltä tehdyt ratkaisut.

Analyysin viimeinen vaihe sisälsi havaintojen taulukoinnin ja tarkistusvaiheen. Havaintojen taulukointia hyödynnettiin tutkimuskysymyksiin vastaamisessa. Taulukointi myös auttoi tunnistamaan tehtäväkohtaisia huomioita, kuten eniten käytettyjä ratkaisumalleja ja kieliä. Analyysin tarkistaminen auttoi kasvattamaan tutkimuksen luotettavuutta ja tarkkuutta.

### 3.4 Tehtävänannot, hyvän vastauksen piirteet ja malliratkaisut

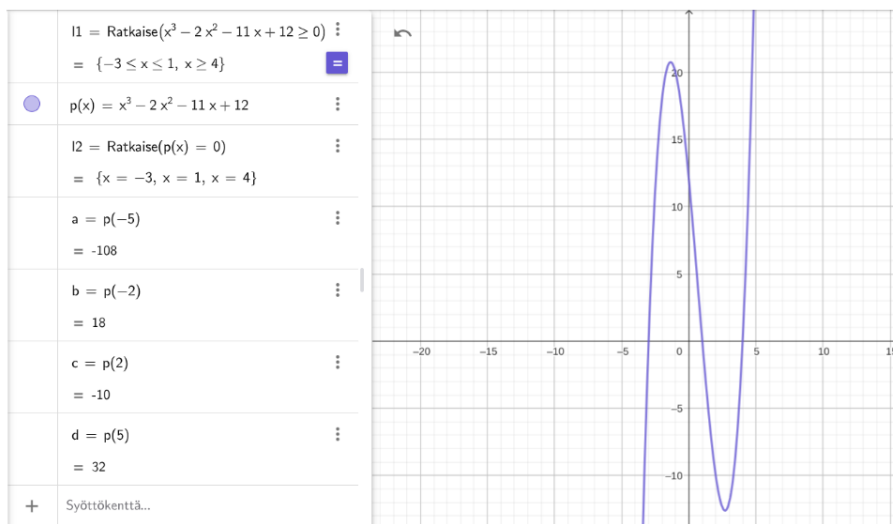
#### 3.4.1 Syksy 2019, pitkä oppimäärä, tehtävä 5. Polynomiepäyhtälö

Ratkaise epäyhtälö  $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$ . Voit käyttää esimerkiksi laskinohjelmistoa. Selitä sanallisesti (enintään 1 000 merkillä), miten polynomifunktion tulomuotoa  $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$  voidaan käyttää epäyhtälön  $p(x) \geq 0$  ratkaisemiseen, kun  $a < b < c$ .

$[-3,1]$ ja $[4,\infty[$	3+3
Päätepisteet väärin	2+2
Yhtälön ratkaisut $x = -3, x = 1$ ja $x = 4$	1
Jokaiselle tekijälle selvitetään, millä välillä se on negatiivinen. $x < a, x < b$ ja $x < c$	2 2
Jokaiselle osavälille katsotaan, kuinka moni tekijä on negatiivinen (esimerkiksi kulkukaaviolla).	1
Jos negatiivisia tekijöitä on pariton määrä, niin tulo on negatiivinen, muuten ei-negatiivinen.	1
TAI	
Tulon nollasääntö mainittu (tms) / antaa funktion nollakohdat $a, b$ ja $c$	1+2
$p(x) \geq 0$ ratkaistaan testipisteillä TAI kulkukaaviolla TAI käyttäen 3. asteen polynomien ominaisuuksia	1
selitys, miten edellinen rivi tehdään	2
Laskettu tapaus, jossa $a, b$ ja $c$ konkreettisia lukuja	max 4
Käytetty konkreettisia lukuja $a, b$ ja $c$ esimerkkinä, mutta sanallinen selitys yleinen	max 6
Pelkkä kuva, jossa hahmotellaan kuvaajan kulku	max 4

Kuva 3. Hyvän vastauksen piirteet (YTL, 2019a)

Epäyhtälö voidaan ratkaista GeoGebralla. Myös funktion nollakohdat on ratkaistu ja funktion kuvaaja on auttamassa tehtävän hahmottamisessa.



Epäyhtälön ratkaisu on  $-3 \leq x \leq 1$  tai  $x \geq 4$

Polynomifunktion tulomuotoa  $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$  voidaan käyttää epäyhtälön  $p(x) \geq 0$  ratkaisemiseen, kun  $a < b < c$ , koska siinä näkyy funktion nollakohdat  $(a, b, c)$ . Nollakohtien avulla voi tehdä kulkukaavion. Sijoittamalla funktion testipisteitä nollakohtien väliltä ja ulkopuolelta saadaan kulkukaavioon halutut merkit.

Kun  $p(x) < 0$  merkitään  $-$ , kun  $p(x) > 0$  merkitään  $+$

	$a$	$b$	$c$	
$p(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Kulkukaavion merkistä nähdään milloin  $p(x) \geq 0$

Kuva 4. Malliratkaisu

### 3.4.2 Kevät 2019, lyhyt oppimäärä, tehtävä 11. Harrin palkka

Harri saa palkkaa 4 200 euroa kuukaudessa ja hänen tuntityömääränsä on 155 tuntia kuukaudessa. Hän arvioi tuntipalkkaansa seuraavalla tavalla: *Jos tuntityömääräni olisi 160 tuntia ja palkkani 4 000 euroa, niin tuntipalkkani olisi  $4\,000/16=25$ . Tässä ei ole otettu huomioon 200 euroa palkasta, joten virhe on runsas euro tuntia kohti; palkka on siis runstaat 26 euroa. Todellinen työtuntimäärä on 155, ei 160, ja siitä tulee varmaankin pieni virhe, joten todellinen tuntipalkka on ehkäpä 27 euroa.*

11.1. Kuinka monta prosenttia enemmän tai vähemmän Harri arvioi saavansa palkkaa tunnilta kuin hän oikeasti saa?

11.2. Selitä Harrin päättelyn vaiheita ja arvioi, perustuuko päättely päteviin arvioihin.

Arvion mukaan Harrin kuukausipalkka olisi $155 \cdot 27 = 4185$	2
eli $\frac{15}{4200} = 0,3571 \dots \% \approx 0,36\%$ vähemmän kuin mitä hän todellisuudessa saa.	4
Harri laskee ensin, mikä olisi tuntipalkka, jos työtunteja olisi 160.	1
Hän arvioi $\frac{4200}{160} = \frac{4000}{160} + \frac{200}{160} = 25 + 1, \dots$ , joka on oikein.	4
Seuraavaksi hän ottaa huomioon, että tämä tulos pitäisi kertoa luvulla $\frac{160}{155}$ , jotta saisi oikean tuntipalkan,	1
ja käyttää arviota $\frac{160}{155} \approx \frac{27}{26}$ , joka on varsin hyvä, sillä $\frac{27}{26} = \frac{162}{156}$ .	1
Harrin järjely perustuu siis päteviin arvioihin.	1
Päättelyn pätevyyttä perustellaan ensimmäisen kohdan vastauksella.	+0

Kuva 5. Hyvän vastauksen piirteet (YTL, 2019b)

11.1. Lasketaan Harrin oikea tuntipalkka
$\frac{4200 \text{ €}}{155 \text{ h}} = 27,09677\dots \approx 27,10 \frac{\text{€}}{\text{h}}$
Harrin arvio omasta tuntipalkastaan oli 27 €/h. Verrataan Harrin arviota todelliseen tuntipalkkaan.
$\frac{27 \text{ €} - 27,09677\dots \text{ €}}{27,09677\dots \text{ €}} = -0,00357\dots \approx -0,36\%$
Eli Harri arvioi saavansa noin 0,36% vähemmän palkkaa tunnilta kuin hän oikeasti saa.
11.2. Ensimmäiseksi Harrin arvioinnissa hän pyöristää palkan lähimpään tuhanteen ja työtunnit lähimpään kymmeneen. Näiden avulla hän laskee tuntipalkkansa.
Sitten hän arvioi, että palkasta pois jätetty 200 € kasvattaa tuntipalkkaa noin yhdellä eurolla. Hyvä arvio, mutta tuntipalkkaansa sillä vähän aliarvioi, koska
$\frac{200 \text{ €}}{160 \text{ h}} = 1,25 \frac{\text{€}}{\text{h}}$
Harri myös käytti arvioinnissaan 160 tuntia, vaikka oikea tuntimäärä oli 155. Lasketaan tuntimäärien suhde
$\frac{160 \text{ h}}{155 \text{ h}} = 1,032258\dots$ kerrotaan Harrin arvioima 26€ tuntipalkka tällä suhdeluvulla ja saadaan tuntipalkka
$26 \frac{\text{€}}{\text{h}} \cdot 1,032258\dots = 26,8387\dots \frac{\text{€}}{\text{h}} \approx 27 \frac{\text{€}}{\text{h}}$
Oikean tuntipalkan ja tämän arvion ero selittyi aiemmin lasketulla arviolla, jossa 200€ nostaa tuntipalkkaa vain eurolla eikä 1,25 eurolla.
Voidaan siis todeta Harrin päättelyn perustuvan päteviin arvioihin.

Kuva 6. Malliratkaisu

### 3.4.3 Kevät 2022, pitkä oppimäärä, tehtävä 8. Jatkuva, mutta ei derivoituva funktio

Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , joka ei ole derivoituva kohdassa  $x = 1$ . Perustele erotusosamäärän

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

avulla, miksi funktio ei ole derivoituva kohdassa  $x = 1$ . Perustele lisäksi funktion jatkuvuus.

Annettu esimerkkifunktio $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ .	
Esimerkkifunktio on jatkuva.	1 p.
Mainittu, että funktio on jatkuva muualla kuin kohdassa $x = 1$ .	1 p.
Tarkistettu, että $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ (yksi yhtäsuuruus puuttuu 1 p.)	
TAI $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ (mikäli soveltuva ja tehty oikein)	2 p.
TAI jatkuvien $f_1$ ja $f_2$ avulla paloittain määritelty funktio ja $f_1(1) = f_2(1)$ .	
<b>ylläolevista riveistä riippumaton piste</b> Esimerkkifunktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$ (myös epäjatkuva käy).	2 p.
Laskettu vasemmanpuoleinen raja-arvo erotusosamäärälle.	2 p.
Laskettu oikeanpuoleinen raja-arvo erotusosamäärälle.	2 p.
Funktion täytyy olla jatkuva ja lisäksi on mainittu, että funktio ei ole derivoituva, koska erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret.	2 p.
<b>Tehtävän erillisohjeet</b>	
Erotusosamäärän voi laskea myös kaavalla $\lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ tai käskyllä <b>RajaArvoVasen</b> (( $f(x) - f(1)$ )/( $x - 1$ ), 1) tms.	
Undefined laskimesta ei kelpaa perusteluksi sille, että raja-arvoa (tms.) ei ole olemassa.	
Funktio ei ole määritelty pisteessä $x = 1$ , esim. $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ ( $0+1+0+1+0+0+0$ ).	max 2 p.

ps://liedostot.ylioppilastutkinto.fi/kokeet/2022-03-23\_M\_fi/grading-instructions.html

9/13

8/22, 3:34 PM

Hyvän vastauksen piirteet: F1 – Matematiikka, pitkä oppimäärä

Funktio ei ole määritelty joko välillä $]-\infty, 1[$ tai $]1, \infty[$ , esim. $\sqrt{1-x}$ ( $0+0+1+1+[2+0$ tai $0+2]+0$ ).	max 4 p.
Perusteltu derivoituvuus sijoittamalla $x = 1$ erotusosamäärän sievennettyihin lausekkeisiin ilman minkäänlaista viitettä raja-arvosta, viimeisiltä kolmelta riviltä ( $1+1+0$ ).	

### Kuva 7. Hyvän vastauksen piirteet (YTL, 2022a)

Funktio  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x < 1 \\ 1, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$  on jatkuva, mutta ei derivoituva kohdassa  $x = 1$ .

Funktion jatkuvuuden osoitus;

Kun  $x > 1$ , on olemassa väli, johon  $x$  kuuluu siten, että funktio on tällä välillä määritelty lausekkeella 1. Vakiofunktio on jatkuva eli funktio  $f$  on jatkuva, kun  $x > 1$ .

Kun  $x < 1$ , on olemassa väli, johon  $x$  kuuluu siten, että funktio on tällä välillä määritelty lausekkeella  $x$ . Polynomifunktio on jatkuva eli funktio  $f$  on jatkuva, kun  $x < 1$ .

Funktio on jatkuva kohdassa  $x = 1$ , jos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

$$1 = 1 = 1$$

Funktion raja-arvo on siis sama kuin funktion arvo kohdassa  $x = 1$ . Funktio on siis jatkuva myös kohdassa  $x = 1$ . Täten funktio  $f$  on siis jatkuva.

Osoitetaan derivaatan määritelmän avulla, että funktio ei ole derivoituva kohdassa  $x = 1$ . Funktio on derivoituva, jos erotusosamäärän raja-arvo on olemassa samassa kohdassa  $x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0$$

Erotusosamäärän vasemmanpuoleinen ja oikeanpuoleinen raja-arvot eivät ole yhtäsuuria kohdassa  $x = 1$ , joten funktio  $f$  ei ole derivoituva kohdassa  $x = 1$ .

### Kuva 8. Malliratkaisu



Hahmotetaan funktiota vielä kuvaajien avulla. Kuvasta nähdään funktion olevan jatkuva kohdassa  $x = 1$ , mutta ei derivoituva, koska siihen syntyy terävä kulma eli kohtaan  $x=1$  ei muodostu yksikäsitteistä tangenttisuoraa.

Kuva 9. Malliratkaisun mahdollinen lisäys

### 3.4.4 Syksy 2022, lyhyt oppimäärä, tehtävä 11. Lintujen talviruokinta

Lintuharrastaja on aloittanut lintujen talviruokinnan. Hän on hankkinut uuden, kuvan 11.A ja videon 11.B mukaisen lintujen ruokintalaitteen.

1. Mallinna lintujen ruokintalaitetta sopivan särmiön avulla. Piirrä kuva särmiöstä ja laske sen tilavuus.
2. Valmistajan ilmoituksen mukaan ruokintalaitteen tilavuus on noin 1,6 litraa. Perustelee, mistä ero valmistajan ilmoittaman tilavuuden ja osatehtävän 11.1 arvion välillä muodostuu.
3. Kuinka monta kertaa tyhjän ruokintalaitteen voi täyttää 25 kilogramman säkillisestä auringonkukansiemeniä, kun siemensekoituksen tiheys on  $0,460 \text{ kg/dm}^3$ ? Käytä ratkaisussasi valmistajan ilmoittamaa ruokintalaitteen tilavuutta.



Kuva 10. Lintulauta (YTL, 2022b)



Kuva 11. Lintulaudan mitta aineiston videosta (YTL, 2022b)



Kuva 12. Lintulaudan mitta aineiston videosta (YTL, 2022b)



Kuva 13. Lintulaudan mitta aineiston videosta (YTL, 2022b)

Ideasarake	Toteutussarake	Pisteet
Piirretty särmiö, jonka pohja on kolmio tai katkaistu kolmio.	Pituudet noin 18, 20 ja 14 (cm) (1 p.). Särmiö oikein 1 p.	1+2 p.
Lasketaan tilavuutta	Pohjakolmion korkeus ( $h = \sqrt{20^2 - (18/2)^2} \approx 17,86$ (cm)) (1 p.), särmiön pohjan ala $A = xh/2$ ( $= 18 \cdot h/2 \approx 160,75$ (cm <sup>2</sup> )), särmiön tilavuus ( $18 \cdot h \cdot 14/2 \approx 2250,43$ (cm <sup>3</sup> )) eli noin 2,3 litraa (1 p.). (Tämän kohdan pisteitä vain särmiöille.)	1+2 p.
<b>Alakohdan erillisohjeet</b>		
Kokelaan ilmoittamat pituudet saavat poiketa oikeasta 1 cm kumpaankin suuntaan tahansa.		
Tyyppivirhe: Kokelas mallintanut kartioksi. Tällöin ensimmäiseltä riviltä maks. 0 + 1 ja toiselta riviltä maks. 1 + 0 (pisteet ansaitaan oikeista pituuksista ja tilavuudesta)		max 2 p.
Tyyppivirhe: Kokelas mallintanut suorakulmaiseksi särmiöksi. Tällöin ensimmäiseltä riviltä maks. 0 + 1 ja toiselta riviltä maks. 1 + 0 (pisteet ansaitaan oikeista pituuksista ja tilavuudesta)		max 2 p.
Tyyppivirhe: särmiön pohjan pinta-ala $18 \cdot 20/2$ .		max 5 p.
Luetellaan erioihin johtavia asioita (kaksi riittää).	Valmistajan mittauksen epätarkkuus (mitattu esim. vetomitalla), mallin epätarkkuus (laite ei ole suora särmiö, esim. syvennykset huomioimatta), levyn paksuuden vaikutus, kolmion alakärki ei täyty, laitetta ei ehkä voi täyttää aivan täyteen tai laite ei ehkä tyhjene kokonaan.	0+2 p.

Kuva 14. Hyvän vastauksen piirteet osa 1 (YTL, 2022b)

Jaetaan siementen massa tiheydellä.	$\frac{25 \text{ (kg)}}{0,460 \text{ (kg/dm}^3\text{)}} \approx 54,35$ litraa siemeniä).	1+1 p.
Jaetaan säkin tilavuus säiliön tilavuudella	$\frac{54,35 \text{ (l)}}{1,6 \text{ (l)}} \approx 33,97 \approx 34$ (tai pyöristetty alaspäin 33).	1+1 p.

[https://tiedostot.ylioppilastutkinto.fi/kokeet/2022-09-20\\_N\\_fi/grading-instructions.html](https://tiedostot.ylioppilastutkinto.fi/kokeet/2022-09-20_N_fi/grading-instructions.html) 13/15

11/15/22, 9:41 AM

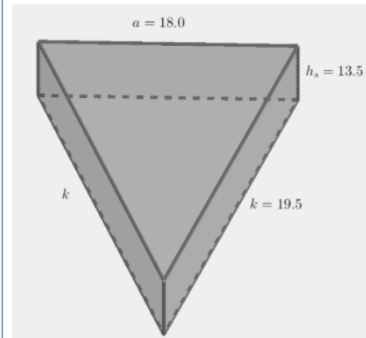
Hyvän vastauksen piirteet: FI – Matematiikka, lyhyt oppimäärä

<b>TAI</b>		
Kerrotaan tiheys ja ruokintalaitteen tilavuus.	$0,46 \text{ (kg/l)} \cdot 1,6 \text{ (l)} = 0,736$ (kg)	1+1 p.
Jaetaan säkin massa edellä saadulla massalla.	$\frac{25 \text{ (kg)}}{0,736 \text{ (kg)}} = 33,97 \dots$ eli n. 34 kertaa (tai 33 kertaa)	1+1 p.
<b>Alakohdan erillisohjeet</b>		
Lasku omalla tilavuudella.		max 3 p.

Kuva 15. Hyvän vastauksen piirteet osa 2 (YTL, 2022b)

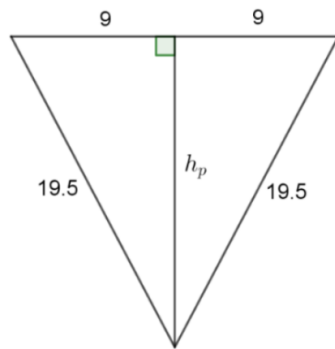
1. Lintulauta muistuttaa särmiötä muodoltaan ja sen pohja on tasakylkinen kolmio. Videosta nähdään pohjan mitat. Tasakylkisen kolmion kanta on 18 cm ja kylki 19,5 cm. Videosta näkyy särmiön korkeus 13,5 cm.

Piirretään mallikuva särmiöstä ja merkataan särmiön mitat siihen.



Kuva 16. Malliratkaisu osatehtävä 1. osa 1

Pohjan korkeusjana jakaa kannan puoliksi. Kanta siis jakaantuu  $\frac{18 \text{ cm}}{2} = 9 \text{ cm}$  osiin. Alla on mallikuva särmiön pohjasta.



Ratkaistaan särmiön pohjan korkeus Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + 9^2 = 19,5^2 \quad \text{Käytetään solve-toimintoa}$$

$$h = \pm 17,298\dots \text{ (cm)} \quad \text{valitaan positiivinen, koska sivun pituus ei voi olla negatiivinen.}$$

Seuraavaksi lasketaan särmiön pohjan pinta-ala

$$A_p = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{18 \text{ cm} \cdot 17,298\dots \text{ cm}}{2} = 155,689\dots \text{ cm}^2$$

Ja lopuksi pyydetty särmiön tilavuus

$$V = A_p \cdot h_s = 155,689\dots \text{ cm}^2 \cdot 13,5 \text{ cm} = 2101,809\dots \text{ cm}^3 \approx 2100 \text{ cm}^3 = 2,1 \text{ l}$$

Kuva 17. Malliratkaisu osatehtävä 1. osa 2

2. Ruokintalaitteen todellinen tilavuus on 11.1 kohdan arviota pienempi, koska sitä ei välttämättä ole täytetty täyteen valmistajan mittauksessa. Myös pohjakolmion alareunat ovat särmiön sisällä ja tasakylkisen kolmion ajateltiin olevan pystysuora. Myös kohtaa, johon linnut tulevat syömään aiheuttaa tilavuuksien välille eroja.

3. Lasketaan ruokasäkin tilavuus

$$\frac{25 \text{ kg}}{0,460 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}} = 54,347\dots \text{ dm}^3 = 54,347\dots \text{ l}$$

Täyttökertoja on tällöin

$$\frac{54,437\dots \text{ l}}{1,6 \text{ l}} = 33,967\dots \approx 34$$

Kuva 18. Malliratkaisu osatehtävä 2. ja 3.

## 4 Tutkimustulokset

Tässä luvussa käsitellään tutkimustulokset ja muutama esimerkki opiskelijoiden ratkaisuisissa esiintyneestä matematiikan kielentämisestä aiemmin esitetyistä tehtävistä.

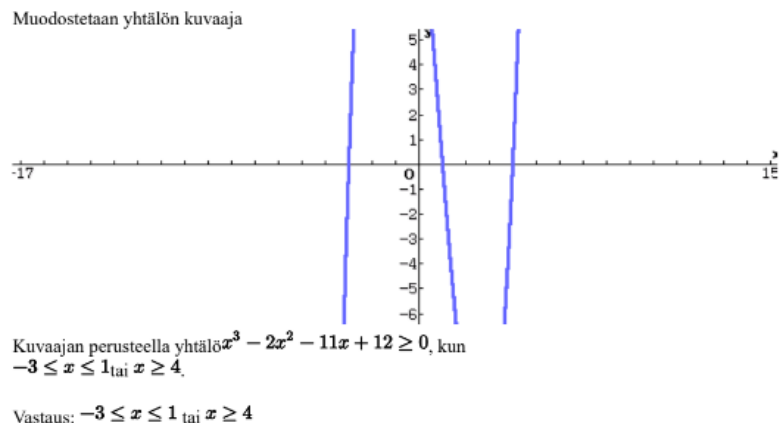
### 4.1 Syksy 2019, pitkä oppimäärä, tehtävä 5. Polynomiepäyhtälö

Tämä tehtävä oli pitkän matematiikan ylioppilaskokeen B1-osion tehtävä, jossa tarkoituksena oli ratkaista epäyhtälö ja selittää sanallisesti, miten polynomifunktion tulomuotoa voidaan käyttää hyväksi epäyhtälön ratkaisemisessa. Tehtävänannossa on ohjeistettu, että ratkaisussa voi käyttää laskinohjelmistoa hyväksi epäyhtälön ratkaisemiseksi. Tehtävänannossa on myös ohjeistettu antamaan sanallinen selitys tulomuodon hyödyistä.

Tehtävässä esiintyi kaikkia kolmea kieltä kolmen kielen mallista, kuten taulukosta 1 nähdään. Aineiston sadasta ratkaisusta lähes kaikissa esiintyi matematiikan symbolista kieltä. Luonnollista kieltä esiintyi 76 eri ratkaisussa ja kuviokieltä vain 31 ratkaisussa. Luonnollisen kielen puute noin joka neljännessä ratkaisussa on yllättävä tulos, koska tehtävän annossa ohjeistettiin käyttämään sanallista selitystä. Tuloksista myös yllätti kuviokielen vähäinen määrä, koska tehtävän mallintaminen usein auttaa opiskelijoita hahmottamaan tehtävän ratkaisua. Ratkaisuisissa näkyi myös kuviokielen väärinkäyttöä, jossa piiretystä kuvaajasta katsottiin suoraan epäyhtälön ratkaisu ilman mitään laskutoimituksia. Kuvassa 19 on esimerkki kokelaan ratkaisusta, jossa tehdään näin.

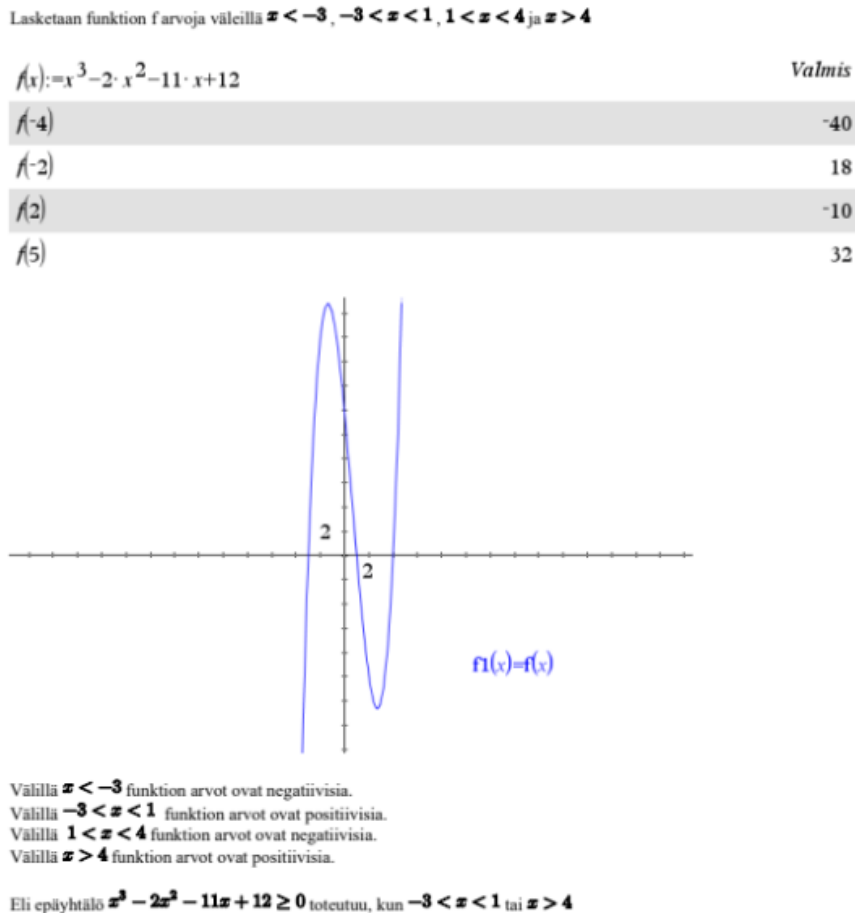
Taulukko 1. Tehtävässä "Polynomiepäyhtälö" esiintyneet kielet. Samassa ratkaisussa voi esiintyä enemmän kuin yksi kieli.

<i><b>Kielentämiseen käytetyt kielet</b></i>	<i><b>Määrä</b></i>
<i>Matematiikan symbolinen kieli</i>	97
<i>Luonnollinen kieli</i>	76
<i>Kuviokieli</i>	31



Kuva 19. Kokelas 19 tehtävässä "Polynomiepäyhtälö", katsotaan ratkaisu vain kuvaajasta.

Opiskelijat käyttivät usein ratkaisuisaan useampaa kuin vain yhtä kieltä. Yleisin kahden kielen kombinaatio oli matematiikan symbolinen kieli ja luonnollinen kieli. Ratkaisuisa nähtiin myös kolmen kielen kombinaatioita eli ratkaisuja, joissa oli matematiikan symbolista kieltä, opiskelijan omaa äidinkieltä sekä kuviokieltä. Kuvassa 20 nähdään esimerkki, jossa kokelas käyttää kaikkia kolmea kieltä tehtävän ratkaisussa. Nämä kolmen kielen ratkaisut olivat usein todella hyviä ja vastasivat tehtävänantoon mallikkaasti. Jos tehtävä oli ratkaistu käyttäen vain yhtä kieltä, ratkaisu oli puutteellinen.



Kuva 20. Kokelas 1 tehtävässä "Polynomiepäyhtälö", kolmen kielen malli.

Ratkaisumallaista selkeästi suosituin oli kertomusmalli, kuten taulukosta 2 nähdään. Tiekarttamalli myös esiintyi 17 kertaa sadasta eri ratkaisusta. Pelkästään matematiikan symbolista kieltä sisältävä standardimalli näkyi lähes joka viidennessä ratkaisussa. Tämä standardimallin lukumäärä on yllättävän suuri, vaikka tehtävänannossa painotetaan selittämään sanallisesti. Standardimallilla ei ole mahdollista saada täysiä pisteitä kyseisestä tehtävästä. Päiväkirjamallia käytti kuusi opiskelijaa ja vähiten käytetty malli oli kommenttimalli, jota oli kolme kappaletta. Muita ratkaisumalleja oli myös kolme kappaletta ja näihin kuuluivat ratkaisut, jotka olivat tyhjiä tai käyttivät pelkästään luonnollista tai kuviokieltä.

Taulukko 2. Tehtävässä "Polynomiepäyhtälö" esiintyneet ratkaisumallit.

<b>Ratkaisumalli</b>	<b>Määrä</b>
<i>Standardimalli</i>	19
<i>Kertomusmalli</i>	51
<i>Tiekarttamalli</i>	17
<i>Kommenttimalli</i>	3
<i>Päiväkirjamalli</i>	6
<i>Muu</i>	3

## 4.2 Kevät 2019, lyhyt oppimäärä, tehtävä 11. Harrin palkka

Tämä tehtävä oli lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen B2-osion tehtävä, jossa tarkoituksena oli laskea, kuinka monta prosenttia enemmän tai vähemmän Harri arvioi saavansa palkkaa tunnilta kuin hän oikeasti saa. Tehtävän toisen osan tarkoituksena oli selittää sanallisesti Harrin tehtävänannossa esitettyjä päättelyn vaiheita ja arvioida perustuuko hänen päättelynsä päteviin arvioihin.

Tehtävän ratkaisussa esiintyi vain kahta kieltä kolmen kielen mallista, kuten taulukosta 3 nähdään. Odotetusti kuviokieltä ei esiintynyt yhdessäkään aineiston ratkaisussa. Kuvasta 21 nähdään yhden kokelaan ratkaisu kahdella kielellä. Kaikissa paitsi yhdessä opiskelijoiden ratkaisussa oli luonnollista kieltä. Yksi ratkaisu oli tehty pelkästään matematiikan symbolikieltä käyttäen. Luonnollista kieltä käytettiin molempia ääripäitä hipoen. Löytyi sekä lähes esseetä muistuttava ratkaisu että vain yhden virkkeen ratkaisu. Matematiikan symbolinen kieli puuttui seitsemästä ratkaisusta, vaikka sitä tarvittiin laskettaessa tehtävän ensimmäistä osaa. Kuvassa 22 nähdään kokelaan ratkaisu, jossa ei käytetä laskutoimituksia, vaan hän on laittanut vain vastauksen esille.

Taulukko 3. Tehtävässä "Harrin palkka" esiintyneet kielet. Samassa ratkaisussa voi esiintyä enemmän kuin yksi kieli.

<b>Kielentämiseen käytetyt kielet</b>	<b>Määrä</b>
Matematiikan symbolinen kieli	93
Luonnollinen kieli	99
Kuviokieli	0

Harri luulee laskelmien mukaan hänen tuntipalkkansa on 27 euroa joka pyöristettynä pelkkiin euroihin ilman senttejä hänen laskelmat pitää paikkansa, sillä  $4200 : 155 = 27,09677$   
 $0,09677 \cdot 27,09677 \cdot 100 = 0,357 \approx 0,4\%$   
 senttien osuus joka jäi harilta laskematta on noin 0,4% hänen palkastaan. Toisin sanoen harri saa 0,4% palkkaa tunnilta mitä hän arvioi.

Kuva 21. Kokelas 22 tehtävässä "Harrin palkka", kahden kielen kombinaatio.

## 11.1

Hän arvioi saavansa noin 0,33% vähemmän kuin oikeasti.

Kuva 22. Kokelas 11 tehtävässä "Harrin palkka", ei laskutoimituksia esitetty, vaan pelkkä lopputulos.

Taulukosta 4 nähdään, että kertomusmalli oli aineiston ratkaisumalleista eniten käytetty kokelaiden ratkaisuihin. Tiekarttamalli oli toinen suosittu tapa tehdä tehtävän ratkaisu. Aineistossa oli yksi pelkästään matematiikan symbolista kieltä sisältävä ratkaisu eli tehtävä oli ratkaistu standardimallin mukaisesti. Muu-kategoriaan on laitettu tyhjä ratkaisut sekä pelkästään luonnollista kieltä sisältävät ratkaisut. Suurin osa aineiston ratkaisuista olivat matematiikan symbolisen kielen ja luonnollisen kielen kombinaatioita.

Taulukko 4. Tehtävässä "Harrin palkka" esiintyneet ratkaisumallit.

Ratkaisumalli	Määrä
Standardimalli	1
Kertomusmalli	68
Tiekarttamalli	24
Kommenttimalli	0
Päiväkirjamalli	0
Muu	7

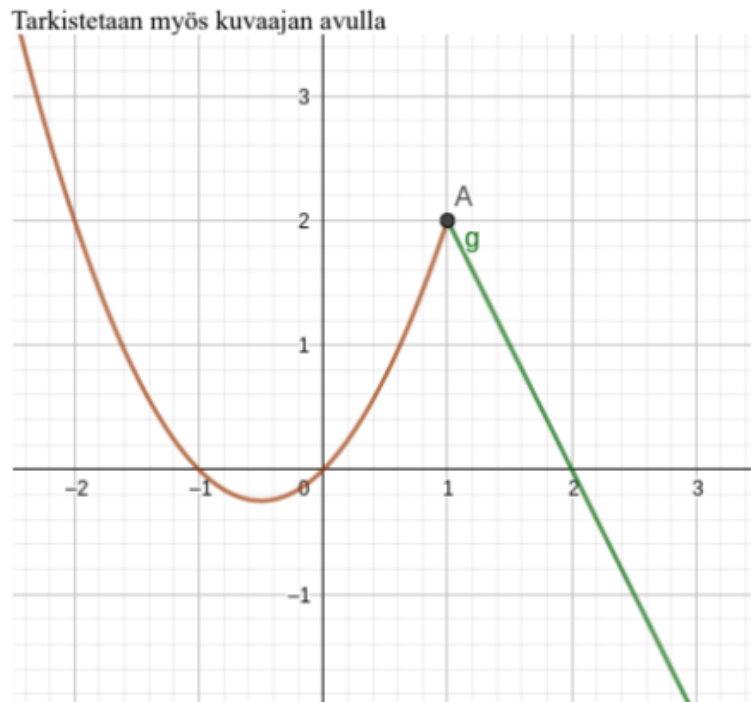
### 4.3 Kevät 2022, pitkä oppimäärä, tehtävä 8. Jatkuva, mutta ei derivoituva funktio

Tässä pitkän matematiikan ylioppilaskokeen B1-osion tehtävässä tarkoituksena oli antaa esimerkki jatkuvasta funktiosta, joka ei ole derivoituva kohdassa  $x = 1$ . Tehtävässä vaadittiin myös perustelu erotusosamäärän avulla, miksi funktio ei ole derivoituva kohdassa  $x = 1$ , ja piti perustella funktion jatkuvuus.

Taulukosta 5 nähdään, että kielentämistä esiintyi tämän tehtävän ratkaisuihin kaikilla kolmella kolmen kielen mallin kielellä. Opiskelijoiden äidinkieli eli luonnollinen kieli esiintyi 93 kertaa aineiston sadasta eri ratkaisusta. Matematiikan symbolinen kieli esiintyi myös lähes kaikissa aineiston sadassa ratkaisussa. Tehtävänanto antoi valmiiksi kaavan, jota opiskelijat voivat käyttää ratkaistaessaan tehtävää ja silti 6 opiskelijaa ei käyttänyt ollenkaan matematiikan symbolista kieltä. Kuviokieli esiintyi opiskelijoiden ratkaisuihin tasan puolissa aineiston ratkaisuihin, mikä on tähän tehtävään odotettu tulos. Kuviokieli auttaa tarkistamaan oman funktion ja havainnollistamaan ratkaisua, kuten kuvassa 23 nähdään. Jotkin kuviokieltä sisältävät ratkaisut osasivat hyvin yhdistää yksikäsitteisen tangentin teorian kuvioon, joka osoitti opiskelijoiden osaavan yhdistää kuvion hyvin tehtävän ideaan.

Taulukko 5. Tehtävässä "Jatkuva, mutta ei derivoituva funktio" esiintyneet kielet. Samassa ratkaisussa voi esiintyä enemmän kuin yksi kieli.

Kielentämiseen käytetyt kielet	Määrä
Matematiikan symbolinen kieli	94
Luonnollinen kieli	93
Kuviokieli	50



On näkyvässä, että funktio on jatkuva kohdassa  $x=1$ .  
Funktio ei ole derivoituva, koska pisteeseen A piirretty tangentti olisi nolla

Kuva 23. Kokelas 50 tehtävässä "Jatkuva, mutta ei derivoituva funktio", tarkistaa ratkaisun kuvaajan avulla ja kertoo miksi kuvaaja sopii tehtävänantoon.

Taulukosta 6 nähdään kokelaiden käyttämät ratkaisumallien määrät. Ratkaisumalleissa kertomusmalli oli selkeästi eniten esiintyvä, koska se esiintyi 71 kertaa sadasta aineiston ratkaisusta. Tiekarttamallia käytti 16 opiskelijaa ja pelkästään matematiikan symbolista kieltä sisältäviä standardimalliratkaisuja oli vain yksi. Kommentti- tai päiväkirjamallia käytti opiskelijoista kuusi, kolme kommenttimallia ja kolme päiväkirjamallia. Muita ratkaisumalleja oli kuusi kappaletta ja ne olivat joko tyhjiä ratkaisuja tai pelkästään luonnollista ja/tai kuviokieltä sisältäviä ratkaisuja.

Taulukko 6. Tehtävässä "Jatkuva, mutta ei derivoituva funktio" esiintyneet ratkaisumallit.

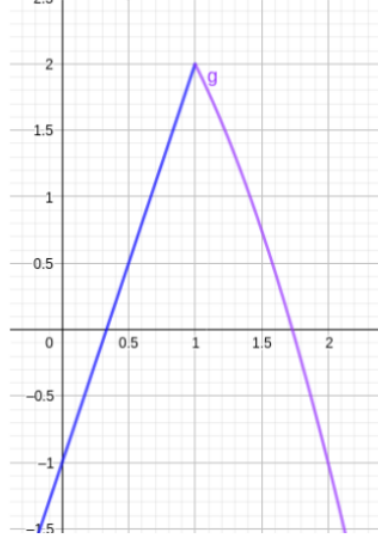
Ratkaisumalli	Määrä
Standardimalli	1
Kertomusmalli	71
Tiekarttamalli	16
Kommenttimalli	3
Päiväkirjamalli	3
Muu	6

Opiskelijat käyttivät usein enemmän kuin yhtä kieltä ratkaistaessaan tehtävää. Yleisin kombinaatio oli luonnollisen kielen ja matematiikan symbolisen kielen kombinaatio. Aineisto sisälsi myös hyvän määrän opiskelijoiden ratkaisuja, jossa käytettiin kaikkia kolmea kieltä. Kuvasta 24 nähdään yhden kokelaan ratkaisusta osa, jossa käytetään kolmea kieltä. Yhden kielen ratkaisuyrityksiä aineisto sisälsi vähän alle 10 kappaletta. Näissä ratkaisuisa pyrittiin usein osoittamaan funktioiden sopivuus tehtävänantoon ainoastaan kuvaajien tai luonnollisen kielen avulla. Aineistossa oli myös yksi pelkällä matematiikan symbolisen kielen avulla ratkaistu tehtävä.

Funktio:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & , x \geq 1 \\ 3x - 1 & , x < 1 \end{cases}$$

Funktion kuvaaja:



Tarkastellaan derivoituvuutta kohdassa  $x=1$ :

Oikean puolen erotusosamäärän raja-arvo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 3 - (-1^2 + 3)}{x - 1} \quad \text{laskimella}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{-x^2 + 3 - (-1^2 + 3)}{x - 1} \right) = -2$$

Kuva 24. Kokelas 25 tehtävässä "Jatkuva, mutta ei derivoituva funktio", käyttää kolmea kieltä ratkaisussaan.

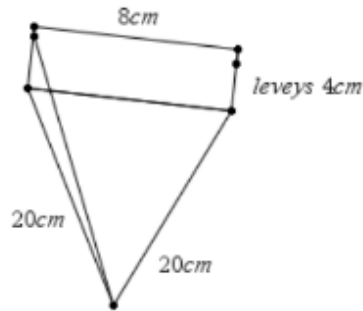
#### 4.4 Syksy 2022, lyhyt oppimäärä, tehtävä 11. Lintujen talvi-ruokinta

Tässä lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen B2-osion tehtävässä tarkoituksena oli mallintaa tehtävän aineistossa esiintyvää lintujen ruokintalaitetta sopivan särmiön avulla. Opiskelijoiden tehtävänä oli piirtää kuva särmiöstä ja laskea sen tilavuus. Tämän jälkeen tehtävän toisessa osassa opiskelijoiden tehtävänä oli perustella, mistä mahdolliset tilavuuden arvioiden erot valmistajan ja itse lasketun tilavuuden välillä voivat johtua. Tehtävän kolmannen osan tarkoituksena oli laskea valmistajan ilmoittavan tilavuuden avulla, kuinka monta kertaa tyhjän ruokintalaitteen voi täyttää 25 kilogramman säkillisestä auringonkukansiemeniä.

Tehtävien ratkaisussa esiintyi matemaattista kielentämistä kaikilla kolmen kielen mallin kielellä, kuten taulukosta 7 nähdään. Kuviokielen vähäinen esiintymismäärä opiskelijoiden ratkaisussa oli yllättävä tulos. Aineiston sadasta opiskelijoiden ratkaisusta vain 66 opiskelijaa piirsi kuvan särmiöstä tai ainakin yritti piirtää. Tämä on yllättävän alhainen määrä, koska tehtävänannossa pyydetään hyvin selkeästi mallintamaan kuva särmiöstä. Matematiikan symbolista kieltä oli 83 ratkaisussa, mikä on jo parempi tulos kuin kuviokielen kanssa. Silti 18 ratkaisua oli ilman mitään laskelmia tai niiden yrityksiä, vaikka tehtävänannossa selkeästi pyydetään laskemaan eri asioita. Kuvassa 25 on osa kokelaan ratkaisusta, jossa on kuvan lisäksi pelkkä vastaus ilman laskutoimituksia. Luonnollista kieltä esiintyi 70 opiskelijan ratkaisussa. Tämäkin tulos on melko alhainen, koska tehtävänannossa pyydetään perusteluita tilavuuden arvion erolle valmistajan ja itse lasketun tilavuuden välillä.

Taulukko 7. Tehtävässä "Lintujen talviruokinta" esiintyneet kielet. Samassa ratkaisussa voi esiintyä enemmän kuin yksi kieli.

<b>Kielentämiseen käytetyt kielet</b>	<b>Määrä</b>
Matematiikan symbolinen kieli	83
Luonnollinen kieli	70
Kuviokieli	66



1.  
Pinta-ala = 80m<sup>2</sup>

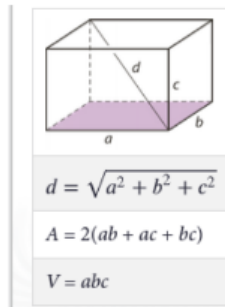
Kuva 25. Kokelas 46 tehtävässä "Lintujen talviruokinta", kiellentämisen vaikeuksia.

Taulukosta 8 nähdään kokeilaiden käyttämät ratkaisumallit ja niiden lukumäärät. Ratkaisumalleista eniten käytettyjä olivat kertomus- ja tiekarttamalli, joista kertomusmallia käytettiin opiskelijoiden ratkaisuisissa 42 kertaa ja tiekarttamallia 32 kertaa. Kolmanneksi eniten esiintyi muita ratkaisuja, jotka olivat tyhjiä tai sisälsivät ainoastaan luonnollista kieltä ja/tai kuviokieltä. Pelkästään matematiikan symbolista kieltä sisältäviä ratkaisuja eli standardimallin mukaisia ratkaisuja oli neljä kappaletta. Saman verran oli kommenttimallin mukaisia ratkaisuja. Päiväkirjamallia käytti yksi opiskelija ratkaistaessaan tehtävää.

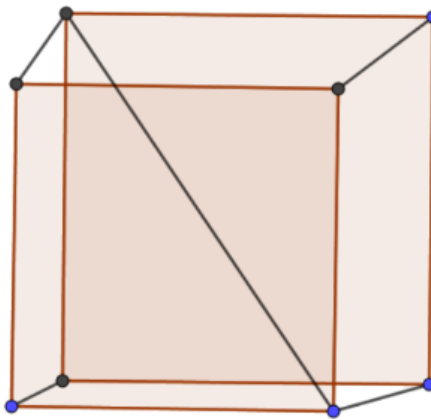
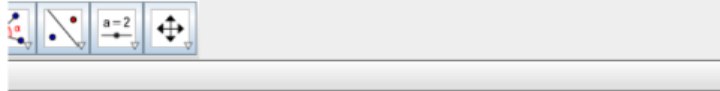
Taulukko 8. Tehtävässä "Lintujen talviruokinta" esiintyneet ratkaisumallit.

Ratkaisumalli	Määrä
Standardimalli	4
Kertomusmalli	42
Tiekarttamalli	32
Kommenttimalli	4
Päiväkirjamalli	1
Muu	17

Eri kielten kombinaatioita ratkaisuisissa esiintyi seuraavasti: matematiikan symbolisen kielen ja luonnollisen kielen kombinaatio oli opiskelijoiden ratkaisuisissa eniten käytetty kombinaatio. Hyviä kolmen kielen kombinaatioita löytyi jonkin verran, mutta opiskelijoilla oli usein vaikeuksia kiellentämisessä näissäkin ratkaisuisissa. Suurin ongelma aineiston sadan ratkaisuin keskuudessa oli selkeästi kuviokielen käyttäminen oikein ja sen yhdistäminen muihin kieliin. Suorakulmaisen särmiön käyttöä tehtävän ratkaisussa esiintyi myös muutaman kerran, vaikka tehtävänannon aineistosta nähdään, että kyseessä ole suorakulmainen särmiö. Kuvasta 26 nähdään osa yhden kokelaan ratkaisusta, jossa hän yrittää mallintaa suorakulmaista särmiötä ja laskea sen tilavuutta. Ruokintalaitetta myös piirettiin ja sen tilavuus laskettiin usein kartion tai pyramidin tapaisesti.



1.  
Piirretään särmiö



Lasketaan tilavuus  $V = 14, 18, 20$

Kuva 26. Kokelas 78 tehtävässä "Lintujen talviruokinta", suorakulmainen särmiö ja vaikeuksia kuviokielen kanssa.

## 5 Pohdinta

### 5.1 Luotettavuus

Tutkimuksen luotettavuuteen vaikuttavat keskeisesti sekä aineiston koko, että sen käsittelymenetelmät. Tässä tutkimuksessa hyödynnetty aineisto koostui Ylioppilastutkintolautakunnan kokoamista aidoista ylioppilaskirjoitusten ratkaisuksista vuosilta 2019-2022, joissa oli edustettuna kaikkia eri arvosanoja. Aineiston arvosanaskaala on normaalijakautunut samalla tavalla kuin ylioppilaskirjoitusten arvosanatkin. Ääripään arvosanoja, kuten I ja L, on vähemmän ja keskivertoarvosanoja, kuten C ja M, on enemmän. Voidaan siis todeta, että aineisto edustaa kattavasti tyypillistä kokelasjoukkoa.

Tutkimuksen otoskoko koostui neljän erilaisen matematiikan sähköisen ylioppilaskokeen tehtävän ratkaisusta, joista kaksi olivat lyhyen matematiikan ja kaksi pitkän matematiikan ylioppilaskokeista. Otoskoko oli tutkimuksen tavoitteisiin nähden riittävä, mutta tuloksia ei voida pitää yleistettävänä, sillä tarkastelun kohteena oli vain 400 kappaletta ylioppilastehtävien ratkaisuja. Laajempi otoskoko olisi tuottanut monipuolisemman katsauksen matemaattisesta kielentämisestä.

Tämän tutkimuksen tuloksista vastasi vain yksi henkilö, mikä voi luoda erilaisia riskejä eri tulkintavirheisiin. Vaikka tutkimusaineisto käytiin useaan otteeseen läpi, on tutkimuksessa mahdollisuus eri virheisiin ja virheellisiin päätelmiin. Tutkimusaineisto sisälsi myös todella lyhyitä ratkaisuja esimerkiksi luonnollisella kielellä, mutta ratkaisun lyhydestä huolimatta analyysissä tuloksiin merkattiin, että kokelas on käyttänyt luonnollista kieltä. Samanlainen tulos olisi voinut tulla todella laajasta ja kattavasta luonnollista kieltä sisältävästä ratkaisusta.

Rajallisista resursseista huolimatta tutkimuksen tulokset olivat hyödyllisiä, koska samoja matemaattisen kielentämisen ratkaisutapoja esiintyi paljon. Myös selkeä ero lyhyen ja pitkän matematiikan ratkaisuiden välillä löytyi, kuten seuraavassa kappalessa kerrotaan. Tutkimus tarjoaa hyödyllistä informaatiota matemaattisesta kielentämisestä matematiikan sähköisissä ylioppilaskokeissa, vaikka tuloksia ei voida yleistää kaikkiin kyseisen oppiaineen kokeisiin.

### 5.2 Tulosten tarkastelu

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää millä eri tavoin matemaattinen kielentäminen esiintyy opiskelijoiden matematiikan ylioppilaskoeratkaisuisissa. Tutkimuksen tarkoituksena oli myös selvittää esiintyykö matemaattisen kielentämisen eroja pitkän ja lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen ratkaisuisissa. Tutkimuksen tulosten avulla selvitettiin, mitä eri kieliä opiskelijat käyttivät kolmen kielen mallista ja miten paljon. Tulosten avulla myös selvitettiin, mitä eri ratkaisumalleja opiskelijat suosivat eri tehtävien ratkaisuisissa.

Matematiikan symbolista kieltä käytettiin 367 ratkaisussa. Tämän tutkimuksen 400 ratkaisusta 33 opiskelijaa ei käyttänyt matematiikan symbolista kieltä matematiikan ylioppilaskoetehtävää ratkaistaessa. Pienin prosentuaalinen määrä kyseisen kielen käytöstä oli syksyn 2022 lyhyen oppimäärän tehtävässä 11. Tässä tehtävässä vain 83 opiskelijaa käytti matematiikan symbolista kieltä. Toisessa tämän tutkimuksen lyhyen matematiikan tehtävässä 93 opiskelijaa käytti matematiikan sym-

bolista kieltä. Pitkän matematiikan molemmissa tehtävissä yli 90 prosenttia käytti tätä kieltä. Pitkän matematiikan tehtävien ratkaisuisa käytettiin enemmän matematiikan symbolista kieltä. Jokaisen tehtävän ratkaisemiseen vaadittiin tätä kieltä, joten erot eivät selity tehtävänannolla. Jokaisen tehtävän tehtävänannossa ilmoitettiin selkeästi, että matematiikan symbolista kieltä olisi tarpeellista käyttää tehtävän ratkaisemiseksi.

Luonnollista kieltä käytti ratkaisussaan 338 opiskelijaa. Aineistossa yhteensä 62 opiskelijaa ei käyttänyt omaa äidinkieltään tehtävää ratkaistaessaan. Valituista vuosien 2019 ja 2022 syksyn tehtävissä oli vähiten luonnollisen kielen käyttöä ratkaisuisa. Toinen näistä oli pitkän ja toinen lyhyen matematiikan tehtävä. Syksyn 2022 lyhyen matematiikan tehtävässä 11 vain 70 prosenttia opiskelijoista käytti luonnollista kieltä ja syksyn 2019 pitkän matematiikan tehtävässä 5 tämä prosentti oli 76. Kevään tehtävissä luonnollisen kielen käyttö oli paljon yleisempää. Kevään 2022 pitkän matematiikan tehtävässä 8 93 prosenttia opiskelijoista käytti luonnollista kieltä ratkaisussaan, kun taas keväällä 2019 lyhyen matematiikan tehtävässä 11 tämä prosenttiosuus oli jopa 99. Nämä erot ovat erikoisia, koska jokaisessa tehtävänannossa pyydetään perusteluita tai selittämistä.

Kuviokieli oli vähiten käytetty kieli kolmen kielen mallista. Sitä esiintyi tutkimuksen 400 ratkaisusta yhteensä 147 kertaa. Vain toisessa lyhyen matematiikan tehtävän ratkaisuisa esiintyi kuviokieltä. Tämä syksyn 2022 tehtävä 11 oli geometrian tehtävä, jossa tehtävänannossa pyydettiin mallintaa kuva. Vaikka tehtävänannossa selkeästi pyydettiin kuvaa, niin vain 66 prosenttia aineiston ratkaisuisa sisälsi jonkinlaisen kuvan. Tutkimuksen toisen lyhyen matematiikan tehtävän ratkaisuisa ei esiintynyt yhtään kuviokieltä, mikä oli ihan odotettu tulos tehtävänannon perusteella. Molemmissa tutkimuksen pitkän matematiikan tehtävien ratkaisuisa esiintyi kuviokieltä, vaikka tehtävänannoissa ei suoranaisesti vaadittu tätä. Pitkän matematiikan kevään 2022 tehtävässä 8 puolet aineiston opiskelijoista käytti avukseen kuviokieltä tehtävää ratkaistaessa. Syksyn 2019 pitkän matematiikan tehtävässä 5 vähän yli 30 prosenttia aineiston ratkaisuisa sisälsi kuviokieltä. Osa opiskelijoista käytti kuviokieltä tukemaan tai hahmottamaan tehtävän ratkaisua, kun taas osa opiskelijoista yritti ratkaista tehtävän pelkän kuviokielen avulla.

Kuten on todettu aikaisemmin, matemaattinen kielentäminen ei ole vain yhden kielen hallitsemista vaan näiden kolmen eri kielen yhdistämistä toisiinsa. Tehtävien ratkaisuisa näkyi kahden ja jopa kolmen kielen kombinaatioita. Yleisin kahden kielen kombinaatio oli matematiikan symbolisen kielen ja luonnollisen kielen kombinaatio. Toisena kahden kielen kombinaationa oli kuviokielen ja matematiikan symbolisen kielen kombinaatio. Myös muutamia luonnollisen kielen ja kuviokielen kombinaatioita esiintyi, mutta nämä olivat vajaita tai epätarkkoja ratkaisuja. Kaikkien kolmen kielen kombinaatiota esiintyi kolmen tehtävän ratkaisuisa, pois lukien lyhyen matematiikan kevään 2019 tehtävän 11, jossa ei esiintynyt kuviokieltä ollenkaan. Kolmen kielen kombinaatioita esiintyi enemmän pitkän matematiikan ratkaisuisa kuin lyhyen matematiikan ratkaisuisa. Yhden kielen ratkaisuja esiintyi enemmän lyhyen matematiikan ratkaisuisa. Tätä yhden kielen ratkaisujen lukumäärää nostaa huomattavasti syksyn 2022 lyhyen matematiikan tehtävä 11, jossa esiintyi monta pelkällä kuvalla yritettyä ratkaisua. Pitkän matematiikan yhden kielen ratkaisut painottuivat syksyn 2019 tehtävään 5, jossa oli 19 ratkaisua pelkällä

matematiikan symbolisella kielellä.

Opiskelijat käyttivät ratkaisuihissaan monenlaisia ratkaisumalleja. Suosituin ratkaisumalli oli kertomusmalli, jossa opiskelija vuorottelee matematiikan symbolisen kielen ja kuviokielen/luonnollisen kielen kanssa. Aineiston ratkaisuihista 232 kappaletta oli kertomusmallin mukaisesti ratkaistuja, joten yli puolet ratkaisuihista oli tämän mukaisesti tehtyjä. Tiekarttamallia käytti 89 opiskelijaa ja standardimallia 25 opiskelijaa. Nämä olivat seuraavaksi eniten käytetyt ratkaisumallit. Kommentti- tai päiväkirjamallia ei moni opiskelija käyttänyt, mutta niiden mukaisia ratkaisuja oli muutama. Kommenttimallin vähäinen käyttö voi johtua sähköisestä alustasta, jossa ratkaisu esitetään. Tähän on vaikea saada kommenttimallin tyyllisesti matematiikan symbolinen kieli toiselle puolelle ja muut kielet toiselle puolelle. Muita ratkaisumalleja, eli niitä jossa ei matematiikan symbolista kieltä ollut, oli yllättävän monta. Näitä muita ratkaisumalleja esiintyi enemmän lyhyen matematiikan kuin pitkän matematiikan tehtävissä.

Matemaattisen kielentämisen eroja oli pitkän ja lyhyen matematiikan välillä muutamia. Vaikka aineisto on todella pieni osa koko kuvaa, samoja eroja tehtävien ratkaisujen välillä löytyi. Merkittävin ero näiden kahden oppimäärän välillä oli kielentämisen laadussa ja tarkkuudessa. Lyhyen matematiikan ratkaisuihissa kielentämisessä oli enemmän ongelmia kuin pitkän matematiikan ratkaisuihissa. Suurin ero oli GeoGebra tai muun sähköisen työkalun avulla piiretyt kuvat tai graafit. Pitkässä matematiikassa opiskelijat olivat oikeaoppisesti piirtäneet tehtävää avustavia graafeja tai kuvia, kun taas lyhyen matematiikan opiskelijoilla oli selkeästi vaikeampaa saada kuviokieli oikeanlaiseksi. Moni lyhyen matematiikan opiskelija oli jättänyt syksyn 2022 tehtävässä 11 kuvan kokonaan piirtämättä, vaikka tehtävänannossa sitä selkeästi pyydettiin. Pitkän matematiikan tehtävänannoissa ei erillisesti pyydetty kuviokieltä, mutta moni opiskelija oli silti sitä käyttänyt omaa ajatustaan tukemaan.

Matematiikan symbolisen kielen eroja oli myös lyhyen ja pitkän matematiikan ratkaisujen välillä. Lyhyen matematiikan opiskelijat käyttivät paljon vähemmän kaavaeditoria. He kirjoittivat tekstikenttään useasti omat matemaattiset laskunsa. Pitkän matematiikan ratkaisuihissa kaavaeditoria käytettiin hyvin. Lyhyessä matematiikassa myös esiintyi enemmän ongelmia näyttää mitä on tullut tehtyä. Esimerkiksi tehtävän ratkaisuksi on esitetty pelkkä vastaus, mutta ei ollenkaan kerrottu miten tai mistä tuo vastaus on saatu. Pitkän matematiikan tehtävien ratkaisuihissa näitä ongelmia ei matematiikan symbolisen kielen kanssa ollut paljoa. Yleisesti voidaan todeta pitkän matematiikan tehtävien ratkaisuihissa olevan matematiikan symbolisen kielen olevan laadukkaampaa ja paljon laajempaa.

Luonnollisen kielen käytössä eroja ei ollut merkittävästi pitkän ja lyhyen matematiikan ratkaisuiden välillä. Molemmissa oli yksi tehtävä, jota ratkaistaessa luonnollista kieltä käytettiin hyvin paljon. Molemmissa oli myös yksi tehtävä, jota ratkaistessaan opiskelijat käyttivät vähemmän luonnollista kieltä. Pitkän matematiikan ratkaisuihissa luonnollinen kieli oli hieman laadukkaampaa ja tehtävän odotuksiin osuvampaa. Lyhyessä matematiikassa luonnollisen kielen käyttö oli välillä hieman epätarkkaa ja pakotetun oloista.

### 5.3 Johtopäätökset

Tutkittavien tehtävien ratkaisuisa esiintyi hyvä määrä matematiikan kielentämistä. Jokainen ratkaisu ei tietenkään ollut mallisuoritus, jonka aiheena oli matemaattinen kielentäminen, mutta yritystä kielentää omaa matematiikkaa oli suurimmalla osalla. Aineistoa tutkiessani yllätyin luonnollisen kielen määrästä ratkaisuisa, koska itse en ole pitänyt sen käyttöä itsestään selvyytenä. Tehtävänannot mahdollisesti saivat opiskelijat käyttämään luonnollista kieltä odotettua enemmän. Eroja oli lyhyen ja pitkän matematiikan kielentämisessä, mutta sekään ei ole suuri yllätys. Onhan niiden opetussuunnitelmissakin eroja kielentämisestä puhuttaessa.

Tutkimuksen perusteella voidaan todeta yleisimmät tavat, joilla opiskelijat ratkaisevat tehtäviään, sekä yleisimmät kielet kolmen kielen mallista joita he käyttävät. Ratkaisumalleista yleisin on kertomusmalli ja tiekarttamalli toiseksi yleisin. Matematiikan symbolinen kieli on yleisin opiskelijoiden käyttämä kieli ja luonnollinen kieli toiseksi yleisin. Kolmen kielen mallista kuviokieltä he käyttävät vähiten. Voidaan myös todeta matemaattisen kielentämisen olevan iso osa matematiikan opettamista ja opiskelua, koska sitä esiintyi paljon.

Ongelmat kielentämisessä olivat yleisempiä lyhyen matematiikan ratkaisuisa. Varsinkin GeoGebran käyttö oli monille vaikeaa. Pitkän matematiikan kuviokieli oli paljon parempaa ja tarkempaa. Tämä voi johtua ihan matematiikkaan käytetyistä tunneista, joita opiskelijoilla pitkässä matematiikassa on yleisesti enemmän. Erot voivat myös johtua motivaatiosta matematiikan opiskeluun ja varsinkin ylioppilaskokkeeseen valmistautuessa. Nämä GeoGebran käytön ongelmat johtivat välillä siihen, että opiskelija ei ollenkaan edes yrittänyt piirtää kuvaa, mikä voi viitata opiskelijoiden omien matematiikan taitojen epäuskoon.

Tätä tutkimusta voidaan hyödyntää vaikka matemaattisen kielentämisen integroimisessa matematiikan opetukseen laajemmin. Jatkotutkimusideana voisi olla vaikka tutkimus, jossa tutkitaan syitä kielentämisen eri ongelmille. Olisi myös mielenkiintoista tutkia miten matemaattinen kielentäminen näkyy opetuksessa niin lukiossa, kuin yläkouluisakin.

## 6 Viitteet

### Viitteet

Ahonen, T., Aunio, P., Haapasalo, L., Hannula, M. S., HannulaSormunen, M., Hautamäki, J., Helakorpi, S., Huhtala, S., Ikäheimo, H., Joutsenlahti, J., Kaasila, R., Keranto, T., Kupari, P., Kuusela, J., Laine, A., Lehtinen, E., Leino, J., Lindgren, S., Linnanmäki, K. ja Yrjönsuuri, Y. 2004. Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen (2. uud. p.). Niilo Mäki Instituutti.

Helsinki: Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet. 2015. Nextprint Oy.

Joutsenlahti J. 2003. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa Virta Arja ja Marttila Outi (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta (Ainedidaktinen symposium 7.2.2003). Turku: Turun opettajankoulutuslaitos, 188–196.

Joutsenlahti, J. (2009) Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä. Teoksessa R. Kaasila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.–8.11.2008. Rovaniemi, Lapin yliopisto. Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9. s. 71–86

Joutsenlahti, J. 2010. Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa Asikainen, M., Hirvonen, P. ja Sormunen, K. (toim.) Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa, Matematiikka ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009. Publications of the University of Eastern Finland. University of Eastern Finland, Joensuu, 3–15.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2010. Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E.Ropo ja H. Silfverberg ja T. Soini (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009. Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A31. Tampereen yliopisto, Tampere, 77–90.

Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. 2022. Matemaattisen ajattelun kielentäminen ymmärtävän oppimisen perustana. <https://dimensiolehti.fi/matemaattisen-ajattelun-kielentaminen-ymmartavan-oppimisen-perustana/> (Viitattu 25.3.2025).

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.), Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista (s. 45–62). Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja 8. Jyväskylä: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura ry.

Morgan, C. (2001). The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. Teoksessa P. Gates (toim.), Issues in mathematics teaching (s. 232–244). Lontoo: Routledge Falmer

Yle. Abitreenit. <https://yle.fi/aihe/artikkeli/2015/12/15/yo-kokeet-matematiikka> (Viitattu 28.3.2025).

Yle. Abitreenit. <https://yle.fi/aihe/artikkeli/2016/09/08/sahkoiset-ylioppilaskokeet-alkavat-tulevaisuuden-kokeisiin-suuria-suunnitelmia> (Viitattu 14.1.2025).

Ylioppilastutkintolautakunta. <https://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/tutkinnon-toimeenpano/maaraykset-ja-ohjeet/koekohtaiset-maaraykset-ja-ohjeet/matematiikan-kokeen> (Viitattu 22.2.2025).

Ylioppilastutkintolautakunta. (2019a). Matematiikka (pitkä oppimäärä), syksy 2019. Saatavilla: <https://yle.fi/a/20-291149> [viitattu 16.4.2025].

Ylioppilastutkintolautakunta. (2019b). Matematiikka (lyhyt oppimäärä), kevät 2019. Saatavilla: <https://yle.fi/a/20-282706> [viitattu 16.4.2025].

Ylioppilastutkintolautakunta. (2022a). Matematiikka (pitkä oppimäärä), kevät 2022. Saatavilla: <https://yle.fi/a/20-10002116> [viitattu 16.4.2025].

Ylioppilastutkintolautakunta. (2022b). Matematiikka (lyhyt oppimäärä), syksy 2022. Saatavilla: <https://yle.fi/a/20-10002861> [viitattu 16.4.2025].