TURUN YLIOPISTO

Tensorit ja kiilatulo

Oskari Haaranen

LuK-tutkielma
Marraskuu 2025

Tarkastajat:
Prof. Jyrki Lahtonen

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Oskari Haaranen: Tensorit ja kiilatulo
LuK-tutkielma, 17 s., 0 liites.
Matematiikka
Marraskuu 2025

Tässä tutkielmassa tarkastellaan ensin vektoriavaruuksien tensorituloa, jonka jälkeen määritellään vektoreiden kiilatulo tensoreiden avulla. Tämän jälkeen tutkitaan kiilatuloavaruuksien perusominaisuuksia, ja lopuksi esitellään kiilatulon geometrinen tulkinta esimerkkien avulla.

Asiasanat: tensori, kiilatulo, lineaarialgebra

Sisällys

1 Johdanto

Kiilatulon määritteli ensimmäistä kertaa preussilainen matematiikko ja kielitieteilijä Hermann Grassmann 1800-luvulla[2]. Grassmannin kehittämät matemaattiset teoriat olivat kuitenkin aikaansa edellä, ja ne saivat tunnustusta matemaattisissa piireissä vasta vuosia julkaisunsa jälkeen.

Nykyisin kiilatulo ja sen avulla määriteltävät k-vektorit ja k-muodot ovat vakiintunut osa modernia matematiikkaa, muun muassa differentiaaligeometriassa.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan ensisijaisesti kiilatulon määrittelyä tensoreiden avulla, jonka jälkeen käydään läpi hieman kiilatuloavaruuksien ominaisuuksia. Tutkielma ja kaikki siinä esiintyvät todistukset perustuvat Sergei Winitzkin teokseen Linear Algebra via Exterior Products [1].

2 Sopimuksia ja merkintöjä

Tutkielmassa esiintyvät vektoriavaruudet ovat aina äärellisulotteisia. Kaikkien vektoriavaruuksien kerroinkuntana toimivat reaaliluvut $\mathbb{R}$. Nollavektorista käytetään merkintää 0. Vektoreita merkitään lihavoiduilla kirjaimilla.

3 Duaaliavaruus

Vektoriavaruudelle V voidaan määritellä niin sanottu *duaaliavaruus* V^*, joka koostuu lineaarikuvauksista vektoriavaruudelta V sen kerroinkuntaan $\mathbb{R}$. Alla esitelty duaaliavaruuden tarkka määritelmä.

Määritelmä 1. Olkoon V vektoriavaruus. Tällöin sen *duaaliavaruus* V^* on kaikkien sellaisten lineaarikuvausten $\mathbf{f}^* : V \to \mathbb{R}$ joukko, joihin pätee

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = \mathbf{f}^*(\mathbf{u}) + \lambda\mathbf{f}^*(\mathbf{v}),\ \forall \mathbf{u},\ \mathbf{v} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Duaaliavaruuden V^* alkioita $\mathbf{f}^*$ kutsutaan duaalivektoreiksi, ja avaruuden V^* nollavektorina toimii funktio, joka kuvaa kaikki vektorit $\mathbf{v} \in V$ nollaan. Kaksi duaalivektoria $\mathbf{v}^*$ ja $\mathbf{u}^*$ ovat samat, jos niille pätee

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{v}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{v})\ \forall \mathbf{v} \in V.$$

Koska kuvaukset $\mathbf{f}^* \in V^*$ ovat lineaarisia, duaaliavaruus V^* on vektoriavaruus.

Määritelmä 2. Vektoriavaruuden V^* duaalivektorit $\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^* \in V^*$ operoivat vektoreihin $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ seuraavien sääntöjen mukaisesti:

$$(\mathbf{u}^* + \mathbf{v}^*)(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^*(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^*(\mathbf{y}), \tag{2}$$

$$\lambda\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})), \tag{3}$$

$$\mathbf{u}^*(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})). \tag{4}$$

3.1 Duaalikanta

Kuten avaruudelle V myös sen duaaliavaruudelle V^* voidaan määritellä kanta. Olkoon $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ avaruuden V kanta. Silloin mikä tahansa vektori $\mathbf{v} \in V$ voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j.$$

Vektorin $\mathbf{v}$ komponentin v_1 voidaan ajatella olevan vektorin lineaarinen funktio, koska

$$\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} u_j \mathbf{e}_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} (u_i + \lambda v_j) \mathbf{e}_j, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \mathbf{u} \in V.$$

Tämän johdosta vektorin $\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$ ensimmäinen komponentti olisi siis $u_1 + \lambda v_1$. Vastaavasti vektorin muut komponentit v_k voidaan tulkita vektorin $\mathbf{v}$ lineaarisina funktioina eli duaalivektoreina. Olkoot sitten $\mathbf{e}_1^*, .., \mathbf{e}_n^*$ vektorin $\mathbf{v}$ komponentit. Tällöin duaalivektorit $\mathbf{e}_1^*, .., \mathbf{e}_n^*$ muodostavat avaruuden V^* kannan.

Lause 1. *Duaalivektorit $\mathbf{e}_1^*, .., \mathbf{e}_n^*$ muodostavat avaruuden V^* kannan, ja avaruuden V^* dimensio on sama kuin avaruuden V dimensio.*

Todistus. Osoitetaan ensin laskemalla, että mikä tahansa vektori $\mathbf{f}^* \in V^*$ voidaan esittää duaalivektorien $\{\mathbf{e}_j^*\}$ lineaarikombinaationa

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{v}) = \mathbf{f}^*(\sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{f}^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j^*(\mathbf{v}) \mathbf{f}^*(\mathbf{e}_j).$$

Olkoon $\alpha_j := \mathbf{f}^*(\mathbf{e}_j), \alpha_j \in \mathbb{R}$, jolloin $\mathbf{f}^*(\mathbf{v})$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j^*(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{f}^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j^*.$$

Vektori $\mathbf{f}^*$ on täten siis kirjoitettu duaalivektorien $\{\mathbf{e}_j^*\}$ lineaarikombinaationa.

Tarkistetaan vielä, että duaalivektorien $\mathbf{e}_1^*, ..., \mathbf{e}_n^*$ joukko on lineaarisesti riippumaton. Jos joukko ei olisi lineaarisesti riippumaton, olisi olemassa lineaarikombinaatio $\sum_i \lambda_i \mathbf{e}_i^* = 0$ jossa kaikki duaalivektorin komponentit λ_i eivät ole nollia. Käytetään sitten lineaarikombinaatiota vektoriin $\mathbf{e}_k, \ k \in \{1, ..., n\}$

$$0 = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i^*)(\mathbf{e}_k) = \lambda_k, \ k \in \{1, ..., n\}.$$

Täten siis kaikki komponentit λ_k ovat nollia. Täten vektorit $\mathbf{e}_1^*, .., \mathbf{e}_n^*$ muodostavat kannan avaruudelle V^* ja avaruuden V^* dimensio on sama kuin avaruuden V dimensio. $\square$

Mainittakoon vielä lopuksi, että avaruuden V kantaa $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k\}$ vastaavalle duaalikannalle $\{\mathbf{e}_1^*, ..., \mathbf{e}_k^*\}$ on olemassa seuraava hyödyllinen ominaisuus:

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}.$$

Huomautus 1. Avaruus V on kanonisesti isomorfinen avaruuden V^{**} kanssa. Todistus sivuutetaan.

4 Tensorit

Vektoreille ja vektoriavaruuksille voidaan määritellä *tensoritulo*, joka on erittäin hyödyllinen työkalu muun muassa fysiikassa. Yleisesti ottaen matemaattisissa teksteissä tensorit määritellään *universaaliominaisuuden* avulla, mutta tässä tutkielmassa ne määritellään vektoriavaruuksien tensoritulon alkioina, joille pätevät alla mainitut laskusäännöt.

Kahden vektorin $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ tensorituloa merkitään $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$. Vastaavasti kahden vektoriavaruuden V ja W tensorituloa merkitään $V \otimes W$. Määritellään seuraavaksi tarkasti vektoriavaruuksien tensoritulo.

Määritelmä 3. Kahden vektoriavaruuden V ja W *tensoritulo* on uusi vektoriavaruus $V \otimes W$, jonka alkiot ovat muotoa

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_1 + ... + \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{w}_n, \ \mathbf{v}_i \in V, \mathbf{w}_i \in W. \tag{5}$$

Oletetaan myös, että mille tahansa vektorille $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{1,2}, \mathbf{w}_{1,2}$ ja vakiolle $\lambda \in \mathbb{R}$ pätevät seuraavat säännöt:

$$\lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\lambda\mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes (\lambda\mathbf{w}), \tag{6}$$

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}, \tag{7}$$

$$\mathbf{v} \otimes (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_1 + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_2. \tag{8}$$

Avaruuden $V \otimes W$ alkioita kutsutaan *tensoreiksi*, ja ne ovat muotoa 5 ja niille pätevät säännöt 6, 7 ja 8. Lisähuomiona mainittakoon, että tensoriavaruuden nolla-alkiona toimii alkio $\mathbf{0} \otimes \mathbf{0}$ jota merkitään tässä tutkielmassa symbolilla 0.

4.1 Tensoritulon ominaisuuksia

Tässä luvussa esitellään lyhyesti tärkeitä tensoritulon ominaisuuksia. Todistukset sivuutetaan ajan säästämiseksi.

Lause 2. *Olkoon V ja W vektoriavaruuksia, ja $\{\mathbf{e}_1, ...\mathbf{e}_n\}$ ja $\{\mathbf{f}_1, ...\mathbf{f}_m\}$ jotkin niiden kannat. Tällöin tensorit $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ muodostavat avaruuden $V \otimes W$ kannan.*

Lause 3. *Tensoriavaruuden $V \otimes W$ dimensio on vektoriavaruuksien V ja W dimensioiden tulo eli dim$(V \otimes W)$ =dim $V \cdot$dim W*

Huomautus 2. Avaruudet $V \otimes W$ ja $W \otimes V$ ovat isomorfiset.

Esimerkki 1. Olkoon $\{\mathbf{e}_1, ...\mathbf{e}_n\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta ja $\{\mathbf{f}_1, ...\mathbf{f}_m\}$ avaruuden $\mathbb{R}^m$ kanta. Tensorivaruuden $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ alkiot ovat tällöin muotoa

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n, \mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^m.$$

Vektorit $\mathbf{v}_i$ ja $\mathbf{w}_i$ voidaan esittää kantavektorien lineaarikombinaatioina:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\mathbf{e}_j, \mathbf{w}_i = \sum_{l=1}^{m} \mu_{il}\mathbf{f}_l,\ \ \lambda_{ij}, \mu_{il} \in \mathbb{R}.$$

Tällöin siis

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{k} (\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\mathbf{e}_j) \otimes (\sum_{l=1}^{m} \mu_{il}\mathbf{f}_l) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}(\sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij}\mu_{il})(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_l) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} C_{jl}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_l,$$

jossa $C_{jl} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij}\mu_{il}$.

Ylläolevasta esimerkistä ilmenee, että avaruuden $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ alkiot voidaan esittää $n \times m$-matriiseina, joiden alkioina ovat komponentit $C_{jl}, 1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq m$. Edelleen tensorien laskusäännöistä seuraa, että tensori

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} C_{jl}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_l$$

voidaan kirjoittaa muodossa $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{w}_j$, jossa $\mathbf{w}_j := \sum_{l=1}^{m} C_{jl}\mathbf{f}_l$. Täten mikä tahansa tensori $A \in V \otimes W$ voidaan kirjoittaa $\min(\dim V, \dim W)$ termin summana.

4.1.1 Korkeamman asteen tensoritulo

Myös useammalle kuin kahdelle vektoriavaruudelle voidaan määritellä tensoritulo. Kun V, U ja W ovat vektoriavaruuksia, voidaan määritellä niiden tensoritulo $V \otimes U \otimes W$ jonka alkiot ovat muotoa

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{w}_1 + ... + \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_i \in V, \mathbf{u}_i \in U, \mathbf{w}_i \in W.$$

Samoin kuten määritelmässä 3, oletetaan, että säännöt 5, 6, 7 ja 8 pätevät. Tällöin $V \otimes U \otimes W$ on vektoriavaruuksien tensoritulo, ja sen alkioita kutsutaan tensoreiksi.

Määritelmä 4. Tensoritulon aste. Vektoriavaruuksien tensoritulossa voi esiintyä k-kappaletta vektoriavaruuden V kopioita, ja vastaavasti siinä voi esiintyä n-kappaletta duaaliavaruuden V^* kopioita. Tällöin sanotaan, että avaruuden

$$\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{k} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{n}$$

tensorit ovat *astetta* (k,n). Tällöin esimerkiksi vektorit ovat asteen (1,0) tensoreita ja skalaarit asteen (0,0) tensoreita.

4.2 Tensorien ja lineaarikuvausten yhteys

Tensorituloavaruuden $V \otimes V^*$ alkiot voidaan samaistaa lineaarikuvausten kanssa ja jokainen lineaarikuvaus $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ voidaan samaistaa jonkin tensorin $A \in V \otimes V^*$ kanssa. Osoitetaan seuraavaksi, miten tensori A määrittää lineaarikuvauksen.

Lemma 1. *Tensori $A \in V \otimes V^*$, joka voidaan kirjoittaa muodossa*

$$A := \sum_{j}^{k} \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{f}_j^*,$$

määrittelee lineaarikuvauksen $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ säännöllä

$$\hat{A}\mathbf{x} := \sum_{j}^{k} \mathbf{f}_j^*(\mathbf{x})\mathbf{v}_j.$$

Todistus. Todistetaan ensin, että määritelty kuvaus on lineaarinen eli määritelty kuvaus toteuttaa säännön $\hat{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = \hat{A}\mathbf{x} + \lambda\hat{A}\mathbf{y}$.

Koska $\mathbf{f}_j^*$ on lineaarikuvaus $V \to \mathbb{R}$, seuraa että

$$\hat{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{f}_j^*(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y})\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{f}_j^*(\mathbf{x}\mathbf{v}_j + \lambda \sum_{j=1} \mathbf{f}_j^*(\mathbf{y})\mathbf{v}_j = \hat{A}\mathbf{x} + \lambda\hat{A}\mathbf{y}.$$

Kuvaus on siis lineaarinen.

Vielä pitäisi todistaa, että tensorin A määrittelemä lineaarikuvaus $\hat{A}$ ei riipu tensorin esitystavasta. Tämä voidaan todistaa suhteellisen suoraviivaisesti käyttämällä sääntöjä 6, 7 ja 8, joten se sivuutetaan.

□

Vastaavasti lineaarikuvauksen $\hat{A}$ avulla voidaan määritellä tensori A siten, että kyseessä oleva tensori määrittelee lineaarikuvauksen $\hat{A}$ lemman 1 avulla. Olkoon $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ jokin avaruuden V kanta. Määritellään sitten duaalivektorit $\mathbf{f}_k^*$ säännöllä

$$\mathbf{f}_k^* := \mathbf{v}_k^*(\hat{A}\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in V,$$

jossa $\{\mathbf{v}_k^*\}$ on duaalikanta. Täten muodostettu tensori $A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{f}_k^*$ operoi vektoriin $\mathbf{x}$ lemman 1 mukaisesti:

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{f}_k^*\right]\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k^*(\mathbf{x})\mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k^*(\hat{A}\mathbf{x})\mathbf{v}_k = \hat{A}\mathbf{x}.$$

Viimeinen yhtäsuuruus pätee, sillä

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k^*(\mathbf{y})\mathbf{v}_k = \mathbf{y}.$$

Jokainen avaruuden $V \otimes V^*$ tensori siis määrittää lineaarikuvauksen $V \to V$ ja jokainen lineaarikuvaus $\hat{A} \in \mathrm{End}\ V$ määrittää tensorin $A \in V \otimes V^*$. Osoitetaan nyt, että avaruudet $\mathrm{End}\ V$ ja $V \otimes V^*$ ovat isomorfiset.

Lause 4. *Lemman 1 mukainen kuvaus $A \to \hat{A}$ on bijektiivinen lineaarikuvaus avaruuksien $V \otimes V^*$ ja End V välillä, joten avaruudet ovat isomorfiset.*

Todistus. Lemman 1 kuvaus $\hat{\ }: V \otimes V^* \to \text{End } V$ on lineaarinen, sillä kuvauksen määrittelyn perusteella tensori $A + \lambda B \in V \otimes V^*,\ A, B \in V \otimes V^*$ kuvautuu lineaarikuvaukseksi $\hat{A} + \lambda\hat{B}$. Bijektiivisyyden todistamiseksi todetaan ensin, että jokainen lineaarikuvaus $\hat{A}$ voidaan kuvata tensoriksi valitsemalla duaalivektorit, kuten aiemmin esitettiin. Osoitetaan sitten että kaksi eri tensoria $A, B \in V \otimes V^*$ kuvautuvat lemman 1 kaavan avulla aina eri lineaarikuvauksiin.

Oletetaan ensin, että kaksi eri tensoria A ja B kuvautuvat samaan lineaarikuvaukseen eli $\hat{A} = \hat{B}$. Kuvauksen $\hat{\ }$ lineaarisuudesta seuraa, että $\widehat{A - B} = \hat{A} - \hat{B} = 0$ eli nollasta eroava tensori $C = A - B$ kuvautuu nollakuvaukseksi $\hat{C} = 0$. Koska tensori C voidaan kirjoittaa muodossa $\sum_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{c}_k^*$ kannassa $\{\mathbf{v}_k\}$ ja $C \neq 0$, on olemassa vähintään yksi nollasta eroava duaalivektori $\mathbf{c}_k^*$.

Oletetaan, että vektori $\mathbf{c}_j^* \neq 0$, jolloin on olemassa vektori $\mathbf{x} \in V$, jolle $\mathbf{c}_k^*(\mathbf{x}) \neq 0$. Operoimalla tensorilla C vektoriin $\mathbf{x}$ lemman 1 mukaisesti saadaan:

$$0 = \hat{C}\mathbf{x} := \sum_k \mathbf{v}_k \mathbf{c}_k^*(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_1 \mathbf{c}_1^*(\mathbf{x}) + ... + \mathbf{v}_j \mathbf{c}_j^*(\mathbf{x}) + ...$$

Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä oletuksen mukaan $\hat{C} = 0$. Kuitenkin vektorit $\{\mathbf{v}_k\}$ muodostavat avaruuden V kannan, jolloin mikä tahansa niiden lineaarikombinaatio, jossa kaikki kertoimet eivät ole nollia, ei voi olla nolla. Täten siis $V \otimes V^* \cong \text{End } V$. $\square$

Myös korkeamman asteen tensorit voidaan samaistaa lineaarikuvausten kanssa, sillä vektoriavaruuksien tensoritulo on myös vektoriavaruus. Yleisemmin voidaan osoittaa, että muotoa $V \otimes W^*$ olevat tensorit ovat isomorfisia lineaarikuvausten $V \to W$ kanssa, joissa V ja W ovat eri vektoriavaruuksia. Alla esitetty muutama tiivistetty esimerkki.

Esimerkki 2. Avaruus $V \otimes V \otimes V^*$ voidaan tulkita isomorfiseksi kaikkien lineaarikuvauksien $V \to V \otimes V$ kanssa. Edelleen voidaan osoittaa, että $V \otimes V \otimes V^* \cong \text{Hom}(\text{End } V, V)$ jne.

Esimerkki 3. Tensorituloavaruus $V^* \otimes V^* \otimes V \otimes V$ voidaan samaistaa avaruuden $\text{Hom}(V, V^* \otimes V \otimes V)$ kanssa, ja edelleen vaikkapa avaruuden $\text{Hom}(V \otimes V, V \otimes V)$ kanssa.

5 Kiilatulo

Tensoritulon lisäksi vektoreille voidaan määritellä myös niin sanottu *kiilatulo*, jota merkitään symbolilla $\wedge$. Tässä luvussa esitetään ensin kiilatulon tarkka määritelmä ja sen jälkeen tutkitaan sen ominaisuuksia ja geometristä tulkintaa.

Määritelmä 5. Olkoon V vektoriavaruus. Kiilatuloavaruus $V \wedge V$ määritellään avaruuden $V \otimes V$ aliavaruudeksi, jonka kaikki alkiot ovat muotoa

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{1,2} \in V$$

olevien alkioiden lineaarikombinaatioita. Yksittäinen alkio $\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \in V \wedge V$ on tensorinotaatiossa muotoa $\mathbf{v_1} \otimes \mathbf{v_2} - \mathbf{v_2} \otimes \mathbf{v_1}$. Avaruuden $V \wedge V$ alkioita kutsutaan myös bivektoreiksi.

Lause 5. *Kaikille alkioille* $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v_2} \in V \wedge V$ *pätevät seuraavat säännöt:*

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1, \tag{9}$$

$$(\lambda \mathbf{v}_1) \wedge \mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2), \lambda \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{x} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{x} + \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in V. \tag{11}$$

Ominaisuutta 9 kutsutaan antisymmetrisyydeksi.

Todistus. Kiilatulon laskusäännöt seuraavat suoraan tensoritulon laskusäännöistä. □

Kiilatulo voidaan myös määritellä useille vektoreille. Esimerkiksi avaruus $V \wedge V \wedge V$ koostuu avaruuden $V \otimes V \otimes V$ alkioista, jotka ovat muotoa

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{b},$$

ja kaikista näiden alkioiden lineaarikombinaatioista. Kuten aiemmassa tapauksessa, tätä kiilavektoria voidaan myös merkitä lyhyemmin $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. Antisymmetrisyys on voimassa tässäkin tapauksessa, mikä tarkoittaa sitä, että minkä tahansa kahden vektorin paikan vaihto kiilatulossa muuttaa tulon negatiiviseksi. Eli siis esimerkiksi $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$. Kiilatulo on myös assosiatiivinen, eli $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$.

Yleisemmin kiilatuloavaruus k-kappaleelle vektoriavaruuksia V määritellään seuraavalla tavalla:

Määritelmä 6. Olkoon V vektoriavaruus. Tällöin sen asteen k *kiilatulopotenssi* on asteen $(k, 0)$ tensorituloavaruuden aliavaruus, joka koostuu kaikista tensoriavaruuden tiettyä muotoa olevista tensoreista. Tarkemmin sanottuna kyseinen aliavaruus muodostuu *täysin antisymmetrisistä* tensoreista. Kuitenkin tässä tutkielmassa käsitellään korkeamman asteen kiilatuloavaruutta suoraan kiilatulon ja sen ominaisuuksien kautta. Asteen k kiilatulopotenssista käytetään merkintää $\wedge^k V$, ja se koostuu muotoa

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_{k-1} \wedge \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \in V$$

olevista alkioista ja kaikista niiden lineaarikombinaatioista. Lauseen 5 määrittelemät säännöt ovat voimassa kaikille avaruuden $\wedge^k V$ alkioille. Erityisesti alkioille pätee myös, että kiilatulossa minkä tahansa kahden vektorin paikan vaihto muuttaa tulon negatiiviseksi.

Esimerkiksi avaruudesta $V \wedge V$ voidaan käyttää merkintää $\wedge^2 V$. Notaatiota $\wedge^k V$ käyttäen voidaan myös tehdä samaistukset $\wedge^0 V = \mathbb{R}$ ja $\wedge^1 V = V$. Avaruuksien $\wedge^k V$ alkioita kutsutaan *k-vektoreiksi.*

Esimerkki 4. Laskemista k-vektoreilla. Olkoon $V = \mathbb{R}^3$, ja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ jokin sen kanta. Määritellään sitten vektorit $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{b} = 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ ja $\mathbf{c} = -2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$. Lasketaan kantaa käyttäen k-vektorit $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ja $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \wedge 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)\\ &= (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \wedge (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)\\ &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2\\ &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Lasketaan myös 3-vektori $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}\\ &= (-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge (-2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3).\end{aligned}$$

Sulkeiden poistamisen jälkeen 3-vektorit, joissa sama vektori esiintyy useammin kuin kerran, supistuvat nolla-alkioksi kiilatulon antisymmetrisyyden vuoksi. Esimerkiksi eräälle laskussa esiintyvälle alkiolle pätee: $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 = 0$.

Sulkeiden poistamisen jälkeen siis jäljelle jäävät termit, joissa sama vektori esiintyy vain kerran:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= 3\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1\\ &= (3 - 5 + 2)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = 0.\end{aligned}$$

Vektorien lisäksi kiilatulo voidaan määritellä myös duaalivektoreille. Tällöin avaruuden $\wedge^k V^*$ alkioita kutsutaan *k-muodoiksi*. Määritellään seuraavaksi, miten k-muodoilla voidaan operoida k-vektoreihin:

Määritelmä 7. k-muoto $\mathbf{f}_1^* \wedge ... \wedge \mathbf{f}_k^*$ operoi k-vektoriin $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k$ seuraavalla tavalla:

$$\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \mathbf{f}_1^*(\mathbf{v}_{\sigma(1)}) ... \mathbf{f}_k^*(\mathbf{v}_{\sigma(k)}),$$

jossa lasketaan summa yli kaikkien joukon $(1, ..., k)$ permutaatioiden yli. Määritelmässä esiintyvä termi $(-1)^{|\sigma|}$ tarkoittaa permutaation merkkiä.

Annetaan seuraavaksi havainnollistava esimerkki, miten esimerkiksi 3-muoto operoi 3-vektoriin:

Esimerkki 5. Operoidaan 3-muodolla $\mathbf{p}^* \wedge \mathbf{q}^* \wedge \mathbf{r}^*$ 3-vektoriin $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{p}^* \wedge \mathbf{q}^* \wedge \mathbf{r}^*)(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\\ &= \mathbf{p}^*(\mathbf{a})\mathbf{q}^*(\mathbf{b})\mathbf{r}^*(\mathbf{c}) - \mathbf{p}^*(\mathbf{b})\mathbf{q}^*(\mathbf{a})\mathbf{r}^*(\mathbf{c})\\ &+ \mathbf{p}^*(\mathbf{b})\mathbf{q}^*(\mathbf{c})\mathbf{r}^*(\mathbf{a}) - \mathbf{p}^*(\mathbf{c})\mathbf{q}^*(\mathbf{b})\mathbf{r}^*(\mathbf{a})\\ &+ \mathbf{p}^*(\mathbf{c})\mathbf{q}^*(\mathbf{a})\mathbf{r}^*(\mathbf{b}) - \mathbf{p}^*(\mathbf{a})\mathbf{q}^*(\mathbf{c})\mathbf{r}^*(\mathbf{b}).\end{aligned}$$

5.1 Avaruudet $\wedge^k V$

Tutkitaan seuraavaksi muutamia perustavanlaatuisia avaruuksien $\wedge^k V$ ominaisuuksia.

Lause 6. *Olkoon N vektoriavaruuden V dimensio. Silloin mikä tahansa avaruuden $\wedge^{N-1}V$ vektori voidaan kirjoittaa muodossa $\boldsymbol{a}_1 \wedge ... \wedge \boldsymbol{a}_{N-1}$.*

Todistus. Todistetaan lause induktiolla avaruuden V dimension N suhteen. Induktiotodistuksen alkuaskel on $N = 2$, jolloin lause pitää paikkansa. Oletetaan sitten, että lause pätee $(N-1)$-vektoreille N-ulotteisessa avaruudessa. Osoitetaan sitten, että tämän seurauksena lause pätee myös N-vektoreille $N+1$-ulotteisessa avaruudessa.

Olkoon $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{N+1}\}$ $N+1$-ulotteisen avaruuden kanta. Silloin mikä tahansa N-vektori voidaan kirjoittaaa muodossa

$$\begin{aligned}\omega = {} & \alpha_1 \mathbf{e}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{N+1} + \alpha_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{N+1} + ... \\ & + \alpha_N \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{N-1} \wedge \mathbf{e}_{N+1} + \alpha_{N+1} \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N,\end{aligned}$$

jossa kertoimet $\{\alpha_j\}$ ovat vakioita, ja termejä on enintään $N+1$ kappaletta. Tulos seuraa suoraviivaisesti, kun kiilatulossa esiintyvät vektorit kirjoitetaan kantavektorien lineaarikombinaatioina ja lasketaan niiden kiilatulo.

Muokataan sitten lauseketta niin, että vektori $\mathbf{e}_{N+1}$ siirretään sulkeiden ulkopuolelle:

$$\begin{aligned}\omega = {} & (\alpha_1 \mathbf{e}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N + ... + \alpha_N \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{N-1}) \wedge \mathbf{e}_{N+1} \\ & + \alpha_{N+1} \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N \\ & \coloneqq \psi \wedge \mathbf{e}_{N+1} + \alpha_{N+1} \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N,\end{aligned}$$

jossa $N-1$ vektori ψ on siis suluissa oleva lauseke. Oletetaan että $\psi \neq 0$, sillä muutoin ei ole mitään todistettavaa. Olkoon siis $\psi \neq 0$, jolloin on olemassa ainakin yksi vakiokerroin α_i joka ei ole nolla. Oletetaan sitten todistuksen helpottamiseksi, että kerroin $\alpha_N \neq 0$. Sivuhuomiona mainittakoon, että oletus ei vaikuta todistuksen oikeellisuuteen. Nyt ω voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\omega = \psi \wedge \mathbf{e}_{N+1} + \alpha_{N+1} \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N = \psi \wedge (\mathbf{e}_{N+1} + \frac{\alpha_{N+1}}{\alpha_N} \mathbf{e}_N).$$

Määritellään sitten vektori $\mathbf{a}_N$ seuraavasti:

$$\mathbf{a}_N \coloneqq \mathbf{e}_{N+1} + \frac{\alpha_{N+1}}{\alpha_N} \mathbf{e}_N.$$

ψ on $(N-1)$-vektori, joka on kiilatulo N-ulotteisen avaruuden vektoreista. Kyseisen vektoriavaruuden kantana toimivat vektorit $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$. Induktio-oletuksen mukaan se voidaan siis kirjoittaa joidenkin vektorien $\{\mathbf{a}_i\}$ tulona $\psi = \mathbf{a}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{a}_{N-1}$.

Nyt siis N-vektori ω voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\omega = \mathbf{a}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{a}_{N-1} \wedge \mathbf{a}_N.$$

Täten mikä tahansa avaruuden $\wedge^{N-1}$ vektori voidaan kirjoittaa joidenkin vektorien $\{\mathbf{a}_i\}$ kiilatulona.

$\square$

5.1.1 Lineaarikuvaukset avaruuksien $\wedge^k V$ välillä

Koska avaruudet $\wedge^k V$ ovat vektoriavaruuksia, niiden välille voidaan määritellä lineaarikuvauksia. Esimerkiksi seuraava kuvaus $\wedge^k V \to \wedge^{k+1} V$

$$L_{\mathbf{a}} : \omega \mapsto \mathbf{a} \wedge \omega,$$

jossa $\mathbf{a} \in V$, on lineaarinen. Tämä voidaan todeta suoraviivaisesti laskemalla:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{a}}(\omega + \lambda\omega') &= \mathbf{a} \wedge (\omega + \lambda\omega') \\ &= \mathbf{a} \wedge \omega + \lambda\mathbf{a} \wedge \omega' = L_{\mathbf{a}}\omega + \lambda L_{\mathbf{a}}\omega'. \end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten kuvauksia $\wedge^k V \to \wedge^{k-1} V$, sillä ne ovat tarpeellisia todistettaessa muita avaruuksien $\wedge^k V$ ominaisuuksia.

Olkoon $\mathbf{a}^*$ jokin avaruuden V^* vektori. Määritellään kuvaus $l_{\mathbf{a}^*} : \wedge^2 V \to V$ säännöllä

$$l_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) := \mathbf{a}^*(\mathbf{v})\mathbf{w} - \mathbf{a}^*(\mathbf{w})\mathbf{v}.$$

Laajennetaan sitten kuvauksen määritelmää niin, että siitä tulee kuvaus $l_{\mathbf{a}^*} : \wedge^k V \to \wedge^{k-1} V$. Annetaan kuvaukselle seuraava induktiivinen määritelmä:

$$\begin{aligned} l_{\mathbf{a}^*}\mathbf{v} &:= \mathbf{a}^*(\mathbf{v}), \\ l_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v} \wedge \omega) &:= \mathbf{a}^*(\mathbf{v})\omega - \mathbf{v} \wedge (l_{\mathbf{a}^*}\omega). \end{aligned}$$

Määritellään lisäksi, miten kuvaus kuvaa summan:

$$l_{\mathbf{a}^*}(\tau + \lambda\phi) := l_{\mathbf{a}^*}(\tau) + \lambda l_{\mathbf{a}^*}(\phi), \;\; \tau, \phi \in \wedge^k V \;\lambda \in \mathbb{R}.$$

Olkoon esimerkiksi $\omega = \mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k \in \wedge^k V$. Lasketaan miten se kuvautuu kuvauksella $l_{\mathbf{a}^*}$:

$$\begin{aligned} l_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k) &:= \mathbf{a}^*(\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k - \mathbf{a}^*(\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k \\ &+ ... + (-1)^{k-1}\mathbf{a}^*(\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_{k-1}. \end{aligned}$$

Lause 7. Induktiivisesti määritelty kuvaus $l_{\mathbf{a}^*} : \wedge^k V \to \wedge^{k-1} V,\ 1 \leq k \leq Dim\ V$ on hyvinmääritelty ja lineaarinen.

Todistus. Kuvauksen $\mathbf{a}^* : V \to \mathbb{R}$ lineaarisuudesta johtuen kuvaus $l_{\mathbf{a}^*}$ kuvaa tensorien lineaarikombinaatiot lineaarikombinaatioiksi. Tarkistetaaan sitten, että mielivaltaisen tensorin $\omega \in \wedge^k V$ kuva $l_{\mathbf{a}^*}(\omega)$ ei riipu tensorin ω esitystavasta. Esimerkiksi tensori $\omega = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3$ voidaan esittää usealla eri tavalla:

$$\omega = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \wedge (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \wedge (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2) := \tilde{\mathbf{v}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{v}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{v}}_3.$$

Kiilatulon laskusäännöstä 11 seuraa

$$(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \wedge ... \mapsto \mathbf{x} \wedge ... + \lambda\mathbf{y} \wedge ...$$

Edelleen kuvauksen $\mathbf{a}^* : V \to \mathbb{R}$ lineaarisuudesta ja kuvauksen $l_{\mathbf{a}^*}$ induktiivisesta määrittelystä seuraa, että tensori $l_{\mathbf{a}^*}(\omega)$ ei riipu tensorin ω esitystavan muutoksesta säännön 11 mukaan.

Laskusääntö 9 antaa kuvauksen

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \wedge ... \mapsto -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \wedge ...$$

Osoitetaan että tensorin ω esitystavan muokkaus säännön 9 mukaan ei myöskään muuta tensorin kuvaa $l_{\mathbf{a}^*}\omega$. Kuvauksen $l_{\mathbf{a}^*}$ induktiivisesta määrittelystä seuraa

$$l_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \chi) = \mathbf{a}^*(\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2 \wedge \chi - \mathbf{a}^*(\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_1 \wedge \chi + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge l_{\mathbf{a}^*}(\chi).$$

Edeltävässä laskussa jätettiin kiilatulon loppuosa kirjoittamatta, ja sitä merkittiin symbolilla χ. Edelleen kuvauksen $l_{\mathbf{a}^*}$ määrittelystä seuraa, että

$$l_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \chi) = -l_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \chi) = l_{\mathbf{a}^*}(-\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \chi).$$

Mikä tahansa tensori ω voidaan siis esittää usealla tavalla sääntöjen 9 ja 11 avulla, mutta se kuvautuu aina samaksi tensoriksi $l_{\mathbf{a}^*}(\omega)$. Täten kuvaus $l_{\mathbf{a}^*}$ on hyvinmääritelty lineaarikuvaus. □

5.1.2 Vektorien lineaarinen riippuvuus ja avaruuden $\wedge^k V$ dimensio

Kiilatulon antisymmetrisyyden avulla voidaan tarkastella vektorien lineaarista riippuvuutta. Esimerkiksi jos $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, silloin $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$.

Lause 8. *Vektoreiden joukko* $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}, \mathbf{v}_k \in V$ *on lineaarisesti riippumaton jos ja vain jos* $(\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k) \neq 0$.

Todistus. Oletetaan ensin, että vektorit $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ ovat lineaarisesti riippuvia. Tällöin esimerkiksi vektori $\mathbf{v}_1$ voidaan kirjoittaa muiden vektorien lineaarikombinaationa $\sum_{j=2}^{k} \lambda\mathbf{v}_j$. Antisymmetrisyydestä seuraa

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k &= \sum_{j=2}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_j \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{j=2}^{k} (-1)^{j-1}\lambda_j \mathbf{v}_2 \wedge ...\mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_j \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k = 0.\end{aligned}$$

Todistetaan sitten, että mikäli vektorit $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ ovat lineaarisesti *riippumattomia*, niin $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k \neq 0$.

Oletetaan että vektorit $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Käytetään sitten induktiota vektorien indeksin k:n suhteen, jossa induktion lähtökohta on $k = 1$. Tällöin vektorin $\{\mathbf{v}_1\}$ lineaarisesta riippumattomuudesta seuraa $\mathbf{v}_1 \neq 0$. Oletetaan sitten, että väite pitää paikkansa $k - 1$ kappaleelle vektoreita, ja osoitetaan että tällöin väite pätee myös k-kappaleelle vektoreita.

Vektorijoukko $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ voidaan lineaarialgebran perusteella täydentää kannaksi, jolloin voidaan muodostaa sitä vastaava duaalikanta $\{\mathbf{e}_1^*, ..., \mathbf{e}_k^*\}$. Nyt duaalikannan vektorille $\mathbf{e}_1^*$ pätee $\mathbf{e}_1^*(\mathbf{v}_1) = 1$ ja $\mathbf{e}_1^*(\mathbf{v}_i) = 0$ kun $2 \leq i \leq k$.

Olkoon sitten $l_{\mathbf{e}_1^*} : \wedge^k V \to \wedge^{k-1} V$ lineaarikuvaus, joka on määritelty induktiivisesti vektorin $\mathbf{e}_1^*$ avulla kuten kappaleessa 5.1.1. Tällöin avaruuden $\wedge^k V$ tensoreille pätee seuraava kaava:

$$l_{\mathbf{e}_1^*}(\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k.$$

Koska induktio-oletuksen mukaan vektoreille $\{\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$ pätee $\mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k \neq 0$, ja kuvaus $l_{\mathbf{e}_1^*}$ on lineaarinen, niin $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k \neq 0$. □

Todistetaan sitten muutama hyödyllinen lemma, ennen kuin siirrytään käsittelemään kiilatuloavaruuden $\wedge^k V$ dimensiota.

Lemma 2. *Olkoon N avaruuden V dimensio. Tällöin on olemassa sellainen vektorijoukko $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_N\}$, että avaruuden $\wedge^N V$ tensori ω voidaan esittää kyseisten vektorien kiilatulona $\boldsymbol{v}_1 \wedge ... \wedge \boldsymbol{v}_N$.*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että $\omega \neq 0$. Tällöin kiilatulon määritelmästä seuraa, että ω voidaan esittää summana

$$\omega = \mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N + \mathbf{v}_1' \wedge ... \wedge \mathbf{v}' + ...$$

eli siis kiilatulojen lineaarikombinaationa. Poistetaan sitten summasta sellaiset termit, jotka kiilatulon antisymmetrisyyden nojalla supistuvat nollaksi. Tämän jälkeen lauseen 8 perusteella jäljelle jäävissä kiilatuloissa esiintyvät vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Oletetaan, että edellämainitussa summassa termi $\psi = \mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N$ ei supistu. Tällöin siinä esiintyvät vektorit muodostavat avaruuden V kannan. Koska vektorit $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_N\}$ muodostavat kannan, summan muissa termeissä esiintyvät vektorit voidaan esittää kannassa $\{\mathbf{v}_j\}$. Tämän seurauksena termit supistuvat aina muotoon $\lambda\psi$, jossa λ on jokin reaaliluku. Täten siis mikä tahansa tensori $\omega \in \wedge^N V$ on mahdollista esittää muodossa

$$\lambda(\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N).$$

□

Lemma 3. *Olkoon $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_N\}$ kanta avaruudessa V. Tällöin mikä tahansa tensori $\omega \in \wedge^m V$ voidaan esittää kantavektorien kiilatulojen lineaarikombinaationa, jossa kiilatulot ovat muotoa $\mathbf{e}_{k_1} \wedge \mathbf{e}_{k_2} \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{k_m}$, jossa k_j on jokin indeksi ja $1 \leq j \leq m$.*

Todistus. Mikä tahansa tensori $\omega \in \wedge^m V$ voidaan esittää tulojen $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_m$ lineaarikombinaationa, ja vektorit $\mathbf{v}_i \in V$ voidaan esittää kannassa $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_N\}$. Laskemalla sitten kiilatulot kaavojen 9, 10 ja 11 avulla saadaan tensorin ω esitys kantavektorien kiilatulojen lineaarikombinaationa lemmassa esitetyllä tavalla. □

Esitellään seuraavaksi havainnollistava esimerkki, miten tensori $\omega \in \wedge^2 V$ voidaan esittää kantavektorien kiilatulojen lineaarikombinaationa.

Esimerkki 6. Tensori

$$(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) - 2(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \wedge (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$$

supistuu muotoon:

$$4\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1.$$

Lemma 4. *Olkoon* $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ *joukko lineaarisesti riippumattomia vektoreita avaruudessa* V*. Tällöin* $\binom{n}{m}$ *kappaletta tensoreita jotka ovat muotoa*

$$\{\mathbf{v}_{k_1} \wedge \mathbf{v}_{k_2} \wedge ... \wedge \mathbf{v}_{k_m}, 1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_m \leq n\}$$

ovat lineaarisesti riippumattomia avaruudessa $\wedge^m V$ *jossa* $2 \leq m \leq n$*.*

Todistus. Todistetaan lemman väite induktiolla indeksin m suhteen. Aloitetaan todistamalla induktion lähtökohta, joka on $m = 2$.

Oletetaan, että vektorit $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, mutta tensorien $\{\mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_k\}$ joukko on lineaarisesti riippuva. Toisin sanoen on olemassa lineaarikombinaatio

$$\phi := \sum_{1 \leq j < k \leq n} \lambda_{jk} \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_k = 0,$$

jossa ainakin yksi kerroin $\lambda_{jk} \neq 0$.

Oletetaan, että $\lambda_{12} \neq 0$. Oletus voidaan tehdä, sillä vektorit $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ voidaan indeksöidä mielivaltaisesti. Kuten lauseen 8 todistuksessa, on olemassa sellainen duaalivektori $\mathbf{f}^* \in V^*$ että $\mathbf{f}^*(\mathbf{v}_1) = 1$ ja $\mathbf{f}^*(\mathbf{v}_j) = 0$ kun $2 \leq j \leq n$. Muodostetaan duaalivektorin avulla lineaarikuvaus $l_{\mathbf{f}^*}$ kuten kappaleessa 5.1.1, ja operoidaan sillä tensoriin ϕ:

$$0 = l_{\mathbf{f}^*}\left[\sum_{1 \leq j < k \leq n} \lambda_{jk} \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_k\right] = \sum_{k=2}^{n} \lambda_{1k} \mathbf{v}_k.$$

Koska kuvaus $l_{\mathbf{f}^*}$ on lineaarinen ja vektorijoukko $\{\mathbf{v}_j\}$ on lineaarisesti riippumaton, kertoimet λ_{1k} eivät voi olla nollia joka on ristiriita oletuksen $\lambda_{12} \neq 0$ kanssa.

Siirrytään sitten väitteen todistamiseen mielivaltaisella indeksin m arvolla. Oletetaan, että lemman 4 väite pätee arvolla $m - 1$. Todistetaan sitten, että tällöin väite pätee myös arvolla m.

Olkoon $\{\mathbf{v}_{k_j} \wedge ... \wedge \mathbf{v}_{k_m}\}$ joukko asteen $(m, 0)$ tensoreita, ja olkoon $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_N\}$ avaruuden V kanta. Oletetaan että tensorien joukko on lineaarisesti riippuva eli toisin sanoen

$$\omega := \sum_{k_1, ..., k_m} \lambda_{k_1 ... k_m} \mathbf{v}_{k_1} \wedge ... \wedge \mathbf{v}_{k_m} = 0,$$

mutta vähintään yksi kerroin eroaa nollasta.

Koska $\{\mathbf{v}_j\}$ on kanta, on olemassa sellainen duaalivektori $\mathbf{f}^*$ että $\mathbf{f}^*(\mathbf{v}_1) = 1$ ja $\mathbf{f}^*(\mathbf{v}_i) = 0$ kun $2 \leq i \leq n$. Muodostetaan taas lineaarikuvaus $l_{\mathbf{f}^*} : \wedge^k V \to \wedge^{k-1} V$. Lineaarikuvauksen avulla saadaan $l_{\mathbf{f}^*}(\omega) = 0$, eli ω kuvautuu astetta $(m - 1, 0)$ olevien tensorien $\mathbf{v}_{k_1} \wedge ... \wedge \mathbf{v}_{k_{m-1}}$ lineaarikombinaatioksi. Kuitenkaan kaikki lineaarikombinaation termien kertoimet eivät ole nollia. Tämä on ristiriita, sillä oletuksen mukaan astetta $(m - 1, 0)$ olevien tensorien $\mathbf{v}_{k_1} \wedge ... \wedge \mathbf{v}_{k_{m-1}}$ joukko on lineaarisesti riippumaton.

□

Siirrytään sitten tarkastelemaan avaruuksien $\wedge^m V$ dimensiota.

Lause 9. *Kiilatuloavaruuden* $\wedge^m V$ *dimensio on*

$$dim \wedge^m V = \binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}, \ N := dim\ V,$$

ja mikäli $m > N$, *avaruuden* $\wedge^m V$ *dimensio on nolla.*

Todistus. Todistetaan lause muodostamalla avaruuden $\wedge^m V$ kanta. Valitaan ensin avaruudelle V jokin kanta $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_N\}$, jolloin lemman 4 mukaan tensorien

$$\{\mathbf{e}_{k_1} \wedge \mathbf{e}_{k_2} \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{k_m}, 1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_m \leq N\}$$

joukko, jossa on $\binom{N}{m}$ alkiota, on lineaarisesti riippumaton. Myös lemman 2 mukaan mikä tahansa tensori $A \in \wedge^m V$ voidaan kirjoittaa edellämainittujen tensorien lineaarikombinaationa, joten tensorien $\{\mathbf{e}_{k_1} \wedge \mathbf{e}_{k_2} \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{k_m}\}$ joukko muodostaa avaruuden kannan. Täten siis $\dim \wedge^m V = \binom{N}{m}$. Jos $m > N$, niin tensorin $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_m \neq 0$ olemassaolo on ristiriita lauseen 8 kanssa. Vektorien joukko $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$ ei voi olla lineaarisesti riippumaton, sillä vektorien lukumäärä m on suurempi kuin avaruuden V dimensio. Näin ollen kun $m > N$, avaruuden $\wedge^m V$ ainoa alkio on nollatensori. □

5.2 Kiilatulon geometrinen tulkinta

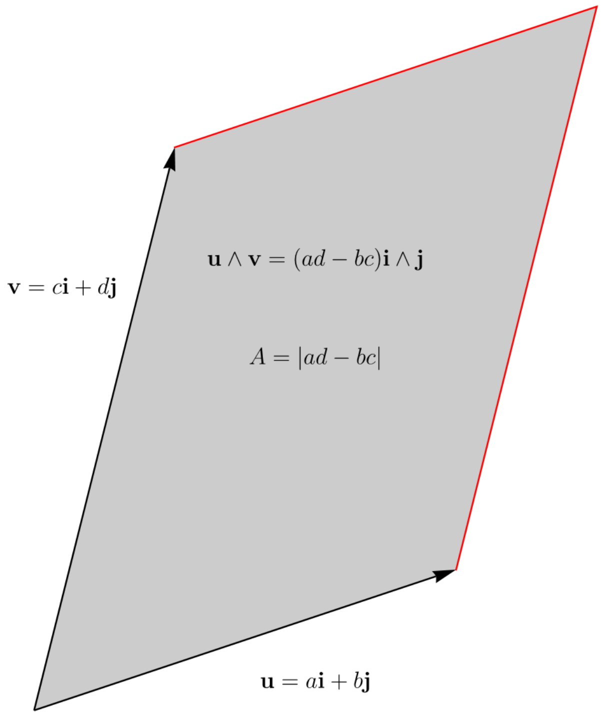
Kiilatulo, jossa esiintyy k-kappaletta vektoreita, voidaan tulkita tilavuudeksi N-ulotteisessa avaruudessa, jossa $N = \text{Dim } V$. Erityisesti mikäli $\{\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_k\}$, $\mathbf{v}_i \in V$ on joukko vektoreita, kiilatulon $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k$ voidaan ajatella olevan k-ulotteisen *suuntaissärmiön* suunnattu tilavuus, jossa vektorit $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ muodostavat särmiön sivut.

Tarkastellaan seuraavaksi, miten kiilatulo määrittää suunnatun tilavuuden. Tässä tutkielmassa tyydytään perustelemaan kiilatulon samaistus suunnatun tilavuuden kanssa geometrian ja visuaalisten esimerkkien avulla.

Esimerkki 7. Olkoon $V = \mathbb{R}^2$ ja vektorit $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ sen kanta. Olkoon sitten $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ ja $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Lasketaan vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ kiilatulo, ja verrataan sitä vektorien muodostaman suunnikkaan pinta-alaan.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \wedge (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) \\ &= (ad - bc)\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ muodostaman suunnikkaan pinta-ala A taas saadaan kaavalla $\mid ad - bc \mid$. Kuvassa 1 on havainnollistettu esimerkin tilanne, jossa vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ muodostavat suunnikkaan tasossa.



Kuva 1: Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ muodostama suunnikas.

Esimerkin 7 perusteella on siis luonnollista samaistaa vektorien kiilatulo niiden muodostaman 2-ulotteisen suuntaissärmiön pinta-alan kanssa. Mainittakoon, että siinä missä tilavuus A on reaaliluku, suuntaissärmiön määrittävien vektorien kiilatulo on tensori. Kuitenkin kun valitsemme avaruudelle V jonkin kannan, kuten vaikkapa vektorit $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ kuten edellisessä esimerkissä, voimme samaistaa tensorin $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ jonkin luvun $\lambda \in \mathbb{R}$ kanssa. Esimerkin 7 tapauksessa kiilatulon kerroin $(ad - bc)$ voidaan samaistaa etumerkkiä vaille suunnikkaan pinta-alan A kanssa.

Tarkastellaan sitten seuraavan esimerkin avulla kahden vektorin kiilatuloa kolmiulotteisessa avaruudessa.

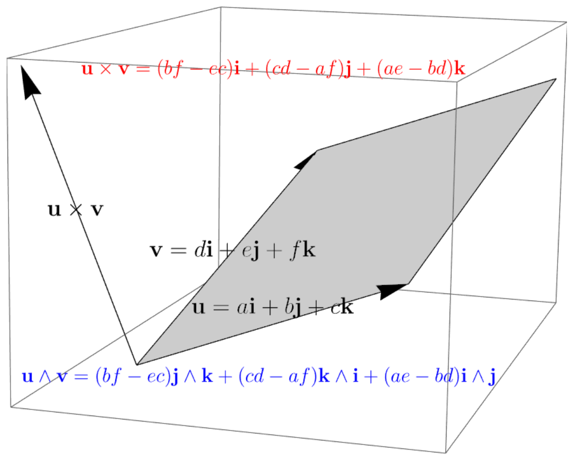
Esimerkki 8. Olkoon $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ avaruuden $V = \mathbb{R}^3$ (ortonormaali)kanta. Olkoon sitten $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}$. Lasketaan $\mathbf{g} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ja verrataan sitä tensoriin $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (bf - ec)\mathbf{i} + (cd - af)\mathbf{j} + (ae - bd)\mathbf{k} \\ \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= (bf - ec)\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + (cd - af)\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + (ae - bd)\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}\end{aligned}$$

Huomataan, että tensorin $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ kantavektorien kertoimet ovat samat kuin vektorilla $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, kun se on esitetty kannassa $\{\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}, \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}\}$. Tavallisesti kun avaruudessa V on määritelty skalaaritulo $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle,\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ vektorin $\mathbf{g} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ pituus $\sqrt{\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle}$ määrittää vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ muodostaman suunnikkaan pinta-alan A.

Mikäli skalaaritulo olisi määritelty avaruudessa $\wedge^2\mathbb{R}^3$, niin suunnikkaan pinta-ala laskettaisiin kaavalla $\sqrt{\langle \omega, \omega \rangle}$, jossa $\omega = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Toisin kuin esimerkissä 7, nyt tulo $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ ei samaistu etumerkkiä vaille suunnikkaan pinta-alan A kanssa, vaan pikemminkin vektorin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ kanssa. Tämä johtuu siitä, että avaruus $\wedge^2\mathbb{R}^3$ ei ole yksiulotteinen, kuten esimerkissä 7. Mikäli tensori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ tulkitaan suunnikkaaksi avaruudessa $\mathbb{R}^3$, tämä tarkoittaa että suunnikas voi olla suunnattu avaruudessa epätriviaalilla tavalla. Kuvassa 2 on havainnollistettu esimerkin tilannetta.



Kuva 2: Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ muodostama suunnikas kolmiulotteisessa avaruudessa.

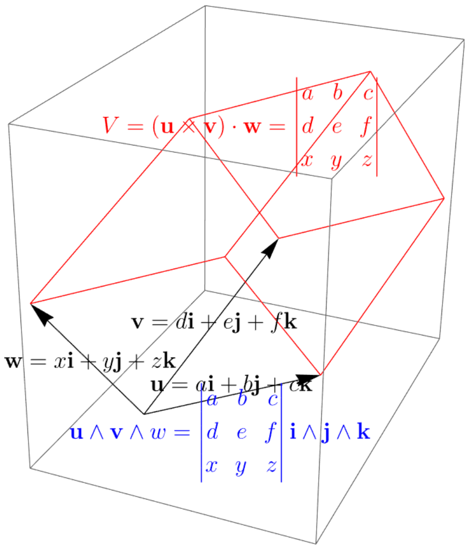
Esimerkki 9. Olkoon taas $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaalikanta, ja $\{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}\}$ avaruuden $\wedge^3\mathbb{R}^3$ kanta. Olkoon $\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{i}+e\mathbf{j}+f\mathbf{k}$ ja $\mathbf{w} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Vektorien $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ muodostaman suuntaissärmiön tilavuus V on

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = \left| \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} \right| .$$

Ja vastaavasti vektorien kiilatulo on

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}.$$

Jälleen kerran siis avaruuden $\wedge^3\mathbb{R}^3$ yksiulotteisuuden johdosta kiilatulo on merkkiä vaille suuntaissärmiön tilavuus. Kuvassa 3 on esitetty tilanne esimerkin kiilatulon määrittämästä suuntaissärmiöstä avaruudessa $\mathbb{R}^3$.



Kuva 3: Vektorien **u**, **v** ja **w** muodostama suuntaissärmiö kolmiulotteisessa avaruudessa.

Avaruuksien $\wedge^k V$ tensoreille voitaisiin todistaa muitakin geometrisiä ominaisuuksia, kuten esimerkiksi miten eri tensorit määrittävät tilavuudeltaan samankaltaisia suuntaissärmiöitä. Lisäksi mainittakoon, että myös avaruuksien $\wedge^k V^*$ tensoreille on olemassa geometrinen tulkinta.

Huomionarvoista on, että tähän asti tarkastellut k-vektorit on ollut mahdollista kirjoittaa yksittäisenä kiilatulona. Kuitenkin avaruudet $\wedge^k V$ sisältävät tensoreita, jotka ovat kiilatulojen lineaarikombinaatioita, ja joita ei voi kirjoittaa yksittäisenä kiilatulona. Tällaisille tensoreille ei ole olemassa samanlaista geometrista tulkintaa n-ulotteisena suuntaissärmiönä, kuten edellisissä esimerkeissä.

Viitteet

[1] Sergei Winitzki: *Linear Algebra via Exterior Products* (lulu.com, 2010).

[2] J. J. O'Connor ja E. F. Robertson: *Hermann Günter Grassmann*(2005), https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grassmann/ (luettu 28.8.2025).