

KURKISTUS KAAOSTEORIAAN

LuK Joonas Lehti

LuK -tutkielma
Huhtikuu 2025

Tarkastajat:
F.T Stefan Emet

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

JOONAS LEHTI: Kurkistus kaaosteoriaan
LuK -tutkielma, 24 s. Matematiikka
Huhtikuu 2025

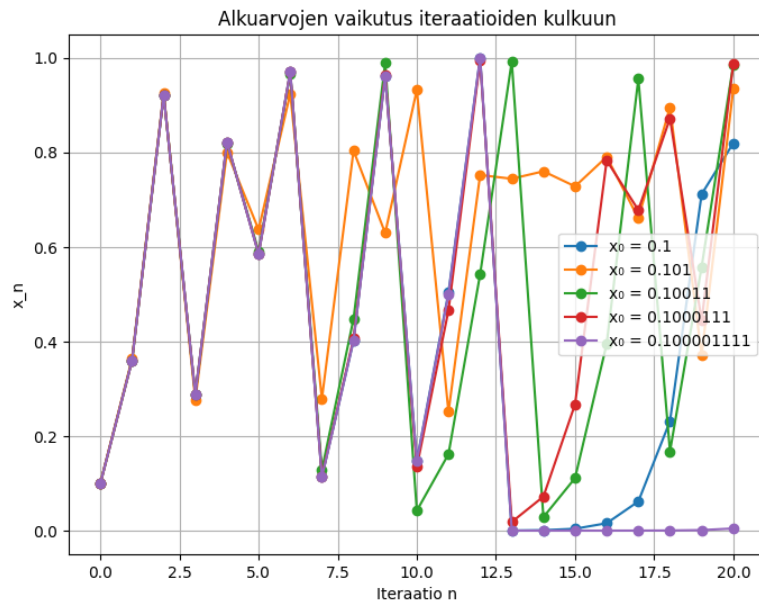
Tässä tutkielmassa tutustutaan kaaosteoriaan. Kaaosta tavataan monessa yhteydessä, mutta tarkimmat havainnot ovat tehty hydrodynamiikasta. Myös aurinkokunnan planeettojen ja asteroidien liikkumisessa on havaittu kaoottinen komponentti. Muita esimerkkejä on biologia populaatio-mallit (kuten, logistinen yhtälö) ja taloustiede. Tässä työssä tutustutaan yksiulotteiseen diskreettiin tapaukseen. Aloitamme peruskäsitteistä, tutkimalla logistisen yhtälön 1-ulotteista tapausta. Tämän jälkeen katsomme miten samat käsitteet soveltuvat toiseen 1-ulotteiseen, ympyräkuvaukseen. Lopuksi katsotaan lyhyesti miltä 2-ulotteinen kuvaus näyttää. Työssä käytetään paljon graafeja, sillä asian esittäminen on helpointa tarkastelemalla kuvauksia geometrisesti.

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Logistinen yhtälö	1
2.1	Kiintopiste	3
3	Bifurkaatio	4
3.1	Heinähankobifurkaatio	5
3.2	Bifurkaatiokaskadi	5
3.3	Tangenttibifurkaatio	6
4	Kaaoksen karakteristiset ominaisuudet	7
5	Ympyräkuvaus	8
5.1	Ympyräkuvaus ja standardikuvaus	9
5.2	Ympyräradan kiintopisteet ja niiden stabiilisuus	10
5.3	Vaihelukitus	11
6	2-D kuvaukset	11
6.1	Uusi ulottuvuus	12
6.2	Kiintopisteet ja stabiilisuus	12
6.3	2-D logistinen yhtälö	13
7	Yhteenveto	16

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa perehdytään kaaosteorian perusteisiin. Tarkoitus on alustaa perusteita niin, että lukijan on hyvä jatkaa itsenäisesti jatkuviin systeemiin. Ensiksi perehdytään 1-ulotteiseen kuvaukseen logistista yhtälöä ja ympyräkuvausta tutkimalla. Tämän jälkeen tutustutaan lyhyesti 2-ulotteiseen kuvaukseen. Kaaosteoria on suhteellisen uusi tutkimuksen kohde. Luonnosta löytyy paljon esimerkkejä, kuten sähköpista, planeettojen liikkeestä mutta tarkimpia tuloksia on saatu hydrodynamikasta. Kaaoksen vaatimuksena on epälineaarinen yhtälö. Tämä ei tarkoita, että epälineaarinen yhtälö johtaa kaokseen. Tämä ei myöskään tarkoita, että epälineaarisuus on sama asia kun satunnaisuus. Kaaos tarkoittaa tässä yhteydessä ennustamattomuutta. Kaaottisuus on deterministinen prosessi. Kaaos on monasti hyvin herkkä alkuarvojen muutokselle. [1],[2]



Kuva 1: Alkuarvojen vaikutus käyrän kulkuun

2 Logistinen yhtälö

Määritellään seuraavaksi logistinen yhtälö, jotta saadaan perempi käsitys mitä kaaos, tässä kontekstissa, tarkoittaa. Logistinen yhtälö, eli kuvaus, on diskreetti. On olemassa myös muita muotoja logistisesta kuvauksesta, kun mikä tässä työssä esitellään. [1]

Määritelmä 1. *Logistinen funktio*

$$f(x) = ax(1 - x) \quad (1)$$

jossa $x \in [0, 1]$, $a \in (0, 4]$, a on kontrolliparametri.

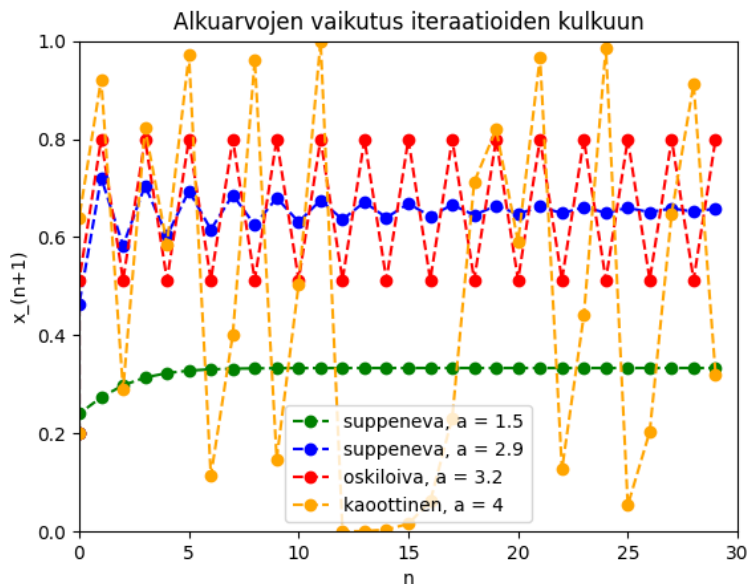
Funktio (1) on kvadraattinen kuvaus.

Määritelmä 2. *Logistisen yhtälön iterointi kaava*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2}$$

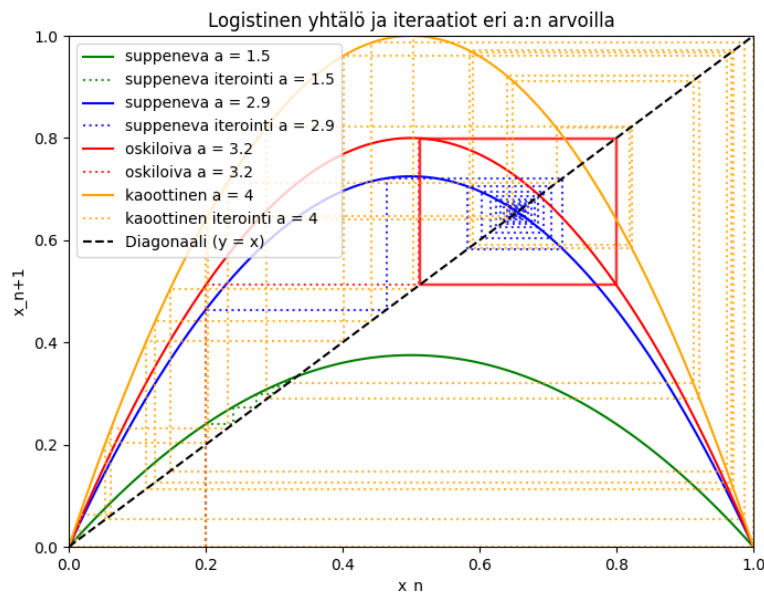
x_n on vanha x :n arvo ja x_{n+1} on uusi x :n arvo

Kaava (2) kertoo miten uusi x :n arvo saadaan vanhasta x :n arvosta, eli miten iteroidaan. Seuraavaksi annetaan logistiselle yhtälölle 4 eri a :n arvoa, mutta sama lähtearvo x_0 .



Kuva 2: Logistinen kuvaus eri a :n arvoilla.

Kuvasta 2 nähdään miten käyrän kuvaus muuttuu suppenevasta oskiloivaksi ja oskiloivasta kaottiseksi, kun a :n arvoa kasvatetaan. Toisin sanoen kaottisuus tarkoittaa ennustamattomuutta, kuten kuvasta 2 nähdään, kaottinen käyrä (oranssi) ei toista samaa kuviota. On huomion arvoista huomata, että jos a saa arvon > 4 yhtälön arvo lähestyy ääretöntä muutaman iterointi kerran jälkeen ja toisaalta jos se saa negatiivisia arvoja yhtälö lähestyy 0 ($-1 < a < 0$) tai x saa arvoja $x > 1$, joka ei sovi x :n määrittely joukkoon. Suppenevassa tapauksessa kuvaaja lähestyy tiettyä arvoa. Oskiloiva (punainen) kuvaaja puolestaan jää oskiloimaan 2 arvon väliin. Tätä kutsutaan 2-periodiksi tai 2-periodiseksi radaksi.[1]



Kuva 3: Logistisen yhtälön geometrisen tulkinta. x-akselilla vanha arvo ja y-akselilla uusi x :n arvo. Kaikilla iteraatioilla on sama x :n alkuarvo $x_0=0.2$. Katkoviiva on iteraatio käyrä ja yhtenäinen viiva on logistinen funktio

Kuvassa 3 nähdään miten logistinen yhtälön käyttäytyminen muuttuu eri a :n arvoilla (kaaret). Diagonaaliviiva saa saman arvon x_n ja x_{n+1} akselilla, eli kulmakerroin on 1, joten voidaan piirtää x-akselin arvo yhtälöön, siitä diagonaalille ja diagonaalilta takaisin yhtälöön. Kuvassa käyrät ovat logistinen yhtälö (1), eri alkuarvoilla a , samalla iteraation alkuarvolla $x_0 = 0.2$. [1]

2.1 Kiintopiste

Kiintopiste (x^*) on piste, jota logistinen yhtälön iterointi käyrä lähestyy tai etääntyy tietyllä parametrin arvolla a , jollain aloitus arvolla x_0 . Kuten kuvassa 2 tapahtuu suppevalle käyrille (sininen ja vihreä). Määritellään kiintopiste seuraavasti. Toisin sanoen kuvassa 3 kohdat, joissa diagonaali leikkaa kaaren kutsutaan kiintopisteiksi. [1]

Määritelmä 3. *Kiintopiste*

$$x^* = f(x^*) \quad (3)$$

Funktiosta (1) saadaan ratkaistua kiintopisteet ja ne johdetaan seuraavasti. Koska kiintopiste ei muutu yhtälöä iteroitaessa, sijoitetaan yhtälöön 1 molempien x_{n+1} ja x_n paikalle kiintopiste, eli x^*

$$x^* = ax^*(1 - x^*) \quad (4)$$

Saattamalla yhtälö muotoon,

$$ax^* - a(x^*)^2 - x^* = 0 \quad (5)$$

Ottamalla x^* yhteiseksi tekijäksi ja huomioimalla tulon nollasääntö saadaan kiintopisteiksi.

Määritelmä 4. *Logistisen yhtälön kiintopisteet*

$$x^* = 0 \quad (6)$$

$$x^* = 1 - \frac{1}{a} \quad (7)$$

Kiintopiste on lokaali ominaisuus, joten emme voi päätellä kuinka kaukaa x :n arvo rupeaa lähestymään kiintopistettä. Kiintopisteet voidaan jakaa epästabiileihin, stabiileihin ja superstabiileihin pisteisiin. Tämä tehdään tarkastelemalla $f(x^*)$ derivaattaa eli $f'(x^*)$, kun ollaan kiintopisteen läheisyydessä. Logistista yhtälöä voidaan approksimoida kiintopisteen läheisyydessä yhtälöllä

Määritelmä 5. *Logistisen yhtälön approksimaatio kiintopisteen lähellä*

$$f(x) \approx f(x^*) + (x - x^*) \frac{df(x)}{dx} \quad (8)$$

Kiintopisteen määritelmän mukaan, $f(x^) = x^*$ saadaan*

$$x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*) = (x_n - x^*)f'(x^*) \quad (9)$$

Yhtälöstä (9) nähdään, että jos $|f'(x^*)| > 1$ tai $|f'(x^*)| < 1$, kun iteroidaan etäisyydellä $|x_n - x^*|$, eli kummalla puolella ollaan kiintopistettä. Kun $|f'(x^*)| > 1$, kiintopiste on epästabiili (repulsiivinen kiintopiste), kuvassa 3 oranssi käyrä. Tällöin funktion arvo ei lähesty jotain tiettyä arvoa vaan hajaantuu. Jos $|f'(x^*)| < 1$, se on stabiili, kuvassa 3 sininen ja vihreä käyrä, ja jos $|f'(x^*)| = 0$, superstabiili (atraktiivisia kiintopisteitä). [1]

Stabiileista kiintopisteistä puhuttaessa puhutaan attraktoreista ja attraktioal- taista. Attraktori oli siis piste jota kohti iteraatio käyrä lähestyy ja attraktioallas on väli (a,b) jossa iteoritinti käyrä aina lähestyy kiintopistettä $x^* \in (a,b)$. [1]

3 Bifurkaatio

Bifurkaatiolla tarkoitetaan tietynlaista derivaatan käytöksen muutosta jossain tiettyssä a :n arvolla, jossa kuvauksen derivaatta muuttuu arvosta $|f(x)| < 1$, arvoon $|f(x)| > 1$ ja stabiilista kiintopisteestä tulee epästabiilikiintopiste, jollain kontrolli- parametrin arvolla a . Logistisessa kuvauksessa nämä a :n arvot ovat 1 ja 3. Kun $a = 1$, puhutaan vaihtobifurkaatioksi ja $a = 3$ puhutaan heinähan- kobifurkaatiosta.

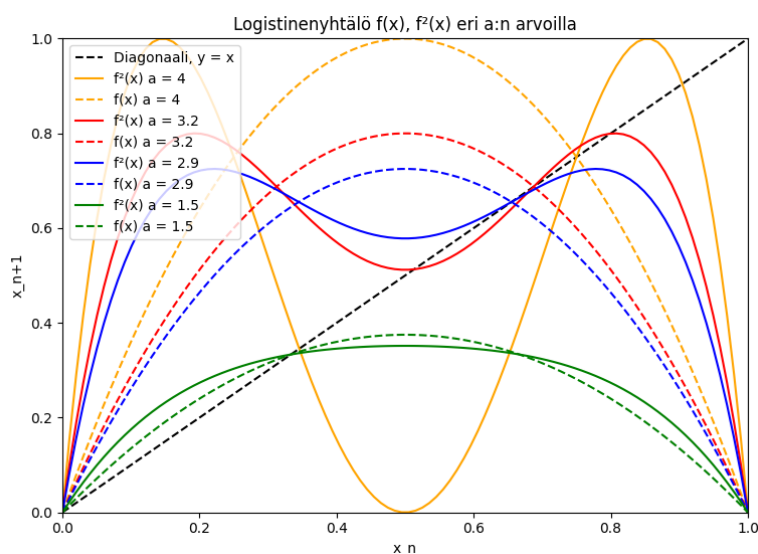
3.1 Heinähankobifurkaatio

Heinähankobifurkaatio, tarkastellaan tilannetta, kun $a > 3$, funktio oskiloi 2 arvon ympäristössä, kuvassa 3 punainen käyrä. Silloin $x_{n+2} = x_n$. Funktio voidaan tarkastella joka toista iteraatiota, eli $f^{(2)} = f(f(x)) = f(x_{n+1}) = x_{n+2}$, eli toinen iteraatio kerta, jolloin logistinen yhtälö saadaan muotoon.

Määritelmä 6. *Logistinen yhtälö, kun $x_{n+2} = x_n$*

$$f(f(x)) = f^2(x) = a^2x(1-x)(1-ax(1-x)) \quad (10)$$

Tarkastellaan uutta muotoa olevaa yhtälöä ja otetaan huomioon, että aiemmin saadut kiintopiste ratkaisut ovat myös uuden yhtälön ratkaisuja, eli yhtälöt 7 ovat yhtälön tekijöitä.



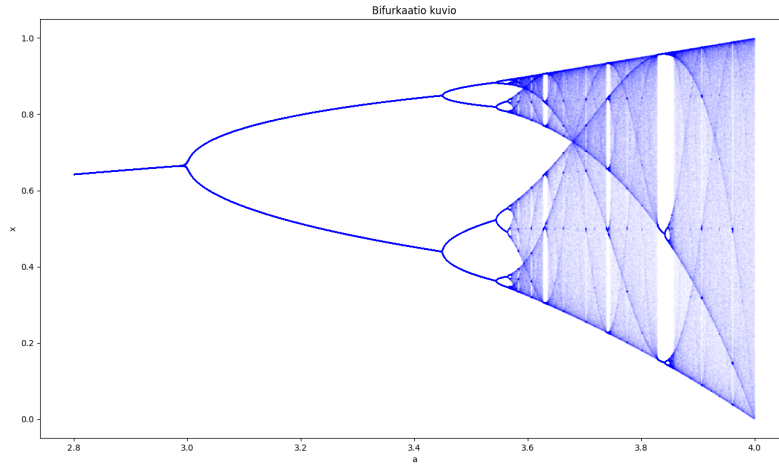
Kuva 4: Logistinen yhtälö $f(x)$ ja $f(f(x)) = f^2(x)$, eri a :n arvoilla

Kuvassa 4 diagonaali leikkaa logistisen yhtälön $f(x)$ yhden kerran, kiintopisteeseen ja $f^2(x)$ 2 kertaa, kun katsotaan punaista käyrää. Kuvasta nähdään myös, että kun $a > 3$, tapahtuu jakson kahdentuminen. Toisin sanoen saadaan 2 uutta stabiilia kiintopistettä, joille pätee $f(x_1^*) = x_2^*$ ja $f(x_2^*) = x_1^*$, ovat $f^2(x)$ kiintopisteitä, eikä $f(x)$:n kiintopisteitä, jolloin näiden kahden uuden kiintopisteen syntyessä, vanha kiintopiste häviää. Tästä nimi heinähankobifurkaatio ('pitchfork bifurcation'). Syntyy 2 uutta haaraa kuvaan 5. Tilannetta jossa kiintopiste hajoaa kahdeksi, kyseessä on jakson kahdentumiseksi tai 2-jaksoksi. Tämä johtuu a :n arvon muutoksesta, kiintopisteessä x^* . Kuvassa 5 nähdään useampi kiintopisteen hajoaminen, eli kuvaajan kahdentuminen.[1]

3.2 Bifurkaatiokaskadi

Bifurkaatiokaskadi saadua aikaiseksi, kun a :n arvoa kasvatetaan ja jatketaan yhtälön iterointi, samoin kun heinähankobifurkaation tapauksessa. Tällöin syntyy 2-

jaksoisesta kuvaajasta 4-jaksoinen kuvaaja, 4-jaksoisesta 8-jaksoinen jne, jolloin puhutaan jakson kahdentumisesta. Tälläin uusia haaroja on 2^n , jossa n kertoo monesko kahdentuminen on kyseessä.



Kuva 5: Bifurkatiokaskadi

Kuvaajassa 5 nähdään jaksojen kahdentuminen, kun a:n arvoa kasvatetaan ja että, se tapahtuu kiintyvällä vauhdilla. Jakson kahdentumiselle on ehtona se, että kaikki 2^n kiintopisteiden stabiilisuus häviää samanaikaisesti, kun uudet 2^{n+1} kiintopistettä syntyy. Tästä syystä kuvaaja näyttää kaoottiselta, kun uusia 2-jaksoja syntyy. Tällaista iteratiivista prosessia, jossa toistuu samallinen rakenne iteroinnin jatkuessa kutsutaan fraktaaliksi. Kuvaajassa on myös käyrästä vapaita alueita, niin sanottuja periodisia ikkunoita. Yksi tällainen on välillä $a = [3.82-3.87]$ (isoin aukko), joka on 3-jaksoinen ikkuna, joka siis myös sisältää bifurkatio kuvion ja $3 \cdot 2^n$ jakson. Jaksoisuudella tai jaksolla tarkoitetaan tilannetta, jossa useamman iteraatio kerran jälkeen saadaan sama tilanne, esimerkiksi $x_{n+2} = x_n$ on 2-jakso. [1]

3.3 Tangenttibifurkatio

Tarkastellaan kuvaajaa 4. Kun käyrä on leikannut diagonaalin, leikkaus kohdan toisella puolella yhtälön kulmakerroin $|f(x)| < 1$ (stabiili) ja toisella puolella $|f(x)| > 1$ (epästabiili). Tällaista tilannetta kutsutaan tangenttibifurkaatioksi. Yleisessä tapauksessa, kun diagonaali koskettaa käyrää m:ssä kohdassa yhtä aikaisesti pätee jokaiselle kosketus kohdalle,

$$f^m(x) = x, f^m(x)' = 1, f^m(x)'' \neq 0 \quad (11)$$

Kun a:n arvo kasvaa silpoutuu kiintopisteet kahdeksi uudeksi kiintopisteeksi, joista toinen on stabiili ja toinen epästabiili. Tätä kutsutaan tangenttibifurkaatioksi.[1]

Esitellään tässä lyhyesti intermitenssi ilmiö. Tämä tarkoittaa sitä, että kun kuvausta iteroidaan, kuvan 1 mukaisesti, esiintyy kuvaajassa välillä säännöllisen nä-

köisiä alueita. Iterointi käyrä voi välillä heilahdella kaoottisesti ja palata takaisin säännölliseltä näyttävälle radalle. [1]

4 Kaaoksen karakteristiset ominaisuudet

Määritellään kaaos seuraavasti alkuarvo herkkyyden kautta.

Määritelmä 7. *kuvaus $f:V \rightarrow V$ on herkkä alkuarvoille jos löytyy $(\delta \in \mathbb{R}) > 0$ niin, että jokainen $x \in V$ ja jokaiselle $\epsilon > 0$ löytyy aina y ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että $|x - y| < \epsilon$ ja $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$*

Määritelmä 8. *Olkoon V metrinen avaruus. Jatkuva kuvaus $f : V \rightarrow V$ on kaoottinen jos se täyttää ehdot:*

- i. f on transitiivinen.*
- ii. f :n jaksolliset pisteet ovat tiheästi joukossa V .*
- iii. f on herkkä alkuarvojen muutoksille.*

Annetaan määritelmän (8) kohdalle i, ii ja iii esimerkit. Ehto i tarkoittaa sitä, että jos iteraatio kerta n lähestyy ääretöntä voidaan ajatella, ettei mikään piste jää kartoittamatta, eli löytyy jokin iteraatio f^n jokaiselle pisteelle $x \in [0,1]$. Tämä nähdään kuvasta 3 ja ajatellaan, että $n \rightarrow \infty$, kun tarkastellaan oranssia käyrää. Ehdoille ii hyvä esimerkki on kuvaajan (1) punainen käyrä, jossa periodiset pisteet ovat tiheästi tietyllä välillä. Ehdon iii hyvä esimerkki on kuvaaja 1 josta nähdään alkuarvoherkkyys. Nimestään ja alkuarvo herkkyydestään huolimatta kaaoksesta on löydetty kaikille kuvauksille yhteisiä piirteitä ja näistä vakiosta käytetään nimeä Feigenbaumin vakiot tai universaalit tunnusluvut. Nämä tunnusluvut löysi Mitchell Feigenbaum [1944-2019], joka oli Yhdysvaltalainen fyysikko.

Aiemmin käsiteltiin jakson kahdentumista, jossa kuvaajan käyrä hajosi kahdeksi käyräksi, eli tapahtui jakson kahdentuminen. Merkitään tällaista kahdentumis kohtaa A_n , jossa n kertoo monesko kahdentuminen on kyseessä ja eri käyriä on siis 2^n kappaletta. Kun tutkitaan logistista kuvausta ja otetaan raja-arvo, eli annetaan A_n lähestyä ääretöntä saadaan arvo

$$A_\infty \approx 3.5699 \tag{12}$$

Tämä kutsutaan kasautumispisteeksi tai Feigenbaumin pisteeksi, joka tarkoittaa sitä, että tapahtuu ääretön määrä bifurkaatioita ja graafin kuva muuttuu kaoottiseksi.[1]

Piste A_n on kohta, jossa tapahtuu kuvaajan kahdentuminen ja sitä voi tutkia geometrisesti. Logistiselle kuvaukselle löydetään jakson kahdentumis pisteille arvo

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{A_{n+2} - A_{n+1}} \approx 4.6692 \tag{13}$$

Tätä vakiota kutsutaan, kvadraattiseksi universaaliksi piirteeksi kaaokseen siirryttäessä. Tämä ominaisuus löytyy kaikilta kvadraattisilta kuvauksilta, periodisesta ikkunasta riippumatta. Ehto vakiolle δ on, että kuvauksella tulee löytyä kvadraattinen maksimi.[1]

Viimeiseksi esitellään vakio α , joka saadaan yhtälöstä,

Määritelmä 9. *Geometrinen kongergenssi*

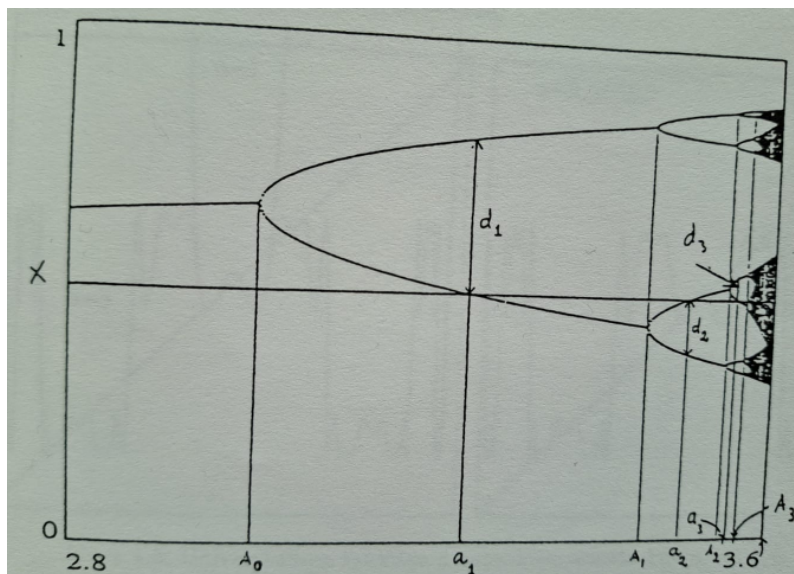
$$\alpha = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} \approx 2.502907875... \quad (14)$$

Jossa muuttuja d_n on kriittisen pisteen etäisyys lähimpään jakson pisteeseen.

$$d_n = f^{2^{n-1}}(a_n, x_c) - x_c \quad (15)$$

Eli logistista yhtälöä iteroidaan kriittisen pisteen arvolla, x_c , a_n :n arvoa kasvattaen.

Nämä vakiot pätevät kaikille kvadraattisille yksi-ulotteisille kuvauksille. [1]



Kuva 6: Kaaottisen karakterististen ominaisuuksien geometrinen tulkinta.

Kuvassa kohdissa, joissa on A tapahtuu käyrän kahdentuminen, josta saadaan vakio δ . Puolestaan d on kriittisen pisteen $2^n - 1$ iteraatin etäisyys kriittisestä pisteestä x_c , joista saadaan vakio α .

5 Ympyräkuvaus

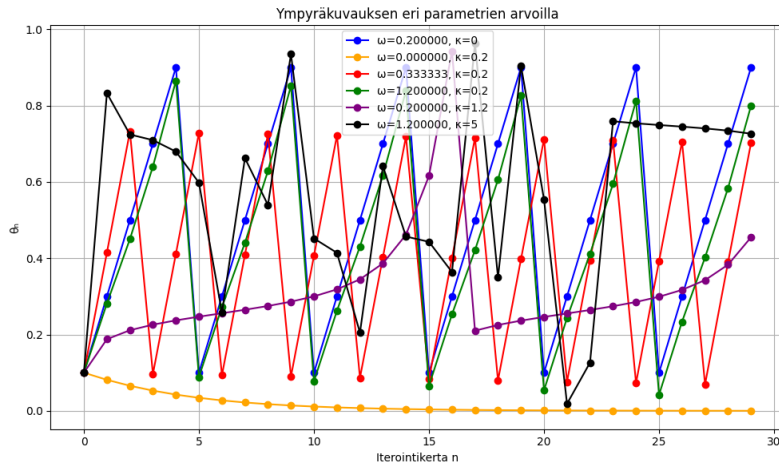
Ympyräkuvaus on yksi ulotteinen ja tarkoitettu jaksollisten ilmiöiden kuvaamiseen. Esimerkiksi heiluria tai planeetan kierron aseman, jotka määritellään vain tietyn jakson hetkenä mod 2π tai mod 1. Toisin sanoen, kun ympyräkuvauksesta tehdään graafi jokainen piste olisi systeemin tila aina samana jakson kohdassa. [1]

5.1 Ympyräkuvaus ja standardikuvaus

Määritelmä 10. *Ympyräkuvauksen yleinen muoto*

$$f(\theta) = \Theta_{n+1} = \Theta_n + \Omega - \frac{\kappa}{2\pi} h(\Theta_n) \quad (16)$$

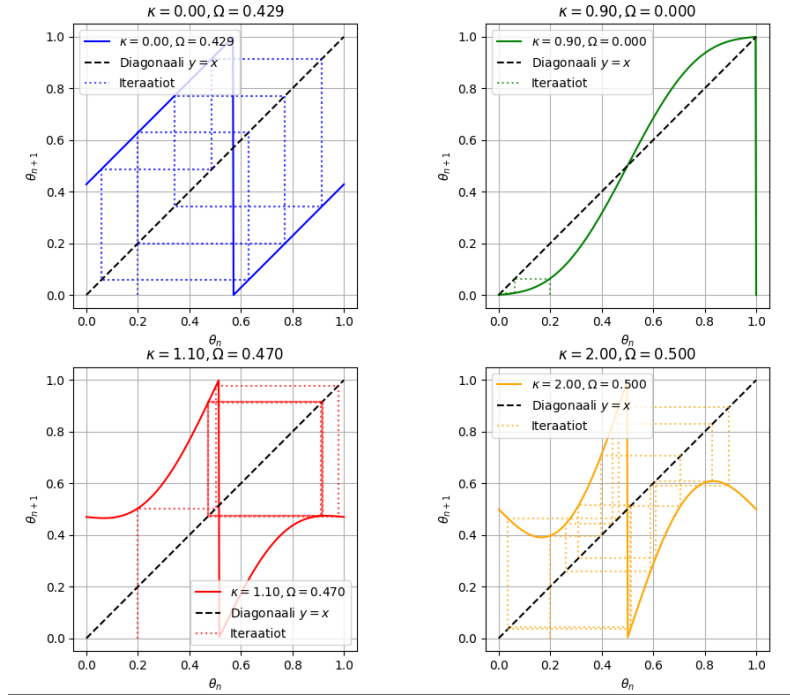
missä $0 \leq \Omega \leq 1$ ja κ ovat kontrolliparametreja ja $h(\theta_n)$ on epälineaarinen periodinen funktio. Jos valitaan $h(\Theta_n) = \sin(2\pi\Theta)$, puhutaan standardikuvauksesta. Ympyräkuvauksesta saadaan lineaarinen valitsemalla $\kappa = 0$. [1]



Kuva 7: Ympyräkuvauksen standardi muoto (16) eri parametrien Θ ja κ arvoilla.

Kuvassa 7 ollaan tarkasteltu kaikkia eri parametrin tapauksia (paitsi, $\kappa < 0$). Ympyrä kuvaus voi lähestyä tietty kiintopistettä, oskiloida eri kiintopisteen ympäristössä tai olla kaottinen. [1]

Tarkastellaan seuraavaksi standardikuvausta ja sen iterointia. Otetaan muutama arvo vähemmän, kuin edellisessä kuvassa.



Kuva 8: Ympyräkuvauksen iterointi eri parametrien arvoilla, alkupisteestä $\theta = 0.2$, iterointeja $n = 30$

Kuvat tulee tulkita niin, että reunoilla oleva yhtenäinen viiva tai käyrä on ympyräkuvauksella ja katkoviiva on sen iterointi käyrä. Kuvasta 8 sininen käyrä on lineaarinen 7-periodinen. Vihreä käyrä puolestaan on epälineaarinen ja iteraatio lähestyy kohti kiintopistettä, $\theta = 0$. Punainen käyrä on epälineaarinen ja muistuttaa periodista rataa, mutta ei ole. Oranssi käyrä on puolestaan kaaottinen, sillä sen iterointi käyrässä ei ole mitään säännönmukaisuutta, vaan kulkee mielivaltaisesti pisteestä toiseen.

5.2 Ympyräradan kiintopisteet ja niiden stabiilisuus

Kiintopisteitä ja niiden stabiilisuutta voidaan tutkia samoin, kuin logistisella kuvauksella. Ympyräkuvaukselle saadaan kiintopisteen yhtälö, asettamalla $\Theta_{n+1} = \Theta_n = \Theta^*$, jolloin standardikuvauksesta saadaan,

$$\Omega = m + \frac{\kappa}{2\pi} \sin(2\pi\Theta^*) \quad (17)$$

Kirjain m tulee ympyräkuvauksen modulaarisuus ehdosta. Koska $\Omega \in [0,1]$, m on $(0 \text{ tai } 1, \text{ koska mod } 1)$, κ on pieni ja modulaarisuus ehto täyttyy, on vain kaksi mahdollisuutta. Joko $m = 0$ ja $\sin(2\pi\Theta^*) > 0$ tai $m = 1$ ja $\sin(2\pi\Theta^*) < 0$. [1]

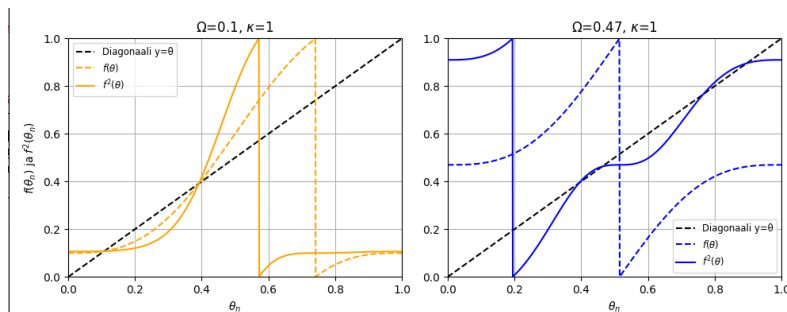
Stabiilisuus saadaan selville yhtälön (16) derivaatasta,

$$f(\Theta)' = 1 - \kappa \cos(2\pi\Theta) \quad (18)$$

Yhtälön (17) ja Pythagoran lauseen avulla saadaan yhtälö muotoon,

$$f(\theta)' = 1 \pm \sqrt{\kappa^2 - [(\Omega - m)2\pi]^2} \quad (19)$$

Huomataan, että tangenttibifurkaatiopisteessä yhtälön derivaatta (19) on diagonaalin suuntainen, eli $\kappa = 2\pi|\Omega - m|$ ja tästä johtuen tangenttibifurkaatio tapahtuu, kun $\Omega = \frac{\kappa}{2\pi}$ ja $\Omega = 1 - \frac{\kappa}{2\pi}$. [1]



Kuva 9: Ympyräkuvaus ensimmäinen ja toinen iteraatti

Kuvasta 9 nähdään että tangenttibifurkaatio toimii täsmälleen samalla tavalla kuin logistisessa yhtälössä. [1]

5.3 Vaihelukitus

Määritellään seuraavaksi kierto-luku W . Ympyräkuvauksen lineaarisessa tapauksessa, jos Ω on muotoa $\frac{p}{q}$, eli rationaalinen on kuvaus periodinen. Kuvassa 8 oleva sininen käyrä on lineaarinen ja se on 7 jaksoinen ja $\Omega = \frac{3}{7}$. [1]

Tapauksia varten jossa kuvaus ei ole lineaarinen tulee meidän määritellä kierto-luku W ,

Määritelmä 11. *Kiirtoluku, eli winding number kuvaa radan perodisuutta, epäli-neerisessa tapauksessa*

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Theta_n - \Theta_0}{n} \right) \quad (20)$$

Jos W on rationaalinen, silloin rata on periodinen. Toisaalta jos W on irrationaalinen, niin rata on kvasiperiodinen. Kvasiperiodisuus tarkoittaa, että kuvaajan rata pysyy saman muotoisena mutta se ei koskaan kulje samaa reittiä. Ilmiö jossa W on rationaalinen vaikka Ω on irrationaalinen, kutsutaan vaiheenlukittumiseksi. Kuuluisa esimerkki on Christiaan Huygensin 2 heiluria heiluivat eri vaiheessa, mutta muuttuivat saman vaiheisiksi, koska ne olivat kiinni samassa alustassa. [1]

6 2-D kuvaukset

Tutustutaan tässä osiossa 2-ulotteisiin kuvauksiin. Aiemmistä osioista innostuneena, tutkitaan tässäkin osassa logistista kuvausta, nyt 2-D kuvauksena.

6.1 Uusi ulottuvuus

Kuvaus toimii samalla tavalla, kuin 1-ulotteinen kuvaus. Yhden akselin sijaan on kaksi akselia, joita molempia iteroidaan ja näistä arvoista saadaan z-akselin arvo.

Määritelmä 12. *2-D kuvauksen yleinen muoto*

$$x_{n+1} = g(x_n, y_n) \quad (21)$$

$$y_{n+1} = f(x_n, y_n) \quad (22)$$

Tämä voidaan ajatella samoin kuin 2-kertaluvun differentiaaliyhtälö kirjoitetaan kahtena 1-kertaluvun differentiaaliyhtälönä. [4],[1]

6.2 Kiintopisteet ja stabiilisuus

Myös 2-ulotteiselle kuvaukselle määritetään kiintopisteet tuttuun tapaan, jolloin kaavojen (21) ja (22) mukaan,

$$x^* = g(x^*, y^*) \quad (23)$$

$$y^* = f(x^*, y^*) \quad (24)$$

Kiintopisteiden stabiilisuus saadaan tutkimalla kiintopisteeseen ympäristöä. lisätään yhtälöihin (23) ja (24) pienet luvut d_n ja e_n joista saadaan yhtälöt,

$$x^* + d_{n+1} = g(x^* + d_n, y^* + e_n) \quad (25)$$

$$y^* + e_{n+1} = f(x^* + d_n, y^* + e_n) \quad (26)$$

Käyttämällä sarjakehitelmää ja huomioimalla yhtälöt (23) ja (24) saadaan yhtälöt (25) ja (26) muotoon,

$$\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ e_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x g(x^*, y^*) & \partial_y g(x^*, y^*) \\ \partial_x f(x^*, y^*) & \partial_y f(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ e_n \end{pmatrix} \quad (27)$$

Tästä saadaan ratkaistua (yhtälöstä, $Mv = \lambda v$) matriisin ominaisarvot, ja ominaisvektorit. Saatuja ominaisarvoja λ_i verrataan ykköseen, jolloin saadaan tietää kiintopisteen stabiilisuus. Analogisesti 1-ulotteiseen tapaukseen, mutta koska on 2 ominaisarvoa, myös mahdollisia stabiileja arvoja on enemmän.[1]

Tutkitaan tapausta, jossa ominaisarvot ovat reaalisia ja ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Tällöin voidaan kirjoittaa yhtälö (27) ratkaistujen ominaisarvojen avulla muotoon,

$$u_n = u_0 \lambda_1^n \quad (28)$$

$$v_n = v_0 \lambda_2^n \quad (29)$$

Ottamalla molemmista yhtälöistä puolittain luonnollinen logaritmi ja ratkaistamalla molemmista n , voidaan yhtälöt merkitä yhtäsuuriksi ja saadaan yhtälö,

$$u = u_0 \left| \frac{v}{v_0} \right|^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln \lambda_2}} \quad (30)$$

Jos ominaisarvot ovat positiivisia, kuvaus on invariantti, eli se ei muutu koordinaattimuunnoksissa. Tällöin jokainen piste osuu aina käyrälle. Tällaisia tapauksia jossa pisteet osuvat käyrälle on useita ja toisaalta ominaisarvo voi olla kompleksiarvoinen.

Ominaisarvot voidaan jakaa 3 tapaukseen.

1. Molemmat ominaisarvot $0 < |\lambda_i| < 1$, jolloin kiintopiste on stabiili.

Ominaisarvot $|\lambda_i| > 1$, jolloin kyseessä on repulsiivinen kiintopiste.

$0 < |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$, saadaan satulapiste, eli hyperbolinen kiintopiste.

Jos $|\lambda_i| = 1$ ja/tai $|\lambda_i| \neq 1$. Täytyy tehdä korkeamman kertaluvu tarkastelu, johon emme tässä ryhdy.

2. ($\lambda_1 = \lambda_2$), matriisi 27 ei välttämättä diagonalisoidu. Tällöin voidaan muuttaa ominaisvektori yhtälöt kanoniseen muotoon. Tällöin saan yhtälöiden joukko, jotka lähestyy tai loittonee origosta.

3. Ominaisarvot voivat myös olla kompleksisia. Tällöin voidaan kirjoittaa kompleksiset muodot polaarikoordinaateissa, jolloin saadaan reaalimuotoiset yhtälöt. Riippuen ominaisarvosta, saadaan joko stabiili, epästabiili tai neutraali (ei lähesty/loittone kiintopistettä) kiintopiste. [1]

6.3 2-D logistinen yhtälö

Saatetaan 2-ulotteinen logistinen yhtälö muotoon

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n - y_n) \quad (31)$$

$$y_{n+1} = bx_n y_n \quad (32)$$

Jossa a, b, x ja y määritellään, kuten 1-ulotteisessa tapauksessa. Huomataan yhteys 1-ulotteiselle kuvaukselle. Jos vakio b on 0 saadaan 1-ulotteinen logistinen kuvaus. Tutkitaan seuraavaksi miten 2-ulotteisen logistisen yhtälön kiintopisteet ja stabiilisuus näyttävät 2-ulotteisessa systeemissä. Lasketaan ensin kiintopisteet yhtälöillä

$$x^* = ax^*(1 - x^* - y^*) \quad (33)$$

$$y^* = bx^*y^* \quad (34)$$

Yhtälöstä (33) saadaan ratkaistua kiintopisteille ehdot

$$x = 0 \quad (35)$$

$$x + y = 1 - \frac{1}{a} \quad (36)$$

ja yhtälöstä (34)

$$x = \frac{1}{b} \quad (37)$$

$$y = 0 \quad (38)$$

Kiintopisteet saadaan sijoittamalla kaikki mahdolliset kiintopiste kombinaatiot ehto yhtälöihin (33) ja (34) josta nähdään mitkä toteuttavat yhtälöt. Valitaan kuvasta 10 vihreä käyrä, eli $a = \frac{3}{2} = b$, saadaan kiintopisteet,

$$(x, y) = (0, 0) = (0, 0) \quad (39)$$

$$(x, y) = (1 - \frac{1}{a}, 0) = (\frac{1}{3}, 0) \quad (40)$$

$$(x, y) = (\frac{1}{b}, 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \quad (41)$$

Yhtälö (41) ei kuulu logistisen yhtälön määrittely alueeseen, joten hylätään se. Kun sijoitetaan (31) ja (32) yhtälöön (27), saadaan yhtälö,

$$\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ e_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2ax^* - ay^* & -ax^* \\ by^* & bx^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ e_n \end{pmatrix} \quad (42)$$

Ominaisarvojen etsimiseen käytetään nyt yhtälöä $(M - \lambda I)v = 0$ ja sijoitetaan vakiot a ja b, saadaan

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2\frac{3}{2}x^* - \frac{3}{2}y^* - \lambda & -\frac{3}{2}x^* \\ \frac{3}{2}y^* & \frac{3}{2}x^* - \lambda \end{pmatrix} \right) v = 0 \quad (43)$$

Laskemalla saadaan matriisin determinantti, saadaan yhtälö,

$$\lambda^2 + \lambda \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y \right) - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{4}x \quad (44)$$

Kun sijoitetaan saadut kiintopisteet yhtälöön (44) saadaan yhtälöt

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda = 0, \text{ kun } (x, y) = (0, 0) \quad (45)$$

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}, \text{ kun } (x, y) = \left(\frac{1}{3}, 0 \right) \quad (46)$$

Kun ratkaistaan ominaisarvot yhtälöistä (45) ja (46) ominaisarvot ovat $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{3}{2})$ ja $(\lambda_3 = \frac{1}{2})$. Ominaisarvoista λ_1 ja λ_3 ovat stabiilin kiintopisteen ja λ_2 epästabiilin kiintopisteen. Kun tarkastellaan ominaisarvojen itseisarvoja voidaan todeta piste $(\frac{1}{3}, 0)$ on attraktiivinen kiintopiste. Jos käytetään lähteestä [5] saatua kiintopisteen määritelmää ja sanotaan että jos ominaisarvon itseisarvo $\lambda_i < 1$ tuottaa attraktiivisen kiintopisteen, saadaan että piste $(0, 0)$ on myös attraktiivinen kiintopiste. [1]

Lasketta seuraavaksi ominaisvektori pisteessä (46) ominaisarvolle λ_3 , sijoittamalla se yhtälöön (43), saadaan matriisi,

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2\frac{3}{2}x^* - \frac{3}{2}y^* - \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}x^* \\ \frac{3}{2}y^* & \frac{3}{2}x^* - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) v = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v \quad (47)$$

Ominaisvektorin v ratkaisuksi saadaan,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

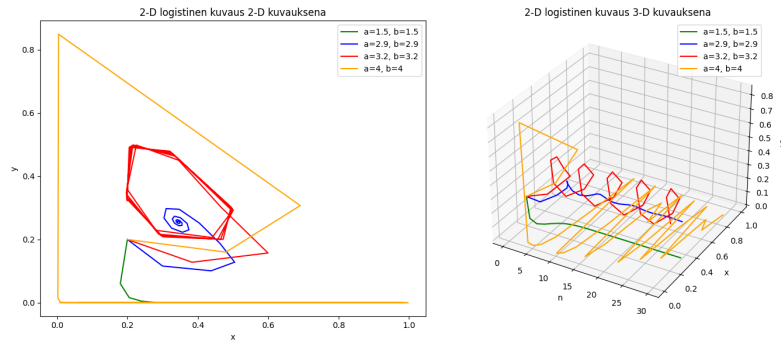
Ominaisarvoista saadaan lokaali koordinaattimuodot, yhtälöiden (28) ja (29) mukaan

$$u_n = u_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad (49)$$

Koska pisteelle $(\frac{1}{3}, 0)$ ei ole toista ominaisarvoa, ei myöskään saada toista ominaisvektoria. Tästä seuraa, että ei saada yhtälöä, joka olisi lokaarin koordinaatiston

muodossa. Tämä voidaan tulkita katsomalla kuvaa 10. Huomataan, että vihreä käyrä lähestyy arvoja $x = \frac{1}{3}$ ja $y = 0$, kaikilla x arvoilla, y :n ollessa 0. [1]

Tarkastellaan vielä edeltä tuttua 2-ulotteista logistisia yhtälöjä (31) ja (32) geometrisesti.



Kuva 10:

Kuvaajasta 10 nähdään, että kun asetetaan samat lähtöarvot kuin kuvassa 2 käyttäytyvät käyrät hyvin saman tapaisesti kuin 1-ulotteisessa tapauksessa.

7 Yhteenveto

Kaaosteoria on mielenkiintoinen tutkimus kohde. Toivottavasti lukijalle jää käsitys mitä kaaos on ja kuinka yksiulotteinen kuvaus voidaan yleistää 2-ulotteiseen tapaukseen ja toki vielä tästäkin eteenpäin. Näimme miten näennäisen yksinkertaisesta yhtälöstä päästää mitä monimutkaisimpiin lopputuloksiin. Tämä on mielestäni varsin poikkeusellista, että pärjätään lähes peruskoulu matematiikalla, ainakin 1-ulotteisessa tapauksessa ja päästää käsiksi hyvinkin monimutkaisiin ja mieltä askarruttaviin kysymyksiin.

Viitteet

- [1] Jarmo Hietarinta. Kaaoksen alkeet 1997. Turun yliopisto, Delta luentomoniste.
- [2] Hannu Koskinen, Rami Vainio. Klassinen mekaniikka 2010.
- [3] Robert L.Devaney, Chaos, Fractals and Dynamics 1990.
- [4] Stefan Emet, Differentiaaliyhtälöt 2009. Turun yliopisto, Delta luentomoniste.
- [5] Stefan Emet, Lecture notes of Dynamical Systems 1998. Åbo Akademi.