

Kaviteetti kvanttielektrodynamiikkaa ehdollisten  
hierarkkisten liikeyhtälöiden avulla

Pro gradu  
Turun yliopisto  
Teoreettinen fysiikka  
2023  
LuK Kalle Raikisto  
Tarkastajat:  
Prof. Jyrki Piilo  
FT Kimmo Luoma

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO

Fysiikan laitos

**Raikisto, Kalle** Kaviteetti kvanttielektrodynamiikkaa ehdollisten hierarkkisten liikeyhtälöiden avulla

Pro gradu, 58 sivua, liitteet 4 sivua

Teoreettinen fysiikka

Marraskuu 2023

---

Tässä työssä tutkitaan 1-moodista kaviteettia, jossa on yksi hiukkanen. Tarkemmin tutkitaan atomin evoluutiota kaviteetissa, kun sieltä vuotaa fotoneita ympäristöön. Tähän systeemiin tehdään jatkuva heterodyynimittaus, jossa fotodiodi havaitsee systeemistä poistuvat fotonit.

Dissipaatio ja mittauksen aiheuttamat muutokset saavat aikaan systeemin evoluution, jota voidaan kuvata stokastisella master-yhtälöllä. Tässä työssä muodostetaan stokastinen master-yhtälö tälle systeemille, kun siihen tehdään heterodyynimittaus.

Stokastisen master-yhtälön ratkaiseminen tapahtuu cHEOM (conditioned hierarchical equation of motion) menetelmällä. Se on 2022 kehitetty uusi variaatio HEOM menetelmästä. HEOM ja sen variaatiot ovat olleet suosittuja ratkaisumenetelmiä erityisesti ei-Markovisille stokastisille differentiaaliyhtälöille.

Tässä cHEOMia käytetään Markoviselle dynamiikalle, jotta saadaan vain tutkittavan atomin evoluutio. cHEOM eliminoi kätevästi kaviteetin systeemin dynamiikkaa kuvaavista yhtälöistä. Näin saadaan vain halutun atomin dynamiikkaa kuvaavat yhtälöt.

Lopuksi käyttäen ratkaistua atomin dynamiikkaa, muodostetaan sumennettu yhteismittaus paikalle ja liikemäärälle. Husimin  $Q$ -funktio määrittelee näille suureille sumennetut yhteismittaukset, jotka saadaan kätevästi ratkaistusta stokastisesta master-yhtälöstä. Tätä yhteismittausta verrataan likimääräiseen yhteismittaukseen, joka saadaan eliminoimalla kaviteetti cHEOMin sijaan adiabaattisella eliminaatiolla.

Asiasanat: Kaviteetti kvanttielektrodynamiikka, HEOM, stokastinen master-yhtälö, yhteismittaus

# Sisällys

<b>Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>1 Valon ja materian vuorovaikutus kaviteetti kvanttielektrodynamiikassa</b>	<b>10</b>
1.1 Sähkökenttä . . . . .	10
1.2 Atomi . . . . .	12
1.3 Atomin ja sähkökentän vuorovaikutus . . . . .	14
<b>2 Mittausmalli</b>	<b>18</b>
<b>3 Yhteismittaus</b>	<b>20</b>
<b>4 Master-yhtälö</b>	<b>23</b>
4.1 Born-Markov master-yhtälö . . . . .	24
4.2 Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad master-yhtälö . . . . .	26
<b>5 Stokastinen master-yhtälö</b>	<b>30</b>
5.1 Suora mittaus . . . . .	30
5.2 Homodyynimittaus . . . . .	32
5.3 Heterodyynimittaus . . . . .	33
<b>6 Hierarkkinen kuvaus atomille kaviteetissa</b>	<b>37</b>
6.1 Vertailu Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad master-yhtälöön . .	42
<b>7 Yhteissuure lineaarisista hierarkkisista liikeyhtälöistä</b>	<b>45</b>
<b>8 Loppupäätelmät</b>	<b>52</b>
<b>Liitteet</b>	<b>54</b>
A: Ito ja Stratonovich laskenta . . . . .	54
B: Adiabaattinen eliminaatio . . . . .	56

## Johdanto

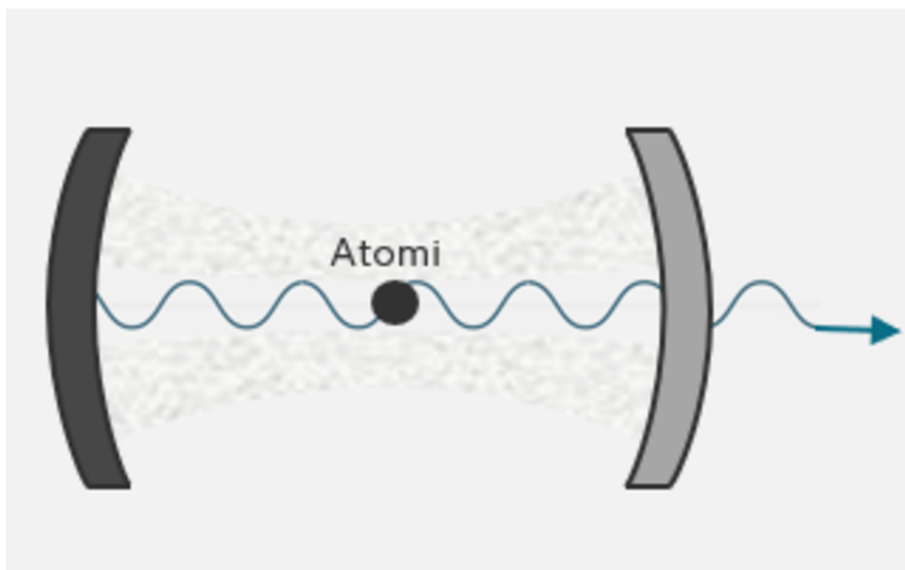
Kaviteetti kvanttielektrodynamiikka (cQED) on kvanttifysiikan tutkimusala, joka tutkii valon kvanttimekaanisia ilmiöitä kaviteetissa. Kaviteetti on mikä tahansa eristeestä tehty rakennelma, joka säilöö sähkömagneettista energiaa diskreeteillä taajuuksilla [1, 2]. Kaviteettia kutsutaan optiseksi, jos se säilöö näkyvää valoa peileillä tai muulla optisella materiaalilla. cQED tutkii myös valon vuorovaikutusta materian kanssa, kun kaviteetti ei ole tyhjä. Kaviteetti kvanttielektrodynamiikan voi ajatella alkaneen vuonna 1946 kun Edward Purcell julkaisi artikkelinsa abstraktin [3]. Se käsittelee ydinmagneettisen resonanssin siirtymiä, joissa spinit ovat kytkeytyneet resonanssiin. Artikkelissaan Purcell osoitti, että spontaanin säteilyn todennäköisyys kasvaa tekijällä  $3Q\lambda^3/4\pi^2V$ , missä  $Q$  on laatuindeksi ja  $V$  resonaattorin tilavuus [2].

Kaviteetti kvanttielektrodynamiikkaa on tutkittu laajalti. Ensimmäisen kokeellisen tutkimuksen spontaanista emissiosta tekivät Drexhage, Kuhn ja Schäfer vuonna 1968 [4]. Spontaanin emission havaitsivat myös myöhemmin Gabrielsen ja Dehmelt [5]. Spontaanin emissiota on tutkittu sen jälkeen paljon, kuten esimerkiksi Rydberg atomien emissiota [6, 7]. Muitakin kvanttifysiikan sovelluksia, kuten puolijohde mikrokaviteetteja on tutkittu [8–10]. Esimerkiksi Yamamoto *et al.* demonstroivat spontaanin emission vaimentamisen ja tehostamisen mikrokaviteetissa [11].

Kaikki äskeiset tutkimukset käsitelivät heikosti kytkettyjä kaviteetteja, mutta myös vahvasti kytkettyjä kaviteetteja on tutkittu. Varsinkin koherenttia mikroaaltosäteilyä tuottavat maserit ovat yksi tärkeä vahvasti kytketty systeemi. 1-atomi maserin malli koostuu 2-tasoisesta atomista, joka on lähes resonanssissa 1-moodi kaviteetin kanssa [2]. Tämä kutsutaan Jaynes-Cummings malliksi, jota käytetään myös tässä työssä. Kerron siitä tarkemmin kappaleessa 1. Koherenttia valoa tuottava laser voidaan mallintaa samalla tavalla ja muodostaa vahvasti kytketyn systeemin. Ensimmäisen 1-atomi laserin demonstroivat An *et al.* vuonna 1994 [12]. Lasereiden ja

masereiden kokeellisesta tutkimuksesta kerrotaan lisää artikkeleissa [13–17].

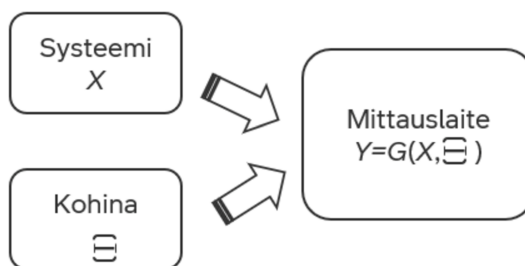
Tässä työssä tutkin valon vuorovaikutusta, kun kaviteetissa on yksi atomi tai muu vastaava hiukkanen. Systeemi on optinen kaviteetti, jolla on vain yksi moodi. Tämä systeemi on esitelty kuvassa 1. Systeemiä kuvaamaan käytetään tässä työssä Jaynes-Cummings mallia [18]. Jaynes ja Cummings alunperin esittelivät sen vuonna 1963 tarkastellakseen spontaanin emission klassisia ominaisuuksia, mutta mallin on todettu kertovan paljon muutakin [19]. Esimerkiksi sen on huomattu suoraan todistavan fotonien olevan diskreettejä sähkömagneettisen energian kvantteja ja todistavan ettei kaviteetissa esiintyvä sähkökenttä ole klassinen [19]. Koska nimenomaan yksi moodisten kaviteettien ja yksittäisten atomien vangitsemisessa on tapahtunut suuria kehityksiä, on mallin kokeellinen tutkinta ja testaus myös mahdollista. Nämä seikat yhdessä ovat tehneet mallista suosittun ja sitä tutkitaan yhä [20–23].



Kuva 1: Tutkittavaa systeemiä havainnollistava kuva. Systeemi koostuu atomista, joka on vuotavassa 1-moodisessa kaviteetissa.

Klassiselle systeemille ideaalinen mittaus määrittää mitattavan suureen arvon varmuudella. Klassinen mittaus ei myöskään aiheuta häiriötä systeemiin, vaikka se voi muuttaa systeemin tilaa. Systeemin tila kuvaa vain mittajaan tietoa systeemistä,

mikä voi olla epätäydellinen. Kun tieto on epätäydellinen, ei mittaustulosta voida ennustaa varmuudella. Tällöin systeemin tilaa kuvataan jollain todennäköisyysjakaumalla  $p(x)$  [1]. Jos mittauksesta saadaan uutta informaatiota systeemistä, mitaus muuttaa tilaa, jolloin puhutaan ehdollisesta tilasta. Todellisuudessa mikään mitaus ei kuitenkaan ole täydellinen. Tällöin mittaukseen liitetään mukaan jokin kohina  $\Xi$  [1]. Tätä mittausta havainnollistetaan kuvassa 2.



Kuva 2: Klassista mittausta kuvaava skemaattinen kuva.

Idealiset klassiset mittaukset antavat varmuudella saman tuloksen. Kvanttimitauksissa taas on sisäänrakennettu epävarmuus, eli vaikka systeemistä tiedettäisiin kaikki, vain mittaustulosten todennäköisyys voidaan ennustaa. Kvanttimitauksesta siis tiedetään vain tulosten todennäköisyysjakauma. Sen lisäksi että mitaus voi muuttaa systeemin tilaa, se myös aiheuttaa häiriötä systeemiin, muuttaen itse systeemiä. Riippuen mikä mittaustulos saadaan, systeemi muuttuu eri tavalla. Voi ajatella, että systeemin ja mittalaitteen välillä on vuorovaikutus, joka aiheuttaa muutosta molemmissa. Mittauslaitteistoa täytyy mallintaa ja tätä varten tässä työssä käytetään Masanao Ozawan vuonna 1983 esittelemää mittaussmallia [24, 25].

Tässä työssä tutkittava kaviteetti vuotaa fotoneita. Näin ollen systeemin mitaamiseen tarvitaan fotonidetektoreja. Fotonidetektorin havaitsee kaikki systeemistä ulos tulevat fotonit. Niillä saadaan kaikki tarvittava tieto systeemistä. Tätä kutsutaan suoraksi mittaukseksi (engl. direct detection). Se on esitelty kuvassa 3. Siinä kaviteetista vuotavien fotonien virtaus menee fotonidetektoriin, joka havaitsee yk-

sitellen jokaisen fotonin. Käytännössä mittari näyttää havaittiinko fotoni ajassa  $dt$  vai ei [1]. Kun aika-askel  $dt$  on tarpeeksi pieni, vain yksi fotoni havaitaan detektorissa mittausajassa ja mittaus on tarkka. Kun fotonin havaitaan poistuneen kaviteettista, uusi mitattu informaatio aiheuttaa muutoksen systeemin tilassa. Tätä muutosta kutsutaan hyppyksi.

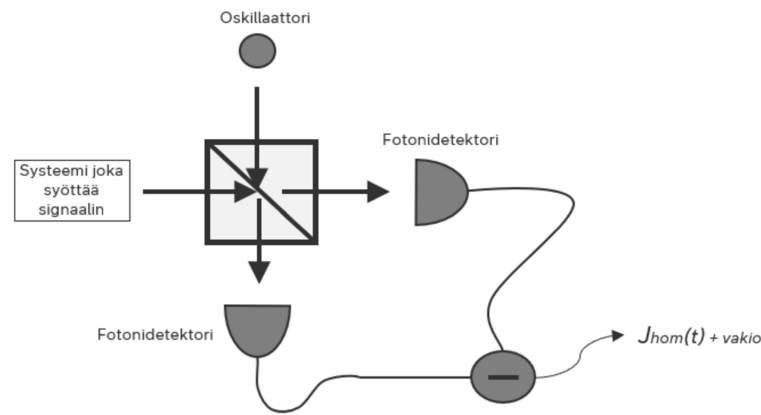


Kuva 3: Suora mittaus. Tässä mittauslaite on fotodetektori, joka vain havaitsee tuleeko fotoneita mittalaitteeseen.

Suoralla mittauksella on kuitenkin yksi ongelma: Oletetaan, että ympäristö aiheuttaa valkoista kohinaa ja ympäristön fotonivuo, jonka tässä voi ajatella olevan fotonien määrä per aikayksikkö, on hyvin suuri. Koska mittari näyttää vain havaittiinko fotoneita vai ei, riippumatta kuinka pieni aika-askel  $dt$  on, havaitaan useita fotoneja [1]. Tarvitaan siis mittaus, joka ei suoraan mittaa kaviteetista tulevia fotoneita.

Homodyynimittaus, mikä on esitelty kuvassa 4, mittaa yksittäisten fotonien sijasta fotonivuota [1]. Kuten kuvassa on esitetty, systeemistä vuotaviin fotoneihin lisätään jokin vahvasta oskillaattorista saatava koherentti fotonivuo. Yhdistetty fotonivuo menee mittalaitteeseen, joka tässä tapauksessa voi olla fotodiodi tai muu vastaava valoherkkä laite. Fotodiodi tuottaa sähkövirran, joka on suoraan verrannollinen sen vastaanottamaan fotonivuohon. Sähkövirta tulee olemaan muotoa  $J_{hom}(t) + vakio$ , jossa vakio on oskillaattorin tuottama sähkövirta ja  $J_{hom}(t)$  vastaa kaviteetista vuotavia fotoneita. Tämä erittelee systeemistä tulevan fotonivuon

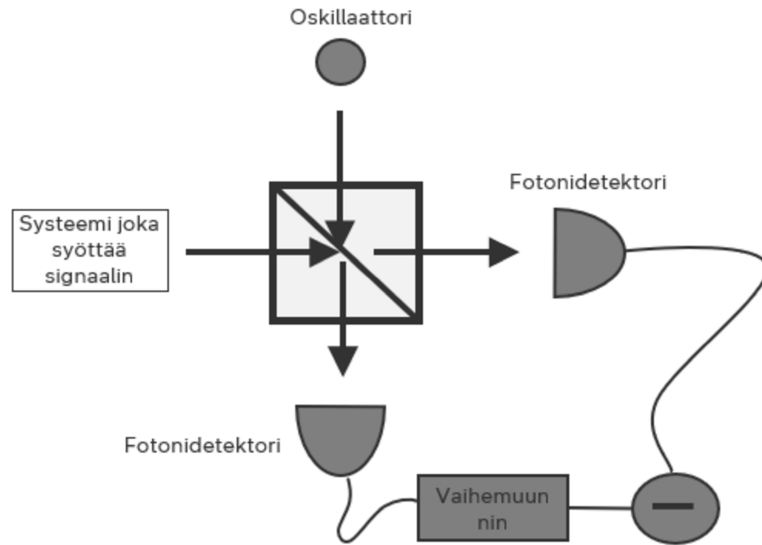
ympäristön aiheuttamasta kohinasta, koska se ei pelkästään mittaa milloin fotoneja otetaan vastaan, vaan myös kuinka monta fotonia havaitaan. Homodyynimittauksen toinen etu suoraan mittaukseen nähden on, että sillä voidaan mitata vaiheesta riippuvia systeemin ominaisuuksia. Valitsemalla oskillaattorin vaihe, mikä tahansa systeemin kvadratuuri on mitattavissa [1]. Homodyynimittaus on siis tapa, jolla voi tarkasti mitata systeemin kvadratuurin. Tämän mittausprosessin aiheuttamaa muutos lähestyy Gaussista kohinaa kun  $dt$  lähestyy nollaa [26].



Kuva 4: Homodyynimittaus. Fotodetektorin sijaan mittalaite on fotodiodi tai muu vastaava valoherkkä laite, jolloin mittalaite tuottaa sähkövirran. Systeemistä tuleva fotonivuo yhdistetään jonkin vahvan oskillaattorin fotonivuohon käyttäen säteenjakajaa. Säteenjakajasta saatavat fotonivuot mitataan ja vähennetään toisistaan.

Entä jos halutaan mitata molemmat kanonisesti vastakkaiset kvadratuurit? Jakamalla systeemistä tuleva fotonivuo säteenjakajalla kahteen osaan ja tekemällä toiseen  $\pi/2$  vaihesiirto ja lopuksi tekemällä kumpaankin homodyynimittaus samalla oskillaattorilla saadaan mitattua vastakkaiset kvadratuurit samanaikaisesti [1]. Tätä on havainnollistettu kuvassa 5. Toinen tapa tehdä tämä on virittämällä oskillaattori taajuudelle, joka on paljon suurempi kuin mikään systeemin taajuus. Silloin homodyynimittauksesta saatava sähkövirta oskilloi tällä suurella taajuudella ja sen oskillaation kaksi Fourier komponenttia ovat systeemin kaksi kvadratuuria [1]. Tätä

kutsutaan heterodyynimittaukseksi ja sitä käytetään tässä työssä.



Kuva 5: Heterodyynimittaus. Toimitaan kuin homodyynimittauksessa, mutta lisätään toiseen säteenjakajasta tulevaan säteeseen  $\pi/2$  vaihemuunnos, jolloin voidaan mitata kaksi vastakkaista kvadratuuria samanaikaisesti.

Yksi tärkeimmistä kvanttimitausten ominaisuuksista seuraavista tuloksista on ettei paikkaa ja liikemäärää voida samanaikaisesti mitata täsmällisesti vaan mittauksiin sisältyy aina pieni epätarkkuus. Tätä kutsutaan Heisenbergin epätarkkuusperiaatteeksi [27], jonka Werner Heisenberg esitteli vuonna 1927. Myöhemmin tämän on todettu pätevän kaikille kanonisesti vastakkaisille suureille. Tässä työssä muodostetaan epätarkka ns. sumennettu mittaus näille suureille.

Tällainen yhteismittaus kahdelle suurelle voidaan muodostaa suoraan tarkastelemalla mittauksen aiheuttamaa muutosta systeemiin. Kuten mainittiin, jokainen mittaus aiheuttaa systeemin tilassa jonkin muutoksen, joka on satunnainen ja riippuu siitä, mikä mittaustulos saadaan. Tätä systeemin evoluutiota kuvataan stokastisella differentiaaliyhtälöllä. Yhtälö huomioi myös, että kaviteetti ei ole täydellinen eli fotoneita vuotaa ympäristöön. Tällöin tätä kutsutaan dissipatioksi ja tällöin

sanotaan, että atomi tai kaviteetti on vaimennettu (engl. damped) [1]. Dissipaatio aiheuttaa dekoherenssin eli systeemin muuttuminen klassisemmaksi. Dekoherenssia voi myös ajatella informaation häviämisenä systeemistä ympäristöön.

Jos kaviteetti on tarpeeksi huono eli disspaatiokerroin on suurempi kuin kaviteetin resonanssitaajuus, voidaan evoluutiota kuvaavasta yhtälöstä poistaa riippuvuus kaviteetista käyttämällä adiabaattista eliminaatiota [28]. Se on approksimaatio, joka mahdollistaa stokastisen differentiaaliyhtälön ratkaisemisen. Jos halutaan ratkaista yhtälö eksaktisti tarvitaan toinen menetelmä, cHEOM (conditional hierarchical equation of motion) [29]. Yleensä sitä käytetään ei-Markovisten systeemien stokastisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun [30], mutta tässä työssä sillä korvataan adiabaattinen eliminaatio, jotta voidaan ratkaista yhtälö eksaktisti.

Kappaleessa 1 aloitetaan esittelemällä Jaynes-Cummings malli. Se antaa meille Hamiltonin eli systeemin energiaa kuvaavan operaattorin atomille, sähkökentälle ja niiden vuorovaikutukselle. Malli perustuu kolmeen kappaleessa esiteltyyn approksimaatioon. Jotta nämä approksimaatiot voidaan tehdä, täytyy systeemiltä olettaa tiettyjä ominaisuuksia. Nämä oletukset kertovat milloin Jaynes-Cummings mallia voidaan käyttää.

Kun systeemiä kuvaava malli on määritelty täsmällisesti, tarvitaan myös malli mittaukselle. Kappaleessa 2 esitellään Ozawan mittausmalli ja katsotaan miten kvanttimitaukset eroavat klassista mittauksista. Tärkein ero on, että mittaus muuttaa systeemin tilaa, vaikka mittaus olisi tehty aiemminkin. Tässä kappaleessa esitellään tarkemmin miten.

Tässä työssä tutkitaan tarkemmin kvanttimitauksen yhteismitallisuutta, joka käsitteenä esitellään kappaleessa 3. Tässä kappaleessa määritellään mikä yhteismitallisuus on ja milloin kvanttimitaukset ovat yhteismitallisia. Siinä esitellään myös Husimin funktio, joka kuvaa tilan jakaumaa faasiavaruudessa. Husimin jakauma antaa sumennetun yhteismitauksen paikalle ja liikemäärälle.

Tämän jälkeen siirrytään käsittelemään avoimien systeemien evoluutiota. Kappaleessa 4 esitellään master-yhtälö, joka kuvaa systeemin muuttumista ajassa. Siitä on useita muotoja, mutta tässä johdetaan Born-Markov master-yhtälön kappaleessa esiteltyjen approksimaatioiden ja oletusten avulla. Sitä käyttämällä saadaan tutkittavan systeemin Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad (GKSL) master-yhtälö, jota tässä työssä käytetään. Kappaleessa myös johdetaan täsmällisesti nämä yhtälöt.

Jos kappaleessa 4 esiteltiin master-yhtälö, joka kuvaa ympäristön vuorovaikutus systeemin kanssa, niin kappaleessa 5 esitellään master-yhtälö, joka kuvaa mittalaitteen vaikutusta systeemiin. Master-yhtälöitä, jotka ovat tätä muotoa, kutsutaan stokastisiksi master-yhtälöiksi. Niissä master-yhtälöön lisätään termi, joka kuvaa mittalaitteen aiheuttamaa satunnaista kohinaa. Tässä kappaleessa stokastinen master-yhtälö johdetaan kolmelle eri mittaukselle, jotka esiteltiin johdannossa.

Kappaleessa 6 esitellään cHEOM (conditional hierarchical equation of motion), joka on menetelmä kappaleessa 5 esitellyn stokastisen master-yhtälön ratkaisuun. Tässä sitä käytetään oikeastaan korvaamaan adiabaattinen eliminaatio, joka on likimääräinen tapa eliminoida sähkökenttä systeemin evoluutiota kuvaavasta yhtälöstä. Kun saadaan muodostettua hierarkkiset yhtälöt, ne voidaan ratkaista numeerisesti ja saadaan atomin tilan evoluutio. Tätä ratkaisua verrataan GKSL master-yhtälön antamaan evoluutioon.

Kappaleessa 7 muodostetaan yhteismittaus paikalle ja liikemäärälle käyttämällä kappaleessa 6 ratkaistua atomin tilan evoluutiota. Tästä saatavia tuloksia verrataan adiabaattisen eliminaation antamiin likimääräisiin tuloksiin.

# 1 Valon ja materian vuorovaikutus kaviteetti kvant- tielektrodynamiikassa

Systeemin mallina on Jaynes-Cummings malli, jonka E.T. Jaynes ja F.W. Cummings esittelivät vuonna 1963 kuvaamaan semiklassisen ja kvanttimekaanisen sähkökentän eroja [18]. Jaynes-Cummings mallia on kutsuttu kvanttioptiikan vetyatomiksi [31]. Vaikka se on hyvin yksinkertainen, se on silti toimiva ja laajalti käytetty sekä kokeellisessa [2, 14–17, 32], että teoreettisessa tutkimuksessa [22, 29, 33, 34]. Se koostuu kaviteetista, jossa on atomi ja sähkökenttä, jolla on yksi moodi. Näiden välisiä ilmiöitä on normaalisti vaikea kuvata matemaattisesti, joten Jaynes-Cummings malli soveltaa approksimaatioita yksinkertaistaakseen laskuja. Tässä kappaleessa seuraan kirjan [35] johtoa Jaynes-Cummings mallille.

## 1.1 Sähkökenttä

Aloitetaan katsomalla 1-ulotteista sähkökenttää, joka on polarisoitu. Maxwellin yhtälöt antavat sille muodon:

$$E_x(z, t) = \left( \frac{2\hbar\omega_c^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz).$$

Tämä sähkökenttä on 1-ulotteinen z-akselin suuntaan ja polarisoitunut x-akselin suuntaan. Klassisen sähkökentän energia, eli sen Hamiltonin funktio, 1-moodiselle sähkökentälle on:

$$H(t) = \frac{1}{2}(q(t)^2 + \omega_c^2 p(t)^2).$$

Näissä  $q(t)$  on paikkafunktio ja  $p(t)$  on liikemäärä. Tämä voidaan helposti kvantisoida muuttamalla sähkökenttä-, paikka- ja liikemääräfunctiot operaattoreiksi. Kvantisoitu sähkökenttä on diskreetti, eli sillä on energiaominaistilat  $|n\rangle$ , missä  $n$  vastaa

fotonien määrää. Tilan vaihtumista kuvaavat annihilaatio- ja luomisoperaattori merkitään  $\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$  ja  $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ . Nämä voidaan ilmaista paikka- ja liikemääräoperaattorien avulla:

$$\begin{aligned}\hat{a}(t) &= (2\hbar\omega_c)^{-1/2}(\omega_c\hat{q}(t) + i\hat{p}(t)) \\ \hat{a}^\dagger(t) &= (2\hbar\omega_c)^{-1/2}(\omega_c\hat{q}(t) - i\hat{p}(t)).\end{aligned}$$

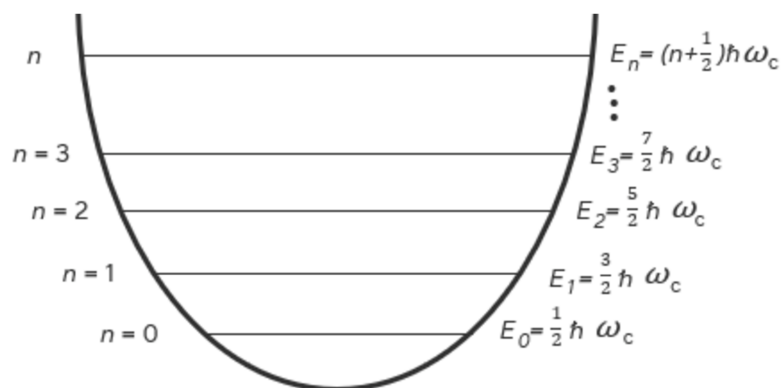
Nämä yhtälöt ovat Heisenbergin kuvassa, jossa systeemin tiheysmatriisi on vakio. Jotta voidaan tarkastella systeemin tilan evoluutiota, siirrytään Schrödingerin kuvaan. Vastaavat yhtälöt annihilaatio- ja luomisoperaattoreille Schrödingerin kuvassa saadaan vain poistamalla operaattoreista aikariippuvuus. Nyt voidaan ilmaista sähkökenttä ja Hamiltoni operaattorit annihilaatio- ja luomisoperaattoreilla Schrödingerin kuvassa:

$$\begin{aligned}\hat{E}_x(z) &= \left(\frac{\hbar\omega_c}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} [\hat{a} - \hat{a}^\dagger] \sin(kz) \\ \hat{H} &= \hbar\omega_c(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$  on numero-operaattori, eli se palauttaa systeemin fotonien lukumäärän ja jokaisen fotonin energia on  $\hbar\omega_c$ . Se vastaa oskillaattorin energiatasoja, jotka ovat esitelty kuvassa 6. Koska kaviteetilla on vain yksi moodi, kaikkien fotonien taajuus on sama.

Jaynes-Cummings mallin sähkökenttä on 1-moodinen sähkökenttä. Koska nollatason energia ei vaikuta systeemin dynamiikkaan, voidaan määritellä sen nollassi, jolloin myöhemmät laskut on helpompi tehdä. Täten lopullinen Hamiltoni on:

$$H_f = \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}.$$

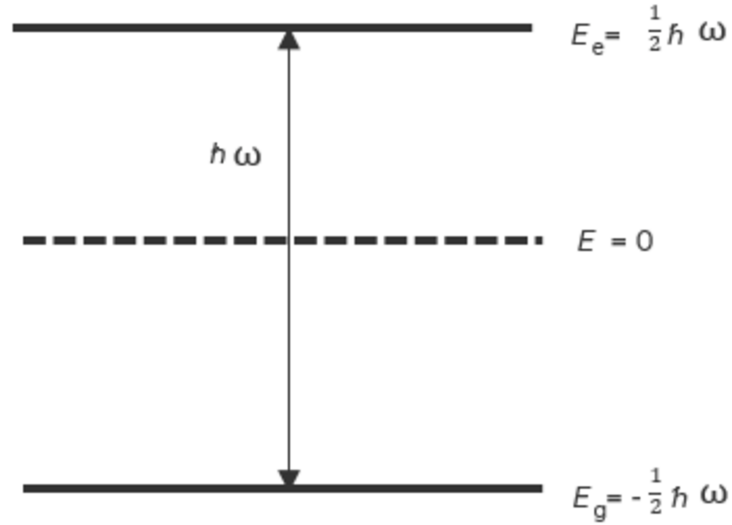


Kuva 6: Oskillaattorin energiatasot. Jokainen energiataso on  $\hbar\omega_c$  verran suurempi kuin edellinen. Tämä vastaa diskreetin sähkökentän energiatasoja, kun 1-moodisen sähkökentän taajuus on  $\omega_c$ .

## 1.2 Atomi

Tarkastellaan seuraavaksi atomia. Approksimoidaan atomia antamalla sille vain 2 tilaa: Perustila  $|g\rangle$  ja viritystila  $|e\rangle$ . Kuten sähkökentälle, myös atomille energian nollakohta voidaan valita muuttamatta dynamiikka. Määritellään tilojen energiat siten, että energia on nolla energiatiilojen puolella välissä:  $E_e = -E_g = \frac{1}{2}\hbar\omega$ . Tätä on esitelty selkeämmin kuvassa 7.

Tämä approksimaatio on hyvin yleinen, koska se mallintaa atomia kaviteetissa hyvin. Kaviteetilla on hyvin kapea resonanssi ja atomi pyrkii luonnostaan energiatasoille, jotka ovat lähellä resonanssia, eli jos  $\omega_c \approx \omega$ , approksimaatio toimii hyvin. Silloin energiataso diagrammi näyttäisi samalta kuin kuvassa 8.



Kuva 7: Atomin energiatasot. Tässä approksimoidaan energiatasoja olevan vain kaksi. Koska energian nollakohta ei vaikuta dynamiikkaan, se voidaan määritellä olevan energiatasojen puolella välissä.

2-tila systeemin käyttö helpottaa myös laskuja, mahdollistaen esimerkiksi Bloch-hajotelman käytön:

$$\rho = \frac{1}{2} (I + \sum_i u_i \hat{\sigma}_i),$$

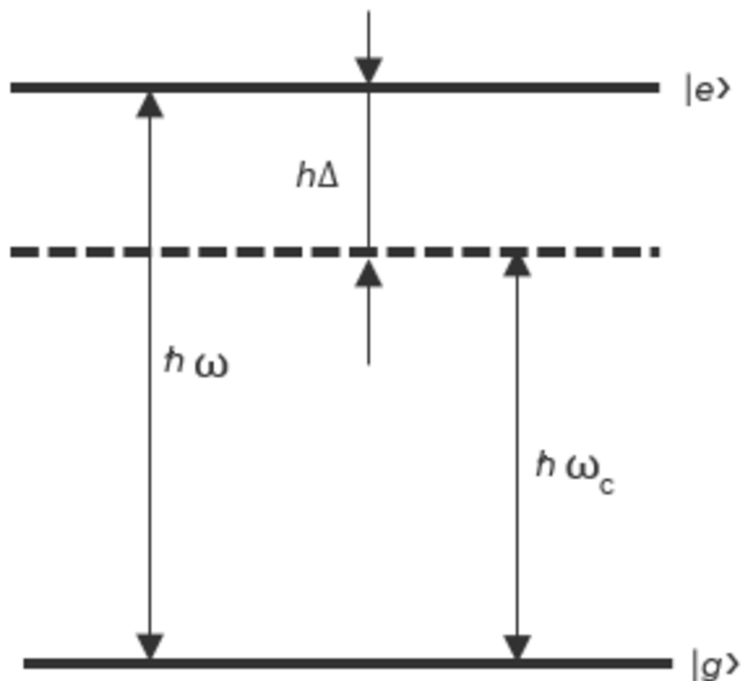
missä  $\hat{\sigma}_i$  ovat Paulin matriisit. 2-tila atomille voidaan määritellä tilamuunnos operaattorit  $\hat{\sigma}_+$ ,  $\hat{\sigma}_-$ , jotka yhdistyvät Paulin matriiseihin seuraavasti:

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+$$

$$\hat{\sigma}_y = i(\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+)$$

$$\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+.$$

Atomille saatava Hamiltoni on määriteltyjen energiatiilojen perusteella:



Kuva 8: Atomin energiatasot, kun atomi on lähellä resonanssia 1-moodisen sähkökentän kanssa. Atomi pyrkii luonnostaan energiatasoille, jotka ovat lähellä resonanssia.

$$H_a = E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g| = \frac{\hbar\omega}{2} (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) = \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z.$$

### 1.3 Atomin ja sähkökentän vuorovaikutus

Seuraavaksi Jaynes-Cummings mallissa tehdään dipoli-approksimaatio. Siinä oletetaan, että sähkökenttä on melkein vakio atomin sisällä. Jos aikaisemman sähkökentän aaltoluku  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  on hyvin pieni verrattuna atomin säteeseen, jolloin sähkökentän vaihtelu atomin sisällä on hyvin pieni, niin sähkökentän voi ajatella olevan paikasta riippumaton eli:

$$\hat{E} = i \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2} [\hat{a} - \hat{a}^\dagger].$$

Tämä oletus voidaan tehdä, koska optisen säteilyn aallonpituus  $\lambda$  on suuri, jolloin  $k \ll r_{atom}$ . Käyttäen nyt tätä paikasta riippumatonta sähkökenttää saadaan vuorovaikutuksen Hamiltoni

$$\hat{H}_I = \hat{d}\hat{E},$$

missä  $\hat{d}$  on dipolimomentti operaattori. Voidaan todistaa, että dipoli operaattorin diagonaalitermit ovat nollia, kun systeemillä ei ole pysyvää dipolimomenttia. Tällöin jää vain termit  $\langle g|\hat{d}|e\rangle = d$ . Olettamalla, että  $d$  on reaalinen, dipolioperaattori voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\hat{d} = d(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+).$$

Tällöin vuorovaikutuksen Hamiltoni voidaan kirjoittaa muodossa:

$$H_I = \hbar g(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+)(\hat{a}^\dagger + \hat{a}).$$

Tälle tehdään vielä yksi approksimaatio, ns. rotating-wave approksimaatio (RWA). Approksimaation havainnollistamiseksi vaihdetaan Heisenbergin kuvaan, saadaan operaattoreille evoluutiot:

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) &= \hat{a}(0)e^{-i\omega t} \\ \hat{\sigma}_\pm(t) &= \hat{\sigma}_\pm(0)e^{\pm i\omega t}. \end{aligned}$$

Avaamalla sulut nähdään, että vuorovaikutuksen Hamiltoni saa neljä termiä, jotka ovat muotoa:

$$\hat{a}\hat{\sigma}_+ \sim e^{i(-\omega+\omega_c)t}$$

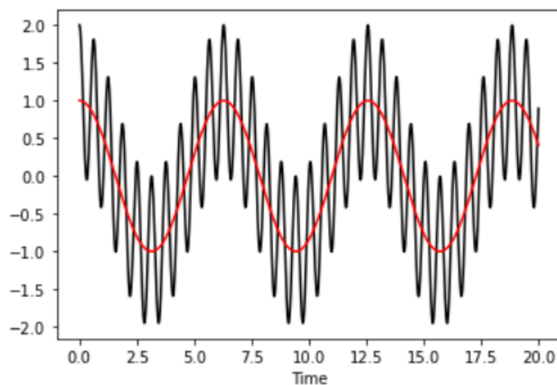
$$\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+ \sim e^{i(\omega+\omega_c)t}$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- \sim e^{i(\omega-\omega_c)t}$$

$$\hat{a}\hat{\sigma}_- \sim e^{-i(\omega+\omega_c)t}.$$

Jos  $\omega \approx \omega_c$ , huomataan, että kaksi ensimmäistä termiä saavat paljon pienemmät arvot. Nopeammat oskillaatiot voidaan unohtaa, jos  $\Delta \ll \omega_c + \omega$ . Tämä on demonstroitu kuvassa 9. Kun oskillaatiot ovat tarpeeksi nopeat, voidaan ottaa niistä vain keskiarvo, joka tässä tapauksessa on nolla. Tällöin jää jäljelle vain hitaammat oskillaatiot ja saadaan vuorovaikutukselle Hamiltoni:

$$H_I = \hbar g(\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+ \hat{a}).$$



Kuva 9: Havainnollistetaan RWA:ta kuvitteellisella käyrällä. Jos mustasta käyrästä poistetaan nopeat oskillaatiot, eli tehdään RWA, jää jäljelle vain punainen käyrä, joka on hyvä approksimaatio siitä. Tämä kuva ei esitä mitään fysikaalisia suureita, vaan havainnollistaa, miltä nopeiden oskillaatioiden poistaminen käyrästä näyttää.

RWA vaatii toimiakseen, että atomin ja kentän välinen kytkentä on korkeintaan vahva. Jos kytkentä on ultravoimakas (ultrastrong/deep strong coupling) RWA:ta ei voi käyttää [20, 23, 33, 34]. Tällöin käytetään esimerkiksi Rabi mallia [36]. Jaynes-Cummings malli oikeastaan vastaa Rabi mallia, jossa tehdään RWA [19, 37].

Lopuksi siirrytään käyttämään luonnollisia yksiköitä eli  $\hbar = 1$ . Tämä on yleinen yksikönmuunnos ja on tehty vain edellä olevien laskujen yksinkertaistamiseksi. Jaynes-Cummings malli lopulta antaa siis systeemille Hamiltonin:

$$H_s = H_a + H_f + H_I = \frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z + \omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + g(\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+\hat{a}).$$

## 2 Mittausmalli

Tässä kappaleessa käytän lähteenä kirjoja [1, 38]. Käsittelen mittausmallia, jonka alunperin esitteli Masanao Ozawa [24, 25]. Yleisimmässä muodossaan kvanttimitaukset määritellään seuraavasti: On olemassa mittauslaite ja systeemi, kumpikin jossain tilassa jota kuvataan tiheysmatriisilla. Mittausta voidaan ajatella vuorovai-  
kutuksena näiden kahden välillä, jossa kummankin tila muuttuu. Mittauslaitteen tilan kehityksellä ei ole merkitystä, joten tarkastellessa keskitytään vain systeemin tilaan.

Merkitään mittaus operaationa  $\mathcal{O}_r$ , jossa  $r$  on mittaustulos. Oletetaan, että systeemin tila  $\rho(t)$ , johon tehdään mittaus, on tulotila. Jos tehdään mittaus, joka kestää ajan  $T$ , mittauksen jälkeinen tila on:

$$\rho(t+T) = \mathcal{O}_r(T)\rho(t) = \sum_j \frac{M_{r,j}(T)\rho(t)M_{r,j}(T)^\dagger}{p_r},$$

missä  $\{M_{r,j}\}$  on joukko operaattoreita, joka ei ole yksikäsitteinen. Yhtälössä oleva todennäköisyys saadaan Bornin säännöstä, jonka esitteli Max Born vuonna 1926 [39]. Se on tärkeä kvanttimekaniikan postulaatti, joka yhdistää kvanttimekaanisen mittauksen klassiseen todennäköisyyteen. Bornin kaava on:

$$p_r = \text{tr}[\mathcal{O}_r\rho] = \text{tr}[\rho E_r],$$

missä olevat efektit  $E_r = \sum_j M_{r,j}^\dagger M_{r,j}$  muodostavat positiivioperaattorimitan (POVM) jos:

$$\sum_r E_r = I.$$

Tätä positiivioperaattorimittaa käytetään mittauksen kuvaamiseen. Kuten äsken todettiin, se on joukko efektejä, joiden summa on identiteettioperaattori. Jokainen efekti  $E_r$  vastaa mittaustulosta  $r$ .

Voidaan huomata, että saatu tila  $\rho_r(t+T)$  on ehdollinen tila ja riippuu mittaustuloksesta  $r$ . Jos ei haluta laskea ehdollista tilaa, jätetään mittaustulokset huomiotta ja saadaan keskimääräinen tila:

$$\rho(t+T) = \sum_r \mathcal{O}_r(T)\rho(t).$$

Usein rajoitutaan tapaukseen, jossa mittauslaitteen tila on puhdas, eli tila voidaan esittää muodossa  $\rho_m = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Tällöin mittaukset voidaan esittää yhden yksikäsitteisen mittausoperaattorin avulla:

$$\mathcal{O}_r\rho = \frac{M_r\rho M_r^\dagger}{p_r}.$$

Tässä tutkielmassa keskitytään tapaukseen, jossa myös systeemin tila on puhdas eli:

$$|\psi_r(t+T)\rangle = \frac{M_r(T)|\psi(t)\rangle}{\sqrt{p_r}}. \quad (1)$$

### 3 Yhteismittaus

Yksi kvanttimekaniikan merkittävimmistä ominaisuuksista on mittausten aiheuttama muutos systeemiin. Sen seurauksena ei voi mitata useampaa systeemin ominaisuutta, sillä ensimmäisen mittauksen jälkeen systeemin tila ei ole enää sama.

Kuitenkin on olemassa mittauksia, jotka eivät muuta systeemiä sillä tavalla, että ne muuttaisivat toisen mittauksen tulosta [38]. Tarkastellaan näiden erikoistapausta, yhteismittausta. Niiden ideana on mitata useampi suure yhdellä yhteismittauksella. POVMit  $A_i$  ovat yhteismitallisia, jos ne ovat jonkin yhteismittauksen  $G$  marginaaleja [40]:

$$A_i(x_i) = \sum_{x_j, j \neq i} G(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Tässä keskitytään paikan ja liikemäärän yhteismittaukseen. Täydellistä yhteismittausta ei ole mahdollista muodostaa näille suureille. Tämä johtuu Heisenbergin epätarkkuusperiaatteesta, jonka mainittiin jo aiemmin. Sen mukaan paikalla ja liikemäärällä on epätarkkuus, joka toteuttaa yhtälön [27]:

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Näille voidaan muodostaa likimääräinen yhteismittaus. Tämä tapahtuu käyttämällä Husimin  $Q$  jakaumaa [41] ja Wignerin funktiota [42]. Husimin jakauma on määritelty

$$Q(z) = \frac{\langle z | \rho | z \rangle}{\pi},$$

missä  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$  kun oletetaan, että se on koherentti tila  $|z\rangle$ . Tällöin se minimoi epävarmuuden paikka- ja liikemäärämittauksille [35].

Wignerin funktiosta saadaan täsmällinen todennäköisyysjakauma paikalle ja liikemäärälle. Wignerin funktio on

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{1}{2}x | \rho | q - \frac{1}{2}x \rangle e^{ipx/\hbar} dx,$$

ja näiden välillä on yhteys [43]:

$$Q(q, p) = \frac{1}{\pi} \int dq' dp' \exp[-(q - q')^2 - (p - p')^2] W(q', p').$$

Husimin jakauma on osoitettu olevan paikan ja liikemäärän yhteismittauksen todennäköisyysjakauma tietyissä tilanteissa [44–53] ja yleisemmin se on todennäköisyysjakauma, joka kuvaa kaikkia optimaalisia sumennettuja yhteismittauksia [54, 55]. Optimaalisella sumennetulla yhteismittauksella on mahdollisimman pieni epävarmuus eli  $\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}$  [35]. Todennäköisyysjakauma paikka- ja liikemäärämittauksille saadaan yhtälöillä:

$$P(q \in X) = \int_X dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W(q, p)$$

$$P(p \in Y) = \int_Y dp \int_{-\infty}^{\infty} dq W(q, p).$$

Käyttämällä tätä voidaan tehdä vastaavanlainen yhtälö Husimin jakaumalle:

$$\begin{aligned} \int_X dq \int dp Q(q, p) &= \frac{1}{\pi} \int_X dq \int dp \int dq' \int dp' e^{-(q-q')^2 - (p-p')^2} W(q', p') \\ &= \frac{1}{\pi} \int_X dq \int dq' \int dp' e^{-(q-q')^2} W(q', p') \int dp e^{-(p-p')^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_X dq \int dq' e^{-(q-q')^2} \text{tr}[\rho\hat{q}] \\ &= \text{tr}[\rho E_q(X)], \end{aligned}$$

missä paikan sumennettu POVM on  $E_q(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_X dq \int dq' \hat{q} e^{-(q-q')^2}$ . Samanlainen yhtälö voidaan saada Husimin jakaumasta myös liikemäärälle:

$$\begin{aligned}
\int_Y dp \int dq Q(q, p) &= \frac{1}{\pi} \int_Y dp \int dq \int dp' \int dq' e^{-(p-p')^2 - (q-q')^2} W(q', p') \\
&= \frac{1}{\pi} \int_Y dp \int dp' \int dq' e^{-(p-p')^2} W(q', p') \int dq e^{-(q-q')^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_X dp \int dp' e^{-(p-p')^2} \text{tr}[\rho \hat{p}] \\
&= \text{tr}[\rho E_p(X)].
\end{aligned}$$

Ja POVM  $E_p(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_Y dp \int dp' \hat{p} e^{-(p-p')^2}$ .

## 4 Master-yhtälö

Seuraavaksi tarkastellaan systeemin evoluutiota. Tätä kuvaa systeemin Hamiltoni, joka saatiin Jaynes-Cummings mallista. Puhtaan tilan evoluutiota kuvataan Schrödinger yhtälöllä [56]:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle.$$

Tämä yhtälö on helppo ratkaista ja ratkaisu on:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle.$$

Käyttämällä Schrödingerin yhtälöä saadaan vastaava yhtälö tiheysmatriisille:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= \frac{d}{dt} (|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|) \\ &= \frac{d}{dt} (|\psi(t)\rangle) \langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle \frac{d}{dt} (\langle\psi(t)|) \\ &= -i[\hat{H}, \rho(t)]. \end{aligned}$$

Tätä kutsutaan Liouville-von Neumann yhtälöksi. Se kuvaa systeemin evoluutiota, kun mikään ulkopuolinen tekijä ei vaikuta siihen. Tällaista systeemiä kutsutaan suljetuksi.

Mikään oikea systeemi ei kuitenkaan ole täysin suljettu. Tarkastellaan siis avoimia systeemejä, joilla on jokin ympäristö, joka vaikuttaa systeemiin. Nämä ovat kuitenkin monimutkaisempia kuin suljetut systeemit, eikä Schrödingerin tai Von Neumannin yhtälö enää riitä kuvaamaan systeemin evoluutiota. Tässä kappaleessa esittelen Von Neumannin yhtälöä korvaavan yhtälön, ns. master-yhtälön:

$$\dot{\rho} = -i[\hat{H}, \rho] + \kappa \mathcal{D}(\hat{a})\rho.$$

Master-yhtälöstä on useita muotoja. Seuraavassa kappaleessa johdetaan Born-Markov master-yhtälö ja siitä systeemin tilalle Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad master-yhtälö.

## 4.1 Born-Markov master-yhtälö

Tässä kappaleessa esitellään ja johdetaan Born-Markov master-yhtälö. Tämä johto seuraa kirjaa [1]. Aloitetaan määrittelemällä systeemin tila uudelleen, tällä kertaa huomioiden ympäristö  $\rho = \rho_S \otimes \rho_E$ . Nyt vastaava Von Neumannin yhtälö olisi muotoa

$$\dot{\rho}(t) = -i[\hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_I, \rho(t)],$$

missä  $\hat{H}_E$  on ympäristöä ja  $\hat{H}_I$  ympäristön ja systeemin vuorovaikutusta kuvaava Hamiltoni. Seuraavaksi vaihdetaan vuorovaikutuskuvaan ja saadaan vastaava yhtälö

$$\dot{\rho}_I(t) = -i[\hat{V}_I(t), \rho_I(t)],$$

missä:

$$\begin{aligned}\hat{V}_I(t) &= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_I e^{-i\hat{H}_0 t} = e^{i(\hat{H}_S + \hat{H}_E)t} \hat{H}_I e^{-i(\hat{H}_S + \hat{H}_E)t} \\ \rho_I(t) &= e^{i\hat{H}_0 t} \rho e^{-i\hat{H}_0 t}.\end{aligned}$$

Koska systeemin ja ympäristön välinen vuorovaikutus on heikkoa, voidaan differentiaaliyhtälö ratkaista perturbaatioteorian mukaisesti aluksi integroimalla:

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) - i \int_0^t dt_1 [\hat{V}_I(t_1), \rho_I(t_1)],$$

ja sitten sijoittamalla takaisin:

$$\dot{\rho}_I(t) = -i[\hat{V}_I(t), \rho_I(0)] - \int_0^t dt_1 [\hat{V}_I(t), [\hat{V}_I(t_1), \rho_I(t_1)]].$$

Koska olemme kiinnostuneita vain systeemin tilan kehityksestä, voidaan ottaa jälki ympäristön yli ja saadaan:

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -i\text{Tr}_E([\hat{V}_I(t), \rho_I(0)]) - \int_0^t dt_1 \text{Tr}_E([\hat{V}_I(t), [\hat{V}_I(t_1), \rho_I(t_1)]]).$$

Koska vuorovaikutus on heikko, voidaan approksimoida tilaa hetkellä  $t = 0$ :

$$\rho_I(0) = \rho_{S,I}(0) \otimes \rho_{E,I}(0).$$

Lisäksi jaetaan vuorovaikutuskuvan Hamiltoni kahteen osaan:

$$\hat{V}_I(t) = \hat{V}_{S,I}(t) + \hat{V}_{SE,I}(t).$$

Tämä jako tapahtuu siten, että  $V_{S,I}$  on systeemiin vaikuttava osa, ja  $\hat{V}_{SE,I}$  on loput vuorovaikutuksen Hamiltonista.  $\hat{V}_{SE,I}$  lisäksi toteuttaa yhtälön  $\text{Tr}_E[\hat{V}_{SE,I}(t)\rho_I(0)] = 0$ . Seuraavaksi oletetaan ettei ympäristö muutu, kun se vuorovaikuttaa systeemin kanssa. Tällöin  $\rho_I(t) \approx \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_{E,I}(0)$ . Tätä kutsutaan Bornin approksimaatioksi. Näin voidaan olettaa, koska vuorovaikutus on heikko ja ympäristö suuri. Tästä saadaan yhtälö:

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -i[\hat{V}_{S,I}(t), \rho_I(t)] - \int_0^t dt_1 \text{Tr}_E([\hat{V}_{SE,I}(t), [\hat{V}_{SE,I}(t_1), \rho_{S,I}(t_1) \otimes \rho_{E,I}(0)]]).$$

Seuraavaksi tehdään vielä Markov approksimaatio. Siinä oletetaan, että ympäristön suuren koon ja lähekkäisten energiatasojen seurauksena systeemi vaikuttaa yhtä paljon eri energiatasojen kanssa, jolloin voidaan olettaa integrandin olevan pieni  $t_1 \approx t$  lähistön ulkopuolella. Tällöin voidaan kirjoittaa integrandissa  $\rho_I(t_1) \approx \rho_I(t)$

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -i[\hat{V}_{S,I}(t), \rho_I(t)] - \int_0^t dt_1 \text{Tr}_E([\hat{V}_{SE,I}(t), [\hat{V}_{SE,I}(t_1), \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_{E,I}(0)]]).$$

Tätä kutsutaan Redfield yhtälöksi. Vaikka aikaisempaa approksimaatiota kutsutaankin Markov approksimaatioksi, yhtälö ei silti ole Markovinen. Jotta yhtälöstä saadaan Markovinen täytyy tehdä vielä voimakkaampi Markov approksimaatio. Samoilla perusteluilla muutetaan integraalin alarajaksi  $-\infty$ :

$$\dot{\rho}_{S,I}(t) = -i[\hat{V}_{S,I}(t), \rho_I(t)] - \int_{-\infty}^t dt_1 \text{Tr}_E([\hat{V}_{SE,I}(t), [\hat{V}_{SE,I}(t_1), \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_{E,I}(0)]]).$$

Tämä on viimein Born-Markov master-yhtälö.

## 4.2 Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad master-yhtälö

Toinen tärkeä muoto master-yhtälölle on Lindblad muoto. Evoluution  $\mathcal{N}_t : \rho(0) \rightarrow \rho(t) = \mathcal{N}_t \rho(0)$  saa Markovista dynamiikkaa vastaavat ominaisuudet, jos  $\mathcal{N}_t$  muodostavat kvanttidynaamisen puoliryhmän. Kvanttidynaaminen puoliryhmä on puoliryhmä täyspositiivisia kuvauksia, jotka toteuttavat ehdot:

- 1)  $\mathcal{N}_t \mathcal{N}_s = \mathcal{N}_{t+s}$
- 2)  $\text{tr}[(\mathcal{N}_t \rho) \hat{A}]$  on jatkuva  $t$ :n funktio mille tahansa tiheysmatriisille  $\rho$  tai hermiittiselle operaattorille  $\hat{A}$ .

Vuonna 1976 V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan johtivat tästä, että kvanttidynaamisen puoliryhmän generaattorit ovat äärellisulotteiselle Hilbertin avaruudelle muotoa [57]

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho_s] + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} (\hat{F}_i \rho_s \hat{F}_j^\dagger - \{\hat{F}_j^\dagger \hat{F}_i, \rho_s\}).$$

Samanaikaisesti G. Lindblad johti samanlaisen tuloksen separoituville Hilbertin avaruuksille, jossa generaattorit ovat rajoitettuja [58]:

$$\dot{\rho} = -i[\hat{H}, \rho_s] + \sum_i^{N^2-1} \kappa_i (\hat{A}_i \rho_s \hat{A}_i^\dagger - \{\hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i, \rho_s\}).$$

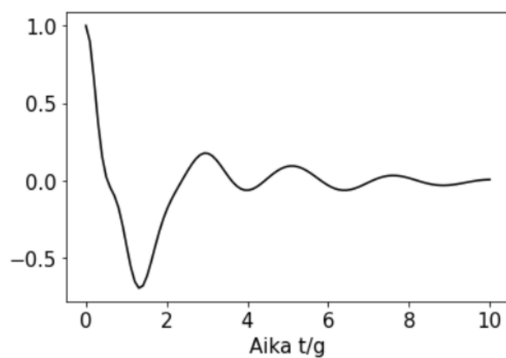
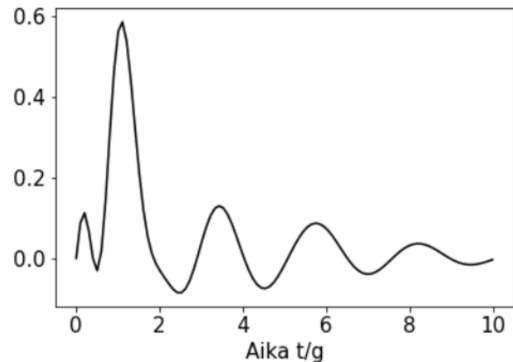
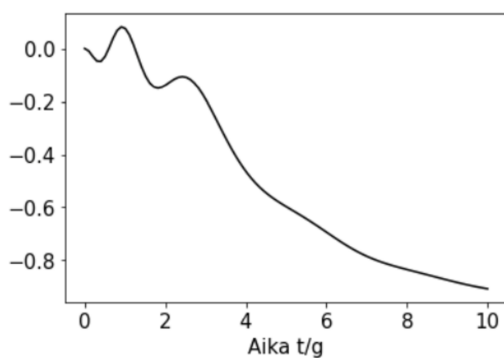
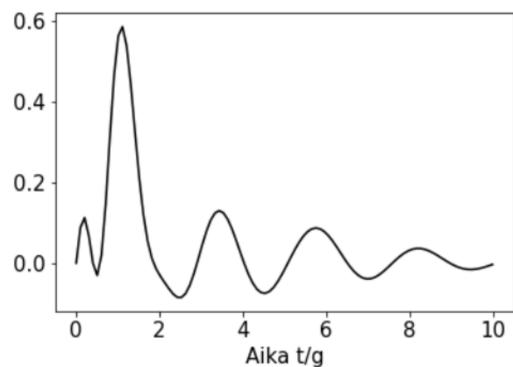
Tätä kutsutaan Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad (GKSL) master-yhtälöksi. Tämän muotoinen yhtälö voidaan johtaa Born-Markov master-yhtälöstä käyttämällä Hamiltonia, joka saadaan Jaynes-Cummings mallista ja tekemällä RWA. Tämä todistus on käyty tarkemmin läpi kirjassa [1]. Tästä saadaan yhtälö

$$\dot{\rho} = -i[\hat{H}, \rho] + \kappa \mathcal{D}(\hat{a})\rho,$$

missä  $\mathcal{D}(\hat{a})\rho = (\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \{\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho\})$ . Tätä evoluutiota on esitelty kuvassa 10. Siinä on näytetty atomin kehitystä käyttäen Blochin hajotelmaa. Evoluutio alkaa tilasta, jossa atomi havaitaan aina olevan viritystilassa. Evoluution aikana todennäköisyys, että atomi havaitaan perustilassa kasvaa ja lopussa se havaitaan ainoastaan perustilassa. Voidaan huomata, ettei todennäköisyys ole täysin laskeva, vaan se nousee hetkellisesti välissä. Syy tälle on havaittavissa kuvasta (d), jossa dissipaatiokerroin on laitettu nolllaksi. Nähdään, että todennäköisyys ei pysy vakiona vaan oskilloi. Tämä johtuu atomin ja sähkökentän vuorovaikutuksesta, jossa ne vaihtavat keskenään fotoneita. Koherenssit pysyvät tässä tapauksessa nolllana, koska evoluutio aloitettiin viritystilasta.

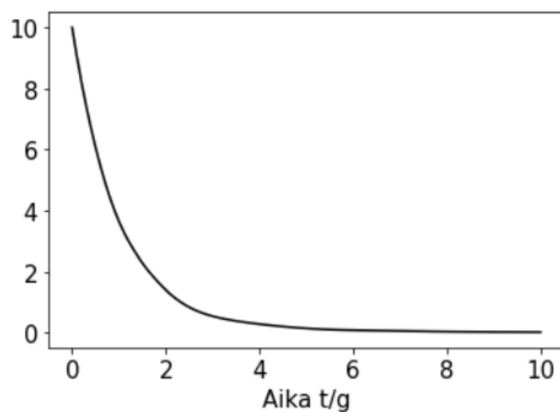
Kuten johdannossa mainittiin, dissipaatio aiheuttaa dekoherenssin, joka voidaan myös haivaita kuvista. Tilan "koherenssit" eli Blochin hajotelman  $\sigma_z$  ja  $\sigma_y$  termit lähestyvät nolllaa, jolloin systeemi käyttäytyy "klassisemmin". Tämä ilmiö tullaan näkemään myös tulevissa kuvaajissa.

Yksinkertaistetaan kuvien piirtämistä eliminoimalla parametri  $g$  muuttamalla aikaskaalaa. Tällöin saan uudet parametrit  $\tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{g}$ ,  $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{g}$ ,  $\tilde{\omega}_c = \frac{\omega_c}{g}$  ja  $g$  häviää yhtälöstä.

(a)  $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$  komponentti(b)  $\langle \hat{\sigma}_y \rangle$  komponentti(c)  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$  komponentti(d)  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$  komponentti, kun  $\tilde{\kappa} = 0$ 

Kuva 10: Atomin tilan kehitys GKSL master-yhtälön mukaan numeerisesti ratkaisuna. Kuvissa on esitetty atomin tilan Bloch-hajotelman eri komponentit, jotka saadaan GKSL master-yhtälöstä laskemalla  $\langle \hat{\sigma}_i \rangle = \text{tr}[\hat{\sigma}_i \rho]$  Atomi on aluksi tilassa  $|\psi(0)\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$  ja kuvaajista nähdään sen lähestyvän perustilaa  $|g\rangle$ . Sähkökentän fotonien lukumääräksi alussa valittiin kymmenen. Muut vakiot ovat:  $\tilde{\kappa} = 1$ ,  $\tilde{\omega}_c = 2$ ,  $\tilde{\omega} = 1$ . Kuvassa (d)  $\tilde{\kappa} = 0$ , jolloin ei lähestytäkään perustilaa, mutta sähkökenttä ja atomi silti vaihtavat fotoneita, joka nähdään oskilloivasta  $\langle \hat{\sigma}_i \rangle$  arvosta.

Kuvassa 11 kuvataan sähkökentän fotonien lukumäärän evoluutio. Fotonien määrä laskee nopeudella, joka riippuu dissipaatiokertoimesta  $\kappa$ .  $\kappa$  vaikuttaa samalla tavalla myös atomin siirtymiseen viritystilasta perustilaan. Tämä vastaa intuitiota: Jos on kaviteetti, joka vuotaa fotoneita sähkökentän, fotonien määrä laskee. Lisäksi, koska kaviteetissa oleva energian määrä laskee, atomi on todennäköisemmin perustilassa.



Kuva 11: Sähkökentän fotonien lukumäärän kehitys  $\langle \hat{n} \rangle = \text{tr}[\hat{n}\rho]$ , kun GKSL master-yhtälö on ratkaistu numeerisesti. Sähkökentän fotonien lukumäärä on aluksi kymmenen. Muut vakiot ovat:  $\tilde{\kappa} = 1$ ,  $\tilde{\omega}_c = 2$ ,  $\tilde{\omega} = 1$ .

## 5 Stokastinen master-yhtälö

Entä jos ympäristön sijasta systeemiin vaikuttaakin jokin mittalaite? Miten mittalaitteen vaikutusta voidaan kuvata? Ilman mittausta systeemillä tapahtuu normaali master-yhtälön kaltainen evoluutio. Jos tähän systeemiin tehdään jokin mittaus  $M$ , tila muuttuu kappaleessa 2 esitellyn yhtälön (1) mukaisesti. Tätä muutosta kutsutaan hyppyksi. Hyppy on satunnainen, koska mittaustulos on satunnainen. Nyt jos mittaus on jatkuva, se aiheuttaa jatkuvaa muutosta systeemissä. Tätä voi ajatella ikään kuin kohinana. Tällöin kehitys on muotoa

$$\dot{\rho} = F(\rho) + \xi(t)G(\rho),$$

missä  $F$  on normaali evoluutio ja  $\xi$  satunnainen kohina. Tätä kutsutaan stokastiseksi differentiaaliyhtälöksi (SDE). SDE voi esiintyä myös muodossa:

$$d\rho = A(\rho)dt + z(t)B(\rho)dW.$$

Tätä kutsutaan Ito muotoiseksi SDE:ksi. Aikaisempaa taas kutsutaan sen Stratonovich muodoksi. Näistä kerrotaan lisää liitteessä A. Seuraavaksi johdetaan stokastinen differentiaali yhtälö tilan evoluutiolle eli stokastinen master-yhtälö. Sovelletaan se myös tutkittavaan systeemiin. Johdetaan tutkittavan systeemin tilalle tällainen stokastinen master-yhtälö (SME). Tässä johdossa seuraan kirjoja [1, 26].

### 5.1 Suora mittaus

Johdetaan nyt tilan evoluutiota kuvaava yhtälö suoralle mittaukselle, joka esiteltiin johdannossa. Aloitetaan jo aikaisemmin esitellyistä yhtälöistä. Ilman mittausta tilan evoluutio on Schrödinger yhtälön mukaan:

$$|\psi(t+T)\rangle = \exp(-i\hat{H}T) |\psi(t)\rangle.$$

Nyt mitataan systeemiä infinitesimaalisen ajan  $dt$ . Aiemmin mainittu mittauksen vaikutus tilan evoluutioon on yhtälön (1) mukaan:

$$|\psi_r(t+dt)\rangle = \frac{\hat{M}_r(dt) |\psi(t)\rangle}{\sqrt{P_r}}.$$

Kuten aiemmin mainitsin, suorassa mittauksessa systeemiä mitataan fotonidetektorilla. Tällöin saadaan mittaustulokseksi  $M_1(dt)$  kun ajassa  $dt$  detektoidaan fotoni ja  $M_0(dt)$  kun ei detektoida yhtään. Nämä mittaustulokset voidaan esittää muodossa:

$$\begin{cases} M_1(dt) &= \hat{c}\sqrt{dt} \\ M_0(dt) &= I - \left( \frac{\hat{c}^\dagger\hat{c}}{2} + i\hat{H} \right) dt \end{cases},$$

missä  $\hat{c} = \kappa\hat{a}$ . Olkoon nyt  $N(t)$  mitattujen fotonien määrä ja luodaan siitä stokastinen askel  $dN(t)$ . Tällöin  $dN(t) = 1$ , kun havaitaan fotoni ajassa  $dt$ , ja  $dN(t) = 0$ , kun ei havaita yhtään fotonia.  $dN(t)$  voi siis saada vain 2 arvoa, jolloin se on Poisson askel. Nyt voidaan kirjoittaa tilan muutos Ito muotoisena stokastisena differentiaaliyhtälönä:

$$d|\psi(t)\rangle = dN(t) |\psi_1(t+dt)\rangle + (1 - dN(t)) |\psi_0(t+dt)\rangle,$$

missä:

$$|\psi_r(t+dt)\rangle = \frac{M_r(dt) |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle M_r^\dagger(dt) M_r(dt) \rangle(t)}}.$$

Tästä saadaan stokastinen Schrödinger yhtälö (SSE):

$$d|\psi(t)\rangle = [dN(t) \left( \frac{\hat{c}}{\sqrt{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle(t)}} \right) + (1 - dN(t))dt \left( \frac{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle(t)}{2} - \frac{\hat{c}^\dagger \hat{c}}{2} - i\hat{H} \right)] |\psi(t)\rangle.$$

Tällaisen stokastisen yhtälön ratkaisua kutsutaan trajektoriksi, koska yhtälön ratkaisu eli tilan  $|\psi(t)\rangle$  evoluutio on satunnainen ja riippuu satunnaisen stokastisen prosessin  $dN(t)$  arvoista.

Tätä yhtälöä voidaan sieventää. Kun  $dN(t) = 0$  jää jäljelle vain  $dt$  termi. Toisaalta kun  $dN(t) = 1$ ,  $dN(t)dt = dt$ , jolloin saadaan yhtälö muotoon:

$$d|\psi(t)\rangle = [dN(t) \left( \frac{\hat{c}}{\sqrt{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle(t)}} \right) + dt \left( \frac{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle(t)}{2} - \frac{\hat{c}^\dagger \hat{c}}{2} - i\hat{H} \right)] |\psi(t)\rangle.$$

Lasketaan tästä tiheysmatriisi  $\rho$ , ja otetaan keskiarvo, jolloin saadaan yhtälö:

$$\begin{aligned} d\rho &= E[d(|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|)] \\ &= E[d|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle d\langle \psi(t)| + d|\psi(t)\rangle d\langle \psi(t)|] \\ &= -idt[H, \rho] + dt\mathcal{D}(c)\rho. \end{aligned}$$

Tästä jakamalla  $dt$ :llä saadaan GKSL master-yhtälö. Näin ollen trajektorien keskiarvo vastaa GKSL master-yhtälöä, niin kuin kuuluukin.

## 5.2 Homodyynimittaus

Seuraavaksi käytetään fotonidetektorin sijaan fotodiodia systeemin mittaamiseen. Tällöin mittari antaa jonkin sähkövirran  $I$ . Voidaan silti käyttää äskeistä SSE:tä, sillä ainoastaan fotonien havaitsemistapa on muuttunut. Määritellään  $\rho_I(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ , jossa  $|\psi(t)\rangle$  saadaan SSE:stä. Tällöin saadaan stokastinen master-yhtälö (SME)

$$d\rho_I(t) = \left( dN(t)\mathcal{G}[\hat{c}] - dt\mathcal{H} \left[ i\hat{H} + \frac{\hat{c}^\dagger \hat{c}}{2} \right] \right) \rho_I(t),$$

missä käytetään merkintöjä:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[\hat{r}]\rho &= \hat{r}\rho\hat{r}^\dagger - \frac{1}{2}(\hat{r}^\dagger\hat{r}\rho + \rho\hat{r}^\dagger\hat{r}) \\ \mathcal{G}[\hat{r}]\rho &= \frac{\hat{r}\rho\hat{r}^\dagger}{\text{tr}[\hat{r}\rho\hat{r}^\dagger]} \\ \mathcal{H}[\hat{r}]\rho &= \hat{r}\rho + \rho\hat{r}^\dagger - \text{tr}[\hat{r}\rho + \rho\hat{r}^\dagger]\rho.\end{aligned}$$

Äskeisessä yhtälössä ei tehty vielä homodyynimittausta, koska lokaalia oskillaattoria ei ole lisätty. Matemaattisesti sen lisääminen tapahtuu muunnoksena  $\hat{c} \rightarrow \hat{c} + \gamma$ , missä  $\gamma$  on homodyynimittaukseen liittyvän oskillaattorin amplitudi.

Koska  $\gamma$  on hyvin suuri, jätetään vain termi  $\gamma^{-1/2}$  ja hyödynnetään tietoa, että mittausten lukumäärä on suuri ja saadaan:

$$d\rho_J(t) = -i[\hat{H}, \rho_J(t)]dt + dt\mathcal{D}[\hat{c}]\rho_J(t) + dW(t)\mathcal{H}[\hat{c}]\rho_J(t).$$

Kuten aiemmin sanottiin, kohina lähestyy Gaussista kun mittausaika  $dt$  lähestyy nollaa. Koska Wiener-prosessi  $W(t)$  on Gaussisen prosessin integraali,  $dW(t)$  on Wiener-askel. Koska sähkövirta  $I$  muuttui, käytetään tästä eteenpäin uudelle sähkövirralle merkintää  $J$ . Tämä on homodyynimittauksen SME. Sillä voidaan mitata hyvin systeemin kvadratuuri.

### 5.3 Heterodyynimittaus

Haluamme kuitenkin mitata kaksi vastakkaista kvadratuuria. Kuten aiemmin mainittiin tämä tapahtuu heterodyynimittauksen avulla. Käyttämällä homodyynimittauksen yhtälöä saadaan heterodyynimittauksen yhtälö detuunaamalla oskillaattorin taajuus  $\Delta$ :n verran systeemin suurimman taajuuden yläpuolelle:

$$d\rho_J(t) = -i[H, \rho_J(t)]dt + dt\mathcal{D}[c]\rho_J(t) + dW(t)[e^{i\Delta}(c\rho_J(t) - \langle c \rangle_J(t)\rho_J(t)) + h, c].$$

Jos jaetaan Wiener-askel  $dW$  kahteen osaan saadaan yhtälö, joka vastaa kahden homodyynimittauksen samanaikaista mittaamista:

$$d\rho_J(t) = -i[H, \rho_J(t)]dt + dt\mathcal{D}[c]\rho_J(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}(dW_x(t)\mathcal{H}[c] + dW_y(t)\mathcal{H}[-ic])\rho_J(t).$$

Määritellään uusi Wiener-prosessi  $dZ = (dW_x + dW_y)/\sqrt{2}$  ja saadaan yhtälö:

$$d\rho_J(t) = -i[H, \rho_J(t)]dt + dt\mathcal{D}[c]\rho_J(t) + \mathcal{H}[dZ^*(t)c]\rho_J(t).$$

Tätä vastaava SSE vaimenevalle kaviteetille on:

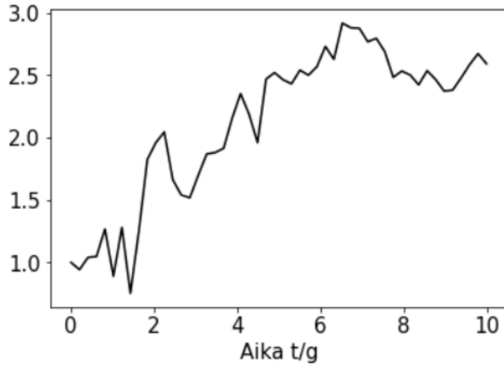
$$d|\psi\rangle = (-i\hat{H}|\psi\rangle - \frac{\kappa}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle)dt + \sqrt{\kappa}\hat{a}|\psi\rangle dZ.$$

Stratonovich muodossa se on:

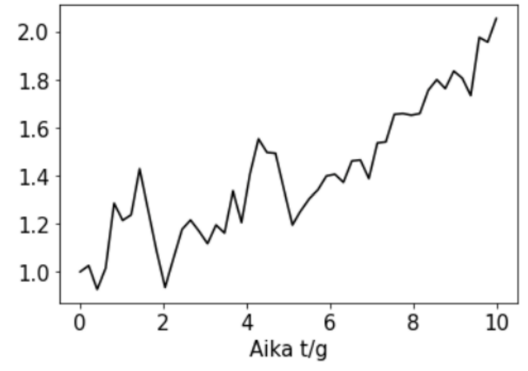
$$\partial_t|\psi\rangle = -i\hat{H}|\psi\rangle - \frac{\kappa}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle + \sqrt{\kappa}\hat{a}z^*(t)|\psi\rangle.$$

Tästä on helppo laskea stokastinen master-yhtälö. Katsotaan nyt tätä yhtälöä. Normaalin Hamiltonin lisäksi on termi  $-\frac{\kappa}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}$ . Se kuvastaa systeemissä tapahtuvaa dissipaatiota. Vakio  $\kappa$  kuvaa vauhtia, jolla fotoneja säteilee pois kaviteetista. Siinä on myös numero-operaattori  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ . Näin ollen dissipaatio on myös suoraan riippuvainen kaviteetissa olevien fotonien määrästä.

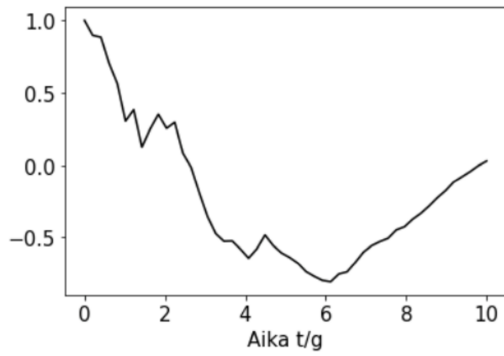
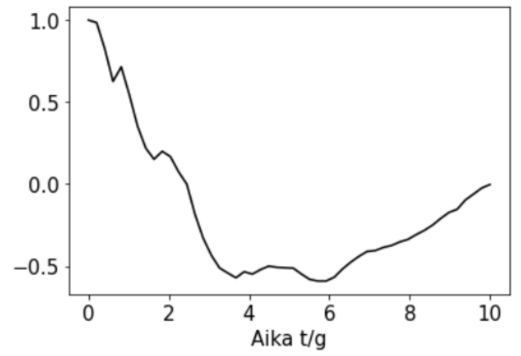
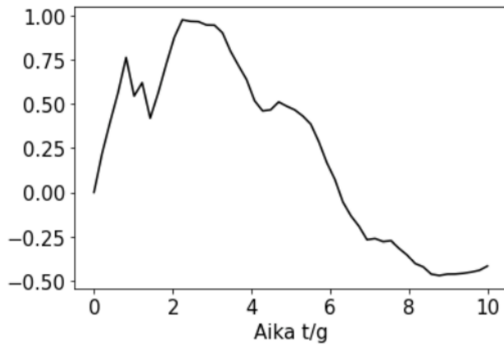
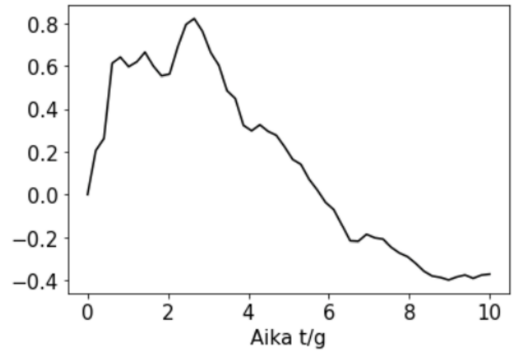
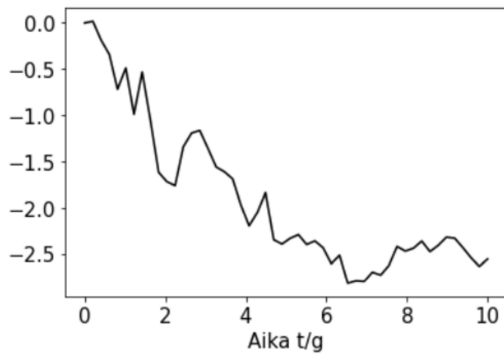
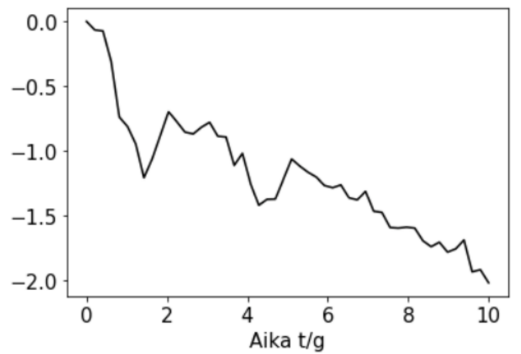
Viimeinen termi on yhtälön ainut stokastinen termi ja kuvaa systeemissä tapahtuvaa kohinaa. Myös tämä on riippuvainen dissipaatiokertoimesta  $\kappa$ . Tällä termillä on myös suuri vaikutus saatavaan tilaan. Kuvassa 12 on esitelty tilan kehitys eri trajektoreilla, eli eri kohinalla  $z(t)$ . Voidaan havaita, että tulokset ovat pääpiirteittäin samat, mutta eroavat silti merkittävästi satunnaisen kohinan takia. Kuitenkin, jos katsotaan 2000 trajektorin keskiarvoa, kuten kuvassa 13, nähdään, että saadaan sama tulos kuin GKSL-yhtälöstä.



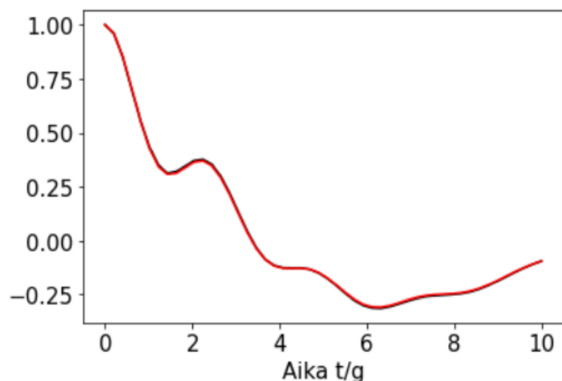
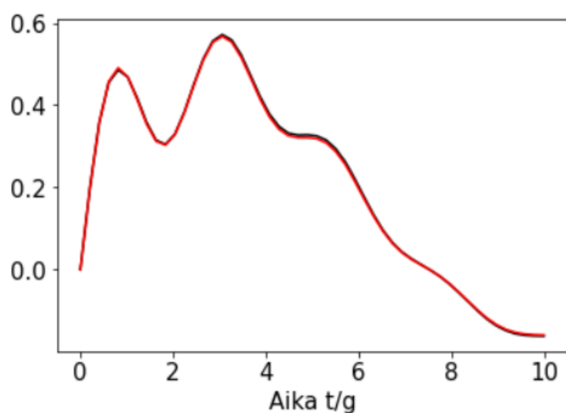
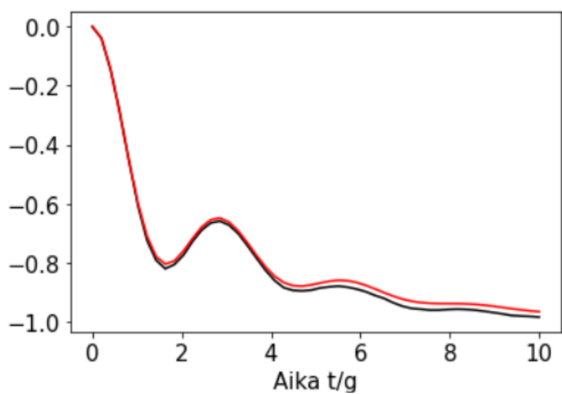
(a) 1. trajektorin jälki



(b) Toisen trajektorin jälki

(c) 1. trajektorin  $\hat{\sigma}_x$  komponentti(d) Toisen trajektorin  $\hat{\sigma}_x$  komponentti(e) 1. trajektorin  $\hat{\sigma}_y$  komponentti(f) Toisen trajektorin  $\hat{\sigma}_y$  komponentti(g) 1. trajektorin  $\hat{\sigma}_z$  komponentti(h) Toisen trajektorin  $\hat{\sigma}_z$  komponentti

Kuva 12: Verrataan kahta eri trajektoria. Atomin evoluutio on aloitettu tilasta  $|\psi(0)\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$  ja muut muuttujien arvot ovat  $\tilde{\omega}_c = 2$ ,  $\tilde{\omega} = 1$ ,  $\tilde{\kappa} = 1$ . Kaviteetissa on aluksi nolla fonia.

(a)  $\hat{\sigma}_x$  komponentti(b)  $\hat{\sigma}_y$  komponentti(c)  $\hat{\sigma}_z$  komponentti

Kuva 13: Vertaillaan stokastisen yhtälön antamat tuloksia (musta), kun on otettu keskiarvo 2000 trajektorista ja GKSL master-yhtälön antamaa evoluutiota atomin tilalle (punainen). Systemin alkutila on  $|\psi(0)\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$  ja parametrien arvot ovat  $\tilde{\omega}_c = 2$ ,  $\tilde{\omega} = 1$ ,  $\tilde{\kappa} = 1$ . Kaviteetissa on aluksi nolla fotonia. Kuvasta voidaan nähdä stokastisen master-yhtälön antavan keskimäärin saman evoluution kuin GKSL master-yhtälö.

## 6 Hierarkkinen kuvaus atomille kaviteetissa

Kun stokastinen master-yhtälö systeemille on selvitetty, se täytyisi saada ratkaistua. Tähän käytetään cHEOMia (conditioned hierarchical equation of motion) [29]. Tämän kaltaisia hierarkkisia menetelmiä on käytetty menestyksekkäästi stokastisten schrödinger yhtälöiden ratkaisuun, varsinkin ei-Markovisille systeemeille [30, 59–62]. Tässä keskityn Link *et al.* esittelemään cHEOM menetelmään ja käytän sitä Markovisille systeemille, korvaamaan adiabaattisen eliminaation. Adiabaattinen eliminatio, josta on kerrottu lisää liitteessä B, on menetelmä, jolla voi eliminoida ympäristön master-yhtälöstä, jättäen vain systeemin, jota haluamme tarkastella. Se on kuitenkin approksimaatio, joka toimii vain tietyllä rajalla, joten käytämme ympäristön eliminointiin cHEOMia. Se toimii seuraavasti:

Aloitetaan käyttämällä Bargmann tilaa

$$|\psi_t\rangle = \int d^2\xi \frac{e^{-|\xi|^2}}{\pi} \Psi_t(\xi^*) |\xi\rangle,$$

missä  $\Psi_t(\xi^*) = \langle \xi | \psi_t \rangle$ . Käyttämällä aiemmassa kappaleessa esiteltyä Stratonovich muotoista yhtälöä heterodyynimittaukselle voidaan laskea  $tr_C[\partial_t(|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|)]$  stokastisesta Schrödinger yhtälöstä:

$$\begin{aligned} tr_C[\partial_t(|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|)] &= -i \int d^2\xi \frac{e^{-|\xi|^2}}{\pi} \left( (\omega_c - i\frac{\kappa}{2}) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \Psi(\xi^*) (\Psi(\xi^*))^* \right. \\ &\quad + \frac{\omega}{2} \hat{\sigma}_z \Psi(\xi^*) (\Psi(\xi^*))^* \\ &\quad + g \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{\sigma}_- \Psi(\xi^*) (\Psi(\xi^*))^* \\ &\quad + g \frac{\partial}{\partial \xi^*} \hat{\sigma}_+ \Psi(\xi^*) (\Psi(\xi^*))^* \\ &\quad \left. + i\kappa z^*(t) \frac{\partial}{\partial \xi^*} \Psi(\xi^*) (\Psi(\xi^*))^* \right) + h.c. \end{aligned}$$

Tässä on lisäksi esitelty  $\xi^*$  muodossa:  $\xi^* = \frac{\partial}{\partial \xi}$ . Muodostetaan seuraavaksi vastaava Stratonovich yhtälö aputilalle:

$$|\psi^{(n)}\rangle = (ig)^n \frac{\partial^n}{\partial (\xi^*)^n} |\psi\rangle.$$

Nämä aputilat tulevat muodostamaan aiemmin mainitun puhtaiden tilojen hierarkian. Aputilojen Stratonovich yhtälöt ovat:

$$\begin{aligned} \partial_t |\psi^{(n)}\rangle &= (ig)^n \frac{\partial^n}{\partial (\xi^*)^n} \partial_t |\psi\rangle \\ &= (ig)^n \frac{\partial^n}{\partial (\xi^*)^n} (-iH - \frac{\kappa}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sqrt{\kappa} \hat{a} z^*(t)) |\psi\rangle \\ &= (ig)^n \frac{\partial^n}{\partial (\xi^*)^n} (-i(\frac{\omega}{2} \hat{\sigma}_z + (\omega_c + \frac{\kappa}{2i}) \xi^* \frac{\partial}{\partial \xi^*} + g(\hat{\sigma}_- \xi^* + \hat{\sigma}_+ \frac{\partial}{\partial \xi^*})) + \sqrt{\kappa} \frac{\partial}{\partial \xi^*} z^*(t)) |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Seuraavaksi halutaan poistaa derivaatat saadusta yhtälöstä. Derivaatat voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial (\xi^*)^n} \xi^* \frac{\partial}{\partial \xi^*} |\psi\rangle &= n \frac{\partial^n}{\partial (\xi^*)^n} |\psi\rangle + \xi^* \frac{\partial^{n+1}}{\partial (\xi^*)^{n+1}} |\psi\rangle \\ \frac{\partial^n}{\partial (\xi^*)^n} \xi^* |\psi\rangle &= n \frac{\partial^{n-1}}{\partial (\xi^*)^{n-1}} |\psi\rangle + \xi^* \frac{\partial^n}{\partial (\xi^*)^n} |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Tällöin hierarkkiset yhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\begin{aligned} \partial_t |\psi^{(n)}\rangle &= ng^2 \hat{\sigma}_- |\psi^{(n-1)}\rangle - i(\frac{\omega}{2} \hat{\sigma}_z + g \hat{\sigma}_- \xi^* + n(\omega_c + \frac{\kappa}{2i})) |\psi^{(n)}\rangle \\ &\quad + (\frac{\sqrt{\kappa}}{ig} z^*(t) - \frac{\omega_c + \frac{\kappa}{2i}}{g} \xi^* - \hat{\sigma}_+) |\psi^{(n+1)}\rangle. \end{aligned}$$

Tästä on helppo muodostaa vastaava yhtälö tiheysmatriisille käyttämällä kaavaa  $\rho_A^{n,m} = \text{tr}_C[|\psi^{(n)}\rangle \langle \psi^{(m)}|]$ . Tästä yhtälöstä poistetaan vielä  $\xi$ :t käyttämällä  $|\psi^{(n)}\rangle$ :n määritelmästä saatavia yhtälöitä  $\rho_A^{n,m}$ :lle:

$$\begin{aligned} \text{tr}_C[-ig\xi^* |\psi^{(n)}\rangle \langle \psi^{(m)}|] &= \rho_A^{(n,m+1)} \\ \text{tr}_C[ig\xi |\psi^{(n)}\rangle \langle \psi^{(m)}|] &= \rho_A^{(n+1,m)}. \end{aligned}$$

Nyt saadaan lopullinen puhtaiden tilojen hierarkia cHEOM:

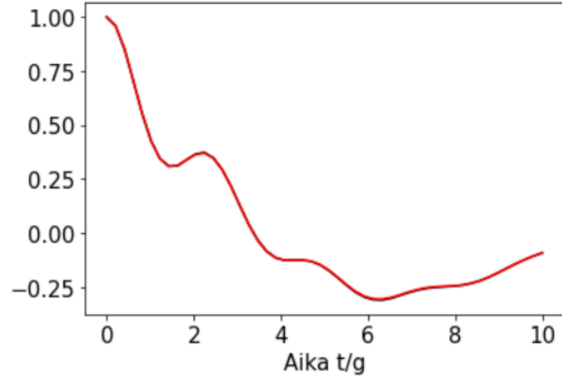
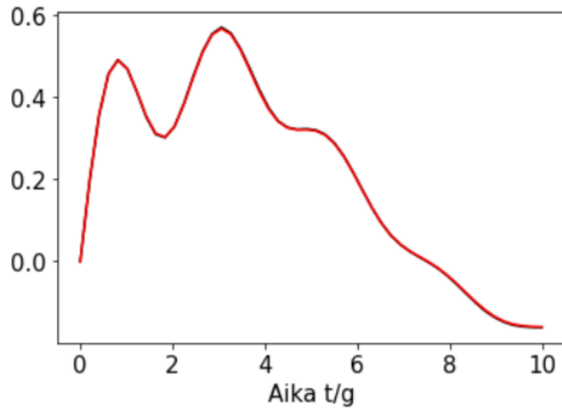
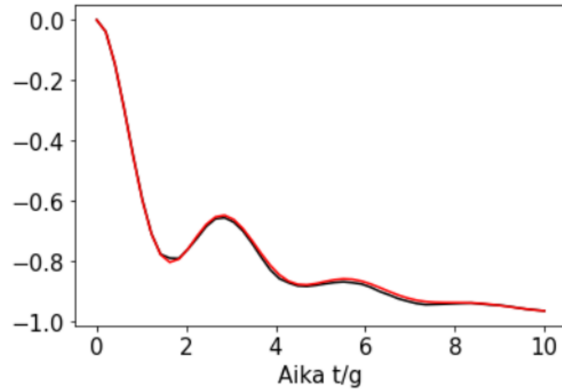
$$\begin{aligned} \partial_t \rho_A^{(n,m)} &= g^2(n\hat{\sigma}_- \rho_A^{(n-1,m)} + m\rho_A^{(n,m-1)}\hat{\sigma}_+) + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(n,m)}] \\ &+ i((\omega_c - \frac{\kappa}{2i})m - (\omega_c + \frac{\kappa}{2i})n)\rho_A^{(n,m)} + [\hat{\sigma}_-, \rho_A^{(n,m+1)}] - [\hat{\sigma}_+, \rho_A^{(n+1,m)}] \\ &+ \frac{\sqrt{\kappa}}{ig}(z^*(t)\rho_A^{(n+1,m)} - z(t)\rho_A^{(n,m+1)}) - \frac{\kappa}{g^2}\rho_A^{(n+1,m+1)}. \end{aligned}$$

Tästä voidaan nyt ratkaista  $\rho_A^{(0,0)}$ , joka määritelmän mukaan on atomin tila  $\rho_A$ . Nähdään, että kukin tila riippuu tiloista sekä suuremmilla että pienemmillä hierarkia indeksien arvoilla. Pienempiin indekseihin liittyvät termit ovat:  $g^2(n\hat{\sigma}_- \rho_A^{(n-1,m)} + m\rho_A^{(n,m-1)}\hat{\sigma}_+)$ . Näin ollen esimerkiksi  $\rho_A^{(n-1,m-1)}$  ei vaikuta suoraan  $\rho_A^{(n,m)}$ :n evoluutioon. Nämä termit eivät myöskään sisällä dissipaatiokerrointa  $\kappa$ , mikä kertoo meille tämän riippuvuuden luonteesta.

Suuremmat indeksit taas vaikuttavat hyvin eri tavalla:  $[\hat{\sigma}_-, \rho_A^{(n,m+1)}] - [\hat{\sigma}_+, \rho_A^{(n+1,m)}] + \frac{\sqrt{\kappa}}{ig}(z^*(t)\rho_A^{(n+1,m)} - z(t)\rho_A^{(n,m+1)}) - \frac{\kappa}{g^2}\rho_A^{(n+1,m+1)}$ . Tässä dissipaation nopeus vaikuttaa suorasti useisiin termeihin. Jos oletetaan ettei dissipaatiota tapahdu, useat termit häviävät. Näihin kuuluu esimerkiksi kaikki termit missä kohina  $z(t)$  esiintyy. Luonnollisesti, jos kaviteetti on täysin suljettu, kohinaa ei myöskään ole.

Määritellään atomin alkutilaksi nyt viritystila, ja että, kaviteetissa on aluksi nolla ftonia. Systemin tilan kehittyessä kaviteetissa on maksimissaan yksi ftoni. Tällöin tilat, joiden hierarkkiset indeksit ovat suuremmat kuin tilan  $\rho_A^{(1,1)}$  voidaan unohtaa. Näin voidaan tehdä, koska hierarkkisten tilojen määritelmässä esiintyvät tilat  $(\hat{a}^\dagger)^m \rho$  ja  $(\hat{a})^n \rho$  ovat nolliä, kun  $n, m \geq 2$ , jos kaviteetissa on vain yksi ftoni. Tästä saadaan neljän stokastisen differentiaaliyhtälön ryhmä, joka voidaan ratkaista

ottamalla keskiarvo, jolloin saada tilojen  $E[\rho^{(n,m)}]$  evoluutiot. Kuvassa 14 on esitelty tällä tavalla saatu evoluutio  $\rho_A^{(0,0)}$ :lle. Sitä verrataan numeerisesti ratkaistuun stokastiseen differentiaaliyhtälöön. Stokastisesta differentiaaliyhtälöstä on otettu 2000 trajektoria ja laskettu niiden keskiarvo. Nähdään, että tulokset ovat hyvin lähellä toisiaan ja ne lähestyvät lisää, jos trajektorien määrää kasvatetaan.

(a)  $\hat{\sigma}_x$  komponentti(b)  $\hat{\sigma}_y$  komponentti(c)  $\hat{\sigma}_z$  komponentti

Kuva 14: Vertaillaan stokastisen yhtälön antamat tulokset 2000 trajektorilla (musta) ja hierarkiaa, josta on jätetty pois  $\rho_A^{(1,1)}$  suuremmat tasot (punainen). Kuvissa on esitetty saadun tilan Bloch-hajotelman eri komponentit. Atomin alkutila on  $|\psi(0)\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$  ja muut parametrit ovat:  $\tilde{\kappa} = 1$ ,  $\tilde{\omega}_c = 2$ ,  $\tilde{\omega} = 1$ .

## 6.1 Vertailu Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad master-yhtälöön

Edellisessä kappaleessa johdetun puhtaiden tilojen hierarkian cHEOM voi tarkistaa toimivan ottamalla siitä keskiarvo ja vertaamalla sitä master-yhtälöstä saatavaan hierarkiaan. Hierarkia saadaan GKSL master-yhtälöstä seuraavasti:

$$\dot{\rho}_A^{(i,j)}(t) = \text{tr}_C((-ig\hat{a}^\dagger)^j(ig\hat{a})^i\dot{\rho}).$$

Jätetään pois termit, jossa  $i, j > 1$ :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_A^{(0,0)}(t) &= -i\omega_c \text{tr}_c([\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho] + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \text{tr}_c(\rho)] - \text{tr}_c([ig\hat{a}\hat{\sigma}_+, \rho]) + \text{tr}_c([-ig\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \rho]) \\ &\quad + \frac{\kappa}{2}\text{tr}_c(2a\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(0,0)}] - [\hat{\sigma}_+, \rho_A^{(1,0)}] + [\hat{\sigma}_-, \rho_A^{(0,1)}] \\ \dot{\rho}_A^{(0,1)}(t) &= -i\omega_c(-ig)\text{tr}_c(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \hat{a}^\dagger\rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{01}] - \text{tr}_c(-ig\hat{a}^\dagger[ig\hat{a}\hat{\sigma}_+, \rho]) \\ &\quad + \text{tr}_c(-ig\hat{a}^\dagger[-ig\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \rho]) - \frac{\kappa}{2}\text{tr}_c(-ig\hat{a}^\dagger\rho) \\ &= i\omega_c\rho_A^{(0,1)} + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(0,1)}] + g^2\rho_A^{(0,0)}\hat{\sigma}_+ - [\hat{\sigma}_+, \rho_A^{(1,1)}] - \frac{\kappa}{2}\rho_A^{(0,1)} \\ \dot{\rho}_A^{(1,0)}(t) &= -i\omega_c(ig)\text{tr}_c(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \hat{a}\rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{10}] - \text{tr}_c(-ig\hat{a}^\dagger[ig\hat{a}\hat{\sigma}_+, \rho]) \\ &\quad + \text{tr}_c(-ig\hat{a}^\dagger[-ig\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \rho]) - \frac{\kappa}{2}\text{tr}_c(ig\hat{a}\rho) \\ &= -i\omega_c\rho_A^{(1,0)} + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(1,0)}] + g^2\hat{\sigma}_-\rho_A^{(0,0)} + [\hat{\sigma}_-, \rho_A^{(1,1)}] - \frac{\kappa}{2}\rho_A^{(1,0)} \\ \dot{\rho}_A^{(1,1)}(t) &= g^2(\hat{\sigma}_-\rho_A^{(0,1)} + \rho_A^{(1,0)}\hat{\sigma}_+) + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(1,1)}] - \kappa\rho_A^{(1,1)} \end{aligned}$$

Näiden yhtälöiden pitäisi vastata cHEOM hierarkiaa, kun siitä on otettu keskiarvo.

Seuraavaksi lasketaan keskiarvo cHEOM hierarkiasta. Hierarkia on:

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_A^{(n,m)} &= g^2 (n \hat{\sigma}_- \rho_A^{(n-1,m)} + m \rho_A^{(n,m-1)} \hat{\sigma}_+) + \frac{\omega}{2i} [\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(n,m)}] \\
&+ i \left( (\omega_c - \frac{\kappa}{2i}) m - (\omega_c + \frac{\kappa}{2i}) n \right) \rho_A^{(n,m)} + [\hat{\sigma}_-, \rho_A^{(n,m+1)}] - [\hat{\sigma}_+, \rho_A^{(n+1,m)}] \\
&+ \frac{\sqrt{\kappa}}{ig} (z^*(t) \rho_A^{(n+1,m)} - z(t) \rho_A^{(n,m+1)}) - \frac{\kappa}{g^2} \rho_A^{(n+1,m+1)}.
\end{aligned}$$

Lasketaan nyt keskiarvo  $E[\rho^{(i,j)}]$ . Keskiarvon ottaminen muuttaa kahta hierarkkisten yhtälöiden termeistä:

$$\begin{aligned}
E[z^*(t) \rho_A^{(n+1,m)}(t)] &= \int_0^t ds E[z^*(t) z(s)] E\left[\frac{\partial}{\partial z(s)} \rho_A^{(n+1,m)}(t)\right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t ds \delta(t-s) E\left[\frac{\partial}{\partial z(s)} \rho_A^{(n+1,m)}(t)\right] \\
&= \frac{1}{2} E\left[\frac{\partial}{\partial z(t)} \rho_A^{(n+1,m)}(t)\right] \\
E[z(t) \rho_A^{(n,m+1)}(t)] &= \frac{1}{2} E\left[\frac{\partial}{\partial z^*(t)} \rho_A^{(n,m+1)}(t)\right].
\end{aligned}$$

Lasketaan yhtälöissä esiintyvät derivaatat. Aloitetaan integroimalla yhtälö:

$$\begin{aligned}
\rho_A^{(n,m)} &= \int_0^t ds \frac{\sqrt{\kappa}}{ig} (z^*(s) \rho_A^{(n+1,m)} - z(s) \rho_A^{(n,m+1)}) + \int_0^t g^2 (n \hat{\sigma}_- \rho_A^{(n-1,m)} + m \rho_A^{(n,m-1)} \hat{\sigma}_+) \\
&+ \frac{\omega}{2i} [\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(n,m)}] + i \left( (\omega_c - \frac{\kappa}{2i}) m - (\omega_c + \frac{\kappa}{2i}) n \right) \rho_A^{(n,m)} + [\hat{\sigma}_-, \rho_A^{(n,m+1)}] - [\hat{\sigma}_+, \rho_A^{(n+1,m)}] \\
&- \frac{\kappa}{g^2} \rho_A^{(n+1,m+1)}.
\end{aligned}$$

Otetaan tästä derivaatta  $z(t)$ :n suhteen:

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow t} \frac{\partial \rho_A^{(n,m)}(u)}{\partial z(u)} &= \lim_{u \rightarrow t} \int_u^t ds \frac{\sqrt{\kappa}}{ig} (z^*(s) \frac{\partial \rho_A^{(n+1,m)}(s)}{\partial z(u)} - \delta(s-u) \rho_A^{(n,m+1)}(s) - z(s) \frac{\partial \rho_A^{(n,m+1)}(s)}{\partial z(u)}) \\
&+ \int_u^t \dots \\
&= \lim_{u \rightarrow t} \frac{-\sqrt{\kappa}}{ig} \rho_A^{(n,m+1)}(u) + \int_u^t \dots \\
&= -\frac{\sqrt{\kappa}}{ig} \rho_A^{(n,m+1)}(t).
\end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä keskiarvojen yhtälöihin saadaan keskiarvot:

$$E[z^*(t)\rho_A^{(n+1,m)}(t)] = -\frac{\sqrt{\kappa}}{2ig}\rho_A^{(n+1,m+1)}(t)$$

$$E[z(t)\rho_A^{(n,m+1)}(t)] = \frac{\sqrt{\kappa}}{2ig}\rho_A^{(n+1,m+1)}(t)$$

Lopullinen yhtälö hierakian keskiarvolle on siis:

$$E[\dot{\rho}_A^{(n,m)}] = g^2(n\hat{\sigma}_-\rho_A^{(n-1,m)} + m\rho_A^{(n,m-1)}\hat{\sigma}_+) + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(n,m)}]$$

$$+ i((\omega_c - \frac{\kappa}{2i})m - (\omega_c + \frac{\kappa}{2i})n)\rho_A^{(n,m)} + [\hat{\sigma}_-, \rho_A^{(n,m+1)}] - [\hat{\sigma}_+, \rho_A^{(n+1,m)}],$$

Tästä voidaan laskea  $E[\dot{\rho}_A^{(0,0)}]$ ,  $E[\dot{\rho}_A^{(0,1)}]$ ,  $E[\dot{\rho}_A^{(1,0)}]$  ja  $E[\dot{\rho}_A^{(1,1)}]$ :

$$E[\dot{\rho}_A^{(0,0)}(t)] = \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(0,0)}] - [\hat{\sigma}_+, \rho_A^{(1,0)}] + [\hat{\sigma}_-, \rho_A^{(0,1)}]$$

$$E[\dot{\rho}_A^{(0,1)}(t)] = i\omega_c\rho_A^{(0,1)} + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(0,1)}] + g^2\rho_A^{(0,0)}\hat{\sigma}_+ - [\hat{\sigma}_+, \rho_A^{(1,1)}] - \frac{\kappa}{2}\rho_A^{(0,1)}$$

$$E[\dot{\rho}_A^{(1,0)}(t)] = -i\omega_c\rho_A^{(1,0)} + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(1,0)}] + g^2\hat{\sigma}_-\rho_A^{(0,0)} + [\hat{\sigma}_-, \rho_A^{(1,1)}] - \frac{\kappa}{2}\rho_A^{(1,0)}$$

$$E[\dot{\rho}_A^{(1,1)}(t)] = g^2(\hat{\sigma}_-\rho_A^{(0,1)} + \rho_A^{(1,0)}\hat{\sigma}_+) + \frac{\omega}{2i}[\hat{\sigma}_z, \rho_A^{(1,1)}] - \kappa\rho_A^{(1,1)}$$

Nämä yhtälöt ovat samat kuin GKSL master-yhtälön antamat yhtälöt.

## 7 Yhteissuure lineaarisista hierarkkisista likeyhtälöistä

Muodostetaan nyt sumennettu yhteismittaus paikalle ja liikemäärälle. Se saadaan laskettua aikaisemmassa kappaleessa ratkaistusta  $\rho_A$ :sta.  $\rho$ :lle voidaan määritellä instrumentti:

$$\rho(t) = \mathcal{G}_t(z^*)(\rho_0) = \sum_k \hat{A}_k \rho_0 \hat{A}_k^*.$$

Tässä esiintyvää  $\mathcal{G}$ :tä kutsutaan instrumentiksi ja sille on tehty Kraussin hajotelma. Tämä instrumentti voidaan laskea helposti edellisen kappaleen tuloksia käyttäen. Nyt haluamme kuitenkin ratkaista siitä yhteismittaukset  $tr_A(E_t)$ . Aloitetaan aluksi käyttämällä yhtälöä:

$$\begin{aligned} E_t &= \mathcal{G}_t^\dagger \mathcal{G}_t \\ &= \mathcal{G}_t^\dagger I_A \otimes I_C \mathcal{G}_t \\ &= \sum_i \mathcal{G}_t^\dagger |\psi_i, 0\rangle \langle \psi_i, 0| \mathcal{G}_t + \mathcal{G}_t^\dagger |\psi_i, 1\rangle \langle \psi_i, 1| \mathcal{G}_t. \end{aligned}$$

Tästä saadaan Bornin kaavalla todennäköisyys, kun oletetaan alkutilan olevan muotoa  $|\psi, 0\rangle$ :

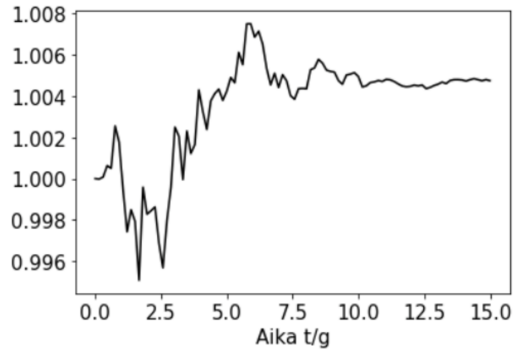
$$\begin{aligned} p &= tr\{\rho E_t\} \\ &= \sum_{kl} c_{kl} tr(|\psi_k\rangle \langle \psi_l| \otimes |0\rangle \langle 0| E_t) \\ &= \sum_{kl} c_{kl} \langle \psi_l, 0| E_t | \psi_k, 0\rangle. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tähän aiempi  $E_t$ :n yhtälö:

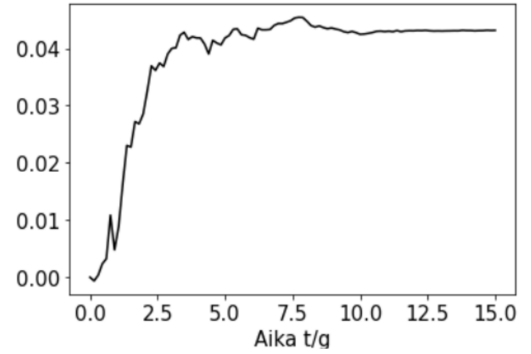
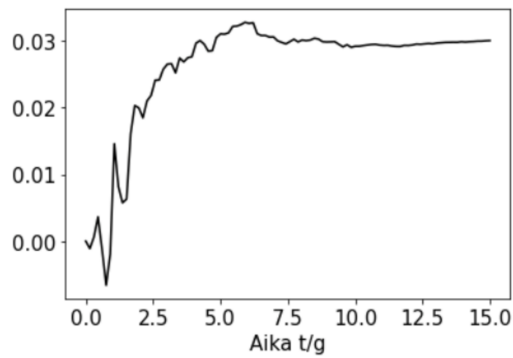
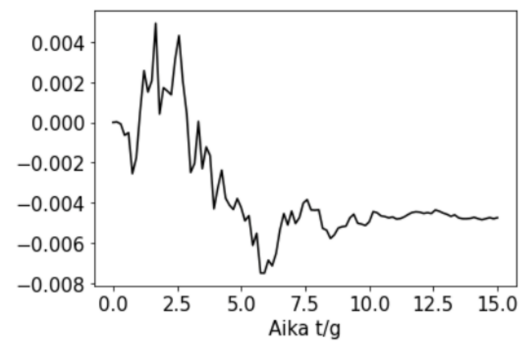
$$\begin{aligned}
p &= \sum_{ikl} c_{kl} (M_{il}^{0*} M_{ki}^0 + M_{il}^{1*} M_{ik}^1) \\
&= \sum_{ikl} c_{kl} (F_{lk}^0 + F_{lk}^1) \\
&= \sum_{kl} c_{kl} \text{tr}_A [|\psi_k\rangle \langle \psi_l| (F^0 + F^1)],
\end{aligned}$$

missä on käytetty merkintöjä  $M_{ik}^j = \langle \psi_k, j | \mathcal{G}_t | 0, \psi_i \rangle$  ja  $M^\dagger M = F$ . Tästä seuraa, että  $F_t^0 + F_t^1 = \text{tr}_A(E_t)$ . Toisin sanoen  $\text{tr}_A(E)$ , joka haluttiin ratkaista, saadaan käyttämällä aiempia tuloksia  $\rho_A$ :lle. Tämä antaa meille  $M$  matriisien komponentit. Näillä komponenteilla voidaan laskea  $F$  matriisit ja niistä saadaan yhteismittaus  $\text{tr}_A(E)$ .

Kuvassa 15 on numeerisesti ratkaistu  $\text{tr}_A(E)$  stokastisesta Schrödinger yhtälöstä äsken esitetyllä tavalla. Tarkemmin, siinä on simuloitu 2000 trajektoria, ja laskettu niiden keskiarvo. Yhteismittauksen operaattori on esitelty Bloch-vektorina, jonka arvot on esitelty kuvissa ajan funktiona. Voidaan huomata, että mittausoperaattorin keskiarvo lähestyy identiteettioperaattoria, kun trajektorien määrää kasvatetaan, mutta yksittäiset tapaukset eroavat keskiarvosta merkittävästi mittaus tulosten satunnaisuuden vuoksi.



(a) Mittausoperaattorin jälki

(b)  $\hat{\sigma}_x$  komponentti(c)  $\hat{\sigma}_y$  komponentti(d)  $\hat{\sigma}_z$  komponentti

Kuva 15: Mittausoperaattorin evoluutio esitettyinä Blochin hajotelmalla. Tässä esitetään keskiarvo 2000 trajektorista, jonka pitäisi lähestyä identiteettioperaattoria. Muuttujien arvot ovat  $\tilde{\omega}_c = 2$ ,  $\tilde{\omega} = 3$ ,  $\tilde{\kappa} = 3$ . Nähdään, että tulos on hyvin lähellä identiteettioperaattoria.

Keskiarvon kuuluukin lähestyä identiteettioperaattoria, sillä aikaisemmin POVM:lle määriteltiin ehto

$$\sum_r E_r = I,$$

joka jatkuvalla mittaukselle voidaan kirjoittaa integraalina:

$$\int E_x dx = I.$$

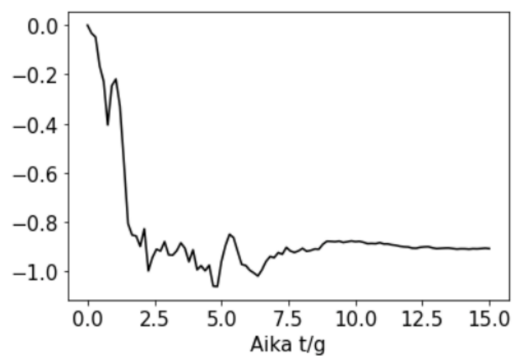
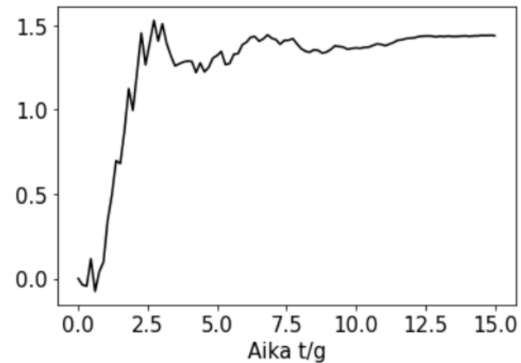
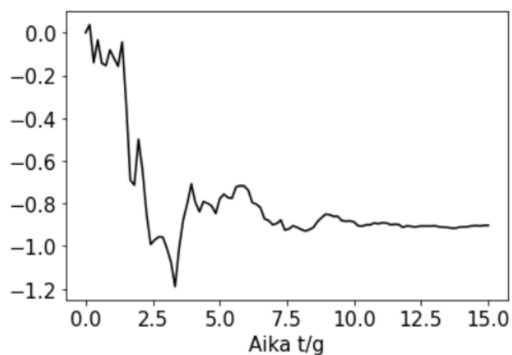
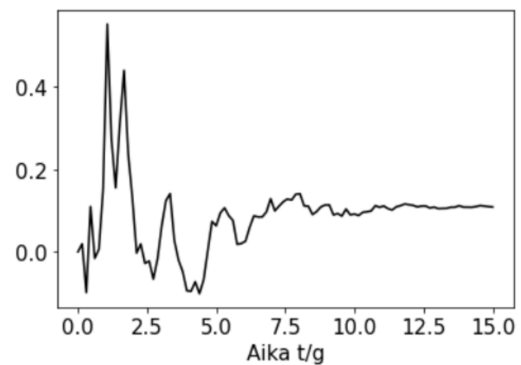
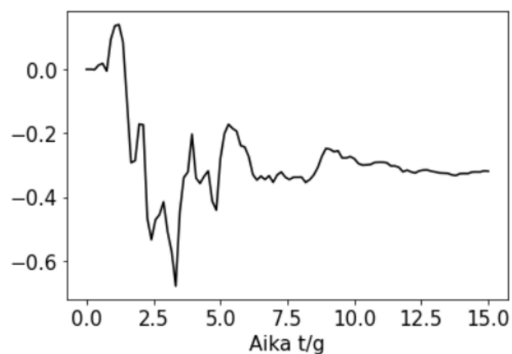
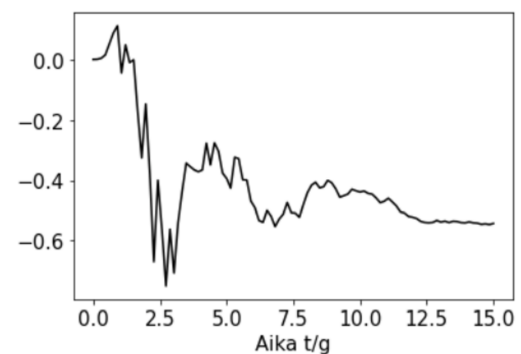
Kun keskiarvo otetaan tarpeeksi suuresta määrästä mittausoperaattoreja, keskiarvo vastaa äskeisen yhtälön integraalia. Nähdään siis, että keskiarvo lähestyy identiteettioperaattoria, niin kuin kuuluukin, mutta se ei kerro meille mitään yhteismittauksesta. Tätä varten voidaan tarkastella yksittäisiä trajektoreja, jotka ovat esitetty kuvassa 16. Kuvassa on esitelty kahden eri trajektorin Blochin hajotelmaa. Nähdään, että ne eroavat toisistaan selvästi. Koska jokaista eri mittaustulosta vastaa erilainen mittausoperaattori, ja koska kvanttimitaukset ovat satunnaisia, tekemällä sama mittaus kaksi kertaa saadaan erilaiset mittaustulokset ja tällöin erilaiset mittausoperaattorit.

Näitä tuloksia voidaan vertailla vastaaviin tuloksiin, jotka saadaan tekemällä adiabaattinen eliminaatio stokastiseen Schrödinger yhtälöön. Tästä saadaan yhtälö:

$$\partial_t |\psi\rangle_A = \left(-i\frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z + \alpha\sqrt{\kappa}z_t^*\hat{\sigma}_- - \frac{\kappa}{2}|\alpha|^2\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right) |\psi\rangle_A.$$

Jakamalla osiin  $|\psi\rangle_A = c_g |0\rangle + c_e |1\rangle$ , tästä voidaan laskea erilliset differentiaaliyhtälöt:

$$\begin{aligned}\dot{c}_e &= \left(i\frac{\omega}{2} - \frac{\kappa}{2}|\alpha|^2\right)c_e \\ \dot{c}_g &= -i\frac{\omega}{2}c_g + \alpha\sqrt{\kappa}z_t^*c_e.\end{aligned}$$

(a)  $\hat{\sigma}_x$  komponentti(b)  $\hat{\sigma}_x$  komponentti(c)  $\hat{\sigma}_y$  komponentti(d)  $\hat{\sigma}_y$  komponentti,(e)  $\hat{\sigma}_z$  komponentti(f)  $\hat{\sigma}_z$  komponentti

Kuva 16: Mittausoperaattorin evoluutio esitettyinä Bloch-vektorina. Tarkastellaan 2 eri trajektoria, ensimmäinen on esitetty vasemmalla ja toinen oikealla. Niiden voidaan havaita eroavan selvästi. Mittausoperaattorien pitäisikin erota, kun saadut mittaustulokset eroavat. Muuttujien arvot ovat  $\tilde{\omega}_c = 2$ ,  $\tilde{\omega} = 3$ ,  $\tilde{\kappa} = 3$ .

Näiden ratkaisut ovat:

$$c_e = e^{(i\frac{\omega}{2} - \frac{\kappa}{2}|\alpha|^2)t} c_e(0)$$

$$c_g = e^{-i\frac{\omega}{2}t} c_g(0) + e^{-i\frac{\omega}{2}t} \int_0^t ds \alpha \sqrt{\kappa} z_s^* c_e(0) e^{-i(-\omega - \frac{\kappa}{2}|\alpha|^2)s}.$$

Nyt jos  $|\psi(t)\rangle_A = \mathcal{G}_{t,A} |\psi(0)\rangle_A$  voidaan kirjoittaa:

$$\mathcal{G}_{t,A} = \begin{pmatrix} e^{(i\frac{\omega}{2} - \frac{\kappa}{2}|\alpha|^2)t} & 0 \\ e^{-i\frac{\omega}{2}t} \int_0^t ds \alpha \sqrt{\kappa} z_s^* e^{-i(-\omega - \frac{\kappa}{2}|\alpha|^2)s} & e^{-i\frac{\omega}{2}t} \end{pmatrix}.$$

Nyt voidaan laskea  $E_A = \mathcal{G}_{t,A}^\dagger \mathcal{G}_{t,A}$  käyttäen approksimaatiota  $z_s^* z_{s'} = \delta(s - s')$ .

Tämän matriisin komponentit ovat:

$$E_{A,00} = 1$$

$$E_{A,11} = 1$$

$$E_{A,10} = \int_0^t ds \alpha \sqrt{\kappa} e^{-\frac{\kappa}{2}|\alpha|^2 s} (x_s \cos(\omega s) - y_s \sin(\omega s) - i(y_s \cos(\omega s) + x_s \sin(\omega s)))$$

$$E_{A,01} = (E_{A,10})^*,$$

jossa  $z_s = x_s + iy_s$ . Bloch-vektoriksi  $u = (a, b, c)$  saadaan:

$$a = \int_0^t ds \alpha \sqrt{\kappa} e^{-\frac{\kappa}{2}|\alpha|^2 s} (x_s \cos(\omega s) - y_s \sin(\omega s))$$

$$b = - \int_0^t ds \alpha \sqrt{\kappa} e^{-\frac{\kappa}{2}|\alpha|^2 s} (y_s \cos(\omega s) + x_s \sin(\omega s))$$

$$c = 0.$$

Tämä tulos vastaa numeerisesta laskusta saatuja tuloksia, sillä  $E_{A,00}$  ja  $E_{A,11}$  olivat numeerisen laskun mukaan 1. Numeerisen laskun tuloksena saadaan, että koherenssit ovat keskimäärin nolla. Tätä ei pystytä adiabaattisesta eliminaatiosta todistamaan, mutta ei ole pois suljettua, että koherenssit ovat keskimäärin nolla. Jos kohinan oletetaan olevan keskiarvoltaan nolla, saadaan koherenssien keskiarvoiksi nolla, samoin kuin numeerisesti laskettuna.

## 8 Loppupäätelmät

Tässä työssä muodostettiin cHEOM vaimenevalle kaviteetille. Se tehtiin käyttäen heterodyynimittausta vastaavaa stokastista Schrödingerin yhtälöä. Tavoitteena oli ratkaista tämä stokastinen Schrödingerin yhtälö eksaktisti. Normaalisti cHEOMia ja muita vastaavia menetelmiä käytetään vain ratkaistaessa ei-Markovista dynamiikkaa, mutta tässä tapauksessa sitä käytetään Markovisen dynamiikan ratkaisuun. Tavoite tässä työssä on ratkaista kaviteetissa olevan hiukkasen dynamiikka. Tämä voidaan tehdä kätevästi cHEOMilla käyttämättä likimääräisiä menetelmiä, kuten adiabaattista eliminaatiota.

cHEOM antoi eksaktin ratkaisun dynamiikalle ja yhtälö tilalle  $\rho_A$  saadaan täsmällisesti, vaikka suuremmat hierarkiat unohdettiin. Tällöin jäljellä olevat hierarkiset yhtälöt ratkaistiin numeerisesti käyttäen normaaleja differentiaaliyhtälön ratkaisumenetelmiä. Näitä vertailtiin numeerisesti ratkaistuun stokastiseen differentiaaliyhtälöön ja nähtiin, että hierarkia antaa samat tulokset.

Lopuksi muodostettiin paikan ja liikemäärän sumennettu yhteismittaus käyttäen aiempaa numeerista ratkaisua systeemin dynamiikalle. Husimin  $Q$  funktion marginaalit osoitettiin vastaavan paikan ja liikemäärän sumennettua yhteismittausta, joka itsessään ei ole uusi tulos. Tässä työssä paikan ja liikemäärän sumennettu yhteismittaus saatiin ratkaisemalla heterodyynimittauksen stokastinen Schrödinger yhtälö käyttäen cHEOMia.

Tätä numeerisesti ratkaistua yhteismittausta verrataan likimääräiseen yhteismittaukseen, joka saadaan käyttämällä adiabaattista eliminaatiota. Vertailemalla näiden Blochin hajotelmaa nähdään, että tulokset vastaavat toisiaan.

cHEOMin dynamiikkaa vaimenevalle kaviteetille verrataan GKSL master-yhtälön antamaan dynamiikkaan, joka vastaa cHEOMista saatuja tuloksia. Koska cHEOM ratkaisee vaimenevan kaviteetin stokastisen master-yhtälön, sillä voidaan myös ratkaista optimaalinen sumennettu yhteismittaus paikalle ja liikemäärälle, mitä GKSL

master-yhtälöstä ei voida selvittää.

cHEOM ja muut vastaavat hierarkkiset menetelmät ovat kasvaneet suosiossa viime vuosina ja niissä on vielä paljon tutkittavaa. Esimerkiksi muutkin hierarkian tasot kuin vain alin voivat kertoa systeemin fysiikasta, kuten kaviteetin tilasta ja sen korrelaatiosta avoimen systeemin kanssa. Tulen väitöskirjassani tutkimaan tätä ja soveltamaan cHEOMia lomittumisen tutkimiseen.

Verrattuna GKSL master-yhtälön antamaan ratkaisuun, cHEOM mahdollistaa myös yhteismittauksen muodostamisen eri suureille. Tässä muodostettiin yhteismittaus paikalle ja liikemäärälle, mutta vastaavasti muillekin kanonisesti vastakkaisille suureille voi olla mahdollista muodostaa samanlainen sumennettu yhteismittaus.

## Liitteet

### A: Ito ja Stratonovich laskenta

Kappaleessa 5 kerrottiin lyhyesti Ito ja Stratonovich laskennasta. Tässä liitteessä esittelen tarkemmin Ito ja Stratonovich integraalit ja niiden avulla Ito ja Stratonovich stokastiset differentiaaliyhtälöt. Aloitetaan tarkastelemalla kappaleessa 5 esiteltyä yhtälöä:

$$\dot{\rho} = F(\rho) + \xi(t)G(\rho).$$

Kirjoitetaan tämän muotoiset yhtälöt yleisemmin, kuten kirjassa [63]. Tulen seuraamaan tätä kirjaa tässä kappaleessa:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + b(x, t)\xi(t).$$

Jos halutaan ratkaista tämän yhtälön, täytyy tarkastella integraalia. Tarkemmin katsotaan termiä  $u(x, t) = \int_0^t \xi(t')dt'$ . Kuten kappaleessa 6 sanottiin  $\xi(t)$  on satunnaista kohinaa (white noise) ja sen integroiminen ei ole helppoa. Sille määritellään ominaisuus  $\langle \xi(t')\xi(t) \rangle = \delta(t' - t)$ . Jos  $u(t)$  sijoitetaan Fokker-Planck yhtälöön, nähdään, että kyseessä on Wiener-prosessi  $W(t)$ . Koska Wiener-prosessi ei ole derivoituva, alussa esiteltyä yhtälöä ei ole olemassa. Näin ollen yhtälö täytyy kirjoittaa muodossa:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t a(x, t')dt' + \int_0^t b(x, t')\xi(t')dt'.$$

Ensimmäinen integraali on selkeä, mutta kohinan integroimisessa on yhä ongelmia. Koska kyseessä on Wiener-prosessi, sen määritelmästä saadaan, että

$$dW(t) = \xi(t)dt,$$

jolloin integraali voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\int_0^t b(x, t')dW(t').$$

Nyt määritellään uusi integraali, jotta voimme laskea tämän stokastisen integraalin.

Aloitetaan ajattelemalla tämän Riemann summaa:

$$S_n = \sum_{i=0}^n b(x, \tau_i)(W(t_i) - W(t_{i-1})).$$

Jos  $b(x, \tau) = W(\tau)$  saadaan:

$$\begin{aligned} \langle S_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=0}^n W(\tau_i)(W(t_i) - W(t_{i-1})) \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^n (\tau_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Selvästi tämä riippuu  $\tau_i$ :n valinnasta. Valitaan se seuraavan yhtälön mukaisesti:

$$\tau_i = \alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1}.$$

Jos valitaan  $\alpha = 0$  saadaan Ito integraali, jolle  $\tau_i = t_{i-1}$ . Tätä merkitsen seuraavasti:

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= \int_0^t a(x, t')dt' + \int_0^t b(x, t')dW(t') \\ \Leftrightarrow dx &= a(x, t)dt + b(x, t)dW(t). \end{aligned}$$

Toinen vaihtoehto on Stratonovich integraali [64], joka saadaan vastaavasti valitsemalla  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Merkitään sitä seuraavasti:

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= S \int_0^t a(x, t') dt' + \int_0^t b(x, t') dW(t') \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} &= a(x, t) + b(x, t)\xi(t). \end{aligned}$$

Näiden välillä on yhteys:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{dt} = a(x, t) + b(x, t)\xi(t) \\ \Leftrightarrow dx &= (a(x, t) + \frac{1}{2}b(x, t)\frac{db(x, t)}{dx})dt + b(x, t)dW(t). \end{aligned}$$

Stratonovich integraalin etuna on sille pätevä ketjusääntö

$$\frac{df(x)}{dt} = \frac{df(x)}{dx} [a(x, t) + b(x, t)\xi(t)],$$

mutta sille odotusarvon laskenta on vaikeampaa. Tästä syystä tässä työssä käytetään molempia.

## B: Adiabaattinen eliminaatio

Adiabaattinen eliminaatio on yleisesti menetelmä, jolla voidaan vähentää yhtälöiden määrää systeemin dynamiikan kuvaamisessa. Se on approksimaatio, joka hyödyntää tietoa, että systeemi kehittyy kahdessa eri aikaskaalassa. Aluksi nopeasti kehittyvät muuttujat voidaan ilmaista hitaasti kehittyvien funktiona, jossa hitaasti kehittyvät muuttujat oletetaan vakioiksi. Sitten isommalla aikaskaalalla voidaan kirjoittaa yhtälöt hitaille muuttujille, nopeiden muuttujien funktiona. Näin voidaan eliminoida nopeat muuttujat systeemin dynamiikkaa kuvaavista yhtälöistä ja saada pienempi joukko yhtälöitä [28].

Tässä eliminoimme kaviteetissa olevan sähkökentän, jonka voimme tehdä, kun oletamme kaviteetin olevan huono. Huonolla kaviteetilla tarkoitetaan, että kaviteetti "vuotaa" nopeasti eli dissipaatiokerroin on paljon suurempi kuin atomin relaxaatioaika. Kappaleessa 4 esitellyn GKSL master-yhtälön tapauksessa se tarkoittaa, että  $\Delta = \omega_c - \omega \ll \kappa$ . Nyt käyttäen GKSL yhtälöä voidaan kirjoittaa differentiaaliyhtälö operaattoreille  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{a}} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] + \frac{\kappa}{2}(2\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\
&= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] + \frac{\kappa}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\
&= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] + \frac{\kappa}{2}[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} \\
&= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] - \frac{\kappa}{2}\hat{a} \\
&= \frac{i}{\hbar}(\omega_c\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z\hat{a} + g(\hat{\sigma}_+\hat{a}\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger\hat{a}) - (\omega_c\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{\omega}{2}\hat{a}\hat{\sigma}_z + g(\hat{a}\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{a}\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger))) - \frac{\kappa}{2}\hat{a} \\
\dot{\hat{a}} &= -\frac{i}{\hbar}(\omega_c\hat{a} + g\hat{\sigma}_-) - \frac{\kappa}{2}\hat{a} = 0.
\end{aligned}$$

Jolloin annihilaatio-operaattori voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\hat{a} = -\frac{\frac{i}{\hbar}g\hat{\sigma}_-}{\frac{i}{\hbar}\omega_c + \frac{\kappa}{2}}.$$

Tästä eteenpäin merkitään  $\hat{a} = \alpha\hat{\sigma}_-$  ja vastaavasti  $\hat{a}^\dagger = \alpha^*\hat{\sigma}_+$ .

Lopuksi sijoitetaan takaisin master-yhtälöön:

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \rho] + \frac{\kappa|\alpha|^2}{2}(2\hat{\sigma}_-\rho\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\rho - \rho\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+).$$

Vastaavasti, adiabaattinen eliminaatio voidaan tehdä stokastiselle Schrödinger yhtälölle, joka antaa meille yhtälön:

$$\partial_t |\psi\rangle_A = (-i\frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z + \alpha\sqrt{\kappa}z_t^*\hat{\sigma}_- - \frac{\kappa}{2}|\alpha|^2\hat{\sigma} + \hat{\sigma}_-) |\psi\rangle_A.$$

## Viitteet

- [1] H. M. Wiseman ja G. J. Milburn, *Quantum Measurement and Control* (Cambridge University Press, 2009).
- [2] H. Walther, B. T. Varcoe, B. G. Englert ja T. Becker, *Reports on Progress in Physics* **69**, 1325 (2006).
- [3] E. M. Purcell, kirjassa *Confined Electrons and Photons*, toimittanut E. Burstein ja C. Weisbuch (Springer US, 1946), pp. 839–839.
- [4] K. H. Drexhage, H. Kuhn ja F. P. Schäfer, *Berichte der Bunsengesellschaft für physikalische Chemie* **72**, 329 (1968).
- [5] G. Gabrielse ja H. Dehmelt, *Physical Review Letters* **55**, 67 (1985).
- [6] R. G. Hulet, E. S. Hilfer ja D. Kleppner, *Physical Review Letters* **55**, 2137 (1985).
- [7] W. Jhe, A. Anderson, E. A. Hinds, D. Meschede, L. Moi ja S. Haroche, *Physical Review Letters* **58**, 666 (1987).
- [8] E. Yablonovitch, *Physical Review Letters* **58**, 2059 (1987).
- [9] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter ja R. Bhat, *Physical Review Letters* **61**, 2546 (1988).
- [10] E. Yablonovitch ja T. J. Gmitter, *Physical Review Letters* **63**, 1950 (1989).
- [11] Y. Yamamoto, S. MacHida ja G. Björk, *Physical Review A* **44**, 657 (1991).
- [12] K. An, J. J. Childs, R. R. Dasari ja M. S. Feld, *Physical Review Letters* **73**, 3375 (1994).
- [13] A. D. Boozer, A. Boca, J. R. Buck, J. McKeever ja H. J. Kimble, *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* **70**, 023814 (2004).

- [14] S. Haroche ja J. M. Raimond, Supplement 2 to *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics* 123 (1994).
- [15] G. Raithel, C. Wagner, H. Walther, L. M. Narducci ja M. O. Scully, Supplement 2 to *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics* 57 (1994).
- [16] H. J. Kimble, O. Carnal, N. Georgiades, H. Mabuchi, E. S. Polzik, R. J. Thompson, Q. A. Turchette, D. J. Wineland, C. E. Wieman ja S. J. Smith, *AIP Conference Proceedings* 314 (1994).
- [17] C. J. Hood, T. W. Lynn, M. S. Chapman, H. Mabuchi, J. Ye ja H. J. Kimble, kirjassa *Confined Photon Systems*, toimittanut H. Benisty, C. Weisbuch, E. Polytechnique, J.-M. Gerard, R. Houdre ja J. Rarity (Springer, 1999), pp. 298–309.
- [18] E. T. Jaynes ja F. W. Cummings, *Proceedings of the IEEE* **51**, 89 (1963).
- [19] B. W. Shore ja P. L. Knight, *Journal of Modern Optics* **40**, 1195 (1993).
- [20] A. Frisk Kockum, A. Miranowicz, S. De Liberato, S. Savasta ja F. Nori, *Nature Reviews Physics* **1**, 19 (2019).
- [21] W. Górecki, arXiv preprint arXiv:2303.02212 (2023).
- [22] Á. Nodar, R. Esteban, U. Muniain, M. J. Steel, J. Aizpurua ja M. K. Schmidt, arXiv preprint arXiv:2211.13249 (2022).
- [23] X. Li, M. Bamba, Q. Zhang, S. Fallahi, G. C. Gardner, W. Gao, M. Lou, K. Yoshioka, M. J. Manfra ja J. Kono, *Nature Photonics* **12**, 324 (2018).
- [24] M. Ozawa, kirjassa *Probability Theory and Mathematical Statistics*, toimittanut J. V. Prokhorov ja K. Ito (Springer Berlin Heidelberg, 1983), pp. 518–525.
- [25] M. Ozawa, *Journal of Mathematical Physics* **25**, 79 (1984).

- [26] K. Jacobs, *Quantum measurement theory and its applications* (Cambridge University Press, 2014).
- [27] W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik* **43**, 172 (1927).
- [28] L. Lugiato, F. Prati ja M. Brambilla, *Nonlinear Optical Systems* (Cambridge: Cambridge University Press, 2015).
- [29] V. Link, K. Müller, R. G. Lena, K. Luoma, F. Damanet, W. T. Strunz ja A. J. Daley, *PRX Quantum* **3**, 020348 (2022).
- [30] R. Hartmann ja W. T. Strunz, *Quantum* **4**, 347 (2020).
- [31] Shore Bruce ja Knight Peter, *Physics and Probability: Essays in Honor of Edwin J. Jaynes* (Cambridge: Cambridge University Press, 2004).
- [32] S. Brattke, B. Varcoe ja H. Walther, *Macroscopic Quantum Coherence and Quantum Computing* (Springer USBoston, MA, 2001), pp. 419–426.
- [33] D. Burgarth, P. Facchi, R. Hillier ja M. Ligabò, arXiv preprint arXiv:2301.02269. (2023).
- [34] P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos, J. J. García-Ripoll, E. Solano, C. J. Harmans ja J. E. Mooij, *Physical Review Letters* **105**, 237001 (2010).
- [35] C. Gerry ja P. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, 2004).
- [36] I. I. Rabi, *Physical Review* **49**, 324 (1936).
- [37] M. Bina, *The European Physical Journal Special Topics* **203**, 163 (2012).
- [38] T. Heinosaari ja M. Ziman, *The Mathematical language of Quantum Theory* (Cambridge: Cambridge University Press, 2011).

- [39] M. Born, *Zeitschrift für Physik* **37**, 863 (1926).
- [40] R. Uola, K. Luoma, T. Moroder ja T. Heinosaari, *Physical Review A* **94**, 022109 (2016).
- [41] K. Husimi, *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series* **22**, 264 (1940).
- [42] E. Wigner, *Physical Review* **40**, 749 (1932).
- [43] D. M. Appleby, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **33**, 3903 (2000).
- [44] U. Leonhardt ja H. Paul, *Progress in Quantum Electronics* **19**, 89 (1995).
- [45] K. Wódkiewicz, *Physical Review Letters* **52**, 1064 (1984).
- [46] E. Arthurs ja J. L. Kelly, *Bell System Technical Journal* **44**, 725 (1965).
- [47] P. Busch, *International Journal of Theoretical Physics* **24**, 63 (1985).
- [48] S. L. Braunstein, C. M. Caves ja G. J. Milburn, *Physical Review A* **43**, 1153 (1991).
- [49] S. Stenholm, *Annals of Physics* **218**, 233 (1992).
- [50] D. M. Appleby, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **31**, 6419 (1998).
- [51] M. G. Raymer, *American Journal of Physics* **62**, 986 (1994).
- [52] U. Leonhardt ja H. Paul, *Physical Review A* **48**, 4598 (1993).
- [53] U. Leonhardt ja H. Paul, *Journal of Modern Optics* **40**, 1745 (1993).
- [54] S. Twareque Ali ja E. Prugovečki, *Journal of Mathematical Physics* **18**, 219 (1976).

- [55] D. M. Appleby, *International Journal of Theoretical Physics* **38**, 807 (1999).
- [56] E. Schrödinger, *Annalen der Physik* **384**, 361 (1926).
- [57] V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski ja E. C. Sudarshan, *Reports on Mathematical Physics* **13**, 149 (1978).
- [58] G. Lindblad, *Communications in Mathematical Physics* **48**, 119 (1976).
- [59] Y. Tanimura, *Journal of Chemical Physics* **141**, 044114 (2014).
- [60] K. Nakamura ja Y. Tanimura, *Physical Review A* **98**, 012109 (2018).
- [61] H. Rahman ja U. Kleinekathöfer, *Journal of Chemical Physics* **150**, 244104 (2019).
- [62] Y. Tanimura, *Journal of Chemical Physics* **153**, 020901 (2020).
- [63] C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Springer, 1996).
- [64] R. J. Stratonovich, *Topics in the Theory of Random Noise, vol.1* (Martino Fine Books, 1963), No. 4.