



MERTENSIN LAUSE

Neea Haimakainen

LuK-tutkielma  
Maaliskuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

**Tarkastaja:**

FM, DI Mikko Jaskari

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä.

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LuK-tutkielma

**Pääaine:** Matematiikka

**Tekijä:** Neea Haimakainen

**Otsikko:** Mertensin lause

**Ohjaaja:** FM, DI Mikko Jaskari

**Sivumäärä:** 19 sivua

**Aika:** Maaliskuu 2026

---

Tutkielmassa esitetään Franciszek Mertensin vuonna 1874 todistama analyyttiseen lukuteoriaan liittyvä lause. Mertensin lause osoittaa, että alkulukujen resiprookkisumma on asympotoottisesti tuplalogaritmisen. Tutkielmassa käydään ensin läpi analyysin ja lukuteorian peruskäsitteitä sekä esitetään ja todistetaan aputuloksia. Lopuksi todistetaan Mertensin lause.

Asiasanat: analyyttinen lukuteoria, alkuluvut, resiprookkisumma, sarjat.



# Sisällys

<b>1 Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2 Sarjoista</b>	<b>2</b>
2.1 Sarjat lukuteoriassa . . . . .	3
2.2 Summien arviointi . . . . .	7
<b>3 Peruslemma</b>	<b>9</b>
3.1 Määritelmiä, lauseita ja lemmoja . . . . .	9
3.2 Peruslemman todistus . . . . .	14
<b>4 Mertensin lauseen todistus</b>	<b>17</b>
<b>Viitteet</b>	<b>19</b>



# 1 Johdanto

Alkulukujen jakautuminen luonnollisissa luvuissa on jo pitkään ollut kiinnostava tutkimuskohde lukuteoriassa. Vuonna 1896 Hadamardin ja de la Vallée-Poussinin todistama alkulukulause osoittaa, että lukua  $x$  pienempien alkulukujen  $p$  määrä on asympotoottisesti  $\frac{x}{\ln x}$  eli

$$\sum_{p \leq x} 1 \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Merkinnällä  $\sim$  tarkoitetaan sitä, että  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{p \leq x} 1}{x/\ln x} = 1$ , eli suurilla luvun  $x$  arvoilla lausekkeet ovat samaa suuruusluokkaa [1]. Lause siis formalisoi intuitiivisen ajatuksen siitä, että alkulukujen esiintyminen käy harvemmaksi mitä suuremmaksi luonnolliset luvut käyvät [3].

Jo ennen yleisen alkulukulauseen todistusta, puolalais-itävaltalainen matemaatikko Franciszek Mertens todisti alkulukulausetta heikomman tuloksen. Mertensin lause osoittaa, että jokaisella reaaliluvulla  $x > 1$  on voimassa

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln [x] + B + \delta(x),$$

missä  $[x]$  on lattiafunktio, eli luku  $x$  pyöristetään alaspäin lähimpään kokonaislukuun,  $B$  on vakio ja  $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 0$ . Lause siis osoittaa, että alkulukujen resiprookkisumma, eli alkulukujen käänteislukujen summa, on asympotoottisesti tuplalogaritmisen [7]. Tätä voidaan verrata tunnettuun tapaan arvioida harmonisen sarjan osasummaa luonnollisella logaritmilla

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln(x) + \gamma + E(x),$$

missä  $\gamma$  on vakio ja  $\lim_{x \rightarrow \infty} E(x) = 0$  [1]. Mertensin lause siis osoittaa epäsuorasti alkulukujen harventuvan jakautumisen, sillä mitä pidemmälle lukusuoralla mennään, sitä hitaammin alkulukujen resiprookkisumma kasvaa verrattuna luonnollisten lukujen käänteislukujen summaan.

Mertensin lauseen voidaan katsoa olevan seuraus yleisestä alkulukulauseesta, eli sen voi todistaa alkulukulauseen avulla. Mertens kuitenkin todisti tuloksen ilman alkulukulausetta, sillä hänen aikanaan alkulukulausetta ei ollut vielä todistettu. Tutkielman päätavoitteena on esittää Mertensin lause ja sen todistus Villarionon artikkelia [9] mukailleen. Vaikka lause todistetaan Mertensin tavoin ilman alkulukulausetta, tutkielmassa ei esitetä Mertensin alkuperäistä todistusta, vaan nykyaikaisempi versio.

Tutkielman ymmärtämiseksi suositellaan, että lukijalla on hallussa analyysin ja lukuteorian perusteet, mutta kaikki todistukselle olennaiset tulokset esitellään ennen niiden käyttöä. Tutkielman aluksi kerrataan hieman sarjoihin liittyviä käsitteitä sekä esitetään yleisiä tutkielman kannalta tärkeitä tuloksia. Sen jälkeen esitetään ja todistetaan Mertensin lauseen todistukseen liittyviä aputuloksia ja viimeiseksi todistetaan varsinainen Mertensin lause.

## 2 Sarjoista

Lukuteoria on matematiikan alana sellainen, että se hyödyntää paljon muiden alojen tuloksia. Erityisesti lukuteorian osa-ala, analyttinen lukuteoria, hyödyntää nimensä mukaisesti analyysin menetelmiä. Koska tutkielman kohteena on resiprookkisumman arviointi, sarjoihin liittyvät tulokset ovat luonnollisesti keskeisiä. Analyysissä ollaan yleensä kiinnostuttu sarjojen suppenemisesta tai sarjakehitelmien muodostamista funktioille. Käydään ensin siis läpi muutamia analyysin perusasioita, jotka ovat oleellisia tutkielman kannalta.

**Esimerkki 1.** Harmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

hajaantuu. Tämä voidaan todeta esimerkiksi integraalitarkastimen tai minorantti-periaatteen avulla.

**Esimerkki 2.** Geometrinen sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

suppenee jos ja vain jos  $-1 < x < 1$ , jolloin

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

[2, Lause 13.1.9]

**Esimerkki 3.** Luvun  $1+x$  luonnollisen logaritmin Taylorin sarjakehitelmä on

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

joka suppenee, kun  $-1 < x \leq 1$  [2, Esimerkki 15.4.4].

Viimeisenä yleisenä sarjojen käsittelyn apuvälineenä esitetään osittaissummaus. Se on samanlainen käsite summille, kuin osittaisintegrointi on integraaleille. Sen avulla voidaan käsitellä sarjoja, joiden summien laskeminen olisi muuten vaikeaa. Seuraava kaava on osittaissummauksen analyttinen versio, jossa integraalit ovat tavallisia Riemann-integraaleja [4].

**Lause 1 (Abelin osittaissummauskaava).** *Olkoon  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$  reaalilukujono, joka on joko äärellinen tai ääretön ja rajatta kasvava. Olkoon  $x > \lambda_1$  ja  $f$ , sekä sen derivaatta määritelty välillä  $[\lambda_1, x]$ . Olkoon  $a_n$  mielivaltainen reaalilukujono. Merkitään*

$$A(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n$$

silloin

$$\sum_{\lambda_1 \leq x} a_n f(\lambda_1) = A(x)f(x) - \int_{\lambda_1}^x A(t)f'(t) dt.$$

*Todistus.* Lasketaan

$$\begin{aligned} A(x)f(x) - \sum_{\lambda_n \leq x} a_n f(\lambda_n) &= \sum_{\lambda_n \leq x} a_n f(x) - \sum_{\lambda_n \leq x} a_n f(\lambda_n) \\ &= \sum_{\lambda_n \leq x} a_n (f(x) - f(\lambda_n)) \\ &= \sum_{\lambda_n \leq x} \int_{\lambda_n}^x a_n f'(t) dt \\ &= \int_{\lambda_1}^x \left( \sum_{\lambda_n \leq t} a_n \right) f'(t) dt \\ &= \int_{\lambda_1}^x A(t) f'(t) dt, \end{aligned}$$

josta saadaan

$$\sum_{\lambda_n \leq x} a_n f(\lambda_n) = A(x)f(x) - \int_{\lambda_1}^x A(t)f'(t) dt,$$

kun yhtälön termit järjestetään uudestaan. □

## 2.1 Sarjat lukuteoriassa

Tarkastellaan ensin muutamia olennaisia alkulukuihin ja jaollisuuteen liittyviä käsitteitä. Tutkielmassa oletetaan, että pienin luonnollinen luku on 1.

**Määritelmä 1.** Kokonaisluvun  $n \neq 0, \pm 1$  yksikäsitteinen kanoninen esitys on

$$n = \pm p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}, \quad (1)$$

missä  $p_i$  ovat erisuuria alkulukuja ja luvut  $a_i$  ovat luonnollisia lukuja.

**Määritelmä 2.** Funktioita, joka ilmaisevat kuinka monta kertaa alkuluku  $p$  esiintyy luvun  $n$  kanonisessa esityksessä (1), merkitään

$$V_p(n) = \begin{cases} a_i, & \text{jos luvulla } n \text{ on kanoninen esitys ja } p = p_i \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

[5]

**Lause 2 (Legendre).** *Kaikilla luonnollisilla luvuilla  $n$  ja alkuluvuilla  $p$  on voimassa*

$$V_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

[8]

*Todistus.* Tulolla

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

on  $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$  tekijää, jotka ovat jaollisia luvulla  $p$ . Kun jaetaan nämä tekijät luvulla  $p$ , jäljelle jääneellä tulolla on vielä  $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$  tekijää, jotka ovat jaollisia luvulla  $p$ . Koska kaikilla luvuilla on vain äärellinen määrä tekijöitä, jollakin  $k_0$  saadaan, että  $\lfloor \frac{n}{p^{k_0}} \rfloor = 0$ , milloin kaikilla  $k \geq k_0$  täytyy olla, että  $\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor = 0$ .  $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi lukuteoriassa paljon esiintyvää funktiota:

**Määritelmä 3.** Riemannin zeeta-funktio määritellään sarjaesityksen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

avulla, kun  $s > 1$ .

Erityisesti seuraava zeeta-funktion avulla määrätty sarja on keskeinen tutkielmalle [3].

**Esimerkki 4.**

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Se, että sarjan summa on  $\frac{\pi^2}{6}$ , ei ole täysin triviaali tulos, vaan sen eteen täytyy rakentaa teoria sarjan transformaatiosta, mikä on tehty Knoppin kirjassa [6].

Yleisesti Riemannin zeeta-funktio on perustavanlaatuinen alkulukujen teoriassa. Esimerkiksi myöhemmin nähdään, että funktio esiintyy myös itse Mertensin lauseessa. Funktion yhteys alkulukuihin nähdään identiteetistä, jota joskus kutsutaan Eulerin identiteetiksi tai tuloksi [1].

**Lause 3.** *Kaikilla  $s > 1$  on voimassa identiteetti*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

*Todistus.* Oletetaan, että  $p$  on alkuluku ja  $s > 1$ . Selvästi  $-1 < \frac{1}{p^s} < 1$  kaikilla alkuluvuilla  $p$ , eli geometrinen sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^s}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} p^{-ns} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots = \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

suppenee. Muodostetaan tulo näistä termeistä, kun  $p = 2, 3, 5, \dots, P$ :

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq P} \frac{1}{1 - p^{-s}} &= (1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + 2^{-3s} + \dots) \\ &\quad \times (1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + 3^{-3s} + \dots) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \times (1 + P^{-s} + P^{-2s} + P^{-3s} + \dots). \end{aligned}$$

Kun tämä kerrotaan auki, huomataan, että muodostuu summa, jonka yleinen termi on muotoa

$$n^{-s} = 2^{-V_2(n)s} \cdot 3^{-V_3(n)s} \dots P^{-V_P(n)s}.$$

Toisin sanoen tulo muodostuu termeistä  $\frac{1}{n^s}$ , jossa luonnollisen luvun  $n$  kaikki alkutekijät ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin  $P$ . Käytetään näiden lukujen  $n$  joukosta merkintää  $(P)$ , jolloin saadaan

$$\prod_{p \leq P} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n \in (P)} \frac{1}{n^s}.$$

Kun  $P \rightarrow \infty$ , aritmetiikan peruslauseen nojalla joukkoon  $(P)$  kuuluu kaikki luonnolliset luvut ja jokainen luku esiintyy yllä olevassa sarjassa vain kerran. Koska sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  suppenee itseisesti, kun  $s > 1$ , niin sarja, jossa on samat termit eri järjestyksessä myös suppenee samaan arvoon. Siis termit voidaan järjestellä uudelleen haluttuun muotoon

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

□

Sen lisäksi, että identiteetti osoittaa alkulukujen yhteyden zeeta-funktioon, voidaan sen avulla muuntaa alkulukujen avulla esitettyjä sarjoja luonnollisten lukujen avulla esitettyihin. Tämän takia identiteetti on hyvin käyttökelpoinen apuväline, sillä yleisesti alkulukujen avulla esitettyjä sarjoja on vaikeampi käsitellä, kuin luonnollisten lukujen avulla esitettyjä. Tämä johtuu siitä, että alkulukujen tarkka jakautuminen ei ole tiedossa, mutta luonnollisten lukujen jakautuminen on. Esimerkiksi alkulukujen resiprookkisarjan hajaantumisen todistaminen on usein paljon työläämpää kuin aikaisemmin esitetyn harmonisen sarjan. Identiteettiä käyttäen hajaantuminen on mahdollista todeta.

**Esimerkki 5.** Alkulukujen resiprookkisarja

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

hajaantuu.

Aloitetaan Eulerin identiteetistä, kun  $s > 1$  eli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Otetaan siitä puolittain luonnollinen logaritmi sekä sievennetään lauseke

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) &= \ln\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}\right) \\
 &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \ln\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) \\
 &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \left(\ln 1 - \ln(1-p^{-s})\right) \\
 &= -\sum_{p \in \mathbb{P}} \ln(1-p^{-s}).
 \end{aligned}$$

Selvästi  $-1 < -\frac{1}{p^s} \leq 1$  kaikilla alkuluvuilla  $p$ , kun  $s > 1$ , joten Taylorin sarjakehitelmä funktiolle  $\ln(1 - \frac{1}{p^s})$  suppenee. Sijoitetaan sarjakehitelmä oikeanpuoleisen logaritmilausekkeen tilalle. Nyt siis

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) &= -\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\left(-\frac{1}{p^s}\right)^k}{k} \\
 &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}}.
 \end{aligned}$$

Kun  $s \rightarrow 1^+$ , yhtälön vasen puoli hajaantuu, sillä esimerkin 1 mukaan

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \ln\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \infty.$$

Siis myös oikeanpuoleinen lauseke

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^k} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k}$$

hajaantuu. Arvioidaan lausekkeen viimeistä termiä ylöspäin geometrisella sarjalla  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k}$ , joka suppenee, sillä  $-1 < \frac{1}{p} < 1$ . Nyt siis

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k} < \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)}$$

ja

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

jolloin

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k} < \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ylöspäin arvioitu termi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  suppenee, eli myös alkuperäinen sarja  $\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k}$  suppenee. Koska todettiin, että lauseke hajaantuu, alkulukujen resiprookkisumman  $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$  täytyy hajaantua.

Eulerin identiteetin avulla alkulukujen avulla esitettyjä sarjoja voidaan myös muuntaa luonnollisten lukujen avulla määriteltyihin.

**Esimerkki 6.** Aloitetaan Eulerin identiteetistä, kun  $s = 1 + \rho$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-1-\rho}},$$

joka on voimassa, kun  $\rho > 0$ . Otetaan yhtälöstä puolittain luonnollinen logaritmi sekä sievennetään lauseke

$$\begin{aligned} \ln\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}}\right) &= \ln\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-1-\rho}}\right) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \ln\left(\frac{1}{1 - p^{-1-\rho}}\right) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \left(\ln 1 - \ln(1 - p^{-1-\rho})\right) \\ &= - \sum_{p \in \mathbb{P}} \ln(1 - p^{-1-\rho}). \end{aligned}$$

Derivoidaan yhtälö puolittain muuttujan  $\rho$  suhteen, jolloin

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^{1+\rho}}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\rho}}} = - \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\frac{\ln p}{p^{1+\rho}}}{1 - p^{-1-\rho}}.$$

Lopuksi sijoitetaan  $\rho = 1$  ja sievennetään lauseke, jolloin saadaan sarjan transformatio

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\frac{\ln p}{p^2}}{1 - \frac{1}{p^2}}. \quad (2)$$

Vaikka esimerkin sarja näyttää tässä vaiheessa monimutkaiselta, myöhemmin nähdään, että tulos on tärkeä osa todistusta.

## 2.2 Summien arviointi

Seuraavaksi tarkastellaan harmonisen sarjan osasummia. Kun summataan äärellinen määrä sarjan termejä johonkin lukuun  $x$  asti, summa on oleellisesti luvun  $x$  luonnollinen logaritmi [1].

**Lause 4.** Kaikilla reaaliluvuilla  $x > 1$  on voimassa

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln(x) + \gamma + E(x), \text{ jossa}$$

$$E(x) = \int_x^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt - \frac{x - [x]}{x} \text{ ja}$$

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt = 0,57721566 \text{ (Eulerin-Mascheronin vakio).}$$

*Todistus.* Aloitetaan merkitsemällä  $a_n = 1$ , jolloin

$$A(x) = \sum_{n \leq x} 1$$

ja  $f(x) = \frac{1}{x}$  sekä sen derivaatta  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Käytetään nyt Abelin osittaissummauskaavaa ja sievennetään lauseke haluttuun muotoon

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt \\ &= \frac{\sum_{n \leq x} 1}{x} + \int_1^x \frac{\sum_{n \leq x} 1}{t^2} dt \\ &= \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{[t]}{t^2} dt \\ &= \frac{x - x + [x]}{x} + \int_1^x \frac{t - t + [t]}{t^2} dt \\ &= 1 - \frac{x - [x]}{x} + \int_1^x \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{t - [t]}{t^2} dt \\ &= 1 - \frac{x - [x]}{x} + \ln x - \ln 1 - \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt + \int_x^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt \\ &= \ln x + 1 - \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt + \int_x^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt - \frac{x - [x]}{x} \\ &= \ln x + \gamma + E(x). \end{aligned}$$

□

Oleellista on mainita, että luvusta  $x$  riippuva virhetermi  $E(x)$  lähestyy nollaa, kun  $x$  lähestyy ääretöntä [1]. Siis arvio on hyvä etenkin suurille luvun  $x$  arvoille.

Mertensin lause määrittää alkulukujen resiprookkisummalle samanlaisen asymp-toottisen arvon. Kiinnostavaa tässä on se, että arvio on tuplalogaritmien eli kun termejä summataan lukuun  $x$  asti, on summa noin luvun  $x$  luonnollisen logaritmin luonnollinen logaritmi. Seuraavassa lauseessa esitetään Mertensin alkuperäinen muotoilu tuloksesta.

**Lause 5 (Mertens).** *Kaikilla reaaliluvuilla  $x > 1$  on voimassa*

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln [x] + \gamma + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(n) \frac{\ln \lfloor \zeta(n) \rfloor}{n} + \delta,$$

jossa  $\gamma$  on Eulerin-Mascheronin vakio,  $\mu(n)$  on Möbiuksen funktio,  $\zeta(n)$  on Riemannin zeeta-funktio ja  $|\delta| < \frac{4}{\ln([x]+1)} + \frac{2}{[x] \ln[x]}$ .

Leonhard Euler arvioi elämäkerrassaan 1700-luvun alussa, että alkulukujen resiprookkisumma on tuplalogaritmien. Adrien-Marie Legendre antoi ensimmäisen konkreettisen arvion summasta 1800-luvun alussa. Kumpikaan heistä ei kuitenkaan määrittelyt lausetta täsmällisesti tai todistanut sitä niin, että se vastaisi modernin matematiikan standardeja [9]. Viimein, vuonna 1874, lauseen todisti puolalais-itävaltalainen matemaatikko Franciszek Mertens.

### 3 Peruslemma

Lauseen alkuperäisessä todistuksessa Mertens todisti ensin kaksi perustavanlaatuisia lemmaa joiden avulla hän todisti lopullisen lauseensa. Tutkielmassa esitetyssä modernissa todistuksessa ei käytetä enää toista lemmaa, mutta ensimmäinen lemma on edelleen olennainen, joten tässä osiossa esitetään sekä todistetaan se. Luku perustuu Villarinon artikkeliin [9] ellei muuta mainita.

**Lemma 1.** *Kaikilla reaaliluvuilla  $x > 1$  on voimassa*

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + R(x), \text{ jossa } |R(x)| < 2.$$

Ennen lemmän todistusta käydään läpi muutamia aputuloksia.

#### 3.1 Määritelmiä, lauseita ja lemmoja

Määritellään ensin theeta- ja khii-funktiot, jotka ovat keskeisiä käytettävissä lauseissa ja lemmoissa.

**Määritelmä 4.** Kun  $x > 1$  on reaaliluku ja  $p$  on alkuluku, Chebyshevin theeta-funktio määritellään seuraavasti

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

**Määritelmä 5.** Kun  $x > 1$  on reaaliluku, khii-funktio määritellään seuraavasti

$$\chi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(x^{\frac{1}{n}}).$$

Seuraavaksi käydään läpi vielä muutama aputulos.

**Lause 6 (Stirling).** *Kaikilla reaalityyppisillä  $x \geq 4$  on voimassa epäyhtälöt*

$$\ln(\lfloor x \rfloor!) < x \ln x + \frac{1}{2} \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12x} \quad (3)$$

$$2 \ln \left( \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor! \right) > x \ln x - x \ln 2 - \ln x - x + 2 \ln \sqrt{2\pi} + \ln 2 - \frac{2}{x-1} \quad (4)$$

ja kaikilla kokonaisluvuilla  $n \geq 5$  yhtälö

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{\lambda}{12n}, \text{ jossa } |\lambda| < 1. \quad (5)$$

Lauseen todistus ja siihen vaadittavat esitiedot löytyvät Knoppin kirjasta [6].

**Lemma 2.** *Kaikilla reaalityyppisillä  $x > 1$  on voimassa*

$$\ln(\lfloor x \rfloor!) = \chi(x) + \chi\left(\frac{x}{2}\right) + \chi\left(\frac{x}{3}\right) + \dots$$

*Todistus.* Jokainen alkuluku  $p \leq x$  jakaa luvun  $\lfloor x \rfloor$  kertoman  $V_p(\lfloor x \rfloor!)$  kertaa. Tehdään tämän tiedon avulla luvulle  $\lfloor x \rfloor!$  alkutekijähajotelma

$$\lfloor x \rfloor! = \prod_{p \leq x} p^{V_p(\lfloor x \rfloor!)}.$$

Seuraavaksi otetaan yhtälöstä puolittain luonnollinen logaritmi, sievennetään logaritmin laskusääntöjen avulla sekä käytetään Legendren lausetta termin  $V_p(\lfloor x \rfloor!)$  määrittämiseen:

$$\begin{aligned} \ln(\lfloor x \rfloor!) &= \ln \left( \prod_{p \leq x} p^{V_p(\lfloor x \rfloor!)} \right) = \sum_{p \leq x} \ln \left( p^{V_p(\lfloor x \rfloor!)} \right) = \sum_{p \leq x} V_p(\lfloor x \rfloor!) \cdot \ln p \\ &= \sum_{p \leq x} \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \ln p = \sum_{k \geq 1} \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \ln p. \end{aligned}$$

Nyt summa voidaan tulkita niin, että  $\ln p$  esiintyy siinä  $\left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor$  kertaa. Erityisesti, jos  $\left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor = 0$ , niin  $\ln p$  esiintyy summassa 0 kertaa. Tämä siis tarkoittaa sitä, että  $\left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \ln p$  tilalle voidaan sijoittaa  $\sum_{m \leq \frac{x}{p^k}} \ln p$ , kun  $m \geq 1$ , eli

$$\ln(\lfloor x \rfloor!) = \sum_{k, m \geq 1} \sum_{p \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{p^k}} \ln p.$$

Nyt yhtälön oikea puoli on jo indeksejä vaille haluttu tulos, sillä yhtälössä on nyt theeta-funktiossa esiintyvä  $\ln p$ . Kun tarkastellaan muuttujasta  $m$  riippuvaa summausindeksiä  $m \leq \frac{x}{p^k}$ , huomataan, että se voidaan muokata muotoon  $mp^k \leq x$  ja

siitä vielä muotoon  $p \leq \sqrt[k]{\frac{x}{m}}$ , koska  $m, k \geq 1$ . Huomataan myös, että epäyhtälöstä  $mp^k \leq x$  seuraa, että  $p \leq x$ . Siis summausindeksi  $p \leq x$  voidaan poistaa kokonaan yhtälöstä, eikä summan arvo muutu. Saadaan siis

$$\ln([x]!) = \sum_{k,m \geq 1} \sum_{p \leq \sqrt[k]{\frac{x}{m}}} \ln p,$$

josta suoraan theeta- ja khii-funktioiden määritelmistä saadaan

$$\begin{aligned} \ln([x]!) &= \sum_{k,m \geq 1} \sum_{p \leq \sqrt[k]{\frac{x}{m}}} \ln p = \sum_{k,m \geq 1} \theta\left(\sqrt[k]{\frac{x}{m}}\right) \\ &= \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \dots \\ &\quad + \theta\left(\frac{x}{2}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right) + \dots \\ &\quad + \theta\left(\frac{x}{3}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\right) + \dots \\ &\quad + \\ &\quad \vdots \\ &= \chi(x) + \chi\left(\frac{x}{2}\right) + \chi\left(\frac{x}{3}\right) + \dots \end{aligned}$$

□

Seuraava lause on tärkeä osa peruslemman todistusta, sillä sitä käytetään virhetermin  $R(x)$  arvioimiseen.

**Lause 7.** *Kaikilla reaali-luvuilla  $x > 1$  on voimassa*

$$\theta(x) < 2x.$$

*Todistus.* Käytetään edellisen lemmän yhtälöä, ja muodostetaan sen avulla uusi yhtälö

$$\begin{aligned} \ln([x]!) - 2 \ln\left(\left[\frac{x}{2}\right]!\right) &= \chi(x) + \chi\left(\frac{x}{2}\right) + \chi\left(\frac{x}{3}\right) + \chi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots \\ &\quad - 2 \cdot \chi\left(\frac{x}{2}\right) \quad \quad - 2 \cdot \chi\left(\frac{x}{4}\right) - \dots \\ &= \chi(x) - \chi\left(\frac{x}{2}\right) + \chi\left(\frac{x}{3}\right) - \chi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots \end{aligned}$$

Suoraan khii-funktion määritelmästä on helppo nähdä, että

$$\chi\left(\frac{x}{3}\right) \geq \chi\left(\frac{x}{4}\right), \chi\left(\frac{x}{5}\right) \geq \chi\left(\frac{x}{6}\right), \dots,$$

joten

$$\chi(x) - \chi\left(\frac{x}{2}\right) + \chi\left(\frac{x}{3}\right) - \chi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots \geq \chi(x) - \chi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Saadaan siis epäyhtälö

$$\chi(x) - \chi\left(\frac{x}{2}\right) \leq \ln(\lfloor x \rfloor!) - 2 \ln\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor!\right). \quad (6)$$

Nyt voidaan määrittää yläraja termille  $\chi(x) - \chi\left(\frac{x}{2}\right)$  arvioimalla termiä  $\ln(\lfloor x \rfloor!) - 2 \ln\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor!\right)$  ylöspäin. Tämä voidaan tehdä Stirlingin kaavoilla (3) ja (4), kun oletetaan, että  $x \geq 4$ . Nyt siis

$$\begin{aligned} & \ln(\lfloor x \rfloor!) - 2 \ln\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor!\right) \\ & < x \ln x + \frac{1}{2} \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12x} - \left(x \ln x - x \ln 2 - \ln x - x + 2 \ln \sqrt{2\pi} + \ln 2 - \frac{2}{x-1}\right) \\ & = x - x + \frac{3}{2} \ln x + x \ln 2 - \ln 2 - \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12x} + \frac{2}{x-2} \\ & = x - \left((1 - \ln 2)x - \frac{3}{2} \ln x + \ln 2 + \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{12x} - \frac{2}{x-2}\right). \end{aligned}$$

Huomataan, että termi  $(1 - \ln 2)x - \frac{3}{2} \ln x - \ln 2 + \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{12x} - \frac{2}{x-2} < 0$ , kun  $x > 4,789$ . Kun tämä yhdistetään epäyhtälön (6) kanssa, saadaan

$$\chi(x) - \chi\left(\frac{x}{2}\right) < x, \text{ kun } x > 4,789.$$

Muokataan vielä saatu epäyhtälö muotoon

$$\chi(x) < x + \chi\left(\frac{x}{2}\right)$$

ja sijoitetaan luvun  $x$  paikalle  $x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \dots$ , kunnes  $\frac{x}{2^{m+1}} < 2$ . Saadaan siis epäyhtälöt

$$\begin{aligned} \chi(x) & < x + \chi\left(\frac{x}{2}\right) \\ \chi\left(\frac{x}{2}\right) & < \frac{x}{2} + \chi\left(\frac{x}{4}\right) \\ \chi\left(\frac{x}{4}\right) & < \frac{x}{4} + \chi\left(\frac{x}{8}\right) \\ & \vdots \\ \chi\left(\frac{x}{2^m}\right) & < \frac{x}{2^m} + \chi\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right). \end{aligned}$$

Koska  $\frac{x}{2^{m+1}} < 2$ , niin suoraan määritelmästä  $\chi\left(\frac{x}{2^{m+1}}\right) = 0$ . Nyt ketjuttamalla epäyhtälöt saadaan tulos

$$\begin{aligned} \chi(x) & < x + \frac{x}{2} + \dots + \frac{x}{2^m} = x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m}\right) \\ & < x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 2x. \end{aligned}$$

Selvästi  $\theta(x) \leq \chi(x)$ , joten  $\theta(x) < 2x$ . Tässä vaiheessa on hyvä huomioida, että todistuksessa käytetty yhtälö pätee vain, kun  $x > 4,789$ . Kuitenkin on helppo tarkistaa laskemalla, että  $\theta(x) < 2x$  pätee myös silloin, kun  $x \leq 4,789$ . Sivuutetaan se tässä yhteydessä, sillä lausetta käytetään vain, kun  $x \geq 5$ . □

Nyt esitetään ja todistetaan vielä viimeinen lause, joka tarvitaan peruslemmaa varten.

**Lause 8.** *Kun  $n \geq 5$ , niin*

$$\ln n - \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} = 1 - \frac{1}{2n} \ln n - \frac{\ln \sqrt{2\pi}}{n} - \frac{\lambda}{12n^2} - \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} r_p \ln p + \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \ln p + \dots,$$

missä  $|\lambda| < 1$ .

*Todistus.* Samalla tavalla kuin lemmän 2 todistuksessa, muodostetaan luvun  $n$  kertomalle alkutekijähajotelma Legendren lauseen avulla ja otetaan siitä luonnollinen logaritmi. Saadaan siis

$$\ln n! = \sum_{k \geq 1} \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \ln p = \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \ln p + \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \ln p + \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor \ln p + \dots$$

Merkitään  $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \frac{n}{p} - r_p$ , missä  $0 \leq r_p < 1$ . Sijoitetaan tämä edelliseen yhtälöön, jolloin

$$\ln n! = \sum_{p \leq n} \frac{n \ln p}{p} - \sum_{p \leq n} r_p \ln p + \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \ln p + \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor \ln p + \dots$$

Oletetaan, että  $n \geq 5$  ja käytetään Stirlingin kaavaa (5) termiin  $\ln n!$ , jolloin saadaan yhtälö

$$n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{\lambda}{12n} = \sum_{p \leq n} \frac{n \ln p}{p} - \sum_{p \leq n} r_p \ln p + \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \ln p + \dots,$$

missä  $|\lambda| < 1$ .

Jaetaan yhtälö puolittain luvulla  $n$  ja järjestellään termit uudestaan, jolloin saadaan hauluttu tulos

$$\ln n - \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} = 1 - \frac{1}{2n} \ln n - \frac{\ln \sqrt{2\pi}}{n} - \frac{\lambda}{12n^2} - \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} r_p \ln p + \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \ln p + \dots,$$

missä  $|\lambda| < 1$ , kun  $n \geq 5$ . □

### 3.2 Peruslemman todistus

Todistetaan seuraavaksi peruslemma. Kun lemmän yhtälön termit järjestetään uudelleen, saadaan yhtälö

$$\ln x - \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = R(x), \text{ jossa } |R(x)| < 2.$$

Huomataan, että yhtälön vasen puoli on lähes sama kuin lauseen 8 yhtälön. Tarkoituksena on siis käyttää lauseen yhtälön oikeaa puolta ja sen avulla arvioida, että virhetermi  $|R(x)| < 2$ .

Tarkastellaan siis lauseketta

$$1 - \frac{\ln n}{2n} - \frac{\ln \sqrt{2\pi}}{n} - \frac{\lambda}{12n^2} - \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} r_p \ln p + \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \ln p + \dots, \quad (7)$$

missä  $|\lambda| < 1$  ja osoitetaan ensin, että 2 on sen yläraja. Helpoin lähtökohta on ensin poistaa lausekkeesta kaikki negatiiviset termit. Termi  $-\frac{1}{n} \sum_{p \leq n} r_p \ln p$  on selvästi negatiivinen. Myös  $-\frac{\ln n}{2n} - \frac{\ln \sqrt{2\pi}}{n} - \frac{\lambda}{12n^2}$  on selvästi negatiivinen kaikilla  $|\lambda| < 1$  arvoilla. Siis kun poistetaan kaikki negatiiviset termit ylärajaksi saadaan

$$1 + \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \ln p + \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor \ln p + \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^4} \right\rfloor \ln p + \dots$$

Seuraavaksi arvioidaan lauseketta ylöspäin arvioimalla summamuotoisia termejä ylöspäin. Lattiafunktion määritelmän nojalla

$$\sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \ln p \leq \sum_{p \leq n} \frac{n}{p^k} \ln p.$$

Samalla voidaan arvioida äärellisiä summia ylöspäin korvaamalla ne identtisillä sarjoilla. Eli summa jatkuu äärettömiin, sen sijaan, että termejä summattaisiin lukuun  $n$  asti. Nyt yläraja on

$$1 + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^2} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^3} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^4} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^5} + \dots$$

Seuraavaksi tarkastellaan sarjoja, joiden potenssit ovat parittomia. Koska  $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$  kaikilla alkuluvuilla  $p$ , niin

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^3} < \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^2}, \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^5} < \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^4}, \dots$$

Eli kun arvioidaan parittomien potenssien sarjoja ylöspäin tällä tavalla, ylärajaksi

saadaan

$$\begin{aligned}
& 1 + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^2} + \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^2} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^4} + \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^4} + \dots \\
&= 1 + \frac{3}{2} \left( \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^2} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^4} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^6} + \dots \right) \\
&= 1 + \frac{3}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^2} \left( 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \dots \right) \\
&= 1 + \frac{3}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{p^2} \right)^n \right).
\end{aligned}$$

Nyt huomataan, että  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{p^2} \right)^n$  on geometrinen sarja. Selvästi  $-1 < \frac{1}{p^2} < 1$ , eli sarja suppenee ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{p^2} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}.$$

Kun tämä sijoitetaan ylärajaan, saadaan

$$1 + \frac{3}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\frac{\ln p}{p^2}}{1 - \frac{1}{p^2}}.$$

Käytetään nyt esimerkin 6 sarjan muunnosta (2), jolloin

$$1 + \frac{3}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\frac{\ln p}{p^2}}{1 - \frac{1}{p^2}} = 1 + \frac{3}{2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}.$$

Esimerkistä 4 tiedetään, että  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Summan  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$  arvo on vaikeampi laskea tarkasti, mutta integraalitestistä tiedetään, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \leq \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1,$$

joka on riittävän pieni yläraja tähän tarkoitukseen. Lopulta saadaan siis

$$\ln n - \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} < 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi^2}{6}} = 1 + \frac{9}{\pi^2} < 2.$$

Seuraavaksi osoitetaan, että lausekkeen (7) alaraja on  $-2$ . Määritetään alaraja taas poistamalla ensin kaikki lausekkeessa esiintyvät positiiviset termit. Selvästi summat

$$\frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p^2}, \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p^3}, \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p^4}, \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p^5}, \dots$$

ovat kaikki positiivisia. Myös termi  $1 - \frac{1}{2n} \ln n - \frac{\ln \sqrt{2\pi}}{n} - \frac{\lambda}{12n^2}$  on positiivinen, sillä

$$\frac{1}{2n} \ln n + \frac{\ln \sqrt{2\pi}}{n} + \frac{\lambda}{12n^2} < 1, \text{ kun } |\lambda| < 1 \text{ ja } n \geq 5.$$

Termeistä jää jäljelle siis

$$-\frac{1}{n} \sum_{p \leq n} r_p \ln p.$$

Huomataan suoraan määritelmästä, että  $r_p \leq 1$ . Saadaan siis

$$-\frac{1}{n} \sum_{p \leq n} r_p \ln p \geq -\frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \ln p$$

ja suoraan theeta-funktion määritelmästä saadaan

$$-\frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \ln p = -\frac{1}{n} \theta(n).$$

Nyt lauseesta 7 tiedetään, että  $\theta(n) < 2n$ , eli

$$-\frac{1}{n} \theta(n) > -\frac{1}{n} \cdot 2n = -2.$$

Lopulta saadaan siis epäyhtälö

$$\ln n - \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} > -2.$$

Nyt kun yhdistetään saadut ylä- ja alarajat saadaan tulos

$$-2 < \ln n - \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} < 2,$$

jonka avulla saadaan perustavanlaatuisen lemmän väite

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + R(n), \text{ missä } |R(n)| < 2.$$

Tässä vaiheessa on hyvä muistaa, että saadut yläraja ja alaraja todistettiin vain luvuille  $n \geq 5$ , sillä todistuksessa käytetyssä lauseessa 8 oli tämä rajoite. Kuitenkin tilanteet, jossa  $n < 5$ , on helppo tarkistaa laskemalla.

On myös hyvä huomata, että esitetty todistus on voimassa vain luonnollisille luvuille, vaikka peruslemma on voimassa kaikille reaaliluvuille. Toisaalta jokaista reaalilukua  $x$  voidaan approksimoida luonnollisella luvulla  $n$ , jolla  $n \leq x \leq n + 1$ . Alaraja on tietenkin sama, kuin edellä arvioitu. Koska  $\ln(x) \leq \ln(n + 1) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})$ , ylärajojen ero on  $\ln(x) - \ln(n) \leq \ln(1 + \frac{1}{n})$ . Kun  $n \geq 11$ ,  $\ln(1 + \frac{1}{n}) + \frac{9}{\pi^2} < 1$ , eli suurilla luvun  $x$  arvoilla virhe sisältyy arvioituun ylärajaan, sillä aiemmin ylärajan arvioinnissa luku  $\frac{9}{\pi^2}$  pyöristettiin luvuksi 1. Tapaukset  $n < 11$  voidaan todentaa suoraan laskemalla.

## 4 Mertensin lauseen todistus

Nyt kun peruslemma on todistettu, voidaan todistaa itse Mertensin lause. Tutkielmassa ei siis esitetä Mertensin alkuperäistä todistusta, vaan moderni versio. Luku seuraa myös Villarion artikkelin [9] esitystä. Muotoillaan ensin Mertensin lause eksplisiittisesti todistusta varten.

**Lause 9 (eksplisiittinen Mertens).**

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + B + \delta,$$

jossa  $|\delta| < \frac{4}{\ln x}$  ja  $B = 1 - \ln \ln 2 + \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt$ .

Käytännössä lause eroaa Mertensin alkuperäisestä muotoilusta virhetermien suhteen. Eksplisiittisessä lauseessa esiintyvä virhetermi  $B$  on itseasiassa hieman tarkempi kuin Mertensin alkuperäinen termi, tosin sen arvojen laskeminen on vaikeampaa. Tämä ei kuitenkaan ole ongelma, sillä esitykseen ei kuulu virhetermien laskeminen vaan pääpaino on summan asympotoottisen arvion esiittäminen ja todistaminen.

*Todistus.* Kuten harmonisen sarjankin kanssa, aloitetaan todistus käyttämällä Abelin osittaissummauskaavaa. Merkitään ensin

$$a_n = \begin{cases} \frac{\ln p}{p}, & \text{jos } n \text{ on alkuluku} \\ 0 & \text{muuten,} \end{cases}$$

silloin

$$A(x) = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p}.$$

Merkitään myös, että

$$f(x) = \frac{1}{\ln x},$$

jolloin sen derivaatta on

$$f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}.$$

Saadaan siis lauseke, johon voidaan käyttää Abelin osittaissummauskaavaa:

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} \cdot \frac{1}{\ln p} = \frac{\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p}}{\ln x} + \int_2^x \frac{\sum_{p \leq t} \frac{\ln p}{p}}{t \ln^2 t} dt.$$

Käytetään nyt peruslemmaa, eli korvataan summa  $\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p}$  termillä  $\ln x + R(x)$ , ja muokataan lauseke haluttuun muotoon:

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} &= \frac{\ln x + R(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\ln t + R(t)}{t \ln^2 t} dt \\
&= 1 + \frac{R(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\ln t}{t \ln^2 t} dt + \int_2^x \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt \\
&= 1 + \frac{R(x)}{\ln x} + \int_2^x \ln \ln t + \int_2^x \frac{R(t)}{t \ln^2 t} \\
&= 1 + \frac{R(x)}{\ln x} + \ln \ln x - \ln \ln 2 + \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt - \int_x^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt \\
&= \ln \ln x + 1 - \ln \ln 2 + \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt + \frac{R(x)}{\ln x} - \int_x^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt.
\end{aligned}$$

Nyt

$$B = 1 - \ln \ln 2 + \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt$$

ja

$$\begin{aligned}
|\delta| &= \left| \frac{R(x)}{\ln x} - \int_x^\infty \frac{R(t)}{t \ln^2 t} dt \right| < \left| \frac{2}{\ln x} - \int_x^\infty \frac{-2}{t \ln^2 t} dt \right| \\
&\leq \left| \frac{2}{\ln x} \right| + \left| - \int_x^\infty \frac{-2}{t \ln^2 t} dt \right| = \left| \frac{2}{\ln x} \right| + \left| \int_x^\infty \frac{2}{\ln t} \right| \\
&= \left| \frac{2}{\ln x} \right| + \left| \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{\ln a} - \frac{2}{\ln x} \right| = \left| \frac{2}{\ln x} \right| + \left| 0 - \frac{2}{\ln x} \right| \\
&= \frac{2}{\ln x} + \frac{2}{\ln x} = \frac{4}{\ln x}
\end{aligned}$$

eli saadaan Mertensin lause

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + B + \delta.$$

□

## Viitteet

- [1] G. H Hardy, E. M. Wright: An introduction to the Theory of Numbers. Clarendon press, London, 1960.
- [2] Petteri Harjulehto, Riku Klén, Mika Koskenoja: *Analyysiä reaaliluvuilla*. Uni-grafia Oy, Helsinki, 2014
- [3] Gareth A. Jones, Josephine M. Jones: *Elementary Number Theory*. Springer, London, 1998.
- [4] Matti Jutila: *Analyttinen lukuteoria*. Luentomoniste, Turun yliopisto.
- [5] Matti Jutila, Iiro Honkala: *Lukuteoria*. Luentomoniste, Turun yliopisto, 2011.
- [6] Dr. Konrad Knopp: *Theory and Application of Infinite Series*. Hafner Publishing Company, inc. New York, 1971.
- [7] Franz. Mertens: *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 78, 1874.
- [8] Victor H. Moll: *Numbers and Functions: From a Classical-Experimental Mathematician's Point of View*. American Mathematical Society, Rhode Island, 2012.
- [9] Mark B. Villarino: *Mertens' Proof of Mertens' Theorem*. arXiv:0504289, San Jose, 2005.