



X

Oppiaine	Taloustieteen kvantitatiiviset menetelmät	Päivämäärä	19.4.2011
Tekijä	Henrik Jämsä	Matrikkelinumero	
		Sivumäärä	67
Otsikko	Talouden suhdanteet luottoluokitusten Markov-ketjussa		
Ohjaajat	Professori Luis Alvarez ja assistentti Pekka Matomäki		

#### Tiivistelmä

Luottoriski kuuluu olennaisesti pankkitoimintaan, ja luottoriskiä sisältyy moniin erilaisiin taloudellisiin sitoumuksiin. Sen määrittämisestä on tullut aiempaa merkityksellisempää rahoituslaitosten vakavaraisuussäätelyn lisääntyessä. Kiinnostus luottoriskiä kohtaan portfoliotasolla on kasvanut, koska mahdollisuudet sen hallintaan ovat helpottuneet lainamarkkinoiden likviditeetin parantuessa ja johdannaisopimusten kehittyessä. Luototettavien luottoriskiä arvioivat itse rahoituslaitokset ja ulkoiset luokituslaitokset. Tässä tutkielmassa keskitytään luottoluokituslaitosten tekemiin ulkoisiin luokituksiin, joiden muutosten oletetaan käyttäytyvän Markov-ketjun ominaisuuksien mukaan. Luottoluokitusten on havaittu riippuvan talouden suhdanteista, jolloin stationaaristen Markov-ketjujen sijaan voidaan luokitusmuutoksia käsitellä epästationaarisena prosessina.

Tämä tutkielma esittelee aluksi Markov-ketjujen teoriaa, jossa siirtymätodennäköisyydet ovat keskeisessä asemassa. Tutkielmassa käytetään havainnollistavaa esimerkkiä näiden todennäköisyyksien empiirisestä määrittämisestä. Epästationaaristen Markov-ketjujen siirtymätodennäköisyydet ovat ajasta riippuvia. Tässä työssä käsitellään kahta tapaa ehdollistaa siirtymätodennäköisyyksiä: faktorimallia ja numeerista mallia. Markov-ketjujen teoriaa ja ehdollistamisen malleja sovelletaan Standard & Poor'sin luottoluokitusaineistoon vuosilta 1981–2005, jolloin saadaan kuva, kuinka mallit pystyvät selittämään siirtymätodennäköisyyksien suhdanneriippuvuutta. Lisäksi tutkielmassa pyritään tarjoamaan ratkaisukeinoja käytännön soveltamisessa ilmeneviin ongelmiin.

Tutkielman tuloksissa havaitaan siirtymätodennäköisyyksien olevan epästationaarisia. Kuitenkaan selvää yhteyttä talouden suhdanteen tunnuslukuun ei löydetty. Aiempien tutkimusten toteamaa luottoluokitusten myötäsyklisyyttä ei siis voitu vahvistaa. Vaikka epästationaarisuuden huomioimisen hyödyllisyydestä ei saada yksiselitteistä näyttöä, voidaan kuitenkin todeta, että useiden kriteerien perusteella epästationaarisuuden huomioiminen parantaa siirtymätodennäköisyyksien estimaatteja. Tutkielman lopuksi keskustellaan mahdollisuuksista parantaa ehdollisten mallien suoriutumista siirtymätodennäköisyyksien ehdollistamisessa.

Asiasanat	stokastiset prosessit, Markovin ketjut, suhdannevaihtelut, luottokelpoisuus
Muita tietoja	



Turun yliopisto  
University of Turku

# **TALOUDEN SUHDANTEET LUOTTOLUOKITUSTEN MARKOV- KETJUSSA**

Taloustieteen kvantitatiivisten  
menetelmien pro gradu -tutkielma

Laatija:  
Henrik Jämsä 14047

Ohjaajat:  
Prof. Luis Alvarez  
Ass. Pekka Matomäki

19.4.2011  
Lieto



Turun kauppakorkeakoulu • Turku School of Economics

# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>6</b>
1.1	Taustaa . . . . .	6
1.2	Tutkielman tavoitteet ja rakenne . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Markov-ketju</b>	<b>9</b>
2.1	Diskreettiaikainen Markov-ketju . . . . .	9
2.1.1	Stationaariset siirtymätodennäköisyydet . . . . .	9
2.1.2	Siirtymätodennäköisyyksien empiirisestä määrittämisestä . . . . .	11
2.2	Stationaarinen jakautuma ja rajajakautuma . . . . .	11
2.3	Stationaarinen jatkuva-aikainen Markov-ketju . . . . .	13
2.4	Epästationaariset Markov-ketjut . . . . .	15
2.4.1	Diskreetti tapaus . . . . .	15
2.4.2	Jatkuva-aikainen tapaus . . . . .	16
2.5	Esimerkki Markov-ketjusta . . . . .	17
2.5.1	Diskreetti tarkastelu . . . . .	17
2.5.2	Tarkastelu jatkuva-aikaisena Markov-ketjuna . . . . .	19
2.5.3	Stationaarinen jakauma . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Luottoluokitusten Markov-ketju</b>	<b>23</b>
3.1	Yleistä luottoluokituksista . . . . .	23
3.2	Luottoluokitusten käyttötarkoituksia . . . . .	24
3.3	Luokitusmuutosten siirtymätodennäköisyysmatriisi . . . . .	25
3.3.1	Keskiarvomatriisin generaattorimatriisi . . . . .	27
3.3.2	Toimialan vaikutus siirtymätodennäköisyyksiin . . . . .	28
3.4	Luottoluokitusten reliabiliteetti . . . . .	29
3.4.1	Eturistiriidat . . . . .	29
3.4.2	Luottoluokitusten momentum . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Luokitusten Markov-ketjun epästationaarisuus</b>	<b>31</b>
4.1	Siirtymätodennäköisyyksien suhdanneriippuvuus . . . . .	31
4.1.1	Konkurssitodennäköisyyksien vertailua . . . . .	32

4.1.2	Stationaarisuuden testaaminen . . . . .	33
4.2	Todennäköisyysmatriisien ehdollistaminen . . . . .	34
4.2.1	Yhden faktorin malli matriisien ehdollistamiselle . . . . .	34
4.2.2	Numeerisen ehdollistamisen malli . . . . .	37
4.3	Mallien empiiristen tulosten vertailua . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Ehdollisten mallien implementointi empiiriseen aineistoon</b>	<b>41</b>
5.1	Luottoluokitusaineiston stationaarisuus . . . . .	41
5.2	Yhden faktorin mallin estimointi aineistolle . . . . .	42
5.2.1	Ehdollisten ja toteutuneiden konkurssitodennäköisyyk-	
	sien korrelaatio . . . . .	45
5.2.2	Makroekonomisen tekijän ja luottosuhdanneindeksin vä-	
	linen yhteys . . . . .	46
5.3	Numeerisen ehdollistamisen mallin estimointi . . . . .	47
5.4	Mallien tuottamien matriisien vertailua . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Lainojen hinnoittelu ja luottoluokitukset</b>	<b>54</b>
6.1	Riskineutraalit konkurssitodennäköisyydet . . . . .	54
6.2	Riskineutraalin matriisin estimointi . . . . .	55
6.3	Hinnoittelu riskineutraalin mitan alaisuudessa . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Yhteenveto ja johtopäätökset</b>	<b>60</b>
	<b>Lähteet</b>	<b>64</b>

## Kuviot

1	Tutkielman Markov-ketjujen teoreettinen viitekehys . . . . .	7
2	Siirtymät tilojen välillä . . . . .	18
3	BBB-luokan yrityksen varallisuusjakauma luottoluokitusten muu- tostodennäköisyyksillä . . . . .	35
4	Luottosuhdanneindeksin $Z$ siirtymä . . . . .	36
5	Aikasarjan $Z$ keskiarvo ja varianssi eri $\rho$ :n arvoilla . . . . .	44
6	Luottosuhdanneindeksi $Z$ vuosina 1981–2005 . . . . .	44
7	Faktorimallin tuottamat ja toteutuneet konkurssitodennäköi- syydet B-luokituksen yrityksille . . . . .	45
8	Bruttokansantuotteen kasvu ja luottosuhdanneindeksi vuosina 1981–2005 . . . . .	47
9	Numeerisen mallin tuottamat ja toteutuneet konkurssitoden- näköisyydet B-luokituksen yrityksille . . . . .	49

## Taulukot

1	Esimerkin luokitustapahtumat . . . . .	18
2	Standard & Poor'sin ja Moody'sin luottoluokitusluokat pitkä- aikaisille lainoille . . . . .	23
3	Vuoden 2005 siirtymätodennäköisyydet . . . . .	26
4	Moody'sin pankki- ja teollisuusalan yritysten suhteelliset siir- tymäfrekvenssit vuosina 1971–1997 . . . . .	28
5	Konkurssitodennäköisyydet viiden ja kymmenen vuoden pe- riodeille . . . . .	32
6	BBB-luokan yrityksen varallisuusjakauman osioiden rajat . . .	35
7	Testisuureen arvoja matriisin riveille . . . . .	42
8	Osioiden rajat keskiarvomatriisille . . . . .	43
9	Konkurssitodennäköisyysaikaasarjojen korrelaatiokertoimet . . .	45
10	Origoregression tulokset . . . . .	46
11	Numeerisen ehdollistamisen mallin riskikertoimet . . . . .	48
12	Numeerisen mallin ja toteutuneiden matriisien diagonaalit . .	48
13	Numeerisen mallin konkurssitodennäköisyyksien korrelaatiot .	50
14	Optimaalisuuskriteerit vertailtaessa ehdollistamisen malleja . .	51
15	Riskineutraalit konkurssitodennäköisyydet luokituksittain . . .	56
16	Riskineutraalit konkurssitodennäköisyydet maturiteeteittain .	58
17	Lainojen hinnat luokituksittain ja maturiteeteittain . . . . .	58
18	Lainojen tuotot luokituksittain ja maturiteeteittain . . . . .	59

# 1 Johdanto

## 1.1 Taustaa

Reaalimaailman satunnaisia prosesseja mallinnettaessa käytetään niitä kuvaamaan stokastisia prosesseja. Menneisyydestä riippumatonta prosessia kuvataan usein Markov-prosessina. Kun todellisuuden mahdollisten tilojen joukko on diskreetti, puhutaan Markov-ketjusta. Markov-ketjuja käytetään monilla eri tieteenaloilla, kuten fysiikassa, biologiassa, yhteiskunta-, talous- ja insinööritieteissä. Markov-ketjujen etuna voidaan pitää niiden riittävää yleisyyttä ja matemaattisen määrittämisen yksinkertaisuutta. Monet reaalimaailman ilmiöt ovat hyvin monimutkaisia, eikä tarkkaa matemaattista mallia yleensä pystytä määrittämään. Tyytyminen likimääräisiin malleihin on tällöin ainut vaihtoehto. Ne ovat myös laskennallisesti tehokkaampia ja johtavat joskus jopa paremmin todellisuutta kuvaaviin tuloksiin kuin tarkemmat ja monimutkaiset mallit (Yin & Zhang 2005, 3–4).

Markov-ketjujen käyttö on yleistä taloustieteessä. Se sopii mallintamaan aikasarjojen kehitystä, joten sitä on käytetty muun muassa suhdanteiden ja osakkeiden hintojen kehitystä kuvaavissa malleissa (Hamilton 1989; Tjøstheim & Tyssedal 1988). Korkojen stokastista vaihtelua kuvatessa hyödynnetään Markov-ketjuja. Korko on olennainen käsite rahoituksessa mutta myös vakuutusmatematiikassa. Markov-ketjuja käytetään vakuutusmatematiikassa sekä korkojen yhteydessä että vakuutetun tilan muutosten kuvaamisessa (Pesonen, Soininen & Tuominen 1999; Norberg 1995).

Tässä tutkielmassa keskitytään sijoitusportfolion luottoriskiin, jonka määrittämisessä käytetään Markov-ketjua kuvaamaan luottoluokitusten muutoksia. Luottoriski kuuluu olennaisesti pankkitoimintaan. Luottoriski realisoiuu, kun vastapuoli ei maksa velkaansa, sen korkoja tai ei kumpakaan eivätkä vakuudet riitä turvaamaan saamia (Vimpari 2003, 16). Luottoriskiä ei sisälly ainoastaan luottoihin vaan muihinkin instrumentteihin, kuten johdannaisiin (CreditMetrics 1997, 47).

Luottoriskiä ei enää mitata ainoastaan yksittäisiin rahoitus sopimuksiin liittyen, vaan portfoliotason määrittäminen on tullut tärkeäksi useastakin

syystä. Luottoriski muuttuu ajan kuluessa, eikä sopimuksia enää voida luokitella vain hyviin ja huonoihin. Toiseksi korkomarginaalit ovat kaventuneet lainamarkkinoilla, jolloin jää vähän tilaa virhearvioille. Myös lainamarkkinoiden parantunut likviditeetti ja johdannaisten kehittäminen lainasopimuksille ovat mahdollistaneet entistä proaktiivisemmän luottoriskin hallinnan (Wilson 1998, 71). Luottoriskimalleissa käytetään usein parametreina luottoluokituksia niiden helppokäyttöisyyden vuoksi. Samalla myös rahoituslaitoksia säätelevä Basel II -sopimus vaikutti, että luottoluokituksia alettiin käyttää, sillä se salli vakavaraisuuslaskelmissa niin sisäisten kuin ulkoistenkin luokitusten käytön (Trück & Özturkmen 2003, 1).

On havaittu, että eri makrotalouden muuttujat vaikuttavat luottoluokituksiin. Tämän vuoksi luottoriskimallien tulokset vaihtelevat suuresti talouden suhdanteiden mukaan. Markov-ketjuihin pohjautuvat luottoriskimallit voidaan ehdollistaa talouden suhdanteille. Sallimalla mallien ehdollisuus suhdanteille parannetaan niiden luotettavuutta. Vaikka Markov-oletus ei täysin kuvaa todellisuutta, sen tulokset ovat riittäviä käytännön sovelluksissa (Bangia, Diebold, Kronimus, Schagen & Schuermann 2002).

## 1.2 Tutkielman tavoitteet ja rakenne

Tässä tutkielmassa luodaan ensin yleiskatsaus Markov-ketjujen teoriaan. Lähtökohdaksi teorian esittelyssä otetaan Markov-ketjujen yleiset ominaisuudet, minkä jälkeen käsitellään erityyppisten Markov-ketjujen erityispiirteitä kuvion 1 mukaisesti sulkeissa olevassa kappaleessa. Näitä erityispiirteitä myös sovelletaan havainnollistavassa esimerkissä.

### Markov-ketjujen teoria

	Diskreettiaikainen	Jatkuva-aikainen
Stationaarinen	Stationaarinen Markov-ketju (2.1.1)	Jatkuva-aikainen stationaarinen Markov-ketju (2.3)
Epästationaarinen	Epästationaarinen Markov-ketju (2.4.1)	Jatkuva-aikainen epästationaarinen Markov-ketju (2.4.2)

Kuvio 1: Tutkielman Markov-ketjujen teoreettinen viitekehys

Kappaleessa 3.1 on kerrottu yleistä luottoluokituksista, kuinka niitä tehdään ja mikä on niiden käyttötarkoitus. Tämän jälkeen sovelletaan Markov-ketjujen teoriaa etenkin yritysten luottoluokituksiin ja keskustellaan, kuinka hyvin Markov-ketjujen teoria soveltuu selittämään tätä käytännön ilmiötä. Luottoluokitusmuutoksia tarkastellaan ensin ajanhetkestä riippumattomana ilmiönä. Luvusta 4 alkaen tarkastelua laajennetaan epästationaarisiin siirtymätodennäköisyyksiin, koska havaittua siirtymätodennäköisyyksien suhdaneriippuvuutta stationaarinen Markov-ketju ei kykene selittämään. Tämän tutkielman tarkoitus on antaa lukijalle kuva keinoista, joilla siirtymätodennäköisyysmatriiseja voidaan ehdollistaa suhdannevaihteluille.

Luvussa 5 sovelletaan esiteltyjä menetelmiä empiiriseen aineistoon ja pyritään ratkomaan menetelmien käytännön sovelluksessa ilmeneviä ongelmia. Saatuja tuloksia arvioidaan eri kriteerien perusteella. Samalla on tarkoitus vastata kysymykseen ehdollistamisen mallien hyödyllisyydestä verrattuna stationaarisen Markov-ketjun käyttöön. Tutkielman lopuksi tarkastellaan joukkovelkakirjojen hinnoittelua riskineutraaleilla konkurssitodennäköisyyksillä, joiden määrittämiseen käytetään edellisissä luvuissa esitettyä ehdollistamisen mallia.

## 2 Markov-ketju

Stokastinen prosessi on joukko aikaindeksoituja satunnaismuuttujia. Olkoon  $X$  satunnaismuuttuja,  $S$  tila-avaruus satunnaismuuttujan mahdollisille arvoille ja  $T$  parametrijoukko, joka on usein aika. Tällöin voidaan merkitä satunnaismuuttujien joukkoa  $\{X(t), t \in T\}$  (Ruskeepää 1995, 92). Markov-prosessi on stokastinen prosessi, jossa prosessin menneisyys ei vaikuta tulevaisuuteen, vaan ainoastaan nykyhetki määrää tulevaisuuden tilan. Siirtymät tilasta toiseen tapahtuvat siis nykyhetken perusteella. Tällöin stokastiselle prosessille  $\{X(t), t \in T\}$  pätee, että kaikilla  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$  ja kaikilla  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n] \\ = \mathbb{P}[X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n]. \end{aligned}$$

Kun tila-avaruus on diskreetti, kyseessä on Markov-ketju (Ruskeepää 1995, 122). Aluksi tarkastellaan tilannetta, jossa aika on myös diskreetti, jolloin puhutaan diskreettiaikaisesta Markov-ketjusta. Myöhemmin sivutaan lyhyesti jatkuva-aikaista mallia.

### 2.1 Diskreettiaikainen Markov-ketju

#### 2.1.1 Stationaariset siirtymätodennäköisyydet

Yksinkertaisuuden vuoksi merkitään mahdollisiksi tiloiksi  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  ja  $X_n = X(t_n)$ . Siirtymät tilojen välillä tapahtuvat hetkinä  $t_1, t_2, \dots$  ja siirtymä tilasta  $X_0 = i$  tapahtuu tilaan  $j$  ajan hetkellä  $t_1$  todennäköisyydellä  $\mathbb{P}[X_1 = j \mid X_0 = i]$ . Näitä kutsutaan siirtymätodennäköisyyksiksi (Ruskeepää 1995, 122). Kun todennäköisyydet eivät riipu  $n$ :n arvosta, sanotaan, että siirtymätodennäköisyydet  $p_{ij}$  ovat stationaarisia. Stationaarisen Markov-ketjun ehto on, että seuraava yhtäsuuruus toteutuu kaikilla  $k = -(n-1), -(n-2), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$  (Isaacson & Madsen 1976, 15):

$$\mathbb{P}[X_n = j \mid X_{n-1} = i] = \mathbb{P}[X_{n+k} = j \mid X_{n+k-1} = i] = p_{ij}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1)$$

Siirtymätodennäköisyysmatriisi saadaan, kun todennäköisyydet  $p_{ij}$  kootaan matriisiksi  $\mathbf{P}$ , kun  $(i, j) \in S$  (Ruskeepää 1995, 122).

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Tällä matriisilla on seuraavanlaiset ominaisuudet (Isaacson & Madsen 1976, 16):

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i \in S \quad \text{ja} \quad p_{ij} \geq 0, \quad \forall(i, j).$$

Todennäköisyydet  $p_{ij}^{(n)}$  ovat  $n$ :n askeleen siirtymätodennäköisyyksiä, jolloin  $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$ . Siirtymätodennäköisyyksien ollessa stationaarisia  $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = i)$ ,  $m \geq 0, n > 0$ , jolloin  $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ . Näistä seuraa, että

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+m)} &= \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+m} = j \cap X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Tämä yhtälö on Chapman-Kolmogorov-yhtälö, johon  $n$ :n ja  $m$ :n paikalle sijoittamalla  $n-1$  ja  $1$  saadaan, että

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Kun nämä todennäköisyydet kootaan matriisiksi  $\mathbf{P}^{(n)}$ , niin  $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)}\mathbf{P}$  ja  $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$  (Ruskeepää 1995, 123).

Tila-avaruuden  $S$  osajoukkoa  $C$  kutsutaan suljetuksi, jos  $p_{ij} = 0$  kaikilla  $i \in C$  ja  $j \notin C$ . Kun suljettuun joukkoon  $C$  kuuluu vain yksi tila  $i$ , sitä kutsutaan Markov-ketjun absorboivaksi tilaksi (Isaacson & Madsen 1976, 43).

### 2.1.2 Siirtymätodennäköisyyksien empiirisestä määrittämisestä

Kun määritetään siirtymätodennäköisyyksiä empiirisestä aineistosta, käytetään estimaatteja. Kohorttimenetelmällä siirtymätodennäköisyyksien estimaatit diskreetille Markov-prosessille saadaan kaavasta

$$\hat{p}_{ij}(t) = \frac{N_{ij}(t, t+1)}{N_i(t)}. \quad (3)$$

Siinä  $N_i(t)$  on periodin  $[t, t+1]$  alussa tilassa  $i$  olevien lukumäärä ja  $N_{ij}(t, t+1)$  on periodin loppuun mennessä tilasta  $i$  tilaan  $j$  siirtyneiden lukumäärä (Lando & Skødeberg 2002, 424). Suurimman uskottavuuden (maximum likelihood) estimaattori yhden periodin keskiarvosuirtymätodennäköisyydelle on

$$\bar{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^T N_{ij}(t, t+1)}{\sum_{t=1}^T N_i(t)}, \quad (4)$$

missä  $T$  on periodien lukumäärä ja  $t$  on ajanhetki. Tätä estimaattoria käytettäessä oletetaan aineiston prosessin olevan stationaarinen. Usein käytetään myös seuraavaa yksinkertaista mutta vain suuntaa-antavaa estimaattoria keskiarvosuirtymätodennäköisyydelle (Fuertes & Kalotychou 2007, 3450):

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{N_{ij}(t, t+1)}{N_i(t)}. \quad (5)$$

## 2.2 Stationaarinen jakautuma ja rajajakautuma

Olkoon  $\pi_i^{(n)} = P(X_n = i)$ ,  $i \in S$ , jolloin vektori  $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = (\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \dots)$  kuvaa tilojen  $i$  todennäköisyyden hetkellä  $n$  ja vektorille  $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$  on voimassa ehdot:  $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^{(n)} = 1$  ja  $\pi_i \geq 0, \forall i$ . Tällöin

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}.$$

Markov-ketjulla on stationaarinen jakautuma, jos yhtälö  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}$  pätee. Näin ollen  $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$  on siis  $n$ :stä riippumaton eli  $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}$ . Markov-ketjulla on rajajakautuma  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ , jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i) = \pi_i, \quad i \in S.$$

Kun ketjulla on rajajakautuma, sillä on myös stationaarinen jakautuma, mutta ei välttämättä päinvastoin (Ruskeepää 1995, 123–124).

Rajajakautuma voidaan määrittää käyttämällä hyväksi matriisin  $\mathbf{P}$  ominaisarvohajotelmaa, jolloin  $\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{L}\mathbf{\Lambda}^{-1}$ , missä  $\mathbf{L}$  on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalilla ovat  $\mathbf{P}$ :n ominaisarvot, ja  $\mathbf{\Lambda}$  on  $\mathbf{P}$ :n ominaisvektoreista muodostettu matriisi. Tällöin siirtymätodennäköisyysmatriisi  $\mathbf{P}^n$  voidaan kirjoittaa yleiseen muotoon

$$\mathbf{P}^n = (\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}\mathbf{\Lambda}^{-1})^n = \mathbf{\Lambda}\mathbf{L}^n\mathbf{\Lambda}^{-1}. \quad (6)$$

Lukua  $\lambda$  sanotaan matriisin  $\mathbf{P}$  ominaisarvoksi, jos on olemassa vektori  $\mathbf{y}$  siten, että  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  ja  $\mathbf{P}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$ . Matriisin  $\mathbf{P}$  ominaisarvot saadaan yhtälöstä

$$\det(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (\mathbf{I} \text{ on identiteettimatriisi}). \quad (7)$$

Ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots$  määritetään seuraavasta yhtälöstä (Koppinen 2007, 32–34):

$$(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{0}. \quad (8)$$

Kun ominaisarvot ovat reaalisia ja erisuuria, matriisin  $\mathbf{P}$  ominaisarvohajotelmaa hyväksi käyttäen voidaan helposti määrittää rajajakautuma Markov-ketjulle, koska Perron-Frobeniuksen teoreeman<sup>1</sup> nojalla siirtymätodennäköisyysmatriisin  $\mathbf{P}$  reaalisille ominaisarvoille pätee, että  $|\lambda| \leq 1$ . Koska siirtymätodennäköisyysmatriisin  $\mathbf{P}$  alkioille  $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1, i = 0, 1, 2, \dots$  ja nähdään, että sijoitus  $\lambda = 1$  ja  $\mathbf{y} = \mathbf{1}$  toteuttaa yhtälön  $\mathbf{P}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$  riippumatta matriisista  $\mathbf{P}$ , niin suurin matriisin  $\mathbf{P}$  ominaisarvo on  $\lambda_0 = 1$ . Jos Markov-ketju on redusoituva ja jaksoton, niin  $\lambda_0 = 1$  ja sen kertaluku on yksi. Muille ominaisarvoille pätee  $|\lambda| < \lambda_0 = 1$ . Näin ollen redusoitumattomalle ja jaksottomalle Markov-ketjulle  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^\infty = \mathbf{\Lambda}\mathbf{L}^\infty\mathbf{\Lambda}^{-1}$ , missä  $\mathbf{L}^\infty$  on diagonaalimatriisi  $\mathbf{L}^\infty = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ , koska  $\lambda_0 = 1$  ja muille ominaisarvoille  $|\lambda| < 1$ .

<sup>1</sup>Perron-Frobeniuksen teoreema on esitetty mm. Isaacsonin & Madsenin (1976, 124–125) kirjassa *Markov chains: Theory and applications*.

Rajakautuma  $\boldsymbol{\pi}$  saadaan yhtälöstä

$$\boldsymbol{\pi}^T = (\mathbf{x}^0)^T \mathbf{P}^\infty, \quad (9)$$

missä  $\mathbf{x}^0$  on mikä tahansa vektori  $\mathbf{x}^T = (x_0, x_1, \dots, x_i)$ , jolle on voimassa ehdot  $\sum_{i=0}^{\infty} x_i = 1$  ja  $x_i \geq 0, \forall i$  (Isaacson & Madsen 1976, 124–126).

Jos matriisilla  $\mathbf{P}$  on ominaisarvoja, joiden kertaluku on suurempi kuin yksi, matriisi  $\mathbf{\Lambda}$  on singulaarinen. Tällöin  $\mathbf{\Lambda}^{-1}$  ei ole olemassa eikä matriisilla  $\mathbf{P}$  ole ominaisarvohajotelmaa. Jos kaikkien ominaisarvojen kertaluku on yksi, kaikki ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Tällöin  $\mathbf{\Lambda}$  on kääntyvä ja ominaisarvohajotelmaa voidaan käyttää (Metsänkylä 2004, 87).

### 2.3 Stationaarinen jatkuva-aikainen Markov-ketju

Seuraavaksi käsitellään Markov-prosessia, joka on jatkuva-aikainen. Tällöin siirtymä tilasta toiseen voi tapahtua mielivaltaisina hetkinä. Prosessin nopeuden määrää generaattorimatriisi (generator matrix). Merkintöjä yksinkertaistaen periodin  $[t, t + u]$  siirtymätodennäköisyysmatriisi  $\mathbf{P}(t, t + u) \equiv \mathcal{P}(u)$  ja stationaariselle Markov-prosessille  $\mathcal{P}(u) = \mathbf{P}^u$ . Siirtymätodennäköisyyksiä merkitään vastaavasti:  $p_{ij}(t, t + u) \equiv \mathcal{P}_{ij}(u)$ . Stationaarisen Markov-prosessin  $\{X(t), t \in T\}$  generaattorimatriisin  $\mathbf{M}$  alkiot  $\mu_{ij}$  määritellään oikeanpuolisen raja-arvona:

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(X_{t+\Delta t} = j | X_t = i)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{P}_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, \quad j \neq i \\ \mu_{ii} &= - \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(X_{t+\Delta t} \neq i | X_t = i)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{P}_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Raja-arvo (10) on olemassa, koska siirtymätodennäköisyyksien  $\mathcal{P}_{ij}(t)$  oikeanpuolinen raja-arvo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \mathcal{P}_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Markov-prosessin generaattorimatriisin alkioidella, joita nimitetään myös siirtymäintensiteeteiksi, on seuraavat ominaisuudet:

$$\begin{aligned}\mu_{ij} &\geq 0, \quad j \neq i, \\ \sum_j \mu_{ij} &= 0.\end{aligned}\tag{11}$$

Tästä seuraa luonnollisesti, että  $\mu_{ii} = -\sum_{j \neq i} \mu_{ij}$  (Isaacson & Madsen 1976, 230–239; Freedman 1971, 138–140).

Matriisista  $\mathbf{M}$  voidaan määrittää siirtymätodennäköisyysmatriisi  $\mathbf{P}$ . Esitetään Chapman-Kolmogorovin yhtälö (2) nyt muodossa

$$\mathcal{P}(t + \Delta t) = \sum_{k \in S} \mathcal{P}_{ik}(t) \mathcal{P}_{kj}(\Delta t).$$

Kun tästä vähennetään puolittain  $\mathcal{P}_{ij}(t)$  ja jaetaan  $\Delta t$ :llä, saadaan

$$\frac{\mathcal{P}_{ik}(t + \Delta t) - \mathcal{P}_{kj}(t)}{\Delta t} = \sum_{k \neq j} \left( \frac{\mathcal{P}_{ik}(t) \mathcal{P}_{kj}(\Delta t)}{\Delta t} \right) + \mathcal{P}_{ij}(t) \frac{\mathcal{P}_{jj}(\Delta t) - 1}{\Delta t}.$$

Kun  $\Delta t \rightarrow 0$ , saadaan siirtymätodennäköisyyksien ja -intensiteettien välinen yhteys differentiaaliyhtälömuotoon

$$\mathcal{P}'_{ij}(t) = \mathcal{P}_{ij}(t) \mu_{jj} + \sum_{k \neq j} \mathcal{P}_{ik}(t) \mu_{kj}.$$

Tämä on matriisimuodossa

$$\mathcal{P}'(t) = \mathcal{P}(t) \mathbf{M}.$$

Ratkaisuna differentiaaliyhtälölle on siirtymätodennäköisyysmatriisi

$$\mathcal{P}(t) = \mathbf{P}^t = \exp(\mathbf{M}t),$$

missä  $\exp(\mathbf{M}t)$  saadaan sarjakehitelmällä (Isaacson & Madsen 1976, 237–239)

$$\exp(\mathbf{M}t) = \mathbf{I} + \mathbf{M}t + \frac{\mathbf{M}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{M}^3 t^3}{3!} + \dots, \quad (\mathbf{I} \text{ identiteettimatriisi}). \tag{12}$$

Kun määritetään empiiristä generaattorimatriisia  $\hat{\mathbf{M}}$ , täytyy tyytyä erilaisiin approksimaatioihin sen alkioiden suhteen. Suurimman uskottavuuden estimaattoriksi saadaan

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{N_{ij}(0, T)}{\int_0^T Y_i(t) dt}, \quad i \neq j, \tag{13}$$

missä  $N_{ij}(0, T)$  on ajanhetkeen  $T$  mennessä tilasta  $i$  tilaan  $j$  siirtyneiden lukumäärä ja  $Y_i(t)$  hetkellä  $t$  tilassa  $i$  olevien lukumäärä (Lando & Skødeberg 2002, 427). Edellinen vaatii kuitenkin tarkkaa tietoa, milloin luokitusmuutokset ovat tapahtuneet. Tätä ei yleensä ole saatavilla, joten generaattorimatriisi täytyy määrittää matriisin  $\mathbf{P}$  perusteella. Jos siirtymätodennäköisyysmatriisin  $\mathbf{P}$  diagonaali on dominoiva niin, että  $p_{ii} > 0.5$ , generaattorimatriisi  $\mathbf{M}$  saadaan sarjan

$$\mathbf{M}_r = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{I})^k}{k} \quad (r \in \mathbb{N})$$

raja-arvona, kun  $r \rightarrow \infty$ . Voidaan osoittaa, että tällä tavoin määritetty generaattorimatriisi toteuttaa tarkasti yhtälön  $\mathbf{P} = e^{\mathbf{M}}$ . Tämän menettelyn ongelma on, että se tuottaa matriisin diagonaalin ulkopuolellekin negatiivisia arvoja, mikä ei ole sallittua siirtymätodennäköisyyksien generaattorimatriisille ehtojen (11) perusteella (Trück & Rachev 2005, 8–9).

Jarrow, Lando ja Turnbull (1997, 505) esittävät yhden mahdollisen tavan määrittää generaattorimatriisin estimaatti  $\hat{\mathbf{M}}$ . Tässä tapauksessa oletetaan, että yksittäiselle yritykselle siirtymiä ei tapahdu enempää kuin yksi vuoden aikana. Tällöin matriisin alkioden estimaatit  $\hat{\mu}_{ij}$  saadaan yhden vuoden siirtymätodennäköisyyksien  $p_{ij}$  avulla seuraavasti:

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{p_{ij} \ln p_{ii}}{p_{ii} - 1}, \quad i \neq j; \quad \hat{\mu}_{ii} = \ln p_{ii}. \quad (14)$$

## 2.4 Epästationaariset Markov-ketjut

Aina ei aineisto tue täysin olettamusta stationaarisesta prosessista. Epästationaarisuus voidaan kuitenkin ottaa huomioon, vaikka prosessin oletettaisiin olevan Markov-ketju.

### 2.4.1 Diskreetti tapaus

Kun stationaarisuuden ehto (1) ei toteudu, kyseessä on epästationaarinen Markov-prosessi (Isaacson & Madsen 1976, 15). Merkitään hetkellä  $t_n$  siirtymätodennäköisyysmatriisia  $\mathbf{P}(n)$ . Tällöin  $n$ :n askeleen siirtymätodennäköisyysmatriisi  $\mathbf{P}^{(n)}$  saadaan matriisitulona  $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}(1)\mathbf{P}(2)\cdots\mathbf{P}(n)$ . Tämä sallii epästationaarisuuden empiirisen aineiston tarkastelussa.

## 2.4.2 Jatkuva-aikainen tapaus

Siirtymäintensiteettien  $\mu_{ij}$  oletettiin olevan vakioita ajan  $t$  suhteen. Oletuksesta voidaan kuitenkin luopua, sillä intensiteetit voivat olla myös funktioita ajan suhteen. Näillä funktioilla on samat ominaisuudet kuin vakiointensiteeteillä:

$$\begin{aligned}\mu_{ij}(t) &\geq 0, \quad i \neq j \\ \mu_{ii}(t) &= - \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t).\end{aligned}$$

Seuraavaksi määritellään matriisi  $\mathbf{A}$ , jonka alkioita ovat:

$$A_{ij}(t) = \int_0^t \mu_{ij}(s) \, ds, \quad A_{ii}(t) = - \sum_{j \neq i} A_{ij}(t).$$

Siirtymätodennäköisyydet ajanvälille  $[s, t]$  saadaan matriisista  $\mathbf{A}$  ja identiteettimatriisista  $\mathbf{I}$  tulointegraalina<sup>2</sup> (Lando & Skødeberg 2002, 441–442):

$$P(s, t) = \prod_{[s, t]} (\mathbf{I} + d\mathbf{A}(u)).$$

Kun halutaan määrittää siirtymätodennäköisyysmatriisi empiirisestä aineistosta, käytetään Aalen-Johansenin estimaattoria<sup>3</sup>. Olkoon  $T_m \in [s, t]$  ajanhetki, jolloin  $m$ :s luokitusmuutos tapahtuu, ja  $N$  muutosten lukumäärä aikavälillä  $[s, t]$ . Tila-avaruus on  $S = \{1, 2, \dots, K\}$ . Siirtymätodennäköisyydet saadaan tällöin estimaattorista

$$\hat{P}(s, t) = \prod_{m=1}^N (I + \Delta \hat{A}(T_m)),$$

---

<sup>2</sup>Tulointegraaleja on käsitelty Antonín Slavín (2007) artikkelissa *Product integration, its history and applications*.

<sup>3</sup>Aalen, Odd O. – Johansen, Søren (1978) An Empirical Transition Matrix for Non-Homogeneous Markov Chains Based on Censored Observations. *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 5(3), 141–150.

missä

$$\Delta \hat{A}(T_m) = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta N_1(T_m)}{Y_1(T_m)} & \frac{\Delta N_{12}(T_m)}{Y_1(T_m)} & \cdots & \cdots & \frac{\Delta N_{1K}(T_m)}{Y_1(T_m)} \\ \frac{\Delta N_{21}(T_m)}{Y_2(T_m)} & -\frac{\Delta N_2(T_m)}{Y_2(T_m)} & \cdots & \cdots & \frac{\Delta N_{2K}(T_m)}{Y_2(T_m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta N_{K-1,1}(T_m)}{Y_{K-1}(T_m)} & \frac{\Delta N_{K-1,2}(T_m)}{Y_{K-1}(T_m)} & \cdots & -\frac{\Delta N_{K-1}(T_m)}{Y_{K-1}(T_m)} & \frac{\Delta N_{K-1,K}(T_m)}{Y_{K-1}(T_m)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Merkintä  $\Delta N_{ij}(T_m)$  on siirtymien lukumäärä tilasta  $i$  tilaan  $j$  ajanhetkenä  $T_m$ , ja  $\Delta N_i(T_m)$  on siirtymien lukumäärä yhteensä pois tilasta  $i$  samana ajanhetkenä. Juuri ennen hetkeä  $T_m$  tilassa  $i$  olleitten lukumäärä on  $Y_i(T_m)$  (Lando & Skødeberg 2002, 441–442).

## 2.5 Esimerkki Markov-ketjusta

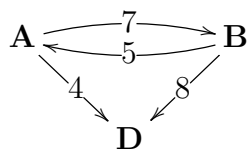
Eräällä rahoituslaitoksella on käytössään sisäinen luokitusjärjestelmä, jossa on kolme eri luokitusta luotettaville yrityksille. Taulukossa 1 on esitetty eri luokissa olevien yritysten lukumäärä kunkin vuoden alussa ja luokitusmuutokset näiden kolmen vuoden ajalta. Yritys, joka kuuluu luokkaan A, on maksukyvyltään hyvä. Luokan B yrityksellä on jo suurempi riski maksukyvyttömyyteen. Luokan D yritykset eivät ole selvinneet velvoitteistaan ja ovat päätyneet sen vuoksi konkurssiin. Rahoituslaitos on päättänyt vuoden 3 alussa ottaa käyttöön odotetun luottoriskin määrittämistä varten oletuksen, että luottoportfoliossa yritysten luokitus muuttuu Markov-ketjun oletusten mukaan. Siirtymätodennäköisyyksien määrittämistä varten se käyttää vuosien 0, 1 ja 2 luokitustapahtumia taulukosta 1. Luokitusmuutokset tapahtuvat aina kuukauden alussa. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että tänä aikana ei ole luototettu yhtään uutta yritystä ja yksittäisen yrityksen luokitus muuttuu vain kerran kolmen vuoden aikana.

### 2.5.1 Diskreetti tarkastelu

Kuviossa 2 on laskettu siirtymät tilojen välillä kolmen vuoden ajalta. Kuten kuviostakin nähdään, luokka D on tässä tapauksessa Markov-ketjun absorboiva tila. Kohorttimenetelmällä kolmen vuoden siirtymätodennäköisyyss-

	Luokka A	Luokka B	Luokka D
<b>Luokitusjakauma</b> vuoden 0 alussa	50	40	0
<b>Muutokset</b>			
<b>vuosi 0</b>			
huhtikuu	-4	4	
	-2		2
lokakuu	1	-1	
		-3	3
<b>vuosi 1</b>	(45)	(40)	(5)
maaliskuu	-2	2	
	-1		1
		-1	1
toukokuu	1	-1	
syyskuu	1	-1	
		-1	1
<b>vuosi 2</b>	(44)	(38)	(8)
tammikuu	2	-2	
	-1		1
		-2	2
heinäkuu	-1	1	
		-1	1
<b>vuosi 3</b>	(44)	(34)	(12)

Taulukko 1: Esimerkin luokitustapahtumat



Kuvio 2: Siirtymät tilojen välillä

matriisi  $\mathbf{P}^{(3)}$  saadaan kaavasta (3).

$$\mathbf{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.78 & 0.14 & 0.08 \\ 0.125 & 0.675 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vastaavasti matriisit  $\mathbf{P}(1)$ ,  $\mathbf{P}(2)$  ja  $\mathbf{P}(3)$  voidaan estimoida kohorttime-  
netelmällä joka vuodelle erikseen. Kuitenkin  $\mathbf{P}^{(3)} \approx \mathbf{P}(1)\mathbf{P}(2)\mathbf{P}(3)$ , koska  
aineisto ei ole täysin Markov-ketjun oletusten mukainen. Esimerkissä luoki-  
tus voi muuttua vain kerran kolmen vuoden aikana, joten matriisit  $\mathbf{P}(2)$  ja  
 $\mathbf{P}(3)$  riippuvat menneisyydestä.

$$\mathbf{P}(1) = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.08 & 0.04 \\ 0.025 & 0.9 & 0.075 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}(2) \approx \begin{pmatrix} 0.933 & 0.044 & 0.022 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}(3) \approx \begin{pmatrix} 0.955 & 0.023 & 0.023 \\ 0.053 & 0.868 & 0.079 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yhden vuoden keskiarvomatriisi  $\bar{\mathbf{P}}$  määritetään kaavalla (4), josta saadaan  
suurimman uskottavuuden estimaatti matriisille.

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \frac{44+42+42}{50+45+44} & \frac{4+2+1}{50+45+44} & \frac{2+1+1}{50+45+44} \\ \frac{1+2+2}{40+40+38} & \frac{36+36+33}{40+40+38} & \frac{3+2+3}{40+40+38} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.921 & 0.050 & 0.029 \\ 0.042 & 0.890 & 0.068 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}$$

Kaavan (5) likimääräisempi estimaatti keskiarvomatriisille on

$$\tilde{\mathbf{P}} \approx \begin{pmatrix} 0.923 & 0.049 & 0.028 \\ 0.043 & 0.889 & 0.068 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}.$$

## 2.5.2 Tarkastelu jatkuva-aikaisena Markov-ketjuna

Seuraavaksi määritetään siirtymäintensiteetit  $\mu_{ij}$  kaavan (13) mukaan.

$$\mu_{ij} = \frac{N_{ij}(0, 3)}{\int_0^3 Y_i(t) dt}, \quad i \neq j,$$

missä

$$\int_0^3 Y_A(t) dt = 133 \frac{3}{4} \quad \text{ja} \quad \int_0^3 Y_B(t) dt = 113 \frac{1}{2}$$

Generaattorimatriisi  $\mathbf{M}$  koostuu alkiosta  $\mu_{ij}$  ja  $\mu_{ii} = -\sum_{j \neq i} \mu_{ij}$ . Tästä seuraa, että  $\sum_j \mu_{ij} = 0$  kaikille  $i$ .

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{133.75} & \frac{7}{133.75} & \frac{4}{133.75} \\ \frac{5}{113.5} & -\frac{13}{113.5} & \frac{8}{113.5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.0822 & 0.0523 & 0.0299 \\ 0.0441 & -0.1145 & 0.0705 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jarrow'n, Landon ja Turnbullin esittämä approksimaatiomenetelmä siirtymäintensiteeteille tuottaa kaavalla (14) generaattorimatriisiksi

$$\tilde{\mathbf{M}} \approx \begin{pmatrix} -0.0823 & 0.0521 & 0.0302 \\ 0.0445 & -0.1165 & 0.0720 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kaavassa vaadittavat siirtymätodennäköisyydet saadaan matriisista  $\bar{\mathbf{P}}$ . Esimerkin aineisto täyttää menetelmän oletuksen, että yksittäisen yrityksen luokitus muuttuu vain kerran tarkasteluajavälin aikana.

Määritetään seuraavaksi generaattorimatriisin  $\mathbf{M}$  avulla yhden, kahden ja kolmen siirtymätodennäköisyysmatriisit funktiosta  $P^t = e^{Mt}$ . Käytetään hyväksi kaavan (12) sarjakehitelmää. Tällöin

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.922 & 0.047 & 0.030 \\ 0.040 & 0.893 & 0.067 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 0.852 & 0.086 & 0.062 \\ 0.073 & 0.799 & 0.129 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^{(3)} \approx \begin{pmatrix} 0.789 & 0.117 & 0.093 \\ 0.099 & 0.717 & 0.184 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diskreeteistä siirtymätodennäköisyysmatriiseista  $\mathbf{P}(1)$ ,  $\mathbf{P}(2)$  ja  $\mathbf{P}(3)$  voidaan arvioida, että stationaarisuusoletuksesta luopuminen saattaa olla perusteltua. Tämän vuoksi siirrytään tarkastelemaan esimerkin aineistoa jatkuva-aikaisena epästationaarisena Markov-ketjuna. Aina ei välttämättä ole tarkoituksenmukaisinta valita periodien aluiksi vuoden vaihteita. Määritetään siis yhden vuoden siirtymätodennäköisyysmatriisit  $P(0.5, 1.5)$  ja  $P(1.5, 2.5)$ . Aalen-Johansenin estimaattoria käyttämällä

$$P(0.5, 1.5) = \prod_{T_m \in [0.5, 1.5]} (I + \Delta \hat{A}(T_m)) \approx \begin{pmatrix} 0.934 & 0.043 & 0.022 \\ 0.043 & 0.866 & 0.091 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ja}$$

$$P(1.5, 2.5) \approx \begin{pmatrix} 0.977 & 0.023 & 0 \\ 0.074 & 0.851 & 0.075 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 2.5.3 Stationaarinen jakauma

Koska luokka D on oletettu tilaksi, josta ei voi siirtyä muihin tiloihin, se on Markov-ketjun absorboiva tila. Tällöin stationaarinen jakauma on  $\boldsymbol{\pi} = (0, 0, 1)$ . Tämä ei kerro mitään luokan A ja luokan B välisestä suhteesta.

Esimerkin rahoituslaitos on vakavarainen ja hinnoitellut luottoriskin niin, että luottotappiot eivät vaikuta sen lainanantokykyyn pitkällä aikavälillä. Tällöin voidaan tehdä oletus, että rahoituslaitos luotottaa yhtä luokan D yritystä kohden 0,8 luokan A ja 0,2 luokan B yritystä. Muokataan matriisia  $\bar{\mathbf{P}}$  niin, että sen viimeinen rivi on vektori  $\mathbf{P}_D = (P_{DA}, P_{DB}, P_{DD}) = (0.8, 0.2, 0)$ . Näin ollen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.921 & 0.050 & 0.029 \\ 0.042 & 0.890 & 0.068 \\ 0.800 & 0.200 & 0.000 \end{pmatrix}.$$

Kaavan (7) mukaiset ominaisarvot matriisille  $\mathbf{P}$  ovat  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_1 \approx 0.847$  ja  $\lambda_2 \approx -0.036$ . Kaavasta (8) saadaan ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit  $\Lambda_0 \approx (-0.577, -0.577, -0.577)$ ,  $\Lambda_1 \approx (0.473, -0.846, 0.247)$  ja  $\Lambda_2 \approx (0.026, 0.072, -0.997)$ . Näistä muodostetaan hajotelman (6) mukainen esitys matriisille  $\mathbf{P}^n = \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}^n \mathbf{\Lambda}^{-1}$ , missä

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -0.577 & 0.473 & 0.026 \\ -0.577 & -0.846 & 0.072 \\ -0.577 & 0.247 & -0.997 \end{pmatrix}.$$

Koska  $\mathbf{L}^n = \text{diag}(1^n, 0.847^n, -0.036^n)$ , niin  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{L}^n = \text{diag}(1, 0, 0) \equiv \mathbf{L}^\infty$ . Tällöin

$$\mathbf{P}^\infty = \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}^\infty \mathbf{\Lambda}^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.607 & 0.352 & 0.041 \\ 0.607 & 0.352 & 0.041 \\ 0.607 & 0.352 & 0.041 \end{pmatrix}.$$

Kohdan (9) mukaan rajajakautuma  $\boldsymbol{\pi} = (0.607, 0.352, 0.041)$ . Rajajakautuman luokan D osuudelle ei ole mielekästä tulkintaa, mutta sitä voidaan pitää

osuutena konkurssiin joutuneista yrityksistä, joita ei ole luottoportfoliossa vielä voitu korvata uudella luotonannolla. Luokan A ja B suhteeksi pitkällä aikavälillä portfoliossa saadaan 63,3 % ja 36,7 %, kun kummatkin luokat normeerataan niin, että niiden summaksi tulee yksi.

## 3 Luottoluokitusten Markov-ketju

### 3.1 Yleistä luottoluokituksista

Luottoluokituksia tekevät siihen erikoistuneet yritykset, joista merkittävimpiä ovat Moody's, Standard & Poor's ja Fitch (Puoskari 2007, 31). Luottoluokitukset jaetaan kahteen eri pääluokkaan: investointi- ja spekulatiiviluokkaan. Nämä luokat taas on jaettu seuraavan taulukon 2 esittämällä tavalla.

	<b>Standard &amp; Poor's</b>	<b>Moody's</b>
<b>Investointiluokka</b>		
korkein luokka	AAA	Aaa
korkea luokka	AA (+/-)	Aa (1,2,3)
ylemmän keskitason luokka	A (+/-)	A (1,2,3)
keskitason luokka	BBB (+/-)	Baa (1,2,3)
<b>Spekulatiiviluokka</b>		
alhaisemman keskitason luokka	BB (+/-)	Ba (1,2,3)
spekulatiivinen luokka	B (+/-)	Ba (1,2,3)
heikko asema	CCC (+/-)	Caa (1,2,3)
korkeasti spekulatiivinen	CC (+/-)	Ca
alhaisin luokka, ei korkoja	C(+/-)	C
konkurssi	D	D

Taulukko 2: Standard & Poor'sin ja Moody'sin luottoluokitusluokat pitkäaikaisille lainoille

Luottoluokituksia tehdään yleensä yritysten omasta aloitteesta. Yhdysvalloissa kuitenkin säännösten mukaan luokitus tehdään ilman yrityksen omaa pyyntöä, jos liikkeellelasku ylittää 100 miljoonaa dollaria. Standard & Poor's (2008, 16–22) tekee luokituksen yhteistyössä yrityksen kanssa. Luokitusprosessi alkaa tapaamisen sopimisella useita viikkoja etukäteen. Ennen tapaamista molemmat osapuolet valmistautuvat huolellisesti. Yritys toimittaa luottoluokittajalle edellisten tilikausien tilinpäätökset, kuvauksen yrityksen toiminnasta ja muita tarpeelliseksi katsottuja asiakirjoja. Varsinaisessa tapaamisessa käydään monipuolisesti läpi yrityksen liiketoimintaan vaikuttavia tekijöitä. Näiden tietojen pohjalta tehdään liiketaloudellisten riskien ja rahoitusriskien

analyysi. Liiketaloudellinen analyysi käsittelee maariskiä, toimialaan liittyviä tekijöitä, johdon arviointia, kilpailuasemaa ja kannattavuutta verrokkiyrityksiin nähden. Rahoitusanalyysi arvioi yrityksen rahoituspolitiikkaa, laskenta-toimea, kassavirran riittävyttä, pääomarakennetta ja likviditeettiä. Lopullisen ratkaisun yrityksen luokituksista tekee luokituskomitea.

Standard & Poor's (2008, 18–19) valvoo yrityksiä myös varsinaisen luokitusprosessin jälkeen. Se asettaa luokitettavan yrityksen CreditWatch-listalle, jos se toteaa valvontaprosessissaan yrityksen tilassa muutoksia. Tänä aikana tehdään kokonaisvaltainen tutkimus yrityksen tilasta. Tutkimus on samanlainen kuin ensimmäistä kertaa tehtävä luokitusprosessi. Sen jälkeen luokituskomitea julkistaa muutoksen, jos se havaitaan tarpeelliseksi.

### **3.2 Luottoluokitusten käyttötarkoituksia**

Luottoluokitusten pääasiallinen käyttötarkoitus on sijoittajien informoiminen sijoituskohteen luottokelpoisuudesta. Se kertoo arvion yrityksen suhteellisesta kyvystä suoriutua maksusitoumuksistaan, kuten koroista ja velan lyhennyksistä (Baklanova 2009, 69). Luokitukset kertovat luottoriskistä, joten ne ovat olennaisia joukkovelkakirjojen hinnoittelussa. Luokituksilla on selvä vaikutus velkakirjojen riskipremioon markkinoilla, ja luokitusmuutokset vaikuttavat välittömästi velkakirjojen hintoihin (May 2010; Murphy 2003, 871).

Luottosopimukseen liitetään usein kovenantteja. Nämä kovenantit voidaan liittää luottoluokituksiin. Englannin kielessä näistä käytetään nimitystä "ratings triggers", jotka laukaisevat ennalta määrättyjä toimenpiteitä, mikäli luototettavan luottoluokitus alittaa sovitun rajan. Tällöin lainan ehdot yleensä neuvotellaan uusiksi (Nicholls 2005, 16).

Rahoituksen saatavuus riippuu luottoluokituksista. Yksittäiset sijoittajat saattavat tehdä sijoituspäätöksiä luottoluokitusten pohjalta ja välttävät näin sijoittamasta korkeamman riskin arvopapereihin. Kuitenkin suurin osa yritysten joukkovelkakirjoista on institutionaalisten sijoittajien hallussa. Näillä sijoittajilla voi olla lain säätelemiä velvoitteita, jotka koskevat sijoitusportfolion velkakirjojen luottoluokituksia, tai ne voivat asettaa itse rajoja, kuinka

paljon portfoliossa on mahdollista pitää spekulatiiviluokan yrityksiä (Nicholls 2005, 6–7).

Rahoituslaitosten sääntelyyn liittyy luokitusten käyttö. Yhdysvalloissa mainitaan säädöksissä luottoluokitukset ensimmäisen kerran 1930-luvulla. Pankkien vakavaraisuutta säätelevässä Basel II -sopimuksessa vahvistettiin luottoluokituslaitosten luokitusten käyttö sääntelytarkoituksessa. Tämä helpotti valvontatehtävää, mutta samalla se siirsi osan valvontatehtävää yksityiselle taholle, vaikka kansalliset valvontaelimet yleensä säätelevät, minkä luokituslaitoksen luottoluokitukset ovat hyväksytyjä vakavaraisuuslaskelmissa. Basel II mahdollistaa kuitenkin myös pankin omien luokitusmenetelmien käytön (Darbellay & Weber 2008, 2–5).

### 3.3 Luokitusmuutosten siirtymätodennäköisyysmatriisi

Siirtymätodennäköisyysmatriisi mittaa luokitusmuutosten todennäköisyyttä periodin aikana. Standard & Poor's ja Moody's molemmat määrittävät siirtymätodennäköisyysmatriisit eri luokituskategorioidelle ja eripituisille periodeille edellisten vuosien tilastojen perusteella (Estrella 2000, 132–133). Siirtymätodennäköisyydet  $p_{ij}(t)$  määrätään kohdan (3) tavalla. Siinä  $N_i(t)$  on periodin alussa luokassa  $i$  olevien yritysten määrä ja  $N_{ij}(t, t+1)$  on periodin loppuun mennessä luokasta  $i$  luokkaan  $j$  siirtyneiden yritysten lukumäärä (Lando & Skødeberg 2002, 424). Näin määritetyistä todennäköisyyksistä  $p_{ij}$  voidaan koota siirtymätodennäköisyysmatriisi  $\mathbf{P}$ , kun  $(i, j) \in S$ . Tila-avaruus  $S$  on tässä mahdolliset luottoluokitusten luokat.

Standard & Poor's (2006, 45) on saanut taulukosta 3 ilmenevät siirtymätodennäköisyydet vuodelle 2005, kun huomioon otetaan koko maailman yritykset. Luottoluokituslaitokset tarjoavat myös eri maantieteellisille alueille ja toimialoille omia luokitusmuutosten siirtymätodennäköisyyksiä. Taulukossa 3 sarake NR kuvaa niiden yritysten määrää, joilta on vuoden loppuun mennessä poistettu luokitus. Taulukosta voidaan poistaa luokittamattomien yritysten osuus. Kun kuuluminen Default-luokkaan oletetaan pysyväksi tilaksi, voidaan lisätä taulukkoon viimeinen rivi, jossa siirtymät pois Default-luokasta merkitään nolllaksi. Näin voidaan määrittää yhden vuoden siirtymä-

todennäköisyysmatriisi vuodelle 2005.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	0.8878	0.0918	0.0102	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0102
AA	0.0000	0.9066	0.0491	0.0049	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0393
A	0.0008	0.0163	0.8889	0.0441	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0498
BBB	0.0000	0.0020	0.0593	0.8404	0.0306	0.0046	0.0000	0.0007	0.0625
BB	0.0000	0.0000	0.0000	0.0571	0.7675	0.0690	0.0020	0.0020	0.1025
B	0.0000	0.0000	0.0010	0.0059	0.0851	0.7059	0.0376	0.0158	0.1485
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0079	0.0079	0.2540	0.4683	0.0873	0.1746

Taulukko 3: Vuoden 2005 siirtymätodennäköisyydet

Yhden vuoden keskiarvosuoritusmuutosten todennäköisyysmatriisi määritetään estimaattoreilla (4) tai (5), kun tiedetään vuosittaiset siirtymätodennäköisyysmatriisit. Tätä matriisia voidaan käyttää usean vuoden siirtymätodennäköisyysmatriisien määrittämiseen, ja sen  $n$ :s potenssi on  $n$ :n vuoden mittaisen periodin siirtymätodennäköisyysmatriisi.

Standard & Poor's saa vuosien 1981–2005 keskiarvomatriisiksi matriisin  $\bar{\mathbf{P}}_{SP}$ , josta on poistettu siirtymät luokkaan NR. Yksinkertaisuuden vuoksi Default-luokka oletetaan pysyväksi tilaksi, joten merkitään siirtymät tilasta nolllaksi.

$$\bar{\mathbf{P}}_{SP} = \begin{pmatrix} 0.9142 & 0.0792 & 0.0051 & 0.0009 & 0.0006 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0061 & 0.9068 & 0.0791 & 0.0061 & 0.0005 & 0.0011 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0005 & 0.0199 & 0.9143 & 0.0586 & 0.0043 & 0.0016 & 0.0003 & 0.0004 \\ 0.0002 & 0.0017 & 0.0408 & 0.8994 & 0.0455 & 0.0079 & 0.0018 & 0.0027 \\ 0.0004 & 0.0005 & 0.0027 & 0.0579 & 0.8361 & 0.0806 & 0.0099 & 0.0120 \\ 0.0000 & 0.0006 & 0.0022 & 0.0035 & 0.0621 & 0.8249 & 0.0476 & 0.0591 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0032 & 0.0048 & 0.0145 & 0.1263 & 0.5471 & 0.3041 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

Koska Default-luokka on tällöin Markov-ketjun absorboiva tila, stationaarisen jakauman määrittäminen ei ole mielekäästä, kuten jo edellä esitetystä yksinkertaisesta esimerkistä huomattiin. Stationaarinen jakauma on siis

$\pi = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ . Oletus Default-luokan absorboivuudesta ei tietenkään kuvaa luokitusmuutosprosessin todellista luonnetta, mutta se on hyvä approksimaatio todellisuudesta lyhyellä aikavälillä.

Seuraavaksi esitetään viiden ja kymmenen vuoden siirtymätodennäköisyysmatriisi sekä keskiarvomatriisin generaattorimatriisi. Niitä tarvitaan tutkielman seuraavassa luvussa, jossa tarkastellaan luottoluokitusten Markov-ketjun stationaarisuutta.

$$\bar{\mathbf{P}}_{SP}^5 \approx \begin{pmatrix} 0.6423 & 0.2743 & 0.0661 & 0.0123 & 0.0032 & 0.0013 & 0.0002 & 0.0004 \\ 0.0214 & 0.6289 & 0.2770 & 0.0558 & 0.0081 & 0.0056 & 0.0010 & 0.0023 \\ 0.0028 & 0.0702 & 0.6694 & 0.2041 & 0.0326 & 0.0123 & 0.0021 & 0.0060 \\ 0.0011 & 0.0122 & 0.1423 & 0.6252 & 0.1374 & 0.0478 & 0.0078 & 0.0260 \\ 0.0013 & 0.0035 & 0.0265 & 0.1724 & 0.4564 & 0.2072 & 0.0296 & 0.1034 \\ 0.0002 & 0.0024 & 0.0109 & 0.0351 & 0.1574 & 0.4364 & 0.0625 & 0.2951 \\ 0.0001 & 0.0009 & 0.0084 & 0.0174 & 0.0529 & 0.1640 & 0.0666 & 0.6897 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{SP}^{10} \approx \begin{pmatrix} 0.4186 & 0.3535 & 0.1645 & 0.0450 & 0.0097 & 0.0050 & 0.0008 & 0.0028 \\ 0.0280 & 0.4215 & 0.3692 & 0.1284 & 0.0264 & 0.0139 & 0.0023 & 0.0100 \\ 0.0054 & 0.0946 & 0.4978 & 0.2743 & 0.0674 & 0.0309 & 0.0049 & 0.0240 \\ 0.0022 & 0.0262 & 0.1920 & 0.4461 & 0.1613 & 0.0824 & 0.0128 & 0.0769 \\ 0.0019 & 0.0087 & 0.0579 & 0.1999 & 0.2671 & 0.1985 & 0.0298 & 0.2368 \\ 0.0006 & 0.0045 & 0.0224 & 0.0678 & 0.1490 & 0.2352 & 0.0364 & 0.4843 \\ 0.0002 & 0.0020 & 0.0121 & 0.0287 & 0.0561 & 0.0944 & 0.0164 & 0.7901 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

### 3.3.1 Keskiarvomatriisin generaattorimatriisi

Markov-ketjun generaattorimatriisin suurimman uskottavuuden estimaatti saadaan kohdan (13) estimaattorilla. Luottoluokitusten Markov-ketjun tapauksessa tämän estimaattorin käyttö vaatii jatkuva-aikaista dataa luokitusten muutoksista. Yksinkertaisemmin generaattori voidaan määrittää kohdassa (14) esitetyllä tavalla, jonka oletuksiin kuuluu, että yksittäisen yrityksen luokitus ei muutu vuoden aikana yhtä kertaa useammin. Vaikka oletus ei täysin päde todellisuudessa, voidaan olettaa, että se riittävän hyvin kuvaa

tämän tutkielman puitteissa luokitusmuutosprosessia. Tällöin keskiarvosii-  
 rymätodennäköisyysmatriisin  $\bar{\mathbf{P}}_{SP}$  generaattorimatriisi on  $\mathbf{M} \approx$

$$\begin{pmatrix} -0.08971 & 0.08281 & 0.00533 & 0.00094 & 0.00063 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00640 & -0.09783 & 0.08303 & 0.00640 & 0.00052 & 0.00115 & 0.00021 & 0.00010 & 0.00010 \\ 0.00052 & 0.02080 & -0.08960 & 0.06126 & 0.00450 & 0.00167 & 0.00031 & 0.00042 & 0.00042 \\ 0.00021 & 0.00179 & 0.04300 & -0.10603 & 0.04795 & 0.00833 & 0.00190 & 0.00285 & 0.00285 \\ 0.00044 & 0.00055 & 0.00295 & 0.06324 & -0.17901 & 0.08803 & 0.01081 & 0.01311 & 0.01311 \\ 0.00000 & 0.00066 & 0.00242 & 0.00385 & 0.06827 & -0.19249 & 0.05233 & 0.06497 & 0.06497 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00426 & 0.00639 & 0.01931 & 0.16819 & -0.60312 & 0.40497 & 0.40497 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}.$$

### 3.3.2 Toimialan vaikutus siirtymätodennäköisyyksiin

Alku- luokitus	Luokitus periodin lopussa								
	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca/C	Default
Aaa	84.7	15.0	0.3	-	-	-	-	-	-
	<i>91.6</i>	<i>7.8</i>	<i>0.7</i>	-	-	-	-	-	-
Aa	0.4	87.8	11.5	0.3	-	-	-	-	-
	<i>1.1</i>	<i>89.3</i>	<i>9.1</i>	<i>0.3</i>	<i>0.2</i>	<i>0.0</i>	-	-	-
A	-	2.7	90.0	6.4	0.7	0.2	-	-	-
	<i>0.1</i>	<i>1.9</i>	<i>92.4</i>	<i>4.9</i>	<i>0.6</i>	<i>0.2</i>	-	-	<i>0.0</i>
Baa	-	0.9	16.4	75.1	5.8	1.8	-	-	-
	<i>0.0</i>	<i>0.1</i>	<i>3.9</i>	<i>89.8</i>	<i>4.9</i>	<i>0.8</i>	<i>0.1</i>	-	<i>0.2</i>
Ba	-	-	4.3	10.3	76.2	5.9	0.5	-	2.7
	<i>0.0</i>	<i>0.1</i>	<i>0.4</i>	<i>3.4</i>	<i>87.0</i>	<i>7.4</i>	<i>0.2</i>	<i>0.0</i>	<i>1.5</i>
B	-	-	-	2.7	13.4	78.6	0.9	-	4.5
	<i>0.0</i>	<i>0.1</i>	<i>0.2</i>	<i>0.5</i>	<i>6.2</i>	<i>84.0</i>	<i>1.9</i>	<i>0.4</i>	<i>6.8</i>
Caa	-	-	-	-	50.0	-	-	-	50.0
	-	-	-	0.8	2.1	7.5	68.2	3.8	17.6
Ca/C	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	1.4	6.8	20.5	56.2	15.2

Taulukko 4: Moody'sin pankki- ja teollisuusalan yritysten suhteelliset siirtymäfrekvenssit vuosina 1971–1997

Useat tutkimukset ovat vahvistaneet, että siirtymätodennäköisyydet vaihte-

levat eri toimialojen kesken (Nickell, Perraudin & Varotto 2001, 9). Siirtymätodennäköisyyksissä esiintyy eroja myös maiden kesken. Seuraavassa taulukossa 4 on vertailtu Moody'sin määrittämiä pankki- ja teollisuudenalan siirtymätodennäköisyyksiä. Ylemmät suhteelliset frekvenssit ovat pankkialan ja alemmat teollisuudenalan (Nickell ym. 2001, 27–30). Nähdään selvästi, että havainnot eivät ole jakautuneet tasaisesti. Toimialoille erikseen määritelty siirtymätodennäköisyysmatriisit on määritetty entistäkin rajallisempien havaintojen perusteella. Rajallisiin havaintoihin perustuva siirtymätodennäköisyysmatriisi aiheuttaa vääristymää Markov-ketjun odotettuihin luokitusjakaumiin ja konkurssitodennäköisyyksiin. On siis ongelmallista määrittää luokitusjakaumia toimialoille erikseen, vaikka erot eri toimialojen siirtymätodennäköisyyksissä ovat tilastollisesti merkitseviä.

## **3.4 Luottoluokitusten reliabiliteetti**

### **3.4.1 Eturistiriidat**

Luottoluokitusten objektiivisuudesta on käyty keskustelua ja on havaittu, että luottoluokituslaitosten kesken luokituksissa on eroja jopa samoja arvopapereita arvioitaessa. Useat tutkimukset ovat kuitenkin vahvistaneet, että merkittävimpien luottoluokitusyritysten Standard & Poor'sin ja Moody'sin luokitukset ovat hyvin yhteneväisiä, mutta näitä yrityksiä pienemmät luottoluokittajat päätyvät useammin edellisiä korkeampiin luokituksiin. Syyksi tähän on esitetty liikkeellelaskijoiden halu hankkia hyvä luokitus. Pienillä luokitusyrityksillä on kannustin hankkia asiakkaita antamalla parempi luokitus (Estrella 2000, 174).

Liikkeellelaskijoiden ja luottoluokittajien suhteessa on eturistiriitoja. Luottoluokituslaitosten taloudellinen riippuvuus liikkeellelaskijoista on ilmeinen eturistiriita. Liikkeellelaskijat ovat 1970-luvulta alkaen maksaneet luokituksista sijoittajien sijasta. Tämä voi vaikuttaa luokitusten objektiivisuuteen. Kuitenkaan riippuvuus ei ole ainoastaan taloudellista. Luottoluokitusyritykset tarjoavat liikkeellelaskijoille konsultointipalveluja. Niihin on kuulunut neuvontaa, kuinka parhain luottoluokitus liikkeellelaskulle on mahdollista saada. Näistä kahdesta eturistiriidasta syntyy luokittajille kannustin toimia

sijoittajien etujen vastaisesti. On havaittu haluttomuutta laskea luokituksia, ja arvopaperien liikkeellelaskut ovat saaneet todellisuutta korkeampia luottoluokituksia (Strier 2008, 536–539).

Luottoluokituslaitosten vaikutuksesta 2000-luvun lopun finanssikriisiin syntyyn on käyty keskustelua. On väitetty, että luokituslaitokset epäonnistuivat CDO-sijoitusinstrumenttien (Collateralized debt obligation) todellisen riskin arvioinnissa. Luottoluokittajille on vaadittu uudenlaista toimintatapaa, kuten avoimuuden lisäämistä. Toiseksi on esitetty liikkeellelaskijoiden ja luokittajien suhteeseen muutoksia. Myös suoran valvonnan lisäämistä on vaadittu (Strier 2008, 543–544).

### **3.4.2 Luottoluokitusten momentum**

Luottoluokituslaitokset välttävät luokituksen huonontamista kerralla usealla luokalla. Tällöin yritys luokitellaan hetkeksi väärään luokkaan, mutta pian luokitus muuttuu uudelleen. Tämä vähentää luokitusten pysyvyyttä ja aiheuttaa vääristymää siirtymätodennäköisyysmatriisiin. Tämä vaikuttaa niin, että luokitusmuutoksilla on siis selvä momentum eli jos luokitus paranee, se paranee tulevaisuudessa todennäköisemmin kuin huononee. Samoin luokitusten huonontuessa todennäköisyys on suurempi luokituksen huonontumiselle kuin paranemiselle. On tutkittu, että yrityksellä, jonka luokitus on huonontunut luokkaan Baa1, on kuusi kertaa pienempi todennäköisyys luokituksen paranemiseen kuin yrityksellä, jonka luokitus on parantunut luokkaan Baa1 (Lando 2004, 97–99).

## 4 Luokitusten Markov-ketjun epästationaarisuus

### 4.1 Siirtymätodennäköisyyksien suhdanneriippuvuus

Vaikka luottoluokituslaitokset pyrkivät noudattamaan arvioissaan menettelyä, jossa ei oteta huomioon suhdanteen vaikutusta, siirtymätodennäköisyysmatriisit kuitenkin riippuvat makrotalouden suhdanteista. Luottoriskiinkin voidaan jakaa systemaattiseen ja ei-systemaattiseen riskiin, kun ajatellaan yksittäisen yrityksen konkurssitodennäköisyyttä. Systemaattinen riski kuvaa siis riskiä, jolle yksittäinen yritys altistuu talouden suhdanteiden takia. Suhdanteelle ehdolliset siirtymätodennäköisyysmatriisit poikkeavat merkittävästi keskiarvomatriiseista. Etenkin laskusuhdanteen aikana todennäköisyys luokituksen laskulle tai konkurssille on merkittävästi suurempi (Bangia ym. 2002, 463–465).

Nickell, Perraudin ja Varotto (2001, 17–18) ovat myös todenneet, että siirtymätodennäköisyydet riippuvat makroekonomisista tekijöistä. Spekulatiiviluokan yritykset ovat alttiimpia luokitusten laskulle ja konkurssille matalasuhdanteessa. Sama ilmiö ei esiinny yhtä selvästi investointiluokassa, mutta luokitusten volatilitteetti kasvaa kuitenkin merkittävästi.

Luottoluokitusten ja makroekonomisten tekijöiden suhde ei ole aivan yksiselitteinen, koska luokituslaitokset noudattavat suhdanteista riippumatonta luokitusmenettelyä. Tällöin luokitus muuttuu viiveellä ja portaittain niin, että yleensä sitä ei muuteta kerralla useampaa luokitusta (Altman & Rijken 2004, 2679–2680).

Luottoluokitusten riippuvuus talouden yleisestä tilasta on ongelmallista kansantalouden kannalta. Luottoluokitukset vaikuttavat pankkien vakavaraisuusvaatimukseen. Jos useita luokituksia lasketaan samanaikaisesti, pankkien pääomatarve kasvaa ja luotonanto supistuu. Tämä johtaa myötäsykliseen luotonantoon kansantalouden suhdanteiden kanssa. Vaikka luottoluokituslaitosten stabiilit luokitukset (through-the-cycle approach) lieventävät ongelmaa, ne eivät täysin poista sitä, kuten edellä on jo todettu. Tällöin luokitukset vain seuraavat kansantalouden suhdanteita viiveellä (Tanaka 2003, 225–228). Amato ja Furfine (2004) ovat tutkineet, ovatko luottoluokitukset liialli-

sen myötäsyklisiä. Tutkimuksessaan he hyväksyvät, että yritysten luottoriski voi kasvaa laskusuhdanteessa perustavanlaatuisesti. Kuitenkaan he eivät havainneet itse luottoluokituslaitosten aiheuttavan myötäsyklisyyttä liiallisella reagoinnilla suhdanteisiin.

#### 4.1.1 Konkurssitodennäköisyyksien vertailua

Kun nousu- ja laskusuhdanteen siirtymätodennäköisyysmatriiseja verrataan, kaikista huomattavin ero nähdään siirtymissä Default-luokkaan. Konkurssitodennäköisyys kasvaa laskusuhdanteen aikana merkittävästi (Bangia ym. 2002, 464–465). Seuraavassa taulukossa 5 vertaillaan eri vuosien siirtymätodennäköisyysmatriisien tuottamia konkurssitodennäköisyyksiä viiden ja kymmenen vuoden periodeille erittelemättä matriiseja nousu- ja laskusuhdanteiden mukaan. Taulukossa on myös mukana matriiseista  $\mathbf{P}_{SP}^5$  ja  $\mathbf{P}_{SP}^{10}$  viimeiset sarakkeet, jotka kuvaavat keskiarvokonkurssitodennäköisyyksiä viiden ja kymmenen vuoden periodeille.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC–C
1986–1990	0.0007	0.0036	0.0162	0.0462	0.1111	0.3302	0.6888
1991–1995	0.0002	0.0009	0.0026	0.0169	0.0731	0.3071	0.6531
1996–2000	0.0004	0.0026	0.0043	0.0201	0.0837	0.2673	0.5324
2001–2005	0.0001	0.0008	0.0083	0.0330	0.1213	0.3479	0.8072
$P^5$	<i>0.0004</i>	<i>0.0023</i>	<i>0.0060</i>	<i>0.0260</i>	<i>0.1034</i>	<i>0.2951</i>	<i>0.6897</i>
1986–1995	0.0026	0.0111	0.0411	0.1056	0.2321	0.5162	0.7981
1996–2005	0.0015	0.0078	0.0221	0.0734	0.2317	0.4961	0.6944
$P^{10}$	<i>0.0028</i>	<i>0.0100</i>	<i>0.0240</i>	<i>0.0769</i>	<i>0.2368</i>	<i>0.4843</i>	<i>0.7901</i>

Taulukko 5: Konkurssitodennäköisyydet viiden ja kymmenen vuoden periodeille

Taulukon 5 konkurssitodennäköisyydet on laskettu Standard & Poor'sin (2006, 40–45) tarjoamien vuosittaisten siirtymätodennäköisyysmatriisien matriisitulona. Taulukosta nähdään silmämääräisestikin, että konkurssitodennäköisyydet riippuvat ajasta. Jopa kymmenen vuoden periodeissa havaitaan eroja,

vaikka ne ovat luonnollisesti jo tasoittuneet lähemmäs pitkän aikavälin keskiarvoja. Siirtymätodennäköisyyksien riippuvuutta ajasta ei tarvitse tyytyä ainoastaan tarkastelemaan silmämääräisesti, vaan siihen on kehitetty myös tilastollisia testejä.

#### 4.1.2 Stationaarisuuden testaaminen

Huschens, Höse ja Wania (2009, 112–114) esittävät tavan testata, ovatko siirtymätodennäköisyydet stationaarisia. Määritellään, että  $c_{ij}(t)$  on siirtymien lukumäärä tilasta  $i$  tilaan  $j$  periodin  $t$  aikana. Olkoon  $T$  periodien lukumäärä ja tila-avaruus  $S = \{0, 1, \dots, K\}$ . Määritellään seuraavaksi merkinnät:

$$\begin{aligned} c_{ij}^+ &\equiv \sum_{t=1}^T c_{ij}(t) & d_i(t) &\equiv \sum_{j=1}^K c_{ij}(t) \\ \hat{p}_{ij}(t) &\equiv \frac{c_{ij}(t)}{d_i(t)} & \hat{p}_{ij}^+ &\equiv \frac{c_{ij}^+}{d_i^+} \end{aligned} \quad (15)$$

missä

$$d_i^+ \equiv \sum_{j=1}^K c_{ij}^+ = \sum_{t=1}^T d_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, K - 1.$$

Kun luokitusmuutokset oletetaan riippumattomiksi toisistaan, voidaan olettaa, että siirtymien lukumäärät noudattavat moniulotteista multinomijakaumaa niin, että

$$(c_{i1}(t), \dots, c_{iK}(t)) \sim \text{Multinom}(d_i(t); p_{i1}(t), \dots, p_{iK}(t)).$$

Stationaarisuuden testauksessa tilalle  $i$  nollahypoteesi väittää, että siirtymätodennäköisyydet ovat stationaarisia.

$$H_0 : p_{i1}(1) = \dots = p_{i1}(T); p_{i2}(1) = \dots = p_{i2}(T); \dots ; p_{iK}(1) = \dots = p_{iK}(T)$$

Testisuurena on tällöin

$$X_i^2 = \sum_{j=1}^K \sum_{t=1}^T \frac{(c_{ij}(t) - d_i(t)\hat{p}_{ij}^+)^2}{d_i(t)\hat{p}_{ij}^+}.$$

Testisuure on asympotoottisesti  $\chi^2$ -jakautunut vapausasteilla  $(K - 1)(T - 1)$ . Kun testataan siirtymätodennäköisyysmatriisien  $\mathbf{P}(t)$  stationaarisuutta,

nollahypoteesi on  $H_0 : \mathbf{P}(1) = \dots = \mathbf{P}(T)$  ja testisuure  $X^2 = \sum_{i=1}^{K-1} X_i^2$ . Se on myös asympotoottisesti  $\chi^2$ -jakautunut vapausasteilla  $(K-1)^2(T-1)$ .

Edellä esitettyä testiä käytettäessä on huomioitava ensinnäkin sen riippumattomuusoletus. Toiseksi testisuureet ovat vain asympotoottisesti  $\chi^2$ -jakautuneet, joten aineiston tulisi olla laaja. Luottoluokitusten kohdalla kummatkaan testin reunaehdot eivät täysin toteudu.

## 4.2 Todennäköisyysmatriisien ehdollistaminen

Vaikka edellä ollaan huomattu, että siirtymätodennäköisyysmatriisit eivät ole riippumattomia suhdanteista, on hyvin vähän metodeja ehdollistaa matriiseja suhdanteille. Tässä tutkielmassa keskitytään kahteen yleisimpään ehdollistamistapaan. Ensimmäisenä käsitellään yhden faktorin mallia, joka on sisällytetty myös CreditMetrics-luottoriskinhallintatyökaluun. Toisena esitetään numeerisen ehdollistamisen malli, jossa on pohjana tapa muokata matriiseja vastaamaan joukkovelkakirjojen hinnoista pääteltäviä riskineutraaleja konkurssitodennäköisyyksiä (Trück 2008, 360, 367–368).

### 4.2.1 Yhden faktorin malli matriisien ehdollistamiselle

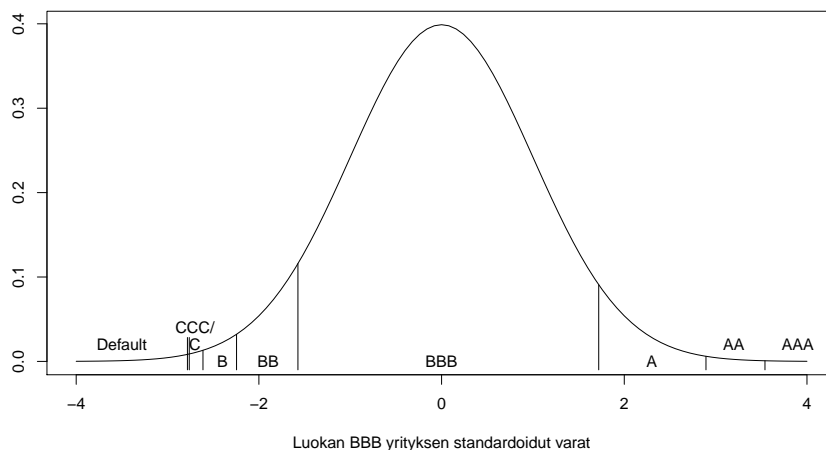
Mallin lähtökohtana on, että yrityksen varat muuttuvat ajan kuluessa prosessin  $X_t$  mukaan. Yrityksen standardoituja varoja merkitään  $X$ :llä ja varojen muutos  $\Delta X$  oletetaan normaalisti jakautuneeksi. Mertonin mallin mukaan lainanantajilla on osto-optio yrityksen varoihin ja jos varat alittavat tietyn rajan, optio toteutetaan eli yritys menee konkurssiin. Mertonin mallissa määritetään etäisyys konkurssiin (distance to default), mutta yrityksen varojen  $X$  standardoitu jakauma voidaan jakaa kuvion 3 mukaan myös luokitusmuutosten todennäköisyyksien mukaan. Tällöin osioiden rajat  $x_{ij}$  määritetään luokituksen  $i$  yritykselle seuraavasti, kun  $K$  on mahdollisten luottoluokitusten lukumäärä:

$$x_{ij} = \Phi^{-1}\left(\sum_{k=1}^j p_{ik}\right), \quad j = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, K. \quad (16)$$

Tästä saadaan matriisin  $\bar{\mathbf{P}}_{SP}$  BBB-luokituksen yrityksille rajat, jotka on merkitty taulukkoon 6.

	D	CCC/C	B	BB	BBB	A	AA	AAA
$p_{ij}$	0.0027	0.0018	0.0079	0.0455	0.8994	0.0408	0.0017	0.0002
$x_{ij}$	-2.782	-2.612	-2.245	-1.573	1.720	2.894	3.540	$\infty$

Taulukko 6: BBB-luokan yrityksen varallisuusjakauman osioiden rajat



Kuvio 3: BBB-luokan yrityksen varallisuusjakauma luottoluokituksen muutostodennäköisyyksillä

Osioiden rajoista  $x_{ij}$  saadaan vastaavasti siirtymätodennäköisyydet  $p_{ij}$  (Bangia ym. 2002, 447–450).

$$p_{ij} = \begin{cases} \Phi(x_{ij}), & j = 1 \\ \Phi(x_{ij}) - \Phi(x_{i,j-1}), & j = 2, \dots, K - 1 \\ 1 - \Phi(x_{i,K-1}), & j = K \end{cases}$$

Koska luottoluokitusprosessin realisaatiot ovat diskreetisti jakautuneita, tarkastellaan prosessia tilastollisella ordered probit -mallilla. Malli ottaa huomioon, että luottoluokituksilla on paremmuusjärjestys. Kun yrityksen varallisuuden kehityksen oletetaan riippuvan yksinkertaisesti kahdesta muuttujasta, makroekonomisesta tekijästä  $Z$  ja yrityskohtaisesta tekijästä  $\epsilon$ , kuvataan prosessi  $X_t$  niin, että

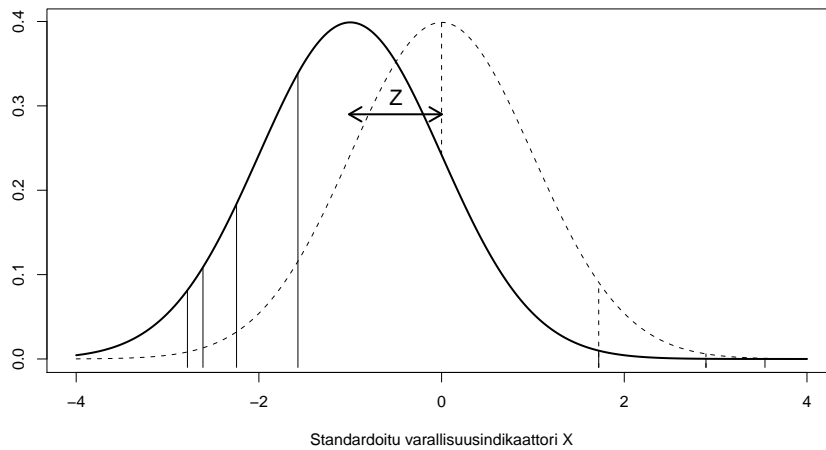
$$X_t = \beta Z_{t-1} + \epsilon_t.$$

Merkitään  $R_t$ :llä yrityksen luottoluokitusta, jolloin ordered probit -mallin mukaan

$$R_t = \begin{cases} 1, & \text{kun } X_t < x_{i,1} \\ j, & \text{kun } x_{i,j-1} \leq X_t < x_{ij}, \quad j = 2, \dots, K-1. \\ K, & \text{kun } x_{i,K-1} \leq X_t \end{cases}$$

Kun oletetaan, että  $\epsilon_t | Z_{t-1} \sim N(0, 1)$ , todennäköisyydet  $\mathbb{P}(R_t = j)$  saadaan standardoidusta normaalijakaumasta (Nickell ym. 2001, 19–20).

$$\begin{cases} \mathbb{P}(R_t = 1) &= \Phi(x_{i,1} - \beta Z_{t-1}) \\ \mathbb{P}(R_t = j) &= \Phi(x_{ij} - \beta Z_{t-1}) - \Phi(x_{i,j-1} - \beta Z_{t-1}), \quad j = 2, \dots, K-1 \\ \mathbb{P}(R_t = K) &= 1 - \Phi(x_{iK} - \beta Z_{t-1}) \end{cases}$$



Kuvio 4: Luottosuhdanneindeksin  $Z$  siirtymä

Tekijä  $Z$  sisältää tietoa suhdannetilanteesta. Se voidaan määrittää makroekonomisista tunnusluvuista, mutta se saadaan myös tarkastelemalla luottoluokitusten siirtymätodennäköisyysmatriisien vuosittaista kehitystä. Belkin, Forest ja Suchower (1998) esittävät yksinkertaisen yksifaktorimallin matriisien ehdollistamiselle. Sitä voidaan käyttää myös määrittämään mallin tekijä  $Z$ , jota nimitetään mallissa luottosuhdanneindeksiksi (credit cycle index). Lisäämällä yrityskohtainen virhetermi  $\epsilon$  saadaan, että

$$X_t = \rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_t,$$

missä  $\rho$  on  $X_t$ :n ja  $Z_t$ :n välinen korrelaatiokerroin. Koska  $Z_t \perp \epsilon_t$ ,  $Z_t \sim N(0, 1)$  ja  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ , niin yrityksen varallisuusindikaattori  $X_t$  on myös jakautunut standardoidun normaalijakauman mukaan. Kuviossa 4 on havainnollistettu luottosuhdanneindeksin  $Z_t$  siirtymää. Varallisuusindikaattori  $X_t$  on jaettu osioihin edellä esitetyllä tavalla, mutta nyt luottosuhdanneindeksi  $Z_t$  siirtää standardoitua jakaumaa joko oikealle tai vasemmalle. Hyvänä vuotena  $Z_t > 0$ , jolloin jakauma on siirtynyt oikealle ja huonona vuotena ( $Z_t < 0$ ) vasemmalle. Yksifaktorimallin esittämät ehdolliset siirtymätodennäköisyydet  $p_{ij}(t)|Z_t$  saadaan ordered probit -mallin mukaan seuraavasti (Trück 2008, 365–366):

$$p_{ij}(t)|Z_t = \Phi\left(\frac{x_{i,j+1} - \rho Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) - \Phi\left(\frac{x_{ij} - \rho Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right). \quad (17)$$

Kun halutaan määrittää vuosittaisista empiirisistä siirtymätodennäköisyyksistä luottosuhdanneindeksi  $Z_t$ , päädytään minimoimaan lauseketta

$$\min_{Z_t} \sum_j \sum_i \frac{n_{ij}(t)(p_{ij}(t) - p_{ij}(t)|Z_t)^2}{p_{ij}(t)|Z_t(1 - p_{ij}(t)|Z_t)},$$

missä  $n_{ij}(t)$  on tilasta  $i$  tilaan  $j$  siirtyneiden yritysten lukumäärä vuonna  $t$  (Trück 2008, 366–367). Luottosuhdanneindeksin  $Z_t$  ja varallisuusindikaattorin  $X_t$  välinen korrelaatiokerroin  $\rho$  voidaan asettaa määrittämällä luottosuhdanneindeksin  $Z_t$  aikasarjoja eri korrelaatiokertoimien arvoille. Tässä tapauksessa on mielekästä tarkastella aikasarjoja, kun  $\rho > 0$ . Näistä etsitään sarja, joka parhaiten on mallin oletuksen  $Z_t \sim N(0, 1)$  mukainen (Belkin ym. 1998).

#### 4.2.2 Numeerisen ehdollistamisen malli

Jarrow, Lando ja Turnbull (1997) ovat esittäneet mallin siirtymätodennäköisyyksien muokkaamisesta vastaamaan riskineutraaleja konkurssitodennäköisyyksiä. Kuitenkin mallia voidaan käyttää muokkaamaan siirtymätodennäköisyyksiä sellaisiksi, että ne vastaavat makroekonomisista suhdanteista johtuvia todennäköisyyksien muutoksia.

Diskreetissä tapauksessa käytetään siirtymätodennäköisyysmatriisia  $P$ . Funktio  $\gamma_i(t) > 0$  kuvaa luokituksen  $i$  yrityksen ajan suhteen muuttuvaa riskikerrointa vuotena  $t$  luokitusmuutokselle verrattuna keskivertovuoden siirtymätodennäköisyyteen. Vuoden  $t$  siirtymätodennäköisyysmatriisin  $P(t)$  alkiot määritellään mallissa seuraavasti:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \gamma_i(t)p_{ij} \geq 0, \quad j \neq i, \\ p_{ii}(t) &= 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}(t). \end{aligned} \tag{18}$$

Sama voidaan esittää matriisimuodossa

$$P(t) - I = \Gamma(t)(P - I),$$

missä  $\Gamma(t) = \text{diag}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, 1)$  (Trück & Özturkmen 2003, 3–4). Malli tukee osittain havaintoa siitä, että laskusuhdanteissa luokitusten volatilitetti kasvaa ( $\gamma_i(t) > 1$ ). Kuitenkin volatilitetin kasvu johtuu ennen kaikkea kasvaneesta todennäköisyydestä luottoluokituksen huonontumiselle. Luokituksen paranemisen todennäköisyys pysyy kutakuinkin samana suhdanteesta riippumatta (Bangia ym. 2002, 464–465).

Jatkuva-aikaisessa mallissa muokataan määritelmän (10) mukaisista siirtymäintensiteeteistä muodostettuja generaattorimatriiseja  $M$ , jolloin  $t$ -pituisen aikavälin siirtymätodennäköisyydet saadaan jo edellä esitetystä yhtälöstä

$$P^t = e^{Mt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Mt)^k}{k!},$$

kun  $(Mt)^0 = I$ . Generaattorimatriisejakin voidaan muokata riskikertoimella siirtymätodennäköisyysmatriisien tavoin. Ajan mukaan muuttavalla kertoimella  $\delta_i(t)$  muokattu generaattorimatriisi on matriisimuodossa

$$\hat{M}(t) = \Delta(t)M, \tag{19}$$

missä  $\Delta(t) = \text{diag}(\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, 1)$  ja  $i$  on yrityksen luottoluokitus periodin alussa (Trück & Özturkmen 2003, 4–5).

Numeerisen ehdollistamisen mallissa voidaan myös muokata vain matriisin  $M$  viimeistä saraketta eli konkurssi-intensiteettejä. Oletetaan, että on

estimoitu kaikkien luottoluokitusten  $i \in S = \{1, 2, \dots, K\}$  yhden vuoden konkurssitodennäköisyydet, jolloin matriisin  $P$  viimeinen sarake on vektori  $\bar{p}_K = (p_{1K}, p_{2K}, \dots, p_{K-1,K}, 1)$ . Generaattorimatriisia  $M$  on nyt muokattava niin, että siirtymätodennäköisyysmatriisin  $P = e^M$  viimeinen sarake vastaa vektoria  $\bar{p}_K$ . Muokataan matriisin  $M$  viimeistä saraketta kertoimen  $\delta_i$  verran. Koska  $\sum_{j=1}^K \mu_{ij} = 0$ , täytyy myös matriisin diagonaalia muokata. Tällöin muokatun generaattorimatriisin  $\hat{M}$  alkioit ovat

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{1K} &= \delta_1 \mu_{1K}, & \hat{\mu}_{11} &= \mu_{11} - (\delta_1 - 1) \mu_{1K}, \\ \hat{\mu}_{2K} &= \delta_2 \mu_{2K}, & \hat{\mu}_{22} &= \mu_{22} - (\delta_2 - 1) \mu_{2K}, \\ &\vdots & &\vdots \\ \hat{\mu}_{K-1,K} &= \delta_{K-1} \mu_{K-1,K}, & \hat{\mu}_{K-1,K-1} &= \mu_{K-1,K-1} - (\delta_{K-1} - 1) \mu_{K-1,K}. \end{aligned} \quad (20)$$

Kaikkien edellä mainittujen mallin menetelmien kohdalla tulee huomioida, että siirtymätodennäköisyys- ja generaattorimatriiseille määritellyt ominaisuudet säilyvät (Trück 2008, 367–369).

### 4.3 Mallien empiiristen tulosten vertailua

Kuten on jo mainittu, siirtymätodennäköisyydet voidaan ehdollistaa makroekonomisille tekijöille. Trück (2008) on vertaillut yhden faktorin mallin ja numeerisen ehdollistamisen mallin tuottamia ehdollisia siirtymätodennäköisyysmatriiseja toteutuneiden matriisien kanssa. Luottosuhdanneindeksi  $Z_t$  muodostuu nyt useammasta faktorista regressiomallin

$$Z_t = \alpha + \sum_{j=1}^k \beta_j Y_{j,t-1} + \epsilon_{t-1}$$

mukaan. Indeksillä  $Z_t$  voi numeerisen ehdollistamisen mallin tapauksessa merkitä lukuarvoa, joka vastaa luokituksen konkurssitodennäköisyyttä. Regressiomallin viivästetyt termit  $Y_{j,t-1}$  vastaavat eri makroekonomisia tekijöitä, joita on otettu mukaan  $k$  kappaletta. Trück on havainnut, että merkittävimmät tekijöitä regressiossa ovat kuluttajahintaindeksin, bruttokansantuotteen kasvun, vuosittaisen säästämisen, kulutuksen, työttömyysasteen muutos ja valtion joukkovelkakirjojen hintaero.

Edellä esitettyjen ehdollistamisen mallien kykyä ennustaa siirtymätodennäköisyyksiä verrattiin myös kahteen naiiviin menetelmään. Toinen naiivi menetelmä oli keskiarvomatriisin käyttäminen seuraavan periodin estimaattina, ja toinen oli edellisen periodin matriisin käyttö estimaattina seuraavalle periodille. Numeerisen ehdollistamisen malli ei pärjää naiiville menetelmälle, vaan naiivien menetelmien estimaatit sopivat paremmin havaintoihin. Yhden faktorin malli taas on muita menetelmiä selvästi parempi, kun sillä selitetään siirtymätodennäköisyyksiä, mutta se toimii hyvin myös ennustemallina. Luottoportfolion riskin määrittämisessä yhden faktorin malli on yleensä muita parempi (Trück 2008, 374, 377–378).

## 5 Ehdollisten mallien implementointi empiiriseen aineistoon

Seuraavaksi hyödynnetään edellä esitettyjä malleja empiirisen luottoluokitusaineiston analysoimiseen. Standard & Poor's julkaisee vapaasti saatavilla olevaa vuosittain ilmestyvää sarjaa Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions. Vuotta 2005 analysoivassa artikkelissa julkaistiin vuosittaiset luottoluokitusmuutosten matriisit vuosilta 1981–2005. Ne on esitetty Standard & Poor'sin käyttämällä static pool -menetelmällä, jossa jokaisen luottoluokituksen vuosittainen staattinen pooli sisältää vain sen vuoden ensimmäisenä päivänä luokituksessa olleet yritykset. Uudet yritykset otetaan pooliin mukaan vasta seuraavana vuonna. Konkurssiin menneiden ja yritysten, joilta luokitus on poistettu, vaikutus on eliminoitu seuraavien vuosien pooleista (Standard & Poor's 2006, 28–29, 40–45). Ensin testataan tilastollisesti edellä esitetyn aineiston stationaarisuus, jotta nähdään ehdollisten mallien tarpeellisuus, ja sitten käytetään malleja aineiston analysointiin.

### 5.1 Luottoluokitusaineiston stationaarisuus

Mahdollisen epästationaarisuuden toteamiseen käytetään edellisessä luvussa käsiteltyä testiä, jossa on  $\chi^2$ -jakautunut testisuure

$$X_i^2 = \sum_{j \in S_i} \sum_t \frac{(c_{ij}(t) - d_i(t)\hat{p}_{ij}^+)^2}{d_i(t)\hat{p}_{ij}^+} \quad (21)$$

ja nollahypoteesi väittää siirtymätodennäköisyyksien olevan stationaarisia. Käytettyä aineistoa tarkastelemalla nähdään, että nimittäjä  $d_i(t)\hat{p}_{ij}^+ = 0$  joillakin  $i$ :n ja  $j$ :n arvoilla. Tällöin on meneteltävä niin, että  $j \in S_i = S \setminus S_i^c$ , missä  $S$  on kaikkien luottoluokitusten joukko ja  $S_i^c = \{j \in S \mid p_{ij}^+ = 0\}$ .

Huschensin, Hösen ja Wanian esittämää testiä käytetään ensin yksittelen siirtymätodennäköisyysmatriisien riveille  $i = \{1, 2, \dots, K - 1\}$  ja lopuksi testataan Standard & Poor'sin aineiston koko matriisien stationaarisuus testisuurena  $X^2 = \sum_{i=1}^{K-1} X_i^2$ . Taulukossa 7 esitetään tulokset, joista voidaan päätellä, että matriisit ovat ajasta riippuvia erittäin merkitsevästi. Ainoastaan matriisien ensimmäinen rivi toteuttaa nollahypoteesin ( $p \approx 0.2$ ), jos

merkitsevyytaso  $\alpha = 0.05$ . Aiemmissakin tutkimustuloksissa on havaittu, että korkeat luottoluokitukset ovat vähemmän herkkiä suhdanteille (Bangia ym. 2002, 465; Nickell ym. 2001, 27). Taulukon 7 tuloksia on tulkittava myös testin reunaehdot huomioiden. Aineiston laajuudelle on kirjallisuudessa annettu peukalosääntö, että  $d_i(t)\hat{p}_{ij}^+ \geq 5$  kaikilla  $i, j$  ja  $t$  arvoilla (Huschens ym. 2009, 113). Aineisto ei toteuta tätä vaatimusta, kuten jo testisuureen (21) kohdalla todettiin.

$i$	$X^2$	vapausasteet	p-arvo
AAA	183.1043	168	0.20140
AA	488.5245	168	<b>0.00000</b>
A	650.2572	168	<b>0.00000</b>
BBB	704.2333	168	<b>0.00000</b>
BB	652.3264	168	<b>0.00000</b>
B	612.9436	168	<b>0.00000</b>
CCC/C	253.3181	168	<b>0.00002</b>
$\sum i$	3544.707	1176	<b>0.00000</b>

Taulukko 7: Testisuureen arvoja matriisin riveille

Kuitenkin voidaan todeta, että epästationaarisuudesta on saatu hyvin vahvaa näyttöä. Näin ollen ehdollisten mallien käyttö on perusteltua.

## 5.2 Yhden faktorin mallin estimointi aineistolle

Faktorimallissa keskiarvosiirtymätodennäköisyysmatriisi jaetaan normaalijauman mukaisiin osioihin. Tällä kertaa keskiarvomatriisina käytetään suurimman uskottavuuden estimaattoria (4) matriisin alkioille. Se on sama kuin kohdassa (15) stationaarisuuden testaukseen käytetty alkiodien  $p_{ij}^+$  muodostama matriisi, ja se on eri kuin Standard & Poor'sin määrittämä matriisi  $\bar{\mathbf{P}}_{SP}$ , koska keskiarvomatriisin muodostuksessa on käytetty eri menetelmiä. Tarkasteluperiodin ollessa yksi vuosi faktorimallin yhteydessä on perusteltua pitäytyä suurimman uskottavuuden estimaattiin  $\bar{P}_{ML}$ , koska se on vuosittais-

ten matriisien painotettu keskiarvo.

$$\bar{P}_{ML} \approx \begin{pmatrix} 0.9139 & 0.0795 & 0.0051 & 0.0009 & 0.0006 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0061 & 0.9065 & 0.0793 & 0.0061 & 0.0006 & 0.0011 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0005 & 0.0199 & 0.9143 & 0.0586 & 0.0044 & 0.0016 & 0.0003 & 0.0004 \\ 0.0002 & 0.0017 & 0.0411 & 0.8986 & 0.0456 & 0.0081 & 0.0018 & 0.0029 \\ 0.0004 & 0.0005 & 0.0028 & 0.0580 & 0.8350 & 0.0811 & 0.0099 & 0.0123 \\ 0.0000 & 0.0006 & 0.0021 & 0.0035 & 0.0625 & 0.8227 & 0.0476 & 0.0609 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0032 & 0.0048 & 0.0143 & 0.1256 & 0.5413 & 0.3108 \end{pmatrix}$$

Tämän matriisin kohdan (16) mukaiset rajat  $x_{ij}$  on määritetty taulukossa 8.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D
AAA	$\infty$	-1.365	-2.477	-2.967	-3.238	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
AA	$\infty$	2.508	-1.357	-2.406	-2.879	-2.990	-3.433	-3.720
A	$\infty$	3.300	2.046	-1.511	-2.472	-2.825	-3.174	-3.333
BBB	$\infty$	3.553	2.893	1.717	-1.568	-2.231	-2.592	-2.756
BB	$\infty$	3.366	3.135	2.685	1.541	-1.263	-2.010	-2.247
B	$\infty$	$\infty$	3.247	2.779	2.499	1.485	-1.234	-1.547
CCC/C	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2.729	2.411	2.009	1.046	-0.494

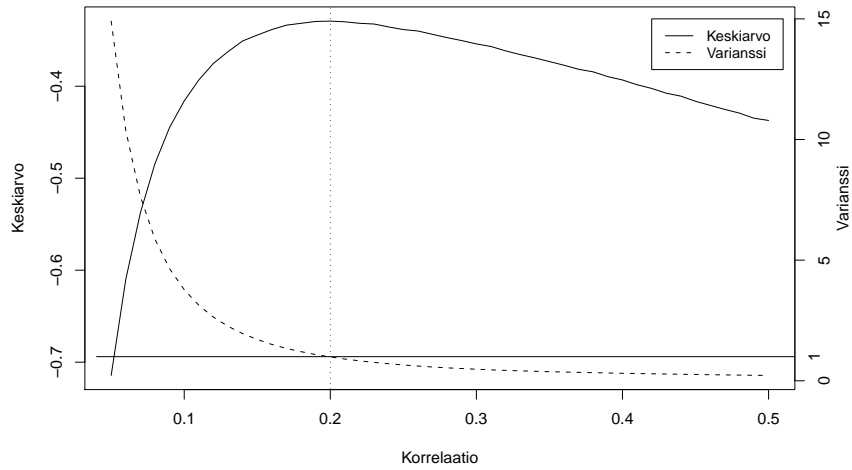
Taulukko 8: Osioden rajat keskiarvomatriisille

Ehdolliset todennäköisyydet  $p_{ij}(t)|Z_t$  on määritelty kohdan (17) mukaan. Se voi olla joillakin  $i$ :n ja  $j$ :n arvoilla nolla, jolloin minimoitavan lausekkeen

$$\min_{Z_t} \sum_j \sum_i \frac{n_{ij}(t)(p_{ij}(t) - p_{ij}(t)|Z_t)^2}{p_{ij}(t)|Z_t(1 - p_{ij}(t)|Z_t)} \quad (22)$$

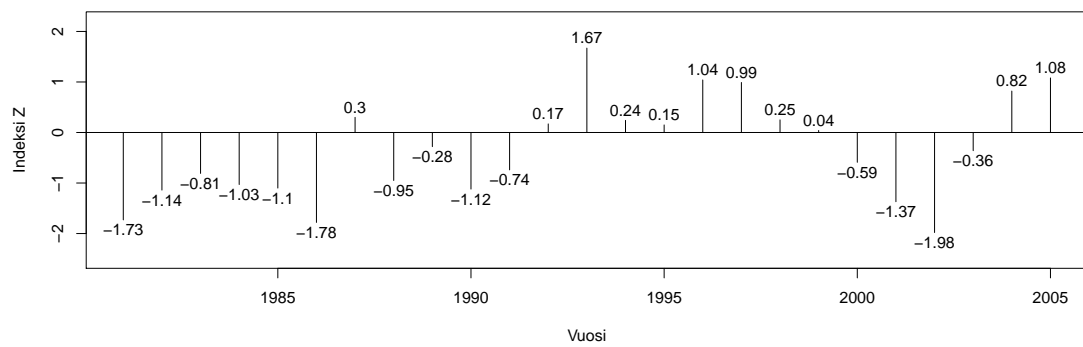
nimittäjä on myös nolla. Tämän vuoksi summattavien alkioden joukosta on eliminoitava kaikki alkiot, joille pätee  $p_{ij}(t)|Z_t(1 - p_{ij}(t)|Z_t) = 0$ .

Tässä tutkielmassa estimoitiin luottosuhdanneindeksin  $Z_t$  aikasarja  $Z = \{Z_{1981}, Z_{1982}, \dots, Z_{2005}\}$  vuosille 1981–2005. Aikasarja määritettiin eri korrelaationkertoimen  $\rho$  arvoille. Seuraavassa kuviossa 5 on esitetty aikasarjojen keskiarvo ja varianssi kertoimen  $\rho$  funktiona.



Kuvio 5: Aikasarjan  $Z$  keskiarvo ja varianssi eri  $\rho$ :n arvoilla

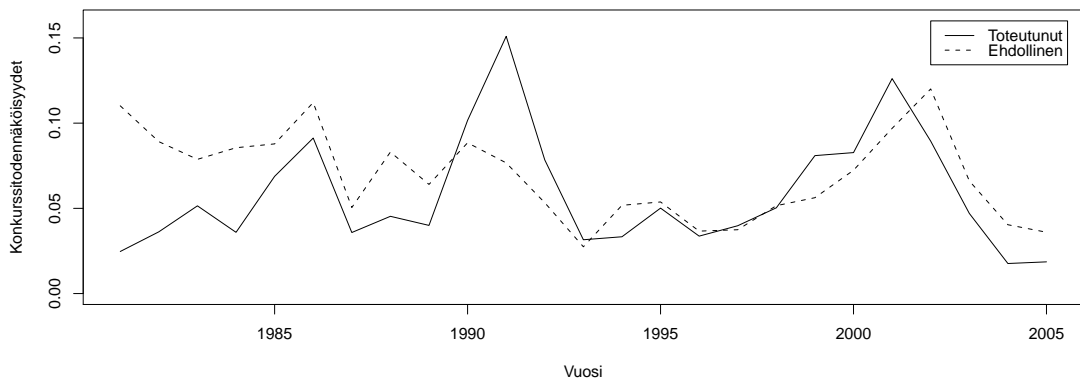
Aiemmin on todettu mallin oletuksessa, että  $Z_t \sim N(0, 1)$ , ja kuviosta päätellen nähdään korrelaationkertoimen arvon  $\rho = 0.20$  toteuttavan parhaiten oletuksen. Tällöin aikasarja  $Z$  on kuvion 6 mukainen.



Kuvio 6: Luottosuhdanneindeksi  $Z$  vuosina 1981–2005

## 5.2.1 Ehdollisten ja toteutuneiden konkurssitodennäköisyyksien korrelaatio

Konkurssitodennäköisyydet ovat hyvin tärkeitä luottoriskin arvioinnissa, ja tällöin ehdollisten mallien tulisi kyetä selittämään konkurssitodennäköisyyksien vaihteluita eri luottoluokituksille. Yksi tapa selvittää, kuinka hyvin malli kykenee arvioimaan konkurssitodennäköisyydet, on määrittää mallin tuottamien ja toteutuneiden todennäköisyysaikasarjojen välinen korrelaatiokerroin. Tutkielman aineistolle korrelaatiokerroin määritetään kaikkien luottoluokituksien aikasarjoille, ja kuviossa 7 esitetty luokituksen B ehdollisten ja toteutuneiden konkurssitodennäköisyyksien aikasarjat.



Kuvio 7: Faktorimallin tuottamat ja toteutuneet konkurssitodennäköisyydet B-luokituksen yrityksille

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C
Korrelaatiokerroin	-	-0.12	0.44	0.49	0.57	0.47	0.28
Konkurssifrekvenssi	0	1	8	46	129	626	391

Taulukko 9: Konkurssitodennäköisyysaikasarjojen korrelaatiokertoimet

Kuviosta 7 ja taulukossa 9 esitetyistä korrelaatiokertoimista voidaan päätellä, että siirtymätodennäköisyyksien epästationaarisuuden sallivalla mallilla

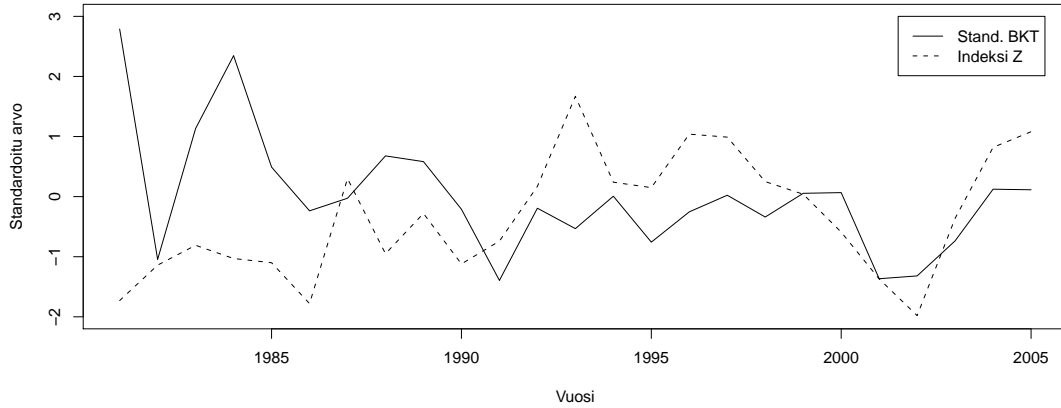
saadaan paremmin empiiriseen aineistoon sopivia konkurssitodennäköisyyksiä. Luokitusten AAA ja AA korrelaatiokertoimille ei aineiston niukkuuden vuoksi ole mielekästä tulkintaa. Luokituksen CCC/C korrelaatiokerroin on suhteellisen pieni. Luottoluokitusindeksi  $Z_t$  siirtää koko siirtymätodennäköisyysmatriisin todennäköisyyksiä yhtä aikaa, jolloin makroekonomisten tekijöiden vaikutusta yksittäisen luokituksen siirtymätodennäköisyyksiin ei voida erikseen käsitellä. Jos yksittäiset luokitukset halutaan ottaa paremmin huomioon ja näin parantaa konkurssitodennäköisyysaikaasarjojen korrelaatiokertoimia, yhden faktorin mallia voidaan laajentaa usean faktorin malliksi lisäämällä siihen luokituskohtaiset faktorit. Tällä tavoin faktorimalliakin kyetään käyttämään hinnoittelutarkoituksessa (Wei 2003).

### 5.2.2 Makroekonomisen tekijän ja luottosuhdanneindeksin välinen yhteys

Luottoluokitusten on tarkoitus mitata yrityksen suhteellista luottoriskiä verrattuna muihin yrityksiin. Luottoluokituslaitokset pyrkivät luokituksissaan suhdanteisiin nähden stabiileihin luottoluokituksiin. Kuten aiemmin on jo todettu, luokitukset eivät ole täysin stabiileja, kun laskusuhdanteet kasvattavat luokituksen huonontumisen todennäköisyyttä, eivätkä suhdanteet vaikuta yhtä voimakkaasti kaikkien luokitusten siirtymätodennäköisyyksiin. Yhdeksi merkitseväksi makroekonomiseksi tekijäksi on todettu bruttokansantuotteen kasvu. Tässä tutkielmassa arvioidaan luottosuhdanneindeksin  $Z$  riippuvuutta Yhdysvaltojen bruttokansantuotteen kasvusta (National Economic Accounts: Gross domestic product). Sen voidaan ajatella edustavan merkittävää osaa koko maailman taloudesta. Vuosien 1980–2006 bruttokansantuotteen kasvun arvot on standardoitu, ja niille estimoidaan origoregressiot  $Z_t = \alpha \cdot BKT_{t-1}$ ,  $Z_t = \alpha \cdot BKT_t$  ja  $Z_t = \alpha \cdot BKT_{t+1}$ .

	$Z_t = \alpha \cdot BKT_{t-1}$	$Z_t = \alpha \cdot BKT_t$	$Z_t = \alpha \cdot BKT_{t+1}$
$\alpha$	-0.3471	-0.1275	0.1167
p-arvo	0.0987	0.554	0.588

Taulukko 10: Origoregression tulokset



Kuvio 8: Bruttokansantuotteen kasvu ja luottosuhdanneindeksi vuosina 1981–2005

Kuviossa 8 on piirretty vuosien 1981–2005 standardoidut bruttokansantuotteen kasvun ja indeksin  $Z$  arvot samaan kuvaajaan. Silmämääräisesti katsottuna käyrillä on jonkinasteinen yhteys etenkin vuodesta 1995 eteenpäin. Silti taulukon 10 tulosten pohjalta voidaan todeta, että Yhdysvaltojen bruttokansantuotteen kasvulla ei voida selittää luottosuhdanneindeksin kehitystä merkittävästi. Myöskään tämän perusteella ei voida löytää näyttöä luottoluokitusten myötäsyklisyydestä. Kuitenkin on huomattava, että suhdanteiden on todettu vaikuttavan epäsymmetrisesti eri luokitusten siirtymätodennäköisyyksiin. Kaikki luokitukset huomioiva indeksi  $Z$  ei kykene huomioimaan tätä vaikutusta. Samalla on myös syytä muistaa, että regression faktori sisältää vain Yhdysvaltojen bruttokansantuotteen kasvun.

### 5.3 Numeerisen ehdollistamisen mallin estimointi

Kyseessä olevassa mallissa muokataan keskiarvosuirtymätodennäköisyysmatriisia  $\bar{\mathbf{P}}_{SP}$  niin, että matriisin konkurssitodennäköisyys vastaa vaadittuja arvoja. Määritetään mallilla matriisit vastaamaan Standard & Poor'in aineiston konkurssitodennäköisyyksiä vuosina 2003–2005. Generaattorimatriisina  $\mathbf{M}$  käytetään estimaattoria (14). Seuraavan taulukon 11 ylemmät arvot esit-

tävät diskreetin ja jatkuva-aikaisen mallin riskikertoimia. Diskreetti kerroin  $\gamma_i(t)$  on määritetty kohdan (18) esittämällä tavalla ja merkitään kohdan (19) mukaista jatkuva-aikaista kerrointa  $\delta_i^a(t)$ :lla ja kohdan (20) kerrointa  $\delta_i^b(t)$ :lla. Kertoimien pienimmäksi mahdolliseksi arvoksi sallittiin 0,01.

$i$	$\gamma_i(t)$			$\delta_i^a(t)$			$\delta_i^b(t)$		
	2003	2004	2005	2003	2004	2005	2003	2004	2005
AAA	1.00 (1.24)	1.00 (0.74)	1.00 (1.20)	1.00 (1.26)	1.00 (0.74)	1.00 (1.21)	1.00	1.00	1.00
AA	0.50 (1.32)	0.50 (0.47)	0.50 (0.60)	0.27 (1.36)	0.37 (0.47)	0.38 (0.60)	0.01	0.18	0.24
A	0.13 (0.90)	0.13 (0.52)	0.13 (0.75)	0.08 (0.91)	0.10 (0.51)	0.10 (0.76)	0.01	0.01	0.01
BBB	0.91 (0.75)	0.02 (0.43)	0.28 (1.03)	0.71 (0.76)	0.01 (0.42)	0.24 (1.05)	0.65	0.01	0.19
BB	0.51 (0.95)	0.38 (0.68)	0.19 (0.88)	0.36 (0.97)	0.31 (0.67)	0.15 (0.90)	0.17	0.24	0.07
B	0.80 (0.96)	0.30 (0.70)	0.32 (0.98)	0.66 (1.00)	0.26 (0.69)	0.28 (1.01)	0.62	0.21	0.26
CCC– C	1.19 (1.10)	0.57 (0.82)	0.35 (0.96)	1.27 (1.15)	0.49 (0.77)	0.28 (0.95)	1.23	0.51	0.30

Taulukko 11: Numeerisen ehdollistamisen mallin riskikertoimet

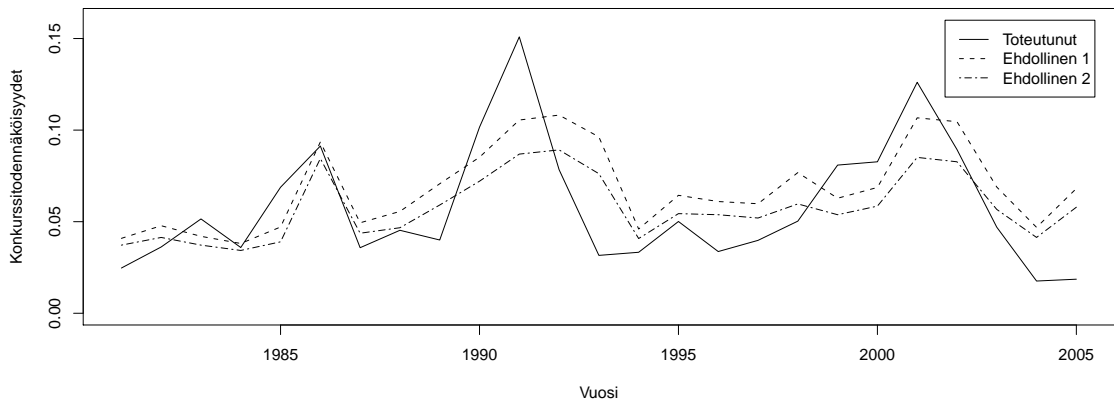
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC–C
Estimoitu	0.9143	0.9442	0.9824	0.9750	0.9737	0.9480	0.8449
Toteutunut	0.8969	0.9437	0.9355	0.8965	0.8551	0.8291	0.5673

Taulukko 12: Numeerisen mallin ja toteutuneiden matriisien diagonaalit

Investointiluokan yritysten konkurssitodennäköisyys on keskiarvoisesti ja vuosittain hyvin pieni, jolloin keskiarvomatriisin muokkaaminen vastaamaan konkurssitodennäköisyyksiä on hyvin karkeaa: kyseessä oleva menetelmä muokkaa investointiluokan muita siirtymätodennäköisyyksiä suhteettoman paljon.

Tämä käy ilmi taulukosta 12, jossa verrataan kertoimella  $\delta_i^a(2005)$  muokatun matriisin ja vuoden 2005 toteutuneen matriisin diagonaaleja.

Siirtymätodennäköisyysmatriisien diagonaaleista tiedetään, kuinka stabiileja luottoluokitukset ovat. Edellisestä voidaan päätellä, että numeerisen ehdollistamisen malli ei kuvaa tätä ominaisuutta hyvin. Malli onkin alun perin tarkoitettu luottoportfolioiden hinnoitteluun ilmaisemaan konkurssitodennäköisyydet riskineutraalin mitan alaisuudessa. Jos haluttaisiin huomioida luottoluokitusten volatilitettä paremmin, matriisien muokkaaminen diagonaaleiltaan vastaaviksi olisi järkevämpää. Taulukossa 11 sulkeissa esitetään tällä tavoin määritetyt riskikertoimet  $\gamma_i(t)$  ja  $\delta_i^a(t)$ . Kertoimia  $\delta_i^b(t)$  ei voinut määrittää niiden määritelmän (20) vuoksi, koska konkurssi-intensiteetin ollessa nolla tai lähellä nollaa diagonaalin muokkaaminen ei onnistu.



Kuvio 9: Numeerisen mallin tuottamat ja toteutuneet konkurssitodennäköisyydet B-luokituksen yrityksille

Vaikka matriiseja muokataan nyt diagonaaleiltaan vastaaviksi, menetelmän tuottamat konkurssitodennäköisyydet näyttäisivät olevan toteutuneiden todennäköisyyksien suuntaisia. Kuten kuviosta 9 nähdään, mallin tulokset mukailevat hyvin todellisuutta molempien kertoimien  $\delta_i^a(t)$  (Ehdollinen 1) ja  $\gamma_i(t)$  (Ehdollinen 2) osalta. Itse asiassa taulukon 13 perusteella korrelaatiokertoimet mallin tuottamien ja toteutuneiden konkurssitodennäköisyysaikaasarjojen kesken ovat alimpien luokitusten osalta korkeampia kuin fak-

torimallin vastaavat kertoimet taulukossa 9. On kuitenkin huomioitava, että numeerisen ehdollistamisen mallissa jokaista siirtymätodennäköisyysmatriisin riviä muokattiin omalla kertoimella toisin kuin faktorimallissa. Numeerisessa mallissa luokitusten BBB ja BB osalta korrelaatio oli melko pientä, mutta niiden osalta luokitusvolatiliteetti kasvoi konkurssitodennäköisyyksien lisääntymättä.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C
Ehdollinen 1	-	-0.04	0.52	0.27	0.22	0.70	0.71
Ehdollinen 2	-	-0.02	0.61	0.21	0.11	0.71	0.71
Konkurssifrekvenssi	0	1	8	46	129	626	391

Taulukko 13: Numeerisen mallin konkurssitodennäköisyyksien korrelaatiot

## 5.4 Mallien tuottamien matriisien vertailua

Eri mallien tuottamien siirtymätodennäköisyysmatriisien estimaattorien yhteensopivuutta empiirisen aineiston kanssa tulisi kyetä arvioimaan jollain kriteerillä. Sopivan kriteerin löytäminen ei kuitenkaan ole yksinkertaista. Kirjallisuudessa on esitetty hyvin toisistaan poikkeavia tapoja arvioida mallien tuottamia estimaattoreita. Jason Wei (2003, 724–725) on arvioinut matriiseja yksinkertaisella  $L^1$ -normilla  $|P^o - P^f|$ , missä  $P^o$  on havaittu matriisi ja  $P^f$  sovitettu matriisi. Toisena kriteerinä hän käyttää regressiossakin käytettyä  $R^2$ -lukua, joka on määritelty siirtymätodennäköisyysmatriiseille seuraavasti:

$$R^2 = \frac{\left(\sum_{i,j,t}(p_{ij,t}^o - \bar{p}_{ij})(p_{ij,t}^f - \bar{p}_{ij})\right)^2}{\sum_{i,j,t}(p_{ij,t}^o - \bar{p}_{ij})^2 \sum_{i,j,t}(p_{ij,t}^f - \bar{p}_{ij})^2},$$

missä  $\bar{p}_{ij}$ :t ovat keskiarvomatriisin alkioita. Aiemmissä tutkimuksissa on käytetty myös  $L^2$ -normia  $\sqrt{\sum_{i,j}(p_{ij}^o - p_{ij}^f)^2}$ .

Edellinen tapa ei kuitenkaan sovellu arvioimaan matriisien yhteensopivuutta, jos luottoriski halutaan määrittää tarkasti portfolioissa. Jotta sopivuuskriteeri paremmin huomioisi portfolion luottoriskin, siirtymätodennäköisyyksien estimointivirheitä voitaisiin painottaa etäisyydellä siirtymätodennäköisyysmatriisin diagonaalista painoilla  $d(i, j) = (i - j)(p_{ij}^o - p_{ij}^f)$ . Näistä

painoista saadaan kaksi luottoriskin huomioivaa suuretta

$$D_1(P^o, P^f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} d(i, j) + \sum_{i=1}^n n \cdot d(i, n) \quad \text{ja}$$

$$D_2(P^o, P^f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} d(i, j) + \sum_{i=1}^n n^2 \cdot d(i, n).$$

Nämä suureet antavat erityisen painon konkurssitodennäköisyyksien estimointivirheille (Trück & Rachev 2005, 17).

Tässä tutkielmassa mallien tuottamia ehdollisia matriiseja arvioidaan  $L^1$ - ja  $L^2$ -normeilla ja suureilla  $D_1(P^o, P^f)$  ja  $D_2(P^o, P^f)$ . Tehty vertailu arvioi kuitenkin vain mallien paremmuutta ehdollistaa siirtymätodennäköisyysmatriiseja ajan suhteen, jos saatavilla on paras tieto luottosuhdanneindeksin ja riskikertoimien liikkeistä tulevaisuudessa. Vertailu ei kerro mallien kykyä ennustaa tulevaisuutta. Taulukkoon 14 on merkitty optimaalisuus-kriteerien arvot yhden faktorin mallille (Faktori) ja numeerisen ehdollistamisen malleille, joissa diagonaalit (Num I: kerroin  $\gamma$ , Num II: kerroin  $\delta^a$ ) ja konkurssitodennäköisyydet (Num III: kerroin  $\gamma$ , Num IV: kerroin  $\delta^a$ , Num V: kerroin  $\delta^b$ ) on muokattu toisiaan vastaaviksi. Lisäksi vertailun helpottamiseksi viimeisellä rivillä on yksinkertaisen mallin arvot (Naiivi), jotka on saatu asettamalla jokaisen vuoden matriisiksi keskiarvomatriisi. Taulukon luvut ovat yhteenlaskettuja arvoja vuosien 1981–2005 yksittäisistä arvoista.

	$L^1$ -normi	$L^2$ -normi	$D_1(P^o, P^f)$	$D_2(P^o, P^f)$
Faktori	20.087	1.367	23.859	168.803
Num I	10.335	0.773	4.169	25.589
Num II	10.578	0.780	14.447	108.835
Num III	33.274	2.937	2.065	3.420
Num IV	27.949	1.741	-0.979	-1.085
Num V	16.270	1.016	0.635	5.193
Naiivi	21.196	1.352	8.715	67.347

Taulukko 14: Optimaalisuus-kriteerit vertailtaessa ehdollistamisen malleja

Yksiselitteistä tulkintaa taulukossa 14 esitetuille optimaalisuus-kriteereille ei ole mahdollista tehdä. Kuitenkin tulokset ovat päinvastaisia kuin kap-

paleessa 4.3 on todettu. Kyseisen kappaleen vertailun tulokset Stefan Trück (2008) onkin saanut malleille, joissa siirtymätodennäköisyydet riippuvat kappaleessa 4.3 mainituista makroekonomisista tekijöistä. Yhden faktorin malli pärjää luonnollisesti muita ehdollistamisen malleja heikommin, koska luokituskohtaisia kertoimia ei käytetty. Toiseksi optimoitavana mallissa on ollut lauseke (22), toisin kuin numeerisen ehdollistamisen mallissa, jossa matriiseja jo valmiiksi optimoidaan itseisarvomielessä. Näin ollen ei ole mielekäs-tä vertailla näitä kahta mallia suoraan edellä esitetyillä suureilla. Yllättävänä tuloksena voidaan pitää, että yhden faktorin malli päihittää naiivin mallin vain  $L^1$ -normin suhteen. Kuitenkaan yksikään optimaalisuuskriteeri ei painota todennäköisyyspoikkeamia yritysten lukumäärän suhteen toisin kuin faktorimallin lauseke (22). Normipohjaisten optimaalisuuskriteerien vaihtaminen faktorimallin edut huomioiviin kriteereihin voisi muuttaa mallien paremmuusjärjestyksen. Riskin huomioivien suureiden suhteen faktorimalli yliarvioi luottoriskin, koska ehdollisten matriisien todennäköisyysmassa on painottunut todellisuutta enemmän diagonaalien yläpuolelle.

Numeerisen mallin menetelmillä Num I ja Num II saadaan normien suhteen parhaiten sopivia ehdollisia matriiseja, mikä on luonnollista menetelmän ominaisuuksien vuoksi. Luottoriskin arvioinnissa kummatkin menetelmät ovat varovaisia, ja etenkin Num II:n kohdalla arvioitu konkurssitodennäköisyys on usein todellisuutta isompi, kuten kuviosta 9 nähdään. Molemmat näistä menetelmistä huomioivat suhdannevaihtelut paremmin kuin naiivi malli, mutta riskin huomioivat kriteerit ovat jatkuva-aikaisen menetelmän Num II kohdalla suurempia kuin naiivin mallin. Yksinkertaisempi diskreetti menetelmä Num I näyttäisi selviytyvän hyvin matriisien ehdollistamisessa suhdanteille.

Numeerisen ehdollistamisen mallin menetelmissä III, IV ja V asetetaan estimoidut konkurssitodennäköisyydet vastaamaan toteutuneita, jolloin on selvää, että luottoriskin suhteen herkäät optimaalisuuskriteerit saavat pieniä arvoja. Normien mukaan menetelmät III ja IV ovat huonompia kuin naiivi malli, mutta Num V:n normit ovat parempia, koska siinä muokataan keskiarvomatriisin generaattorimatriisia vain diagonaalien ja viimeisen sarakkeen osalta.

Yhteenvetona voidaan todeta, että numeerisen ehdollistamisen mallin menetelmä I vaikuttaa hyvien optimaalisuuskriteerien arvojen osalta käyttökelpoiselta menetelmältä. Kuitenkin mallissa täytyisi kyetä ennustamaan jokaisen luottoluokituksen riskikertoimen kehitys erikseen. Matriisista  $\sigma$  voidaan päätellä, että yksinkertaista suhdetta eri luottoluokitusten riskikerroinsarjoille ei näyttäisi olevan. Matriisiin

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & -0.1 & 0.4 & 0.0 & -0.2 & -0.2 \\ 0.0 & 1.0 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ -0.1 & 0.4 & 1.0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & -0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 1.0 & 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 1.0 & 0.0 & -0.3 \\ -0.2 & 0.2 & 0.2 & -0.1 & 0.0 & 1.0 & 0.5 \\ -0.2 & 0.3 & -0.2 & -0.2 & -0.3 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}$$

alkiot  $\sigma_{ij}$  ovat riskikertoimien  $\gamma_i$  ja  $\gamma_j$  aikasarjojen korrelaatiokertoimia. Yhden faktorin malli on optimaalisuuskriteereistä huolimatta käyttökelpoinen vaihtoehto yksinkertaisuuden vuoksi. Mallin suorituskykyä voitaisiin parantaa määrittämällä spekulatiivi- ja investointiluokalle oma faktori lisäämättä paljoakaan mallin monimutkaisuutta. Edellä esitetystä matriisista  $\sigma$  voidaan todeta, että jokaisen luottoluokituksen siirtymätodennäköisyydet muuttuvat vailla yhteistä tekijää, joten yksi faktori ei yksin riitä selittämään siirtymätodennäköisyysmatriisien suhdannevaihteluita.

## 6 Lainojen hinnoittelu ja luottoluokitukset

Kuten kappaleessa 4.2.2 on todettu, numeerisen ehdollistamisen mallia käytetään muokkaamaan siirtymätodennäköisyysmatriiseja vastaamaan riskineutraaleja todennäköisyyksiä. Hinnoittelussa historiallisten todennäköisyyksien käyttäminen ei johda arbitraasivapaisiin hintoihin, jolloin täydellisten markkinoiden oletuksen vallitessa on syytä käyttää riskineutraaleja todennäköisyyksiä tähän tarkoitukseen.

### 6.1 Riskineutraalit konkurssitodennäköisyydet

Riskineutraalit konkurssitodennäköisyydet ovat yleensä suurempia kuin historialliset konkurssitodennäköisyydet. Sijoittajat vaativat ylituottoa kantamastaan luottoriskistä. Jos näin ei olisi, riskineutraalit ja historialliset todennäköisyydet olisivat samoja. Tärkein syy eroon on konkurssitapahtumien korrelaatio, koska ne eivät tapahdu toisistaan riippumattomasti. Muita syitä on joukkolainamarkkinoiden huono likviditeetti, sijoittajien subjektiiviset konkurssitodennäköisyydet ja huono mahdollisuus hajauttaa luottoportfolion luottoriskiä (Hull 2005, 488–489).

Riskineutraaleja konkurssitodennäköisyyksiä on mahdollista määrittää joukkovelkakirjojen, kohde-etuusvaihtosopimusten (asset swap) ja luottoriskinvaihtosopimusten (credit default swap) hinnoista (Hull 2005, 512–513). Kun todennäköisyyksiä määritetään joukkovelkakirjojen hinnoista, lainojen palautusaste  $\omega$  (recovery rate) on tärkeä parametri. Velkakirjojen senioriteetti vaikuttaa lainojen palautusasteeseen (Jarrow ym. 1997, 502). Olkoon  $P(t, T)$  hinta hetkellä  $t$  riskittömälle nollakuponkilainalle, jonka maturiteetti on  $T$ . Vastaavan yrityksen  $i$  luottoriskin sisältävän nollakuponkilainan hinta on  $v_i(t, T)$  ja yrityksen  $i$  selviytymistodennäköisyys hetkeen  $t$  asti on  $S_i(0, t)$ . Näistä saadaan yksinkertainen joukkovelkakirjan hinnoittelukaava

$$v_i(0, t) = \omega P(0, t) + (1 - \omega)P(0, t)S_i(0, t), \quad (23)$$

jolloin

$$S_i(0, t) = \frac{v_i(0, t) - \omega P(0, t)}{(1 - \omega)P(0, t)}.$$

Koska kyseessä on selviytymistodennäköisyys, yhden vuoden riskineutraali konkurssitodennäköisyys luokituksen  $i$  yritykselle on (Lando 2000, 196–197, 203)

$$q_{iK} = 1 - S_i(0, 1) = \sum_{j \neq K} q_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, K - 1.$$

Kun halutaan muokata siirtymätodennäköisyysmatriisia vastaamaan riskineutraaleja todennäköisyyksiä, matriisin viimeisen sarakkeen muodostaa edellä esitetyllä tavalla määritetyt tai muulla tavoin määritetyt riskineutraalit konkurssitodennäköisyydet  $q_{iK}$ . Riskineutraali siirtymätodennäköisyysmatriisi  $Q_{t,t+1}$  ekvivalentin martingaalimitan  $\mathbb{Q}$  suhteen saadaan historiallisiin todennäköisyyksiin perustuvasta matriisista  $\bar{P}$  samoin kuin suhdanteet huomioivassa mallissa riskikertoimen  $\gamma_i(t)$  tai  $\delta_i(t)$  avulla. Diskreetissä tapauksessa matriisimuotoinen esitys matriisin  $Q_{t,t+1}$  alkioille  $q_{ij}(t, t + 1)$  on

$$Q_{t,t+1} - I = \Gamma(t)(\bar{P} - I)$$

ja jatkuva-aikaisessa tapauksessa

$$Q_{t,t+1} = \Delta(t)\bar{P},$$

missä  $\Gamma(t)$  ja  $\Delta(t)$  ovat riskikertoimista muodostettuja diagonaalimatriiseja. Riskineutraaleille matriiseille pätee sama kuin historiallisten matriisien tapauksessa, että  $n$ :n periodin siirtymätodennäköisyydet saadaan matriisitulonona

$$Q_{0,n} = Q_{0,1}Q_{1,2} \cdots Q_{n-1,n}.$$

Tämän matriisin alkiosta  $q_{ij}(0, n)$  saadaan yrityksen  $i$  selviämistodennäköisyydet

$$S_i(0, n) = 1 - q_{iK}(0, n).$$

Riskineutraalien matriisienkin tulee täyttää kaikki siirtymätodennäköisyysmatriisien ominaisuuksien ehdot (Jarrow ym. 1997, 487–489, 495–496).

## 6.2 Riskineutraalin matriisin estimointi

Hull, Predescu ja White (2005, 53–54) käyttävät riskineutraaleille konkurssitodennäköisyyksille approksimaatiokaavaa

$$100 \cdot q_{iK} = \frac{r_i - r_f}{1 - \omega}, \quad (24)$$

missä  $r_i - r_f$  on yrityksen  $i$  riskillisen joukkovelkakirjan korkoero (credit spread) riskittömään tuottoon. Yleisenä oletuksena palautusasteelle pidetään 40 %:a, kun lainojen senioriteettia ei oteta huomioon. Seuraavassa taulukossa 15 riskineutraalit todennäköisyydet on määritetty kaavalla (24) ja korkoeroina on käytetty Arandan, Gamban ja Poiegan (2007) tutkimuksessaan saamia arvoja eroille vuosilta 1997–2005.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC–C
$r_i - r_f$ (%)	0.55	0.65	0.92	1.49	2.34	6.75	15.00
$q_{iD}$	0.0092	0.0108	0.0153	0.0248	0.0390	0.1125	0.2500

Taulukko 15: Riskineutraalit konkurssitodennäköisyydet luokituksittain

Kun tarkastellaan kohtien (18), (19) ja (20) ominaisuuksia muokata siirtymätodennäköisyysmatriisia, havaitaan, että Standard & Poor’sin vuosien 1981–2005 keskiarvomatriisia  $\bar{\mathbf{P}}_{SP}$  ei voida käyttää mallissa. Matriisin viimeisen sarakkeen alkioita  $p_{iD}$  ei ole mahdollista muokata vastaamaan alkioita  $q_{iD}$  edellä mainittujen kohtien menetelmillä. Tässä tutkielmassa käytetäänkin lähtökohtana matriisia  $\bar{\mathbf{P}}_{SP}^{10}$ . Sille määritetään kohdan (14) mukainen generaattorimatriisi  $M$ , josta saadaan  $\tilde{P} = \exp(0.1M) \approx$

$$\begin{pmatrix} 0.9167 & 0.0487 & 0.0242 & 0.0072 & 0.0016 & 0.0008 & 0.0001 & 0.0006 \\ 0.0039 & 0.9177 & 0.0513 & 0.0187 & 0.0040 & 0.0021 & 0.0003 & 0.0019 \\ 0.0007 & 0.0123 & 0.9335 & 0.0357 & 0.0090 & 0.0042 & 0.0006 & 0.0039 \\ 0.0003 & 0.0037 & 0.0262 & 0.9235 & 0.0214 & 0.0112 & 0.0016 & 0.0121 \\ 0.0003 & 0.0016 & 0.0100 & 0.0328 & 0.8773 & 0.0314 & 0.0042 & 0.0424 \\ 0.0001 & 0.0008 & 0.0041 & 0.0120 & 0.0248 & 0.8659 & 0.0053 & 0.0869 \\ 0.0001 & 0.0007 & 0.0043 & 0.0101 & 0.0185 & 0.0304 & 0.6631 & 0.2728 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

Tämä on hyvin karkea arvio yhden vuoden keskiarvomatriisille, kun kymmenen vuoden matriisista on ensin saatu siirtymäintensiteetit oletuksella, että kymmenen vuoden aikana yhden yrityksen luokitus muuttuu korkeintaan kerran. Tämän jälkeen näistä intensiteeteistä on jälleen muodostettu yhden vuoden siirtymätodennäköisyysmatriisi. Edellä mainittu oletus on epärealis-

tinen. Kuitenkin hinnoiteltaessa joukkovelkakirjoja luottoriski otetaan huomioon pidemmällä aikavälillä kuin yhden vuoden ajalta ja näin voidaan ajatella, että sillä ei ole niin suurta merkitystä, päätyykö yritys konkurssiin suoraan vai monien eri luottoluokitusten kautta.

Kohdan (18) mukaista riskineutraalin matriisin muodostamista ei voida suorittaa, koska silloin saadaan negatiivisia siirtymätodennäköisyyksiä. Merkitään jälleen diagonaalimatriisin  $\Delta$  alkioita  $\delta_i^a$ , kun ne on saatu kohdan (19) mukaisesti. Kertoimet  $\delta_i^b$  merkitsevät menetelmän (20) kertoimia. Vektori  $\delta^a = (10.22, 4.39, 3.36, 1.89, 0.85, 1.30, 0.89)$  ja tätä vastaava riskineutraali matriisi

$$Q_{0,1} \approx \begin{pmatrix} 0.4136 & 0.2837 & 0.1901 & 0.0737 & 0.0186 & 0.0091 & 0.0011 & 0.0092 \\ 0.0098 & 0.6926 & 0.1776 & 0.0785 & 0.0193 & 0.0098 & 0.0013 & 0.0108 \\ 0.0017 & 0.0325 & 0.8005 & 0.1049 & 0.0293 & 0.0136 & 0.0018 & 0.0153 \\ 0.0005 & 0.0066 & 0.0437 & 0.8641 & 0.0381 & 0.0195 & 0.0026 & 0.0249 \\ 0.0002 & 0.0015 & 0.0086 & 0.0269 & 0.8959 & 0.0250 & 0.0031 & 0.0389 \\ 0.0001 & 0.0010 & 0.0053 & 0.0150 & 0.0303 & 0.8300 & 0.0057 & 0.1124 \\ 0.0001 & 0.0007 & 0.0039 & 0.0092 & 0.0166 & 0.0254 & 0.6939 & 0.2502 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti  $\delta^b = (14.26, 5.26, 3.69, 1.94, 0.85, 1.30, 0.89)$  ja tällöin

$$Q_{0,1} \approx \begin{pmatrix} 0.9092 & 0.0464 & 0.0245 & 0.0078 & 0.0018 & 0.0009 & 0.0001 & 0.0092 \\ 0.0037 & 0.9104 & 0.0494 & 0.0188 & 0.0042 & 0.0022 & 0.0003 & 0.0108 \\ 0.0007 & 0.0118 & 0.9243 & 0.0342 & 0.0089 & 0.0042 & 0.0006 & 0.0153 \\ 0.0003 & 0.0037 & 0.0253 & 0.9136 & 0.0203 & 0.0106 & 0.0014 & 0.0248 \\ 0.0003 & 0.0017 & 0.0102 & 0.0318 & 0.8841 & 0.0292 & 0.0036 & 0.0391 \\ 0.0001 & 0.0008 & 0.0042 & 0.0118 & 0.0232 & 0.8425 & 0.0044 & 0.1128 \\ 0.0001 & 0.0008 & 0.0045 & 0.0104 & 0.0182 & 0.0286 & 0.6879 & 0.2494 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

Valitaan jälkimmäinen matriiseista myöhempää tarkastelua varten, koska se näyttäisi olevan paremmin luottoluokitusten siirtymiä kuvaava siirtymätodennäköisyysmatriisi. Oletetaan riskineutraalit todennäköisyydetkin stationaarisiksi yksinkertaisuuden vuoksi, jolloin  $Q_{0,n} = Q_{0,1}^n$ .

### 6.3 Hinnoittelu riskineutraalin mitan alaisuudessa

Kohdassa (23) on esitetty yksinkertainen hinnoittelukaava riskilliselle nollakuponkilainalle riskittömän nollakuponkilainan avulla. Nollakuponkilainojen kassavirta

$$X = \mathbf{1}_T(t) = \begin{cases} 1 & t = T \\ 0 & t < T, \end{cases}$$

missä  $T$  on lainan maturiteetti. Oletetaan, että riskitön korko  $r_f = 2.5\%$ , jolloin  $P(0, 1) = 0.9756098$ . Luokituksen A yrityksen vuoden lainan hinta

$$v_A(0, 1) = 0.4P(0, 1) + 0.6P(0, 1)\mathbb{E}^Q[S_A(0, 1)] = 0.9666537.$$

Samoin määritetään lainojen hinnat eli kassavirran nykyarvo muitten luottoluokitusten yrityksille. Usean vuoden riskineutraalit konkurssitodennäköisyydet saadaan matriisin  $Q_{0,1}^n$  viimeisestä sarakkeesta. Taulukkoon 16 on merkitty yhden, kahden, kolmen, viiden ja kymmenen vuoden konkurssitodennäköisyydet.

$n$	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC-C
1	0.0092	0.0108	0.0153	0.0248	0.0390	0.1125	0.2500
2	0.0188	0.0224	0.0314	0.0502	0.0788	0.2102	0.4252
3	0.0289	0.0347	0.0482	0.0760	0.1184	0.2943	0.5500
5	0.0503	0.0611	0.0832	0.1277	0.1952	0.4300	0.7040
10	0.1105	0.1350	0.1756	0.2519	0.3630	0.6412	0.8493

Taulukko 16: Riskineutraalit konkurssitodennäköisyydet maturiteeteittain

$v_i(0, n)$	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC-C
$v_i(0, 1)$	0.9702	0.9693	0.9667	0.9611	0.9527	0.9096	0.8296
$v_i(0, 2)$	0.9411	0.9390	0.9339	0.9231	0.9068	0.8318	0.7090
$v_i(0, 3)$	0.9125	0.9093	0.9017	0.8863	0.8626	0.7646	0.6222
$v_i(0, 5)$	0.8572	0.8515	0.8397	0.8161	0.7803	0.6558	0.5105
$v_i(0, 10)$	0.7294	0.7179	0.6989	0.6631	0.6111	0.4807	0.3831

Taulukko 17: Lainojen hinnat luokituksittain ja maturiteeteittain

Maturiteetti	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC-C
1	3.07	3.17	3.45	4.05	4.96	9.94	20.54
2	3.08	3.20	3.48	4.08	5.01	9.65	18.76
3	3.10	3.22	3.51	4.11	5.05	9.36	17.14
5	3.13	3.27	3.56	4.15	5.09	8.80	14.39
10	3.21	3.37	3.65	4.19	5.05	7.60	10.07

Taulukko 18: Lainojen tuotot luokituksittain ja maturiteeteittain

Taulukossa 17 on nollakuponkilainojen hintoja eri luokituksen yrityksille ja niiden lainojen eri maturiteeteille. Näiden nollakuponkilainojen vuotuiset tuotot (%) on määritetty taulukossa 18. On todettava, että kaavojen (24) ja (23) välillä on eroa, koska taulukon 18 perusteella korkoerot eroavat alkuperäisistä korkoeroista. Kuitenkin edellisestä voidaan tehdä mielenkiintoinen havainto, että luokituksen B ja sitä alempien luottoluokitusten yrityksen lainan vuotuinen tuotto laskee maturiteetin kasvaessa toisin kuin investointiluokan yrityksellä.

## 7 Yhteenveto ja johtopäätökset

Tässä tutkielmassa luottoluokitusmuutoksia käsitellään stokastisena prosessina  $\{X(t), t \in T\}$ , missä satunnaismuuttujan  $X$  mahdollisten tilojen joukko  $S = \{1, 2, \dots, K\}$  koostuu luottoluokituksista ja parametrijoukko  $T$  on aika. Jos tulevaisuus ei riipu siitä, miten nykyiseen tilaan on tultu, stokastinen prosessi on Markov-prosessi ja voidaan merkitä

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_n) = x_n] = \\ \mathbb{P}[X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n], \quad \forall n, t, x. \end{aligned}$$

Koska tila-avaruus  $S$  on diskreetti, kyseessä on Markov-ketju, jonka siirtymätodennäköisyydet  $\mathbb{P}[X_n = j | X_{n-1} = i] = p_{ij}$  kootaan matriisiksi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{K1} & p_{K2} & \cdots & p_{KK} \end{pmatrix},$$

kun siirtymätodennäköisyydet eivät riipu ajanhetkestä  $n$  eli ne ovat stationaarisia. Epästationaarisen Markov-ketjun siirtymätodennäköisyysmatriisiin  $\mathbf{P}(n)$  alkiot  $p_{ij}(n)$  taas riippuvat ajanhetkestä. Jatkuva-aikaisen Markov-ketjun määrittelevät siirtymäintensiteetit

$$\begin{aligned} \mu_{ij}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[X_{t+\Delta t} = j | X_t = i]}{\Delta t}, \quad i \neq j \\ \mu_{ii}(t) &= - \sum_{j \neq i} \mu_{ij}. \end{aligned}$$

Näistä siirtymäintensiteeteistä  $\mu_{ij}$  muodostetaan generaattorimatriisi  $\mathbf{M}$ , josta siirtymätodennäköisyysmatriisi saadaan matriisieksponenttina  $\mathbf{P}^t = e^{\mathbf{M}t}$ .

Yksinkertaisimmillaan siirtymätodennäköisyydet voidaan estimoida yritysten luokitusmuutosten perusteella  $\hat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i}$ , missä  $N$  on yritysten lukumäärä. Luottoluokituksia tekevät siihen erikoistuneet luottoluokituslaitokset, joista suurimpia ovat Standard & Poor's, Moody's ja Fitch. Luottoluokituksia tehdään myös eri valtioiden liikkeelle laskemille joukkovelkakirjoille.

Luottoluokitukset ovat ulkopuolinen arvio luokitettavan kohteen kyvystä selviytyä taloudellisista sitoumuksistaan. Luokitusten tarkoitus on informoida sijoittajia ja auttaa näin heitä päätöksenteossaan. Rahoituslaitosten sääntelyssä hyödynnetään luokitusten tarjoamaa informaatiota, mistä esimerkkinä mainittakoon Basel-sopimus. Kriitistä huolimatta luottoluokituslaitosten luokituksia käytetään laajasti rahoituslaitosten riskienhallinnassa sisäisten menetelmien rinnalla.

Vaikka luottoluokituslaitokset pyrkivät noudattamaan suhdanteista riippumatonta menettelyä, luokitusten siirtymätodennäköisyydet eivät ole stationaarisia, vaan niiden on todettu muuttuvan suhdanteiden mukaan. Tämä voidaan todeta tilastollisella testilläkin empiiriselle luokitusaineistolle, kuten tässä tutkielmassa on tehty. Yleensä laskusuhdanteessa etenkin spekulatiiviluokan yritysten luokitusten huonontumisen todennäköisyys kasvaa. Tämä ilmiö on haitallinen kansantalouden kannalta, koska se johtaa vakavaraisuussäännösten kautta myötäsykliseen luotonantoon.

Stationaarinen Markov-ketju ei pysty huomioimaan suhdannevaihteluita, joten tässä tutkielmassa keskitytään siirtymätodennäköisyyksien ehdollistamiseen suhdanteille epästationaarisessa Markov-ketjussa. Ehdollistamiseen käytettyjä yhden faktorin ja numeerisen ehdollistamisen mallia vertaillaan empiiristä Standard & Poor'sin vuosien 1981–2005 luokitusaineistoa hyödyntäen. Yhden faktorin mallissa ehdolliset siirtymätodennäköisyydet saadaan kaavasta

$$p_{ij}(t)|Z_t = \Phi\left(\frac{x_{i,j+1} - \rho Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) - \Phi\left(\frac{x_{ij} - \rho Z_t}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right),$$

missä standardoidusta normaalijakaumasta saatujen siirtymätodennäköisyyksien rajojen  $x_{ij}$  oletetaan noudattavan faktorisesitystä  $X_t = \rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_t$ .  $Z_t$  on mallissa luottosuhdanneindeksi, ja sen korrelaatiota epäsystemaattisen eli yrityskohtaisen luottoriskin kanssa merkitään  $\rho$ :lla. Empiiriselle vuosittaiselle aineistolle korrelaatiokerroin on  $\rho = 0.20$ , kun oletuksena mallissa on, että  $Z_t \sim N(0, 1)$ .

Numeerisen ehdollistamisen mallissa ehdollinen matriisi  $\hat{P}(t) = \Gamma(t)\mathbf{P}$  tai jatkuva-aikaisessa tapauksessa generaattorimatriisi  $\hat{M}(t) = \Delta(t)\mathbf{M}$ . Näissä matriisit  $\Gamma(t)$  ja  $\Delta(t)$  ovat riskikertoimista muodostettuja diagonaalimatrii-

seja  $\Gamma(t) = \text{diag}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, 1)$  ja  $\Delta(t) = \text{diag}(\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, 1)$ . Generaattorimatriisiin alkioita voidaan myös muokata vain diagonaalien ja viimeisen sarakkeen osalta seuraavasti:

$$\hat{\mu}_{ii}(t) = \delta_i(t)\mu_{ii}, \quad \hat{\mu}_{iK}(t) = \delta_i(t)\mu_{iK}, \quad i = 1, 2, \dots, K - 1.$$

Tavoitteena muokatuilla matriiseilla on vastata konkurssitodennäköisyyksiltään toteutuneita siirtymätodennäköisyysmatriiseja. Tässä tutkielmassa tutkitaan myös vaihtoehtoa, jossa matriisit asetetaan vastaamaan diagonaaleilta toisiaan. Tällöin ehdollisten matriisien estimointi ei johda niin äärimmäisiin riskikertoimien arvoihin.

Ehdollistamisen mallien tuloksia arvioitiin neljällä eri optimaalisuuskriteerillä:  $L^1$ - ja  $L^2$ -normilla ja kahdella luottoriskin huomioivalla kriteerillä. Kaikki kriteerit perustuvat toteutuneiden ja estimoitujen matriisien erojen vertailuun itseisarvomielessä. Näiden optimaalisuuskriteerien tulosten perusteella ei voida sanoa, että yhden faktorin mallin estimaatit olisivat stationaarisia siirtymätodennäköisyyksiä parempia. Itse asiassa joidenkin kriteerien perusteella stationaariset todennäköisyydet ovat parempia. Numeerisen ehdollistamisen malli pärjäsikin monilta osin paremmin. Kuitenkin on huomiotava, että tässä mallissa riskikertoimet ovat luokituskohtaisia toisin kuin faktorimallissa.

Vaikka faktorimalli pärjäsikin heikosti itseisarvoihin perustuvien optimaalisuuskriteerien perusteella, kriteerit eivät ole edullisia mallin tavalle ehdollistaa matriiseja. Kun mallin tuottamia luokituskohtaisia vuosittaisia konkurssitodennäköisyyksiä verrattiin vastaaviin toteutuneisiin, ne riippuvat toisistaan korrelaatiokertoimien perusteella. Näin ollen malli kykenee stationaarisia todennäköisyyksiä paremmin huomioimaan luottoriskin, koska konkurssitodennäköisyydet ovat luottoriskin hallinnassa tärkeimmät siirtymätodennäköisyydet. Numeerisen ehdollistamisen mallin estimoitujen ja toteutuneiden konkurssitodennäköisyyksien aikasarjat olivat toisistaan riippuvia. Kuitenkaan korrelaatiokertoimien perusteella ei voida sanoa yksiselitteisesti, kumpi vertailluista malleista oli parempi.

Tämän tutkielman puitteissa voidaan todeta vain, kuinka mallit ehdollistavat siirtymätodennäköisyyksiä talouden suhdannevaihteluille, kun käy-

tettävissä on paras tieto tulevaisuudesta. Aikaisemmissa tutkimuksissa on havaittu, että makroekonomiset tekijät selittävät siirtymätodennäköisyyksien muutoksia. Faktorimallin tapauksessa tässä tutkielmassa ei havaittu kuitenkaan yhteyttä Yhdysvaltojen bruttokansantuotteen kasvun kanssa, mutta muiden makroekonomisten tekijöiden vaikutusta luottosuhdanneindeksiin ei tutkittu. Numeerisen ehdollistamisen mallin luokituskohtaisissa riskiker-toimissa ei ollut havaittavissa mitään selvää keskinäistä riippuvuutta, joten yksinkertaisen suhteen löytäminen makroekonomisen tekijän kanssa on haastavaa. Kun edellä mainittuja malleja halutaan käyttää ennustamiseen, yksinkertaisen ja teoreettisesti perustellun relaation löytäminen on tärkeää. Aikaisempi tutkimus on todennut, että yhden faktorin malli pärjää numeerista mallia paremmin ennustemallina. Tätä ei tässä tutkielmassa kyetty vahvistamaan, koska tutkielma ei keskittynyt ennustemallin löytämiseen, mutta asiaa olisi syytä tutkia enemmän tulevissa tutkimuksissa. Samoin kahden tai useamman faktorin mallin selviämistä ennustemallina olisi hyödyllistä tutkia.

## Lähteet

- Altman, E. I. – Rijken, H. A. (2004) How rating agencies achieve rating stability. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 28, 2679–2714.
- Amato, J. D. – Furfine, C. H. (2004) Are credit ratings procyclical? *Journal of Banking & Finance*, Vol. 28, 2641–2677.
- Aranda, M. M. – Gamba, A. – Poiega, D. (2007) Investment and credit risk: a structural approach. Working paper. <<http://ssrn.com/abstract=945968>>, haettu 2.3.2011.
- Baklanova, Viktoria (2009) Regulatory use of credit ratings: how it impacts the behavior of market constituents. *International Finance Review*, Vol. 10, 65–104.
- Bangia, A. – Diebold, F. X. – Kronimus, A. – Schagen, C. – Schuermann, T. (2002) Ratings migration and the business cycle, with application to credit portfolio stress testing. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 26, 445–474.
- Belkin, B. – Forest, L. R. – Suchower, S. J. (1998) A one-parameter representation of credit risk and transition matrices. <[http://www.mathfinance.wagner.com/PAPERS/P2/CM2\\_Final.html](http://www.mathfinance.wagner.com/PAPERS/P2/CM2_Final.html)>, haettu 8.4.2010.
- CreditMetrics – Technical Document* (1997) J.P. Morgan, New York.
- Darbellay, A. – Weber, R. H. (2008) The regulatory use of credit ratings in bank capital requirement regulations. *Journal of Banking Regulation*, Vol. 10, No. 1, 1–16.
- Estrella, Arturo (2000) *Credit ratings and complementary sources of credit quality information*. Basel Committee on Banking supervision working paper. Bank for international settlements, Basel.
- Freedman, David (1971) *Markov chains*. Holden-Day, San Francisco.

- Fuertes, A. – Kalotychou, E. (2007) On sovereign credit migration: A study of alternative estimators and rating dynamics. *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 51, 3448—3469.
- Hamilton, James D. (1989) A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, Vol. 57, No. 2, 357–384.
- Hull, John C. (2005) *Options, futures, and other derivatives*. 6. uud. p. Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Hull, J. C. – Predescu, M. – White, A. (2005) Bond prices, default probabilities and risk premiums. *Journal of Credit Risk*, Vol. 1, No. 2, 53–60.
- Huschens, S. – Höse, S. – Wania, R. (2009) Rating migrations. Teoksessa: *Applied quantitative finance*, toim. Härdle, Wolfgang Karl – Hautsch, Nikolaus – Overbeck, Ludger, 105–123. 2. uud. p. Springer, Berlin.
- Isaacson, D. L. – Madsen, R. W. (1976) *Markov chains: Theory and applications*. John Wiley & Sons, New York.
- Jarrow, R. A. – Lando, D. – Turnbull, S. M. (1997) A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *The Review of Financial Studies*, Vol. 10, No. 2, 481–523.
- Koppinen, Markku (2007) *Lineaarialgebra: Osa 2*. Luentomoniste. Turun yliopisto, Turku.
- Lando, David (2000) Some elements of rating-based credit risk modeling. Teoksessa: *Advanced fixed-income valuation tools*, toim. Jegadeesh, Narasimhan – Tuckman, Bruce, 193–215. John Wiley & Sons, New York.
- Lando, David (2004) *Credit risk modeling: theory and applications*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Lando, D – Skødeberg, T. M. (2002) Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 26, 423—444.

- May, Anthony D. (2010) The impact of bond rating changes on corporate bond prices: New evidence from the over-the-counter market. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 34, 2822—2836.
- Metsänkylä, Tauno (2004) *Lineaarialgebra*. Luentomoniste. Turun yliopisto, Turku.
- Murphy, Austin (2003) An empirical analysis of the structure of credit risk premiums in the Eurobond market. *Journal of International Money and Finance*, Vol. 22, 865—885.
- National Economic Accounts: Gross domestic product. U.S. Department of Commerce: Bureau of Economic Analysis. <<http://www.bea.gov/national/nipaweb/Index.asp>>, haettu 14.12.2010.
- Nicholls, Christopher C. (2005) *Public and private uses of credit ratings*. Capital Markets Institute Policy Series. Capital Markets Institute, Toronto.
- Nickell, P. – Perraudin, W. – Varotto, S. (2001) *Stability of ratings transitions*. Working paper, No. 133. Bank of England, London.
- Norberg, Ragnar (1995) Differential equations for moments of present values in life insurance. *Insurance, Mathematics & Economics*, Vol. 17, No. 2, 171–180.
- Pesonen, M. – Soininen, P. – Tuominen, T. (1999) *Henkivakuutusmatematiikka*. Suomen vakuutusalan koulutus ja kustannus, Helsinki.
- Puoskari, Kati (2007) *Luottoluokituksen informaatioarvo Suomen osakemarkkinoilla*. Pro gradu -tutkielma. Lappeenrannan teknillinen yliopisto, Lappeenranta.
- Ruskeepää, Heikki (1995) *Todennäköisyyslaskenta II*. Luentomoniste. Turun yliopisto, Turku.
- Standard & Poor's (2006) *Annual 2005 global corporate default study and rating transitions*. Global Fixed Income Research. Standard & Poor's, New York.

- Standard & Poor's (2008) *Corporate ratings criteria*. Standard & Poor's, New York.
- Strier, Franklin (2008) Rating the raters: Conflicts of interest in the credit rating firms. *Business and Society Review*, Vol. 113, No. 4, 533–553.
- Tanaka, Misa (2003) The macroeconomic implications of the new Basel accord. *CESifo Economic Studies*, Vol. 49, No. 2, 217–232.
- Tjøstheim, D. – Tyssedal, J. S. (1988) An autoregressive model with suddenly changing parameters and an application to stock market prices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, Vol. 37, No. 3, 353–369.
- Trück, Stefan (2008) Forecasting credit migration matrices with business cycle effects – a model comparison. *The European Journal of Finance*, Vol. 14, No. 5, 359—379.
- Trück, S. – Rachev, T. (2005) *Changes in migration matrices and credit VaR – a new class of difference indices*. Working paper.
- Trück, S. – Özturkmen, E. (2003) *Adjustment and application of transition matrices in credit risk models*. Working paper.
- Vimpari, Pekka (2003) *Pankin luottoriskin simulointi*. Pro gradu -tutkielma. Turun kauppakorkeakoulu, Turku.
- Wei, Jason Z. (2003) A multi-factor, credit migration model for sovereign and corporate debts. *Journal of International Money and Finance*, Vol. 22, 709—735.
- Wilson, Thomas C. (1998) Portfolio credit risk. *Economic Policy Review*, Vol. 4, No. 3, 71–82.
- Yin, G. G. – Zhang, Q. (2005) *Discrete-time Markov chains: two-time-scale methods and applications*. Springer, New York.