

Tarkistamiseen ohjaaminen alakoulun matematiikan oppimateriaaleissa

Vuosien 1994 ja 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisten
matematiikan oppimateriaalien sisällönanalyysi

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma

Laatija:
Maaria Lamminmäki

17.4.2025

Turku

Pro gradu -tutkielma

Oppiaine: Kasvatustiede (opettajankoulutuslaitos, Turku)

Tekijä: Maaria Lamminmäki

Otsikko: Tarkistamiseen ohjaaminen alakoulun matematiikan oppimateriaaleissa – Vuosien 1994 ja 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisten matematiikan oppimateriaalien sisällönanalyysi

Ohjaaja: professori Minna Hannula-Sormunen

Sivumäärä: 55 sivua

Päivämäärä: 17.4.2025

Tämän pro gradu -tutkielman tarkoituksena oli kartoittaa, miten vuosien 1994 ja 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisissa alakoulun matematiikan oppimateriaaleissa ohjataan tarkistamiseen. Lisäksi tarkasteltiin, esiintyykö eri opetussuunnitelmien aikaisten oppimateriaalien välillä eroja tarkistamiseen ohjaamisessa. Tutkimus toteutettiin osana laajempaa matematiikan oppimateriaalitutkimusprojektia (Matematiikan Oppikirja-analyysi MOPPI), jonka tarkoituksena on kartoittaa oppimateriaalien merkitystä suomalaisten nuorten matematiikan oppimistulosten heikkenemisen taustalla.

Tutkimus toteutettiin oppikirja-analyysinä, jonka aineistona käytettiin vuosien 1994 ja 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisia käytetyimpiä matematiikan oppimateriaaleja. Aineistona olivat vuosiluokkien 1, 3 ja 6 Laskutaito-, Mieti ja laske- sekä Tuhattaituri-kirjasarjojen oppilaan kirjat ja opettajaoppaat. Tarkasteltavana olivat sekä oppilaille suunnatut oppikirjojen sisällöt että opettajaoppaiden opettajille tarjoama pedagoginen tuki. Oppilaille suunnattuja tarkistamiseen ohjaavia oppikirjasisältöjä tarkasteltiin kolmen pääluokan kautta: ei-matemaattinen tarkistaminen, matemaattinen tarkistaminen ja kontekstuaalinen tarkistaminen. Opettajaoppaiden tarjoama pedagoginen tuki jaettiin puolestaan kahteen pääluokkaan: opetusvinkit ja lisätieto, sekä tehtäväkohtainen tarkistamisen maininta. Tutkimuksessa hyödynnettiin teoria- ja aineistolähtöisiä sisällönanalyysijä sekä sisällön erittelyä.

Saatujen tulosten mukaan tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä on vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa oppilaan kirjoissa 1,2 prosenttia ja vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa oppilaan kirjoissa 6,1 prosenttia kaikista oppikirjojen sisällöistä; ero on Khiin neliö -testin mukaan tilastollisesti merkitsevä ($p < .001$). Molempien opetussuunnitelmien aikaisissa matematiikan oppilaan kirjoissa eri tarkistamisen tyypeihin ohjaavien sisältöjen osuudet kaikista tarkistamisen sisällöistä ovat samankaltaisia: ei-matemaattisen tarkistamisen osuus on 88–89 prosenttia, matemaattisen tarkistamisen osuus 9–10 prosenttia ja kontekstuaalisen tarkistamisen osuus 1–3 prosenttia. Ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä on molempien opetussuunnitelmien aikaisissa aineiston oppimateriaaleissa selvästi eniten.

Molempien opetussuunnitelmien aikaisissa opettajaoppaissa tarkistamiseen liittyvistä sisällöistä 75 prosenttia on tehtäväkohtaisia tarkistamisen mainintoja ja 25 prosenttia opetusvinkkejä ja lisätietoa. Tarkistamiseen liittyvien opetusvinkkien ja lisätiedon osalta vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa opettajaoppaissa painottuvat pääosin tuloksista ja ratkaisuprosesseista keskusteleminen sekä erilaisten ratkaisuprosessien esittelemine ja perustelemine. Vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa opettajaoppaissa puolestaan tuodaan eniten esiin käänteisoperaatioiden hyödyntäminen tarkistamisessa. Siihen nähden, kuinka keskeisinä tarkistamisen taidot opetussuunnitelmissa esitetään, tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen määrä aineiston oppimateriaaleissa on hyvin vähäistä.

Tarkasteltaessa saatuja tuloksia suhteessa suomalaisten matematiikan oppimistuloksiin ja niiden laskuun 2000–2010-luvuilla vaikuttaisi siltä, että matematiikan oppimateriaalien tarkistamiseen ohjaamisessa ei ole tapahtunut muutosta, joka olisi yhteydessä oppimistulosten laskuun. Tämä havainto on linjassa aikaisempien tutkimustulosten kanssa, joiden mukaan tarkistamisen vähäinen esiintyminen matematiikan oppimateriaaleissa ei ole ainakaan suoraan yhteydessä menestymiseen matemaattista osaamista mittaavissa tutkimuksissa.

Avainsanat: tarkistaminen, tarkistamiseen ohjaaminen, matematiikka, oppimateriaali

Sisällysluettelo

1	Johdanto	7
2	Tarkistaminen osana metakognitiivista säätelyä matemaattisessa ongelmanratkaisussa	9
2.1	Tarkistaminen osana matemaattista ongelmanratkaisua	9
2.2	Tarkistamisen ulottuvuudet	12
2.3	Tarkistaminen matematiikan opetussuunnitelmissa	14
2.4	Metakognitio matematiikan kontekstissa	16
3	Oppimateriaalit matematiikan opetuksessa	19
3.1	Oppimateriaalien asema matematiikan opetuksessa	20
3.2	Tarkistamiseen ohjaaminen matematiikan oppimateriaaleissa aikaisemman tutkimuksen mukaan	22
3.3	Oppimateriaalien metakognitiivinen haastavuus	23
4	Tutkimusongelmat	26
5	Tutkimuksen toteutus	27
5.1	Aineisto	27
5.2	Oppilaan kirjojen analyysi	31
5.3	Opettajaoppaiden analyysi	36
5.4	Tutkimuksen eettisyys	39
6	Tulokset	40
6.1	Tarkistamiseen ohjaaminen matematiikan oppikirjojen oppilaille suunnatuissa sisällöissä	40
6.1.1	Ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaaminen oppilaiden kirjojen sisällöissä	42
6.1.2	Matemaattiseen tarkistamiseen ohjaaminen oppilaiden kirjojen sisällöissä	44
6.1.3	Kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaaminen oppilaiden kirjojen sisällöissä	45
6.2	Tarkistamiseen liittyvä pedagoginen tuki matematiikan opettajaoppaissa	46
6.2.1	Tarkistamiseen liittyvät opetusvinkit ja lisätieto matematiikan opettajaoppaissa	47
6.2.2	Tehtäväkohtaiset tarkistamisen maininnat matematiikan opettajaoppaissa	52
7	Pohdinta	54
7.1	Oppilaiden kirjoja koskevat päätulokset	54

7.2	Opettajaoppaita koskevat päätulokset	56
7.3	Tutkimuksen validiteetti ja reliabiliteetti	57
7.4	Johtopäätökset	59
7.5	Jatkotutkimusaiheet	60
	Lähteet	62

Taulukot

Taulukko 1 Vuoden 1994 Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden aikaiset aineiston oppimateriaalit.	28
Taulukko 2 Vuoden 2004 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden aikaiset aineiston oppimateriaalit.	29
Taulukko 3 Teoria- ja tehtäväsisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa aineiston oppikirjoissa.	32
Taulukko 4 Teoria- ja tehtäväsisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa aineiston oppikirjoissa.	32
Taulukko 5 Oppilaan kirjojen sisällönanalyysissä käytetyt koodit.	33
Taulukko 6 Opettajaoppaiden teorialähtöisen sisällönanalyysin luokat.	37
Taulukko 7 Esimerkkejä aineiston redusoinnista ja klusteroinnista.	38
Taulukko 8 Kaikkien tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.	41
Taulukko 9 Kaikkien tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.	41
Taulukko 10 Tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.	42
Taulukko 11 Tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.	42
Taulukko 12 Ei-matemaattisen tarkistamisen alaluokkien frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.	43
Taulukko 13 Ei-matemaattisen tarkistamisen alaluokkien frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.	44
Taulukko 14 Tarkistamista koskeva pedagoginen tuki vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan opettajaoppaissa.	47
Taulukko 15 Tarkistamista koskeva pedagoginen tuki vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan opettajaoppaissa.	47
Taulukko 16 Opettajaoppaiden tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen alaluokat.	48
Taulukko 17 Tarkistamiseen liittyvät opetusvinkit ja lisätiedot vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan opettajaoppaissa.	50
Taulukko 18 Tarkistamiseen liittyvät opetusvinkit ja lisätiedot vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan opettajaoppaissa.	51

Kuvat

Kuva 1 Havainnollistavat esimerkit alakategoriasta 1.1a Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on eri määrä kuin tehtäviä.	34
Kuva 2 Havainnollistava esimerkki alakategoriasta 1.1b Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on sama määrä kuin tehtäviä.	34
Kuva 3 Havainnollistava esimerkki alakategoriasta 1.1c Ei-matemaattisen tarkistamisen sisällöt, joissa ei ole erillistä tulospalkkia.	35

Kuviot

Kuvio 1 Suomennettu ja muokattu versio Fernandezin, Hadawayn ja Wilsonin (1994) laatimasta ongelmanratkaisuprosessin syklisyyttä ja dynaamisuutta ilmentävästä kuviosta, joka on luotu Pólyan ongelmanratkaisumallin pohjalta.	12
Kuvio 2 Tarkistamisen ulottuvuudet.	14
Kuvio 3 Analyysin eteneminen oppilaan kirjojen osalta.	36
Kuvio 4 Analyysin eteneminen opettajaoppaiden osalta.	38

1 Johdanto

Matematiikan merkitys yhteiskunnassamme kasvaa ja kehittyä teknologian kehityksen myötä jatkuvasti (Kuzle, Rott & Cadez, 2016, s. 7; Gravemeijer, Stephan, Julie, Lin & Ohtani, 2017), ja vahvoja matematiikan osaajia tarvitaan nyt ja tulevaisuudessa useilla eri aloilla (Hiltunen & Nissinen, 2018). Teknologian kehitys korostaa erityisesti matemaattisten ongelmanratkaisutaitojen tärkeyttä (Hannula, 2014): tietokoneet pystyvät suorittamaan laskutoimituksia ihmisen puolesta, mutta ihmisiltä vaaditaan kykyä ymmärtää ja esittää erilaisia ilmiöitä ja ongelmia matemaattisessa muodossa sekä arvioida käytettyjen ratkaisumallien ja saatujen tulosten järkevyyttä ja oikeellisuutta. Ihmisten ei siis pitäisi kilpailla tietokoneita vastaan, vaan kehittää matemaattisia taitoja, jotka täydentävät yhteistyötä tietokoneiden kanssa (Gravemeijer ym., 2017). Luova ongelmanratkaisukyky on osatekijä, jossa tietokoneet eivät vielä pysty päihittämään inhimillistä osaamista (Hannula, 2014).

Metakognitiivista säätelyä edellyttävä ongelmanratkaisu onkin muodostunut merkittäväksi osaksi matematiikan opetusta (Kuzle, Rott & Cadez, 2016, s. 7). Metakognitiolla tarkoitetaan yksilön tietoisuutta omista kognitiivisista prosesseistaan sekä niiden aktiivista monitorointia, arviointia ja säätelyä (Flavell, 1976, s. 232). Metakognitiivinen säätely voi käytännössä ilmetä esimerkiksi erilaisten tarkistamisstrategioiden hyödyntämisenä matemaattista ongelmaa ratkaistaessa. Tässä tutkimuksessa keskityttiin matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin vaiheista juuri tarkistamiseen. Tutkimuksen tarkoituksena oli kartoittaa, miten alakoulun matematiikan oppimateriaalit tukevat oppilaiden metakognitiivista säätelyä tehtävien tarkistamisen näkökulmasta. Lisäksi tarkasteltiin, ilmeneekö eri opetussuunnitelmien aikaisissa oppimateriaaleissa eroja tarkistamiseen ohjaamisen osalta. Tutkimus toteutettiin sisällönanalyysinä, jonka aineistona käytettiin vuosien 1994 ja 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisia alakoulun matematiikan opettajaoppaita eri kustantajilta. Tutkimus toteutettiin osana laajempaa matematiikan oppimateriaalitutkimusprojektia (Matematiikan Oppikirja-analyysi MOPPI), jonka tarkoituksena on kartoittaa oppimateriaalien merkitystä suomalaisten nuorten matematiikan oppimistulosten heikkenemisen taustalla. MOPPI-tutkimusprojektissa ovat mukana Turun, Jyväskylän ja Helsingin yliopistojen Opettajankoulutuslaitosten tutkimusryhmät.

Kansainvälisten PISA-tutkimusten mukaan suomalaisten nuorten matematiikan osaamistason keskiarvo on selvästi OECD-maiden keskiarvoa korkeampi, ja Suomi sijoittuikin kansainvälisessä vertailussa OECD-maiden kärkituntumaan (Leino ym., 2019). PISA-tulosten tarkastelu pidemmällä aikavälillä kuitenkin osoittaa Suomen matematiikan osaamistulosten laskeneen vuoden 2006 tutkimuksesta lähtien (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2023). Vertailtaessa 2000-luvun alun ja vuoden 2015 PISA-tuloksia voidaan huomata erityisesti erinomaisten matematiikan osaajien osuuden pienentyneen (Hiltunen & Nissinen, 2018). Samaan aikaan heikkojen matematiikan osaajien osuus on kasvanut entisestään (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2024). Sama trendi on havaittavissa, kun tarkastellaan viimeisimpiä, vuoden 2022 PISA-tutkimuksen tuloksia. Suomalaisten matemaattista osaamista koskevia huolestuttavia tuloksia on havaittu PISA-tutkimusten lisäksi myös Kansallisen koulutuksen arviointikeskuksen (KARVI) laatimissa selvityksissä (Metsämuuronen & Nousiainen, 2021).

Tutkimusraporttien ohella huoli suomalaisten lasten ja nuorten heikkenevistä matemaattisista taidoista sekä opetusmateriaalien vaatimustason laskemisesta on noussut esiin aika ajoin myös eri media-alustoilla (mm. Sipola, 2022; Loula, 2023; Ekström, 2024). Keskustelua käydään heikentyneiden oppimistulosten syistä ja seurauksista sekä erilaisista ratkaisuehdotuksista. Yksittäistä selkeää syytä matematiikan taitojen heikentymiselle ei ole voitu osoittaa. Jotta voidaan ymmärtää tätä ilmiötä ja löytää tehokkaita ratkaisukeinoja, on tärkeää tutkia erilaisia opetukseen ja oppimiseen vaikuttavia tekijöitä. Yksi näistä tekijöistä on opetuksessa käytettävät oppimateriaalit.

Oppimateriaaleilla on todettu olevan merkittävä rooli matematiikan opetuksessa (Perkkilä, 2002; Fan, Zhu & Miao, 2013; Howson, 2013; Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015). Tutkimusten mukaan matematiikan opetuksen suunnittelu ja toteutus nojaavat vahvasti oppimateriaaleihin (Haggarty & Pepin, 2002; Perkkilä, Joutsenlahti & Sarenius, 2018), ja toisinaan niiden asema on jopa opetussuunnitelmia vahvempi (Fan, Zhu & Miao, 2013; Tárraga-Mínguez, Tarín-Ibáñez & Lacruz-Pérez, 2021). Näin ollen oppimateriaaleja analysoimalla voidaan syventää käsitystä matematiikan opetuksesta ja oppimisesta (Viholainen, Eronen & Kettunen, 2022). Tässä tutkimuksessa oppimateriaaleja lähestyttiin vertikaalisesti (Charalambous, Delaney, Hsu ja Mesa, 2010) analysoiden tarkistamiseen ohjaamista vuosiluokkien 1, 3 ja 6 matematiikan kirjasarjojen opettajaoppaissa. Tarkastelun kohteena olivat sekä opettajaoppaisiin sisällytetyt oppilaan kirjan sisällöt sekä erilaiset opettajille suunnatut materiaalit ja opetusvinkit.

2 Tarkistaminen osana metakognitiivista säätelyä matemaattisessa ongelmanratkaisussa

Seuraavissa alaluvuissa käsitellään ongelmanratkaisuprosessia Pólyan (1985) mallin sekä muiden teorioiden pohjalta. Erityisenä tarkastelun kohteena on ongelmanratkaisuun kuuluva tarkistaminen. Luvun lopussa käsitellään metakognitiota sekä tarkistamistaitoa osana metakognitiivista säätelyä. Vaikka metakognition käsitettä sellaisenaan ei vielä tunnettu Pólyan kirjoittaessa ongelmanratkaisutaidoista vuonna 1945, hänen pedagogiset näkemyksensä ongelmanratkaisun ja tarkistamisen taitojen opettamisesta ovat pitkälti linjassa modernin oppimiskäsityksen kanssa ja myötäilevät käsitystä oppilaiden metakognition ja ajattelun taitojen tukemisesta (Hannula, 2014; Rott, Kuzle & Cadez, 2016, s. 16).

2.1 Tarkistaminen osana matemaattista ongelmanratkaisua

Matematiikan opetuksen tutkijat ovat yhtä mieltä siitä, että ongelmanratkaisutaidot ovat perustavanlaatuisessa asemassa niin matematiikan opettamisessa kuin oppimisessakin (Rott, Kuzle & Cadez, 2016, s. 13). Ongelmanratkaisun uranuurtajana pidetään unkarilaista matemaatikkoa George Pólyaa, joka teki merkittäviä keksintöjä muun muassa lukuteorian sekä todennäköisyyslaskennan saralla, mutta tuli laajimmin tunnetuksi ongelmanratkaisua käsittelevästä kirjastaan *Ratkaisemisen taito (How to solve it)* (Hannula, 2014). Teos julkaistiin ensimmäisen kerran vuonna 1945. Seuraavissa kappaleissa esitellään Pólyan ongelmaratkaisumalli sekä siihen pohjautuvia uudempia ongelmanratkaisun teorioita ja keskitytään tämän tutkimuksen kannalta merkittävimpään ongelmaratkaisuprosessin vaiheeseen eli tarkistamiseen.

Pólya (1985, s. 5–6) jakaa ongelmanratkaisun neljään vaiheeseen: ongelman ymmärtäminen (*understanding the problem*), suunnitelman laatiminen (*devising a plan*), suunnitelman toteuttaminen (*carrying out the plan*) ja ratkaisun tarkasteleminen (*looking back*). Pólyan (1985, s. 6) mukaan ongelmanratkaisuprosessin on lähdettävä liikkeelle siitä, että oppilas ymmärtää ratkaistavaksi annetun ongelman ja hänellä on halu ratkaista se: oppilaan on hahmotettava tavoite ja kyettävä osoittamaan ongelmasta annetut tiedot, esitetyt ehdot sekä tuntematon. Apuna tässä voidaan käyttää esimerkiksi kuvien piirtämistä sekä muita kyseessä olevaan ongelmaan sopivia merkintätapoja (Pólya, 1985, s. 5–6). Ongelman ymmärtämistä seuraa suunnitelman laatiminen. Suunnitelmalla Pólya (1985, s. 5–11) tarkoittaa ratkaisun idean keksimistä ja ainakin suurpiirteisistä käsitystä tuntemattoman selvittämiseen tarvittavista

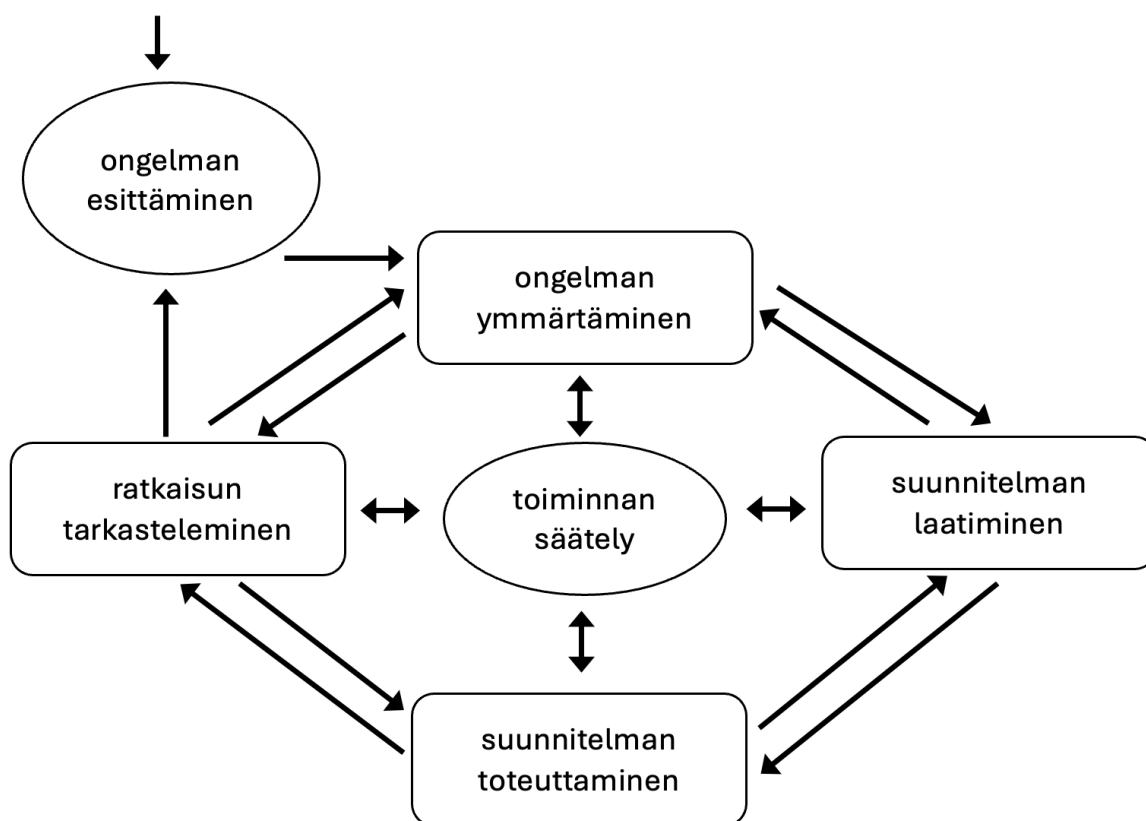
laskutoimituksista ja selvityksistä. Suunnitelman tekeminen edellyttää siis kykyä nähdä yhteyksiä matemaattisten ilmiöiden välillä. Pólyan mukaan hyvät ratkaisuideat pohjautuvatkin aikaisemmin kerrytettyihin tietoihin, taitoihin ja kokemuksiin. Hän kannustaa oppilaita pohtimaan, ovatko he joskus ratkaisseet samankaltaisen ongelman ja voisiko aikaisempaa kokemusta hyödyntää käsillä olevassa tehtävässä. Kolmas vaihe Pólyan ongelmaratkaisumallissa on itse ratkaisu: laadittu suunnitelma toimii ratkaisun kehikkona, johon ratkaisuvaiheen yksityiskohtien tulee sopia uskottavasti (Pólya, 1985, s. 12–13).

Neljäs ja tämän tutkimuksen kannalta oleellisin vaihe Pólyan ongelmaratkaisumallissa on ratkaisun tarkasteleminen. Pólyan (1985, s. 14–15) mukaan kirjattuaan ratkaisun moni oppilas on tyytyväinen suoritukseensa ja ryhtyy mahdollisesti tekemään jotakin muuta, kuten pohtimaan seuraavaa matematiikan tehtävää. Ilman ratkaisun tarkastelemista ja arviointia menetetään kuitenkin oivallinen mahdollisuus syventää osaamista ja kehittää ongelmaratkaisutaitoja. Ongelmia ratkaistaessa voi aina sattua myös huolimattomuusvirheitä, eritoten, jos ratkaisun perustelut ovat monivaiheiset (Pólya, 1985, s. 14–15). Pólya antaa myös esimerkin ilmiöstä, joka on varmasti monelle opettajalle varsin tuttu: ”Jokainen opettaja tietää, miten uskomattomia asioita opiskelijat saattavat esittää. Jotkut opiskelijat eivät hätkähdä ollenkaan saadessaan selville, että veneen pituus on 4916 metriä, ja kapteenin, jonka vieläpä tiedetään olevan isoisä, ikä on kahdeksan vuotta ja kaksi kuukautta” (Pólya ym. 2014, s. 235). Ei ole itsestään selvää, että oppilas palaisi ratkaisuun päästyään tarkastelemaan ongelman lähtötilannetta ja pohtimaan, vaikuttaako ratkaisu kontekstiin nähden järkevältä ja mielekkäältä. Tarkistaminen on siis tärkeä taito, joka mahdollistaa ratkaisun aikana sattuneiden virheiden huomaamisen ja korjaamisen.

Pólya (1985, s. 6, 15–16, 205) kehottaa ratkaisujen tarkistamiseen ja niistä keskustelemiseen: Oppilaita voidaan kannustaa pohtimaan, vaikuttaako tulos ilmeiseltä, miten tuloksen ja perustelut voisi tarkistaa ja minkälaisia mahdollisia haasteita ja ratkaisevia käännekohtia ratkaisuprosessissa on ilmennyt. Ongelmaratkaisun eri vaiheisiin palatessaan oppilaalla on mahdollisuus tehdä oivalluksia prosessia edistäneistä ja vaikeuttaneista tekijöistä. Opettaja voi haastaa oppilaita keksimään vaihtoehtoisia ratkaisumenetelmiä, ja lisäksi oppilaat voivat pohtia, voisiko käytettyä ratkaisumenetelmää tai saatua tulosta hyödyntää jonkin toisen ongelman ratkaisemisessa. Pólya (1985) kehottaa opettajia siis keskustelemaan oppilaiden kanssa sekä tukemaan oppilaiden ongelmaratkaisutaitojen kehittymistä kysymyksillä, jotka etenevät yleisluontoisista yksityiskohtaisempiin ja ovat sovitettavissa yleisesti

ongelmanratkaisuun eivätkä pelkästään käsillä olevaan ongelmaan. Pyrkimyksenä on, että opettajan kehotukset ja kysymykset jättävät mahdollisimman paljon tilaa oppilaan omalle ajattelulle ja oivalluksille (Pólya, 1985, s. 20–21).

Pólyan teos *Ratkaisemisen taito* on ollut historiallisesti merkittävä, ja useimmat myöhemmät ongelmanratkaisua käsittelevät julkaisut pohjautuvatkin pitkälti siinä esitettyyn ongelmanratkaisumalliin (Hannula, 2014). Fernandez, Hadaway ja Wilson (1994) ovat muovanneet Pólyan ongelmanratkaisuteoriasta oman mallinsa, jossa korostetaan prosessin dynaamisuutta ja sykliisyyttä (Kuvio 1). Pólyan neljään eri vaiheeseen jaoteltu ongelmanratkaisumalli saattaa antaa vaikutelman, että kyseessä olisi aina lineaarinen prosessi, jossa eri vaiheet seuraavat järjestyksessä toinen toistaan. Näin ei kuitenkaan ole, vaan ongelmanratkaisu voi olla hyvinkin monivaiheista ja polveilevaa – Fernandezin, Hadawayn ja Wilsonin (1994) mallissa tarkistamisen (*looking back*) onkin esitetty olevan dynaamisesti yhteydessä muihin ongelmanratkaisun vaiheisiin. Olisi tärkeää, että matemaattinen ongelmanratkaisuprosessi näyttäytyisi sekä opettajille että oppilaille joustavana prosessina, jossa on mahdollisuus liikkua eteen- ja taaksepäin parhaan ratkaisupolun löytämiseksi (García, Boom, Kroesbergen, Núñez & Rodríguez, 2019). Näin ollen myös matematiikan opetuksessa käytettävien oppimateriaalien tulisi tukea käsitystä ongelmanratkaisuprosessien ja tarkistamisen joustavuudesta ja dynaamisuudesta.



Kuvio 1 Suomennettu ja muokattu versio Fernandezin, Hadawayn ja Wilsonin (1994) laatimasta ongelmanratkaisuprosessin syklisyyttä ja dynaamisuutta ilmentävästä kuviosta, joka on luotu Pólyan ongelmanratkaisumallin pohjalta.

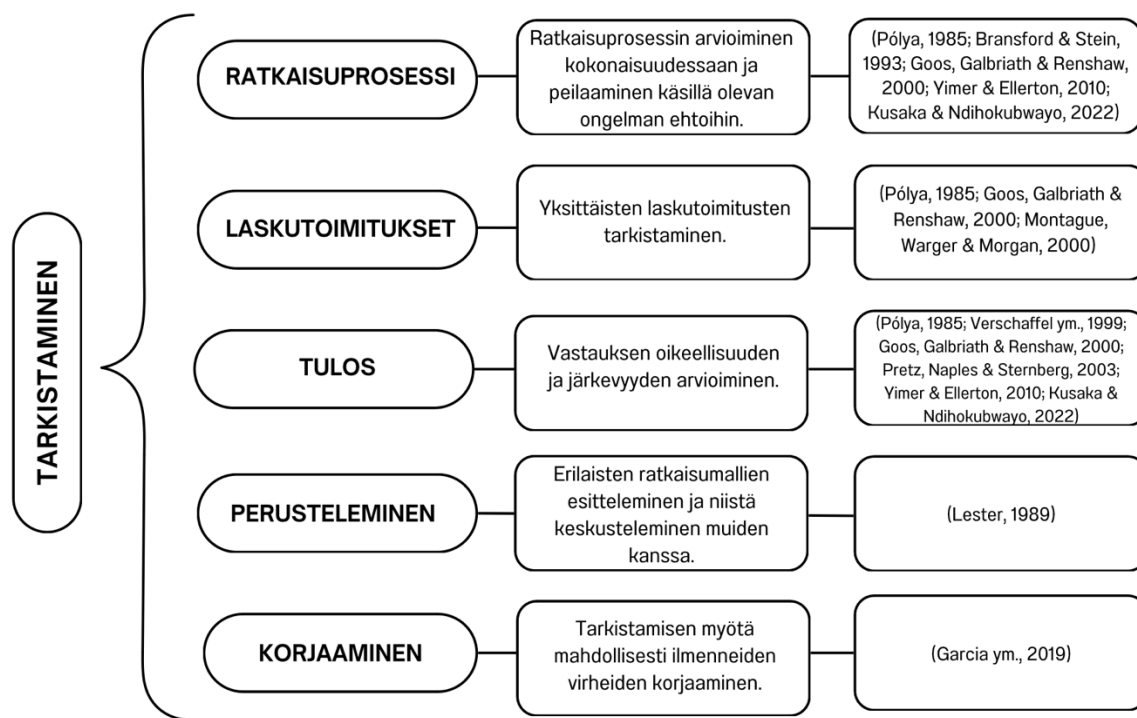
2.2 Tarkistamisen ulottuvuudet

Pólyan mallissa ratkaisun tarkastelemista kuvaava ongelmanratkaisun vaihe (*looking back*) on osa myös monia myöhemmin esiteltyjä ongelmanratkaisun teorioita. Kyseistä vaihetta on kuvattu eri tutkimuksissa muun muassa seuraavilla englanninkielisillä käsitteillä: *evaluating the solution* (Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts & Ratinckx, 1999; Pretz, Naples & Sternberg, 2003), *checking* (Vicente, Sánchez & Verschaffel, 2020), *checking the computation* (Montague, Warger & Morgan, 2000), *examining the answer* (Kusaka & Ndiokubwayo, 2022), *look back and learn* (Bransford & Stein, 1993, s. 20, 36–37), *revision* (García ym., 2019) sekä *verification* (Goos, Galbriath & Renshaw, 2000). Kyseisestä ongelmanratkaisun vaiheesta tullaan tässä tutkimuksessa jatkossa käyttämään käsitettä tarkistaminen.

Tarkistamisella tarkoitetaan matemaattisen ongelmanratkaisun vaihetta, jossa arvioidaan vastausta (Pólya, 1985, s. 14; Verschaffel ym., 1999; Pretz, Naples & Sternberg, 2003; Kusaka & Ndiokubwayo, 2022) sekä tarkastelleen sen oikeellisuutta ja järkevyyttä (Pólya, 1985, s. 15; Goos, Galbriath & Renshaw, 2000; Pretz, Naples & Sternberg, 2003; Yimer & Ellerton, 2010). Tarkistamisella tarkoitetaan myös ratkaisun peilaamista käsillä olevan ongelman ehtoihin (Bransford & Stein, 1993, s. 20, 36–37; Goos, Galbriath & Renshaw, 2000; Yimer & Ellerton, 2010) ja esimerkiksi tehtävänannon lukemista uudestaan varmistaen, että saatu ratkaisu todella vastaa esitettyyn ongelmaan (Yimer & Ellerton, 2010).

Tarkistaminen kattaa sekä suoritettujen laskutoimitusten tarkistaminen (Pólya, 1985, s. 14; Goos, Galbriath & Renshaw, 2000; Montague, Warger & Morgan, 2000) että ratkaisuprosessin arvioimisen kokonaisuudessaan (Pólya, 1985, s. 14; Bransford & Stein, 1993, s. 20, 36–37; Goos, Galbriath & Renshaw, 2000; Yimer & Ellerton, 2010; Kusaka & Ndiokubwayo, 2022). Myös tarkistamisen myötä mahdollisesti ilmenneiden virheiden korjaaminen on osa tarkistusvaihetta (García ym., 2019).

Tarkistamisen ulottuvuuksia täydentävät edellä mainittujen lisäksi myös Lesterin (1989) esittämät ohjeet, joita opettajan tulisi noudattaa tukeakseen oppilaiden metakognition sekä ongelmanratkaisutaitojen kehittymistä: Opettajan tulisi esitellä erilaisia ratkaisumalleja ja keskustella niistä oppilaiden kanssa ja näin rohkaista myös oppilaita jakamaan omia tapojaan ratkaista ongelmia. Opetuksessa tulisi luoda yhteyksiä käsillä olevan ongelman ja aikaisemmin ratkaistujen ongelmien välille. Tarkoituksena on, että oppilaat ymmärtävät ongelmanratkaisustrategioiden olevan yleistettäviä eikä pelkästään tehtäväspesifejä taktiikoita (Lester, 1989, s. 26). Myös Pólyan (1985, s. 15–16) mukaan opettajien tulisi kannustaa oppilaitaan pohtimaan, voiko saatua tulosta tai ratkaisumenetelmää hyödyntää jonkin toisen ongelman ratkaisemiseen.



Kuvio 2 Tarkistamisen ulottuvuudet.

Tarkistaminen on siis oman työskentelyn ja ajattelun reflektointia, johdonmukaisuuden ja ratkaisuprosessien arvioimista, soveltavaa ja joustavaa ajattelua, parhaimmillaan myös vuorovaikutusta muiden kanssa. Kyseessä on moniulotteinen käsite, joka kattaa monenlaisia, metakognitiivista säätelyä edellyttäviä toimintoja; tarkistamisen ulottuvuuksia on kuvattu teorian pohjalta kuviossa 2. Tutkimustulokset ovat kuitenkin osoittaneet tarkistamisen olevan toiminto, jonka monet oppilaat ohittavat: tarkistamisstrategiat ovat hyvin niukkoja ja käytössä vain satunnaisesti, mikä puolestaan johtaa huonoon suoriutumiseen tehtävissä (García ym., 2019, s. 91). Tämä havainto herättää kysymyksiä tarkistamisen opettamiselle annetusta painoarvosta matematiikan opetussuunnitelmissa ja oppimateriaaleissa.

2.3 Tarkistaminen matematiikan opetussuunnitelmissa

Vuoden 1994 Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa eritellään ala- ja yläasteen keskeiset matematiikan opetuksen tavoitteet ja sisällöt ja lisäksi luonnehditaan yleisellä tasolla koko peruskoulun matematiikan opetusta koskevia tavoitteita, sisältöjä, opiskelun luonnetta sekä opetuksen lähtökohtia (Opetushallitus, 2000, s. 74–77). Opetussuunnitelman mukaan tulosten oikeellisuuden ja suuruusluokkien arvioimisen opetteleminen on keskeinen osa ala-asteen matematiikan opetusta. Koko peruskoulun matematiikan opetusta luonnehdittaessa todetaan, että oppimistilanteista tulisi rakentaa keskustelunomaisia ja

oikeiden ratkaisumenetelmien löytämisen ja tulosten arvioinnin ja muotoilun tulisi olla keskeinen osa opetustilanteita (Opetushallitus, 2000). Ala- ja yläasteen matematiikan osuudet kattavat yhteensä pari aukeamaa kaikkiaan 111 sivun laajuisesta Peruskoulun opetussuunnitelman perusteista. Tässä tiiviissä sisällössä on kuitenkin selvästi useassa eri kohdassa tuotu esiin laskutoimitusten tulosten oikeellisuuden arvioinnin ja ratkaisujen esittämisen keskeinen merkitys osana matemaattisten taitojen opettamista ja oppimista.

Vuoden 2004 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2004) esitetään, että matematiikan opetuksen tulisi tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen sekä edistää oppilaan kykyä etsiä luovasti ratkaisuja erilaisiin ongelmiin ja perustella omia päätelmiään. Matemaattisen ajattelun kehittäminen on määritelty opetuksen ydintehtäväksi kaikilla peruskoulun vuosiluokilla. Vuosiluokilla 1–2 matematiikan opetuksen tavoitteena on, että ”oppilas oppii perustelemaan ratkaisujaan ja päätelmiään konkreettisin mallein ja välinein, kuvin, kirjallisesti tai suullisesti” (Opetushallitus, 2004, s. 158).

Opetussuunnitelman mukaan 2. vuosiluokan päättyessä oppilaan tulisi osata esittää ratkaisujaan monipuolisesti erilaisia esitystapoja käyttäen, tehdä perusteltuja päätelmiä ja selittää omaa toimintaansa. Vuosiluokkien 3–5 kohdalla opetussuunnitelmassa korostuu alempia luokkia enemmän laskutoimitusten ja mittausten tulosten arviointi ja tarkistaminen sekä erilaisten ratkaisuvaihtoehtojen tarkasteleminen (Opetushallitus, 2004, s. 158–163). 5. luokan päätteeksi oppilaan tulisi opetussuunnitelman mukaan osata kommunikoida havainnoistaan ja ajatuksistaan ongelmanratkaisun eri vaiheissa monipuolisesti erilaisia välineitä ja esitysmuotoja hyödyntäen. Lisäksi oppilaalla tulisi olla taito arvioida laskutoimitusten ja mittauskohteiden suuruusluokkia etukäteen sekä tarkistaa laskujen vaiheet ja tulokset arvioiden niiden mielekkyyttä (Opetushallitus, 2004, s. 163).

Vuoden 2004 opetussuunnitelmassa vuosiluokan 6 opetuksen sisältö- ja tavoitealueet on esitetty yhdessä luokkien 7–9 kanssa. Näin ollen kyseisessä osiossa on todennäköisesti paljon ylemmille luokille painottuvia sisältöjä, kuten todistamisen pohjustaminen, johon kuuluvat muun muassa perustellut arvaukset ja kokeilut sekä suora todistaminen (Opetushallitus, 2004, s. 164). Vaikka jotkin opetuksen sisällöistä ja tavoitteista saattavat koskea enemmän peruskoulun päättäviä oppilaita, on oletettavaa, että päättöarvioinnissa tarkasteltavia taitoja harjoitellaan jollakin tasolla aina 6. luokalta lähtien. Päättöarvioinnin kriteereiksi arvosanalle 8 on määritelty muun muassa seuraavat tiedot ja taidot: ”oppilas osaa muuntaa yksinkertaisen tekstimuodossa olevan ongelman matemaattiseen esitysmuotoon ja tehdä suunnitelman

ongelman ratkaisemiseksi, ratkaista sen ja tarkistaa tuloksen oikeellisuuden” ja ”oppilas osaa arvioida tuloksen järkevyyttä sekä tarkastaa ratkaisunsa eri vaiheet” (Opetushallitus, 2004, s. 165–166). Tarkistaminen ja tulosten arvioiminen ovat siis eksplisiittisesti esillä myös ylemmillä luokka-asteilla.

Vuoden 2004 valtakunnallinen opetussuunnitelma on sivumäärältään noin kolminkertainen vuoden 1994 opetussuunnitelmaan verrattuna, ja matematiikan opetusta koskevat sisällöt ovat siinä näin ollen laajemmat ja määritelty yksityiskohtaisemmin eri luokka-asteiden osalta. Tarkistamisen teemoja koskevien sisältöjen osalta molemmat opetussuunnitelmat ovat kuitenkin ytimeltään hyvin samankaltaisia. Sekä vuoden 1994 että 2004 matematiikan opetussuunnitelmissa on esillä ongelmanratkaisutaitojen sekä ajattelun taitojen vahvistaminen ja opetuksessa nähdään keskeisinä tarkistaminen sekä tulosten ja ratkaisuprosessien arvioiminen. Lisäksi molemmissa opetussuunnitelmissa korostetaan keskustelun ja vuorovaikutuksen merkitystä osana opetustilanteita – oppilaiden tulisi oppia kommunikoidaan omaa ajatteluaan eri tavoin ja saada mahdollisuus oppia erilaisista ratkaisustrategioista ja vertaistensa kokemuksista ja ajatuksista.

2.4 Metakognitio matematiikan kontekstissa

Yksilön kykyä hyödyntää metakognitiivisia tietojaan ja taitojaan kognitiivisten resurssien optimoimiseksi kutsutaan metakognitiiviseksi säätelyksi (Wilson & Clarke, 2004). Tässä tutkimuksessa metakognitiivisella säätelyllä tarkoitetaan esimerkiksi arviointitaidon ja erilaisten tarkistamisstrategioiden käyttämistä matemaattisen tehtävän ratkaisemisessa ja saadun vastauksen oikeellisuuden ja mielekkyyden tarkastelemisessa. Tutkimuksessa analysoitiin, minkälaista ohjausta ja vinkkejä aineiston oppimateriaalit tarjoavat tarkistamisen taitoina ilmenevän metakognitiivisen säätelyn oppimiseksi ja opettamiseksi.

Metakognition käsitettä käytti ensimmäisen kerran yhdysvaltalainen kehityspsykologi John H. Flavell 1970-luvulla kirjoittaessaan lasten ongelmanratkaisutaidoista. Flavell (1976, s. 232) määrittelee metakognition yksilön tietoisuudeksi omista kognitiivisista prosesseistaan sekä näiden prosessien aktiiviseksi monitoroinniksi ja säätelyksi. Metakognitio voi ilmetä esimerkiksi oman oppimisen reflektointina, erilaisten vaihtoehtojen punnitsemisena, omien vahvuuksien ja heikkouksien tunnistamisena tai avuntarpeen huomaamisena (Flavell, 1976, s. 232). Metakognition voidaan ajatella olevan tietoisuutta omista tiedonkäsittelytaidoista sekä

kykyä hyödyntää tätä tietoa oman toiminnan ohjaamisessa (Annevirta, Iiskala & Katajisto, 2003, s. 3).

Flavell (1987, s. 21) jakaa metakognition käsitteen kahteen ulottuvuuteen: metakognitiiviseen tietoon ja metakognitiiviseen kokemukseen. Sittemmin metakognition teorioihin on lisätty myös kolmas näkökulma, metakognitiivinen taito (ks. mm. Mayer, 1998; Annevirta, Iiskala & Katajisto, 2003; Tay ym., 2024). Metakognitiivisella tiedolla tarkoitetaan yksilön tietoa ja uskomuksia itsestään suhteessa kognitiivisiin tehtäviin ja strategioihin (Tay ym., 2024), ja se voidaan jakaa kolmeen alakategoriaan: persoonatietoon, tehtävätietoon ja strategiatietoon (Flavell, 1987, s. 22; Annevirta, Iiskala & Katajisto, 2003, s. 3; Tay ym., 2024). Persoonatieto on tietoisuutta tai uskomuksia itsestä tai yleisesti ihmisistä tiedonkäsittelijöinä ja oppijoina (Annevirta, Iiskala & Katajisto, 2003, s. 3; Tay ym., 2024) ja sisältää käsityksen onnistumisesta ja epäonnistumisesta (Flavell, 1987, s. 22). Tehtävätiedolla tarkoitetaan tietoisuutta erilaisista kognitiivisista strategioista (Tay ym., 2024) – ymmärrys siitä, että halutun tavoitteen saavuttaminen eri tehtävien kohdalla vaatii erilaisia ponnistuksia, on tehtävätietoa (Flavell, 1987, s. 23). Strategiatieto on puolestaan kykyä selittää, milloin ja miksi tiettyjä strategioita kannattaa hyödyntää (Annevirta, Iiskala & Katajisto, 2003, s. 3; Tay ym., 2024).

Metakognitiivinen kokemus on Flavellin (1987, s. 24) mukaan yksilön kokema tietoinen kognitiivinen tai tunnepitoinen kokemus, joka liittyy älylliseen pyrkimykseen. Itsevarmuuden, osaamisen, tuttuuden, haastavuuden ja tyytyväisyyden tunteet ovat esimerkkejä metakognitiivisista kokemuksista (Efklides, 2009). Tietoisuus metakognitiivisista kokemuksista on edellytys metakognitiivisen tiedon ja sen myötä metakognitiivisten taitojen kartuttamiselle (Annevirta, Iiskala & Katajisto, 2003, s. 6). Tayn ym. (2024) mukaan metakognitiivisten kokemusten huomioiminen matematiikan opetuksessa on tärkeää riippumatta oppilaan taitotasosta, sillä tunnekokemuksilla on merkittävä vaikutus oppimisen tehokkuuteen. Erityisesti negatiivisten metakognitiivisten tunnekokemuksien yhteys oppilaan minäkuvaan ja oppiaineeseen sitoutumiseen on tärkeä tunnistaa (Tay ym., 2024).

Metakognitiiviset taidot ovat metakognitiivisia tietoja tilannekohtaisempia, ongelmanratkaisun aikaisia aktiivisia prosesseja, jotka voidaan jakaa kolmeen osataitoon: suunnittelutaitoon, ohjaamistaitoon sekä arviointitaitoon (Annevirta, Iiskala & Katajisto, 2003, s. 6–8; Tay ym., 2024). Suunnittelutaito viittaa nimensä mukaisesti toiminnan

suunnitteluun ja ennakointiin ja voi käytännössä tarkoittaa esimerkiksi tavoitteen asettamista ja sopivien strategioiden valitsemista. Ohjaamistaidolla tarkoitetaan toiminnan aikaista valvontaa ja säätelyä sekä esimerkiksi valittujen strategioiden tehokkuuden tarkastelua. Arviointitaidolla puolestaan tarkoitetaan oman työskentelyn reflektointia sekä suoritettujen prosessien tarkistamista (Annevirta, Iiskala & Katajisto, 2003, s. 8; Tay ym., 2024). Matematiikan kontekstissa arviointitaito voi ilmetä esimerkiksi tehtävän ratkaisun tarkistamisena tai tehtävänantoon palaamisena ja saadun tuloksen peilaamisena siihen (Annevirta, Iiskala & Katajisto, 2003, s. 8). Arviointitaito on tämän tutkimuksen kannalta olennaisin metakognition osa-alue.

Lukuisat tutkimukset ovat osoittaneet metakognitiivisten tietojen ja taitojen olevan positiivisesti yhteydessä matematiikan oppimistuloksiin (ks. Morosanova, Fomina, Kovas & Bogdanova, 2016; Tian, Fang & Li, 2018; Desoete, Baten, De Busschere, Baudonck & Vanhaeke, 2019; Chytrý, Říčan, Eisenmann & Medová, 2020; Muncer ym., 2022). Heikkojen metakognitiivisten taitojen on todettu niin ikään olevan yhteydessä haasteisiin matemaattisessa ongelmanratkaisussa (García ym., 2019). Oppilailta, joilla on heikot metakognitiiviset taidot, esiintyy haasteita matemaattisten ongelmien ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa, ja he keskittyvät usein pelkästään vastauksen antamiseen tarkistamatta sen oikeellisuutta tai mielekkyyttä (Kusaka & Ndiokubwayo, 2022). Vahvat metakognitiiviset taidot puolestaan ennustavat muun muassa kykyä hyödyntää erilaisia ratkaisustrategioita sekä tarkistaa saadut vastaukset (Güner & Erbay, 2021). Matemaattisesta ongelmanratkaisusta ja tarkistamisesta puhuttaessa on siis syytä tarkastella myös metakognition käsitettä.

3 Oppimateriaalit matematiikan opetuksessa

Matematiikan oppimateriaaleilla tarkoitetaan matematiikan opetustarkoituksiin laadittuja materiaaleja, joiden tavoitteena on edistää opetussuunnitelmien tavoitteiden mukaista opetusta (Perkkilä, Joutsenlahti & Sarenius, 2018). Oppimateriaaleihin lukeutuvat muun muassa oppilaille suunnatut oppikirjat, opetusta tukevat opettajaoppaat sekä erilaiset digitaaliset materiaalit. Oppilaiden oppikirjat nähdään ennen kaikkea tehtäväpankkeina, kun taas opettajaoppaat sisältävät tehtävien lisäksi yksityiskohtaisemmat esittelyt opetettavista sisällöistä ja opetusjaksojen tavoitteista sekä erilaisia opetusvinkkejä ja pedagogista tukea (Vilalta Riera, Deulofeu Piquet & Morera Úbeda, 2024). Opettajaoppaiden tarjoamalla pedagogisella tuella tarkoitetaan sisältötietoon sekä yleiseen pedagogiseen tietoon liittyvää ohjausta (Hemmi, Krzywacki & Koljonen, 2018). Hemmin, Krzywackin ja Koljosen (2018) mukaan opettajaoppaiden pedagoginen tuki voi käytännössä olla esimerkiksi sisältöjen tavoitteiden erittelemistä, vinkkejä opetuskeskusteluiden ja opettajajohtoisten opetustuokioiden toteuttamiseen, aktiviteetteja ja tehtävänantoja tiettyjä oppisisältöjä koskien sekä tukea oppilaiden ajattelun ja erilaisten tarpeiden huomioimiseen ja arvioimiseen.

Matematiikan oppimateriaalien tutkimuksella on varsin lyhyt historia siihen nähden, kuinka kauan erilaisia matematiikan opetukseen tarkoitettuja opuksia on ollut olemassa: ennen 1980-lukua on julkaistu hyvin vähän matematiikan oppikirjoihin keskittyvää tutkimusta (Fan, Zhu & Miao, 2013). Viimeisten vuosikymmenien aikana matematiikan oppimateriaalitutkimus on kuitenkin saavuttanut kansainvälisesti kasvavaa suosiota ja tutkimuksien määrä on kasvanut nopeasti (Fan, 2013; Fan, Zhu & Miao, 2013). Matematiikan oppimateriaalitutkimukset ovat viime vuosikymmenien saatossa käsittäneet oppikirjan aseman tarkastelemista opetuksessa, oppikirjojen käyttämistä oppilaiden ja opettajien näkökulmasta, sähköisten oppimateriaalien tutkimista sekä eri oppikirjojen analyysiä ja vertailua (Fan, Zhu & Miao, 2013).

Charalambous, Delaney, Hsu ja Mesa (2010) esittävät, että oppikirja-analyysit voidaan jakaa kolmeen laajaan lähestymistapaan: horisontaaliseen, vertikaaliseen ja kontekstuaaliseen. Horisontaalisella lähestymistavalla tarkoitetaan oppikirjan tarkastelua kokonaisuutena. Analyysi keskittyy tällöin oppikirjan yleiseen ilmiösuun ja ominaisuuksiin, kuten opetettaviin aiheisiin ja niiden käsittelyjärjestykseen, otsikoihin, aukeamien rakenteisiin, tehtävien määrään ja sivumääriin. Vertikaalisessa analyysissä tarkastellaan, miten oppikirjassa käsitellään tiettyä matemaattista käsitettä tai ilmiötä ja miten oppikirja toimii alustana uuden

tiedon rakentamiselle. Kontekstuaalisella analyysillä puolestaan tarkoitetaan tutkimusta opettajien ja oppilaiden tavoista käyttää oppikirjoja (Charalambous ym., 2010). Tässä tutkimuksessa hyödynnettiin vertikaalista lähestymistapaa tutkittaessa tarkistamiseen ohjaamista matematiikan oppimateriaaleissa vuosiluokilla 1, 3 ja 6. Seuraavissa alaluvuissa käsitellään oppikirjojen asemaa matematiikan opetuksessa sekä tarkistamiseen ohjaamista matematiikan oppimateriaaleissa aikaisemman tutkimuskirjallisuuden valossa.

3.1 Oppimateriaalien asema matematiikan opetuksessa

Tutkijoilla on eriäviä näkemyksiä siitä, kuinka paljon matematiikan oppikirjoja tutkimalla voidaan tehdä johtopäätöksiä matematiikan opetuksesta ja oppimisesta. Howsonin (2013) mukaan oppikirjoja ei voida pitää opetusta määrittävinä tekijöinä, sillä opettajien tavat käyttää oppikirjoja voivat erota toisistaan paljonkin. Fanin, Zhun ja Miaon (2013) mukaan oppikirjoja tutkimalla voidaan jonkin verran ennustaa opetusta, mutta ei varmuudella tietää, miten oppimateriaaleja todellisuudessa käytetään luokkahuoneessa. Krammerin (1985) tutkimustulokset puolestaan osoittivat johdonmukaisuuden opettajan käyttämän oppikirjan sisältöjen sekä opetuskäytänteiden välillä. Saadut tulokset herättivät kysymyksen, johtuuko johdonmukaisuus siitä, että opettajat seuraavat tarkasti oppikirjoja vai että opettajat alun perinkin valitsevat opetukseensa materiaaleja, jotka sopivat heidän opetustyyliinsä (Krammer, 1985). Edelleen tarvitaan lisää tutkimusta oppikirjojen käytöstä sekä opettajien että oppilaiden osalta (Fan, Zhu & Miao, 2013).

Vaikka tutkijoiden näkemykset oppikirjojen yhteydestä opetukseen ja oppimiseen vaihtelevat, yhtä mieltä ollaan siitä, että kaiken kaikkiaan oppikirjoilla on vahva asema matematiikan opetuksessa (mm. Haggarty & Pepin, 2002; Perkkilä, 2002; Fan, Zhu & Miao, 2013; Howson, 2013; Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015; Karvonen, Tainio & Routarinne, 2017; Perkkilä, Joutsenlahti & Sarenius, 2018). Oppimateriaalien tarkastusmenettelystä ja hyväksyttämistä Kouluhallituksella luovuttiin Suomessa vuonna 1990, mutta materiaalien uskotaan olevan edelleen opetussuunnitelmien mukaisia (Perkkilä, Joutsenlahti & Sarenius, 2018).

Matematiikan oppikirjat voidaan nähdä ikään kuin välikappaleena opetussuunnitelmien ja opetuksen välissä (Sievert, van den Ham & Heinze, 2021), ja ne ovat toisinaan jopa opetussuunnitelmia vahvempia auktoriteetteja määrittäen pitkälti, mitä matematiikan opetuksessa käsitellään ja miten (Tárraga-Mínguez, Tarín-Ibáñez & Lacruz-Pérez, 2021).

Oppikirjat ovat siis usein lähempänä kouluarkea kuin opetussuunnitelmat (Fan, Zhu & Miao,

2013), ja niitä tutkimalla voidaan päästä lähelle luokkahuoneiden todellisuutta (Howson, 2013).

KARVI:n laatiman selvityksen mukaan Suomessa 96 prosenttia alkuopetuksen opettajista käyttää oppikirjaa matematiikan opetuksessaan (Metsämuuronen & Ukkola, 2019). 5. luokan opettajia tutkittaessa kyselyyn vastanneista (n=363) 97 prosenttia piti oppikirjoja ja 88 prosenttia opettajaoppaita melko tai erittäin tärkeinä matematiikan opetuksessaan (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010, s. 137). TIMSS-tutkimusten (Trends in International Mathematics and Science Study) mukaan peruskoulun matematiikan opetus on viime vuosikymmenten ajan pohjautunut oppikirjoihin myös kansainvälisesti tarkasteltuna (Beaton, 1996, s. 156; Mullis, Martin, Foy & Arora, 2012, s. 392). Koska matematiikan kirjalliset oppimateriaalit ovat olleet vahvasti läsnä suomalaisissa luokkahuoneissa viime vuosikymmeninä ja ohjaavat edelleen opetuksen suunnittelua ja toteutusta, on tärkeää tutkia ja analysoida niissä esitettyjä ideoita.

Hemmi, Krzywacki ja Koljonen (2018) tutkivat suomalaisia 1.–6. luokkien matematiikan opettajaoppaita parin vuosikymmenen ajalta aina 1990-luvun lopulta lähtien ja analysoivat, minkälaisia resursseja ne ovat opettajille. Tutkimusaineisto koostui Laskutaito-, Tuhattaituri-, Matikkamatka- ja Matikka-sarjojen materiaaleista. Tutkimustulosten mukaan suomalaiset matematiikan opettajaoppaat ovat melko homogeenisiä, vaikkakin eri kirjasarjojen välillä on luonnollisesti joitakin eroavaisuuksia esimerkiksi siinä, miten erilaiset teemat on esitetty. Tulokset kuitenkin osoittivat Laskutaito-kirjasarjan olevan kommunikointityyliltään perusteellisempi muihin oppikirjasarjoihin verrattuna. Laskutaito dominoi matematiikan oppimateriaalimarkkinoita 1990-luvulta lähtien, ja Tuhattaituri nousi suosituksi sen rinnalle 2000-luvulla (Hemmi, Krzywacki & Koljonen, 2018). Vuonna 2008 käytetyimpiä kirjasarjoja olivatkin Laskutaito ja Tuhattaituri kattaen noin 83 prosenttia kaikista matematiikan oppimateriaaleista Suomen markkinoilla (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010, s. 142). Tässä tutkimuksessa analysoitiin vuoden 1994 opetussuunnitelman aikana julkaistuja Laskutaito- (WSOY) ja Mieti ja laske -kirjasarjoja (Tammi) sekä vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisia Laskutaito- (WSOY) ja Tuhattaituri-kirjasarjoja (Otava).

3.2 Tarkistamiseen ohjaaminen matematiikan oppimateriaaleissa aikaisemman tutkimuksen mukaan

Vicente, Sánchez ja Verschaffel (2020) tutkivat ongelmanratkaisustrategioita singaporelaisissa ja espanjalaisissa matematiikan oppimateriaaleissa. Aineiston analysoinnissa tarkistamista lähestyttiin seuraavien alakategorioiden avulla: ei-matemaattinen tarkistaminen (*generic checking*), matemaattinen tarkistaminen (*specific mathematical checking*) ja kontekstuaalinen tarkistaminen (*specific situational verification*). Ei-matemaattinen tarkistaminen tarkoitti tilanteita, joissa tarkistamiseen viitattiin yleisellä tasolla, eikä sen suorittamiselle ollut esitetty tarkempia kriteerejä. Matemaattisella tarkistamisella puolestaan tarkoitettiin muun muassa käänteisoperaatioiden hyödyntämistä ja vastauksen matemaattista perustelemista. Kontekstuaaliseksi tarkistamiseksi määriteltiin saadun vastauksen järjestyksen ja mielekkyyden tarkastelu suhteessa käsillä olevaan ongelmaan. Saatujen tulosten mukaan suurimmassa osassa tutkittavista oppikirjoista esiintyi eniten matemaattista tarkistamista ja muilta osin yleistä, ei-matemaattista tarkistamista ilman kontekstuaalista näkökulmaa (Vicente, Sánchez & Verschaffel, 2020).

Kaiken kaikkiaan singaporelaisissa oppikirjoissa tarkistamisen sisältöjä oli Vicenten, Sánchezin ja Verschaffelin (2020) mukaan vähemmän kuin espanjalaisissa. Tutkijat esittävätkin, että ongelmanratkaisuprosessien esittämistä voitaisiin singaporelaisissa matematiikan oppimateriaaleissa kehittää sisällyttämällä tarkistaminen systemaattisemmin osaksi ongelmaratkaisuprosessia. Singaporelaisessa oppikirjasarjassa ongelmanratkaisuprosessin opettamista koskeva scaffolding oli kuitenkin toteutettu espanjalaisia kirjoja paremmin kaikilla luokka-asteilla 1–6: tarkistamista tukevat vihjeet vähenivät siirryttäessä ylempien luokka-asteiden oppikirjoihin edistäen asiantuntevan ongelmanratkaisutaidon kehittymistä. Espanjalaisissa oppikirjoissa suunta oli päinvastainen – mitä ylempään luokka-asteeseen oppikirjasta oli kyse, sitä enemmän askeleita ongelmanratkaisun ja tarkistamisen toteuttamiseen esitettiin. Tutkijoiden mukaan tämä saattaa ilmentää harhakäsitystä, jonka mukaan nuoret oppilaat eivät vielä olisi kykeneviä ymmärtämään ongelmanratkaisuun liittyviä tekijöitä (Vicente, Sánchez & Verschaffel, 2020).

Fan ja Zhu (2007) vertailivat kiinalaisia, singaporelaisia ja yhdysvaltalaisia alakoulun matematiikan oppikirjoja ja tutkivat, miten niissä esitetään ongelmanratkaisuprosesseja. Analyysi toteutettiin yleisellä tasolla mukaillen Pólyan ongelmanratkaisumallin neljää

vaihetta: ongelman ymmärtäminen, suunnitelman laatiminen, suunnitelman toteuttaminen ja tarkistaminen. Tulosten mukaan tutkittavien maiden oppikirjoissa esiintyi vain harvoin kaikki neljä edellä mainittua ongelmanratkaisun tasoa. Suurin ero havaittiin tarkistamisen esiintymisessä. Tarkistamista esiintyi vähiten singaporelaisissa oppikirjoissa, mikä oli yllättävää, sillä opetussuunnitelmia tarkasteltaessa tarkistamisen teemat olivat eniten edustettuna juuri Singaporessa. Singaporen opetussuunnitelmassa korostettiin metakognitiivisia taitoja, joihin sisältyvät muun muassa oman toiminnan monitoroiminen sekä saatujen vastausten järkevyyden tarkistaminen ja arvioiminen (Fan & Zhu, 2007).

Pólyan ongelmanratkaisumallin vaiheiden lisäksi Fan ja Zhu (2007) analysoivat kolmen maan matematiikan oppimateriaaleja yksityiskohtaisemmin määriteltyjen ongelmanratkaisustrategioiden mukaan. Tarkistaminen jaettiin kolmeen alakategoriaan: 1) alkuperäiseen ongelmaan palaaminen, 2) käytettyjen ongelmanratkaisuproseduurien tarkistaminen, 3) lopullisen vastauksen tarkistaminen. Yli puolessa tapauksista singaporelaisissa ja yhdysvaltalaisissa oppikirjoissa pääpaino oli lopullisen vastauksen tarkistamisessa. Kiinalaisissa oppikirjoissa puolestaan keskityttiin eniten ratkaisuproseduurien tarkistamiseen (Fan & Zhu, 2007).

Tarkistamisen vähäinen esiintyminen singaporelaisissa matematiikan oppimateriaaleissa on mielenkiintoinen yksityiskohta tämän tutkimuksen kannalta, sillä Singapore on ollut vuosikymmenestä toiseen kärjessä kansainvälisissä tutkimuksissa, joissa on mitattu matematiikan osaamista. Singapore on Suomen tavoin osoittanut kansainvälisissä mittauksissa vahvempaa matemaattista osaamista kuin esimerkiksi edellä esitellyissä tutkimuksissa mainitut Espanja ja Yhdysvallat (ks. Beaton, 1996; Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2023). Tutkimustuloksista päätellen tarkistamisen vähäinen esiintyminen matematiikan oppimateriaaleissa ei ole ainakaan suoraan yhteydessä menestymiseen matemaattista osaamista mittaavissa tutkimuksissa.

3.3 Oppimateriaalien metakognitiivinen haastavuus

Matemaattista ongelmanratkaisua koskevien teorioiden yhteydessä *ongelma* on määritelty monin eri tavoin. Toisinaan *ongelmaa* on käytetty *tehtävän* synonyyminä tarkoittaen sekä rutiini- että ei-rutiinitehtäviä, ja toisaalta ongelmalla saatetaan viitata nimenomaan ei-rutiinitehtäviin, joiden ratkaiseminen edellyttää ratkaisijalta tuttujen strategioiden käyttämistä

uusin tavoin (Rott, Kuzle & Cadez, 2016, s. 13). Jäderin, Lithnerin ja Sidenvallin (2020) mukaan matematiikan oppikirjojen tehtävät voidaan jakaa kolmeen ryhmään: 1) tehtävät, jotka on mahdollista ratkaista seuraten oppikirjassa esitettyä mallia, 2) tehtävät, joiden ratkaisemiseen ei ole oppikirjassa mallia, 3) tehtävät, jotka on mahdollista ratkaista oppikirjassa esitettyä mallia hieman soveltaen. Analysoidessaan ongelmaratkaisumenetelmien opettamista matematiikan oppikirjoissa Fan ja Zhu (2007) puolestaan määrittivät ongelmaksi oppikirjojen tehtävät, joissa edellytettiin jonkinlaista ratkaisua tai päätöstä riippumatta siitä, oliko kyseessä ns. rutiini- vai ei-rutiinitehtävä tai oliko ratkaisuun saatavilla mallia oppikirjasta. Schoenfeld (1989, s. 88) esittääkin, että mikään ei ole itsessään ”ongelma”, vaan kyse on ratkaisijan aikaisemmista tiedoista ja taidoista suhteesta käsillä olevaan tehtävään.

Tässä tutkimuksessa ongelma käsitettiin laajasti tarkoittaen kaikenlaisia matematiikan oppimateriaalien tehtäväsisältöjä, joissa edellytetään ratkaisua. Tällä pyrittiin tukemaan käsitystä siitä, että matemaattisen ongelman metakognitiivinen haastavuus on ennen kaikkea riippuvainen sen ratkaisijasta. Näin ollen oppimateriaaleista ei voida objektiivisesti erotella ns. ongelmanratkaisutehtäviä. Toisaalta on erittäin tärkeää tukea oppilaiden kykyä ratkaista myös ns. rutiinitehtäviä (Fan & Zhu, 2007), ja erityisesti tarkistamisen voidaan ajatella olevan merkittävä osa kaikenlaisten tehtävien ratkaisemista: olisi tärkeää, että oppilaalla olisi taito esimerkiksi tarkastella suorittamansa laskutoimituksen vastauksen mielekkyyttä ja järkevyyttä, mikä puolestaan mahdollistaisi mahdollisten laskuvirheiden tunnistamisen ja korjaamisen.

Gresalfin (2009) mukaan tehtävät, joissa oppilailta edellytetään vastauksiensa oikeellisuuden pohtimista ja perustelemista, tarjoavat hyvän mahdollisuuden kehittää ajattelua ja luoda yhteyksiä erilaisten matemaattisten ideoiden välille. Tehtävät, joissa pyydetään pelkkää vastausta, tarjoavat puolestaan vain heikon mahdollisuuden oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittymiselle (Gresalfi, 2009). Matematiikan oppimateriaalien sisällöillä onkin kaiken kaikkiaan suuri merkitys oppilaiden saamiin oppimismahdollisuuksiin, myös ongelmanratkaisun osalta (van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2018).

Aikaisemmat tutkimustulokset ovat osoittaneet positiivisen yhteyden matematiikan tehtävien ratkomiseen vaadittavan ajattelun tason sekä oppilaiden matemaattisen ymmärryksen välillä (Yang & Sianturi, 2022). Yangin ja Sianturin (2022) mukaan heikosti suunniteltujen

matematiikan tehtävien voidaankin ajatella olevan jopa ajanhukkaa. Olisi tärkeää, että matematiikan opetuksessa käytettävät harjoitustehtävät haastaisivat oppilaiden ajattelua ja tukisivat ongelmaratkaisutaitojen kehittymistä. Matematiikan tehtävän vaikeustaso ja tehtävän ratkaisemiseen vaadittavat ajattelun taidot eivät kuitenkaan välttämättä tarkoita samaa asiaa (Purnomo ym., 2022). Parhaimmillaan harjoitustehtävät voivat siis tukea oppilaiden metakognitiivisten säätelyn kehittymistä ongelman ratkaisemisen edellyttämien laskuproseduurien haastavuudesta riippumatta.

Ongelmanratkaisutaitoja ja metakognitiivista säätelyä kehittäviä sisältöjä olisi tärkeää olla tarjolla laajasti ja kaikkien oppilaiden saavutettavana. Hollantilaisia matematiikan oppikirjoja tutkittaessa kuitenkin todettiin, että materiaalit eivät juurikaan tarjoa mahdollisuuksia ongelmanratkaisutaitojen harjoittelulle ja vähäisetkin mahdollisuudet on suunnattu lähinnä edistyneimmille oppilaille (van Zanten & van den Heuvel-Panhuizen, 2018). Oppikirjoissa tyydytään asettamaan suoraviivaisia kysymyksiä, joiden ratkaiseminen ei vaadi juurikaan erilaisten tietojen synteisiä (Howson, 2013), joten pinnallisten ratkaisustrategioiden käyttö ja annettujen ratkaisumallien seuraaminen riittävät useimpien tehtävien ratkaisemiseksi (Tárraga-Mínguez, Tarín-Ibáñez & Lacruz-Pérez, 2021). Suomalaisia opettajaoppaita tutkittaessa todettiin, että myöskään opettajille suunnatuissa materiaaleissa ei juurikaan tuoda eksplisiittisesti esille ehdotettujen opetusideoiden ja aktiviteettien taustalla olevia perusteita (Hemmi, Krzywacki & Koljonen, 2018).

Suurin osa, 90–99 prosenttia matematiikan kirjan tehtävistä ovat ns. suljettuja tehtäviä eli tehtäviä, joihin on vain yksi oikea vastaus, ja useampia ratkaisu- ja vastausvaihtoehtoja mahdollistavat tehtävät ovat puolestaan aliedustettuja (Joutsenlahti, 2006; Fan, Zhu & Miao, 2013; Bingolbali, 2020; Yang & Sianturi, 2022). Monia tehtäviä voisi kuitenkin helposti rikastaa ja muokata avoimempaan muotoon pyytämällä oppilasta perustelemaan vastaustaan esimerkiksi lisäämällä tehtävän perään kysymyksen ”*miksi?*” (Glasnovic Gracin, 2018). Ratkaisujen sanallistaminen tarjoaa opettajalle tärkeää tietoa oppilaan ajatteluprosesseista ja auttaa myös oppilasta itseään ymmärtämään ja jäsentämään omaa ajatteluaan (Charalambous ym., 2010). Miksi-kysymykseen vastaaminen tukisi myös tarkistamisen oppimista: vastaaminen edellyttäisi tällöin omien ratkaisujen arvioimista ja ohjaisi pohtimaan, ovatko käytetyt laskuproseduurit ja saatu vastaus järkeviä.

4 Tutkimusongelmat

Tutkimuksen tarkoituksena oli kartoittaa, miten vuosien 1994 ja 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisissa alakoulun matematiikan oppimateriaaleissa ohjataan tarkistamiseen. Lisäksi tarkasteltiin, esiintyykö eri opetussuunnitelmien aikaisten oppimateriaalien välillä eroja tarkistamiseen ohjaamisessa. Tutkimuksen tavoitteena oli täydentää suomalaista matematiikan oppimateriaalien tutkimusta tarkistamisen teemojen osalta, joista ei juurikaan ole aikaisempaa tutkimuskirjallisuutta. Tutkimusongelmia lähestyttiin seuraavien tutkimuskysymysten kautta:

Tutkimuskysymykset

1. Miten matematiikan oppikirjat ohjaavat oppijoita tarkistamaan ratkaisunsa?
 - 1.1. Miten oppikirjoissa ohjataan ei-matemaattiseen tarkistamiseen?
 - 1.2. Miten oppikirjoissa ohjataan matemaattiseen tarkistamiseen?
 - 1.3. Miten oppikirjoissa ohjataan kontekstuaaliseen tarkistamiseen?
2. Minkälaista pedagogista tukea opettajaoppaat tarjoavat tarkistamiseen liittyen?
3. Minkälaisia eroja vuosien 1994 ja 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisissa matematiikan oppimateriaaleissa ilmenee tarkistamiseen ohjaamisessa?

5 Tutkimuksen toteutus

Oppikirjoja on eri tutkimuksissa analysoitu monin eri tavoin. Useita oppikirja-analyysejä kuitenkin yhdistää samanlainen lähestymistapa: tutkimuksissa oppikirjaa on ensin analysoitu kvalitatiivisesti teoriaan pohjautuvalla analyysikehikolla, ja sisältöjen koodaamisen jälkeen erilaisia luokitteluja on tarkasteltu kvantitatiivisesti tilastollisen merkitsevyyden tutkimiseksi ja tulosten luotettavuuden lisäämiseksi (ks. Glasnovic Gracin, 2018; Bingolbali, 2020; Sievert, van den Ham & Heinz, 2021; Tárraga-Mínguez, Tarín-Ibáñez & Lacruz-Pérez, 2021; Purnomo ym., 2022; Yang & Sianturi, 2022; Viholainen, Eronen & Kettunen, 2022). Myös tässä tutkimuksessa hyödynnettiin sekä kvalitatiivisia että kvantitatiivisia menetelmiä. Sisällönanalyysiä toteutettiin niin teoria- kuin aineistolähtöisesti analyysin eri vaiheissa.

Teorialähtöisellä sisällönanalyysillä tarkoitetaan analyysiä, jossa käytetään aikaisempaan käsitejärjestelmään tai teoriaan pohjautuvaa luokittelurunkoa (Tuomi & Sarajärvi 2018, s. 127; Elo, Kajula, Tohmola & Kääriäinen 2022). Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissä luokittelu puolestaan tuotetaan aineistoon perustuen (Elo ym., 2022) eikä erilaisten luokkien määrää ja laatua tiedetä etukäteen (Tuomi & Sarajärvi 2018, s. 127). Sisällönanalyysin ohella tutkimuksessa hyödynnettiin sisällön erittelyä kvantifioimalla aineistoa (Tuomi & Sarajärvi 2018, s. 119; Elo ym., 2022). Aineiston koodaamiseen ja kvantifiointiin käytettiin Atlas.ti-ohjelmistoa (Atlas.ti 24.1.1) ja tulosten tilastollisen merkitsevyyden tarkasteluun SPSS-tilasto-ohjelmistoa (IBM SPSS Statistics 30.0.0). Seuraavissa alaluvuissa esitellään tarkemmin aineiston oppimateriaaleja sekä analyysin toteuttamista. Luvun lopussa käsitellään tutkimukseen liittyviä eettisiä kysymyksiä.

5.1 Aineisto

Tutkimus toteutettiin oppikirja-analyysinä, jonka aineistona käytettiin vuosien 1994 ja 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisia käytetyimpiä matematiikan oppimateriaaleja (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010, s. 142; Hemmi, Krzywacki & Koljonen, 2018). Aineistona ovat vuosiluokkien 1, 3 ja 6 Laskutaito-, Mieti ja laske- sekä Tuhattaituri-kirjasarjojen oppilaan kirjat ja opettajaoppaat, jotka saatiin käyttöön MOPPI-tutkimusprojektin toimesta sähköisessä muodossa. Tutkimusaineiston oppimateriaalit on koottu taulukoihin 1 ja 2. Käytännössä analyysi toteutettiin opettajaoppaita koodaten, sillä ne sisältävät sekä oppilaiden kirjojen sisällöt että opettajille suunnatut materiaalit, jotka molemmat olivat tutkimuksen kohteina. Aineisto koostettiin 1., 3. ja 6. luokkien

oppimateriaaleista, jotta saataisiin muodostettua ala-asteen läpileikkaava yleiskäsitys tarkistamiseen ohjaamisesta matematiikan oppimateriaaleissa. Kyseisten vuosiluokkien materiaalien valintaa ohjasi myös vuoden 2004 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden matematiikan sisältöjen vuosiluokkajako: 1–2, 3–5 ja 6–9. Jotta saatujen tulosten peilaaminen opetussuunnitelmissa esitettyihin sisältöihin ja opetuksen tavoitteisiin olisi mielekästä, analysoitavaan aineistoon haluttiin sisällyttää oppimateriaaleja kaikista edellä mainituista vuosiluokkaryhmistä.

Taulukko 1 Vuoden 1994 Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden aikaiset aineiston oppimateriaalit.

Kustantamo	Kirjasarja	Teos	Painosvuosi	Tekijät
WSOY	Laskutaito	1, Syysosan opettajan kirja	1996	Rikala, S., Sieppi, H., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R.
WSOY	Laskutaito	1, Kevätosan opettajan kirja	1996	Rikala, S., Sieppi, H., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R.
WSOY	Laskutaito	3, Syysosan opettajan kirja	1999	Rikala, S., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R.
WSOY	Laskutaito	3, Kevätosan opettajan kirja	1998	Rikala, S., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R.
WSOY	Laskutaito	6, Opettajan kirjan syysosa	1997	Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R.
WSOY	Laskutaito	6, Opettajan kirjan kevätosa	2000	Koivisto, M., Salonen, M. & Uus-Leponiemi, T.
Kirjayhtymä	Mieti ja laske	1, Syksy: opettajan kirja	1997	Vähäpassi, A., Hartikainen, S., & Häggblom, L.
Kirjayhtymä	Mieti ja laske	1, Kevät: opettajan kirja	1998	Vähäpassi, A., Hartikainen, S., & Häggblom, L.
Tammi	Mieti ja laske	3, Syksy: opettajan kirja	2004	Vähäpassi, A., Hartikainen, S., Vaahtokari, A., & Hänninen, L.
Kirjayhtymä	Mieti ja laske	3, Kevät: opettajan kirja	2005	Vähäpassi, A., Hartikainen, S., Vaahtokari, A., & Hänninen, L.
Tammi	Mieti ja laske	6, Syksy: opettajan kirja	2002	Nordström, M., Vähäpassi, A., & Vaahtokari, A.
Tammi	Mieti ja laske	6, Kevät: opettajan kirja	2002	Nordström, M., Vähäpassi, A., & Vaahtokari, A.

Taulukko 2 Vuoden 2004 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden aikaiset aineiston oppimateriaalit.

Kustantamo	Kirjasarja	Teos	Painovuosi	Tekijät
WSOY	Laskutaito	1, Opettajan kirja: syysosa	2002	Rikala, S., Sintonen, A-M., & Uus-Leponiemi, T.
WSOY	Laskutaito	1, Opettajan kirja: kevätosa	2002	Rikala, S., Sintonen, A-M., & Uus-Leponiemi, T.
WSOY	Laskutaito	3, Opettajan kirja: syysosa	2004	Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T.
WSOY	Laskutaito	3, Opettajan kirja: kevätosa	2004	Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T.
WSOY	Laskutaito	6, Opettajan kirja: syysosa	2007	Koivisto, M., Salonen, M., Sintonen, A.-M., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R.
WSOY	Laskutaito	6, Opettajan kirja: kevätosa	2007	Koivisto, M., Salonen, M., Sintonen, A.-M., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R.
Otava	Tuhattaituri	1a, Opettajan opas	2005	Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P., & Voima, J.
Otava	Tuhattaituri	1b, Opettajan opas	2007	Haapaniemi, S., Rajamäki, M., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P., & Voima, J.
Otava	Tuhattaituri	3a, Opettajan opas	2008	Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P.
Otava	Tuhattaituri	3b, Opettajan opas	2008	Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P.
Otava	Tuhattaituri	6a, Opettajan opas	2011	Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P.
Otava	Tuhattaituri	6b, Opettajan opas	2012	Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P.

Laskutaito on WSOY:n julkaisema matematiikan oppikirjasarja vuosiasteille 1–6. Oppilaiden ja opettajien kirjoja on jokaista vuosiastetta kohden kaksi: syys- ja kevätosa. Opettajaoppaissa jokaista oppilaan kirjan perusaukeamaa kohden on muodostettu oma kokonaisuutensa sisältäen pedagogisia ohjeita, toiminnallisia harjoituksia ja leikkejä. Opettaja näkee oman kirjan aukeamaltaan oppilaan kirjan sisällöt lisä- ja kotitehtävineen sekä vastaukset niihin. Sekä vuoden 1994 että 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisissa Laskutaito-kirjasarjan opettajaoppaissa sisältöjen kerrotaan pohjautuvan kognitiiviseen oppimiskäsitykseen, jonka valossa oppikirjailijat näkevät tärkeinä muun muassa oppilaan aktiivisen toimijuuden tukemisen sekä matemaattisen ajattelun ja ongelmanratkaisutaitojen kehittämisen (mm. Rikala, Sieppi, Uus-Leponiemi & Ilmavirta, 1996, s. 4). Ajattelumallien kehittyminen edellyttää vuorovaikutusta muiden kanssa, minkä vuoksi Laskutaidon

materiaaleihin on haluttu sisällyttää suullisia ja toiminnallisia harjoituksia (Koivisto, Salonen, Sintonen, Uus-Leponiemi & Ilmavirta, 2007, s. 4).

Kustannusyhtiö Kirjayhtymän ja sittemmin Tammen julkaiseman *Mieti ja laske* -kirjasarjan oppilaan ja opettajan materiaalit koostuvat syksyn ja kevään kirjasta jokaisella luokka-asteella 1–6. Jokaista oppilaan kirjan aukeamaa kohden on opettajaoppaassa oma aukeamansa, joka sisältää ehdotuksia opetuksen toteuttamiseen sekä ratkaisut oppilaan kirjan tehtäviin. *Mieti ja laske* -sarjan opettajaoppaiden alussa avataan usean aukeaman laajuudella opetuksen lähtökohtia ja pedagogisia perusteita. 1., 3. ja 6. vuosiluokan opettajaoppaissa viitataan mm. pyrkimykseen kehittää oppilaiden metakognitiivisia taitoja: *Mieti ja laske* -kirjasarjan tekijät näkevät oman ajattelun sanallistamisen (Vähäpassi, Hartikainen & Häggblom, 1997, s. 4), erilaisten ratkaisumallien esittelemisen (Nordström, Vähäpassi & Vaahtokari, 2002, s. 13), laajojen yhteyksien ymmärtämisen sekä tiedostettujen käsitteiden varassa toimimisen (Vähäpassi, Hartikainen, Vaahtokari & Hänninen, 2004, s. 4) tärkeinä tekijöinä metakognitiivisten taitojen kehittämisessä.

Tuhattaituri on Otavan kustantama matematiikan oppikirjasarja vuosiluokille 1–6. Oppilaan kirjoissa tuntikokonaisuudet rakentuvat kahdesta peräkkäisestä aukeamasta, jotka sisältävät perustehtäviä, tilaa päässälaskujen vastauksille, eri tasoisia lisätehtäviä sekä kotitehtävät. Jokaisen tuntikokonaisuuden alussa on teoriaosio, jossa esitellään käsiteltävä aihe. Oppilaan kirjan aukeamia vastaa opettajaoppaan aukeamat, joissa annetaan ehdotus oppitunnin kuluksi, tarjotaan vinkkejä erilaisten lisätehtävien ja toiminnallisten aktiviteettien toteuttamiseen sekä esitetään vastaukset oppilaan kirjan tehtäviin. Opettajaoppaan alussa esitellään tiiviisti sekä oppilaan kirjan että opettajaoppaan rakenne ja erilaiset osiot. Tämän lisäksi Tuhattaiturin opettajaoppaissa on Tietolaareja sekä Pedagogisia vinkkejä, joihin on sisällytetty lisätietoja kulloisestakin käsiteltävästä aiheesta ja vinkkejä siitä, mihin opetuksessa kannattaa kiinnittää huomiota. Muiden aineiston oppikirjasarjojen tapaan Tuhattaiturin jokaisen vuosiluokan oppimateriaalit koostuvat kahdesta osasta, syksyn ja kevään kirjasta.

Aineiston oppimateriaaleihin tullaan tästä eteenpäin viittaamaan tekstissä muodossa ”Laskutaito 1S, 1994”, ”Laskutaito 3K, 2004”, ”Mieti ja laske 6K, 1994”, ”Tuhattaituri 3S, 2004”, jne. Tunnuksilla S ja K ilmaistaan, onko kyseessä syys- vai kevätosan kirja. Vuosiluvulla puolestaan viitataan siihen, onko kyseinen oppimateriaali julkaistu vuoden 1994

vai 2004 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden aikana. Tutkimusaineiston oppimateriaalien tarkat tekijätiedot on merkitty tutkimuksen lähdeluettelon loppuun.

5.2 Oppilaan kirjojen analyysi

Oppilaiden kirjojen sisällöt oli koodattu MOPPI-tutkimusprojektin jäsenten toimesta kolmeen toisensa poissulkevaan ryhmään: teoria, tehtävä, muu. Teoriaksi oli merkitty oppilaan kirjan sisällöt, joissa esitellään kappaleessa käsiteltävä asia, esimerkiksi opetetaan laskuoperaatio tai avataan uusi käsite. Teoriasisällöt ovat usein kappaleiden alussa sijaitsevia osioita, jotka on rajattu muusta sisällöstä omaksi kokonaisuudekseen. Tehtäviksi oli merkitty oppikirjojen sisällöt, joissa oppilasta pyydetään toimimaan annetun ohjeistuksen mukaisesti ja tuottamaan jonkinlainen ratkaisu tai vastaus. Tehtävät on usein numeroitu ja sisältävät ohjeistuksen, kuten ”laske”, ”merkitse” tai ”pelaa”. Mahdolliset saman ohjeistuksen alla olevat sisällöt, kuten a-, b- ja c-kohdat, sisällytettiin samaan analyysiyksikköön. Muu-koodilla puolestaan oli merkitty oppikirjojen sisältöjä, jotka eivät täyttäneet teoria- tai tehtäväkoodien määritelmiä. Näitä olivat muun muassa päässälaskujen vastauksille varatut ruudut sekä oppikirjojen liitteinä olevat lisämateriaalit, kuten leikkirahat ja murtokakkupalat. Muu-kategorian sisältöjä ei sisällytetty tässä tutkimuksessa myöhempään analyysiin.

Taulukoissa 3 ja 4 on esitetty teoria- ja tehtäväosioiden frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit aineiston kirjasarjojen osalta niin, että syys- ja kevätlukukausien frekvenssit on laskettu yhteen lukuvuosittain. Koodaus toimi aineiston esivalmisteluna ja mahdollisti myöhemmän sisällönanalyysin pohjalta määritettävien analyysiyksiköiden prosentiosuuksien laskemisen eri oppikirjojen osalta sekä vertailemisen eri opetussuunnitelmien aikaisten kirjasarjojen välillä.

Taulukko 3 Teoria- ja tehtäväsisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 1994 opetus suunnitelman aikaisissa aineiston oppikirjoissa.

Oppilaan kirjan sisällöt	Laskutaito 1	Laskutaito 3	Laskutaito 6	Mieti ja laske 1	Mieti ja laske 3	Mieti ja laske 6
Teoria, f (%)	25 (4,4 %)	48 (6,0 %)	52 (5,1 %)	13 (2,1 %)	31 (3,2 %)	111 (7,8 %)
Tehtävä, f (%)	544 (95,6 %)	754 (94,0 %)	970 (94,9 %)	608 (97,9 %)	941 (96,8 %)	1317 (92,2 %)
Yhteensä, f (%)	569 (100 %)	802 (100 %)	1022 (100 %)	621 (100 %)	972 (100 %)	1428 (100 %)

Taulukko 4 Teoria- ja tehtäväsisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 2004 opetus suunnitelman aikaisissa aineiston oppikirjoissa.

Oppilaan kirjan sisällöt	Laskutaito 1	Laskutaito 3	Laskutaito 6	Tuhat-taituri 1	Tuhat-taituri 3	Tuhat-taituri 6
Teoria, f (%)	38 (6,2 %)	62 (8,4 %)	59 (5,6 %)	54 (5,9 %)	72 (6,9 %)	59 (5,5 %)
Tehtävä, f (%)	576 (93,8 %)	679 (91,6 %)	997 (94,4 %)	861 (94,1 %)	966 (93,1 %)	1006 (94,5 %)
Yhteensä, f (%)	614 (100 %)	741 (100 %)	1056 (100 %)	915 (100 %)	1038 (100 %)	1065 (100 %)

Oppilaan kirjoja koskevan analyysin ensimmäinen vaihe toteutettiin teorialähtöisenä sisällönanalyysinä, jossa aineiston analyysin luokittelun teoriataustana hyödynnettiin Vicenten, Sánchezin ja Verschaffelin (2020) esittämiä tarkistamisen analyysiluokkia: ei-matemaattinen tarkistaminen (*generic checking*), matemaattinen tarkistaminen (*specific mathematical checking*) ja kontekstuaalinen tarkistaminen (*specific situational verification*). Analyysiyksikkönä käytettiin tekstikokonaisuutta, jossa jollakin tapaa ohjataan tarkistamiseen tai käsitellään tarkistamista. Tekstikokonaisuutena ymmärrettiin esimerkiksi teoriaosio tai laskutehtävä sisältäen mahdolliset alakohdat.

Teorialähtöisen analyysin jälkeen ei-matemaattisen tarkistamisen analyysiyksiköt koodattiin aineistolähtöisesti vielä kolmeen alaluokkaan sen mukaan, onko tehtävän yhteydessä tulospalkkia vai ei, ja onko tulospalkin vastausvaihtoehtoja sama vai eri määrä kuin ratkaistavia laskutehtäviä. Tehtävien, joiden tulospalkissa on eri määrä vastausvaihtoehtoja kuin tehtäviä, voidaan tulkita kannustavan oppilaita tarkistamaan tehtävät ja auttavan oppilaita huomaamaan mahdolliset laskuvirheet ja näin myös korjaamaan ratkaisunsa. Tehtävät, joiden tulospalkissa on puolestaan sama määrä vastausvaihtoehtoja kuin tehtäviä, voivat puolestaan

tarjota oppilaille mahdollisuuden arvata ratkaisuja annettujen vastausvaihtoehtojen pohjalta. Näin ollen niiden voidaan tulkita tukevan heikommin oppilaan metakognitiivisia taitoja tarkistamisen osalta.

Taulukkoon 5 on koostettu oppilaan kirjojen sisällönanalyysissä käytetyt pää- ja alaluokat aineistoesimerkkeineen. Taulukossa esitetyt aineistoesimerkit ovat eri analyysiyksiköiden pohjalta yhdistäen muodostettuja pelkistettyjä ilmaisuja. Suoria aineistositaatteja on esitetty tuloksien yhteydessä luvussa 6.

Taulukko 5 Oppilaan kirjojen sisällönanalyysissä käytetyt koodit.

Yläluokka	Pääluokka	Alaluokka	Pelkistetty aineistoesimerkki
1 Tarkistamiseen ohjaaminen oppilaan kirjan sisällössä	1.1 Ei-matemaattinen tarkistaminen	1.1a Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on eri määrä kuin tehtäviä	Laske ja ympyröi summa alhaalta.
		1.1b Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on sama määrä kuin tehtäviä	Laske ja merkitse kirjain ruutuun tuloksen alle.
		1.1c Ei-matemaattisen tarkistamisen sisällöt, joissa ei ole erillistä tulospalkkia	Keskustelkaa parin kanssa, onko vastaus oikein. Tarkista tulos laskimella.
	1.2 Matemaattinen tarkistaminen	–	Tarkista vähennyslasku yhteenlaskulla.
	1.3 Kontekstuaalinen tarkistaminen	–	Vertaa vastausta kysymykseen, ja arvioi, onko vastaus järkevä.

Koodilla 1.1 Ei-matemaattinen tarkistaminen merkittiin oppilaan kirjan harjoitustehtäviä ja teoriaosioita, joissa yleisellä tasolla ohjattiin tarkistamaan, onko saatu vastaus oikein. Ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaamiseksi tulkittiin sisällöt, joissa oppilasta ohjeistetaan esimerkiksi ympyröimään tai värittämään saamaansa tulosta vastaava luku tehtävän ohessa olevasta tulospalkista tai kuvasta. Pääluokka 1.1 jaettiin aineistolähtöisesti kolmeen alaluokkaan: Koodilla 1.1a merkittiin harjoitustehtäviä, joiden yhteydessä olevassa tulospalkissa on vastausvaihtoehtoja eri määrä kuin laskutehtäviä (Kuva 1). Koodilla 1.1b merkittiin harjoitustehtäviä, joiden yhteydessä olevassa tulospalkissa lukuja on saman verran kuin laskutehtäviä (Kuva 2). Oppilaan kirjan sisältöjä, joissa ohjataan yleisellä, ei-matemaattisella tasolla tarkistamiseen mutta joiden yhteydessä ei ole tulospalkkia tai

vastausvaihtoehtoja, merkittiin koodilla 1.1c. (Kuva 3). Alla olevat kuvat 1–3 eivät ole suoria aineistositaatteja, vaan aineiston pohjalta luotuja havainnollistavia esimerkkejä.

Laske. Rengasta tulos.

- a) $30 - 13 = 17$
 b) $55 - 47 = 8$
 c) $3 + 27 - 2 = 28$
 d) $14 + 20 = 34$
 e) $42 - 22 = 20$
 f) $9 + 9 = 18$

8 17 18 20 22 28 34 35

Laske. Merkitse tulosta vastaava kirjain ruutuun.

$60 : 6 = 10$

$30 : 15 = 2$

$24 : 12 = 2$

$45 : 9 = 5$

$40 : 20 = 2$

2	5	10
K	U	A

Kuva 1 Havainnollistavat esimerkit alakategoriasta 1.1a Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on eri määrä kuin tehtäviä.

Laske. Merkitse kirjain tulosta vastaavaan ruutuun.

$30 + 10 = 40$ V

$4 + 4 + 8 = 16$ H

$20 - 5 = 15$ E

$15 - 7 = 8$ T

$38 + 4 = 42$ Ä

$20 + 15 = 35$ Ä

$55 - 25 = 30$ T

8	15	16	30	35	40	42
T	E	H	T	Ä	V	Ä

Kuva 2 Havainnollistava esimerkki alakategoriasta 1.1b Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on sama määrä kuin tehtäviä.

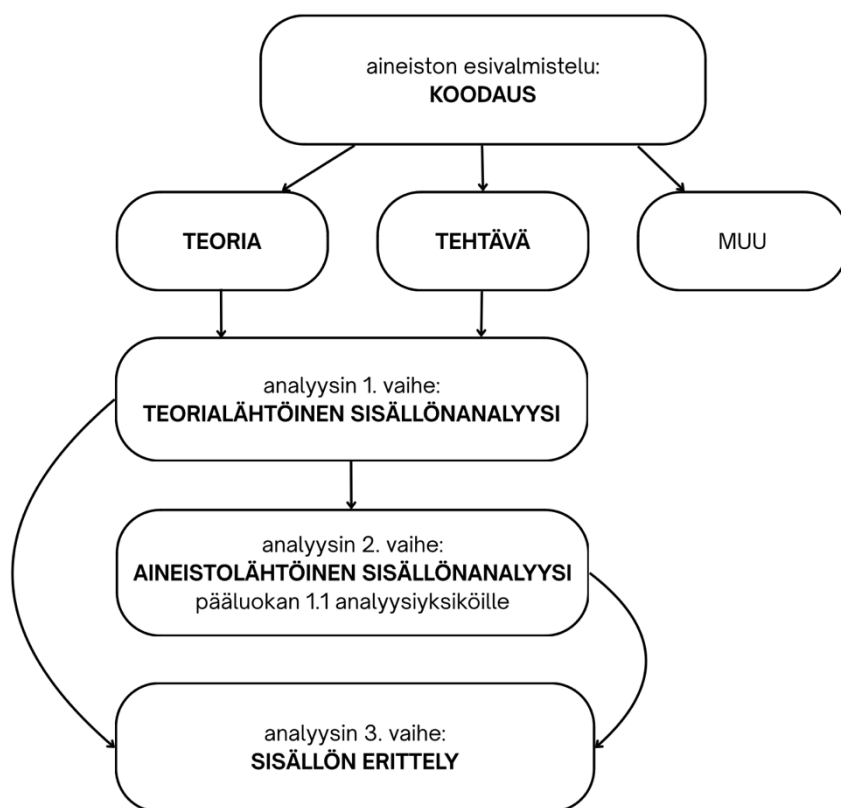
Täydennä puuttuva luku.**Tarkista laskimella.**

- a) $0,5 + \underline{\quad} = 0,7$
- b) $\underline{\quad} + 2,0 = 5,6$
- c) $3,7 + 0,7 = \underline{\quad}$
- d) $4,0 - \underline{\quad} = 1,9$

Kuva 3 Havainnollistava esimerkki alakategoriasta 1.1c Ei-matemaattisen tarkistamisen sisällöt, joissa ei ole erillistä tulospalkkia.

Matemaattista tarkistamista merkittiin koodilla 1.2. Matemaattiseksi tarkistamiseksi tulkittiin oppilaan kirjojen sisällöt, joissa ohjattiin tarkistamaan ratkaisu jotakin matemaattista operaatiota hyödyntäen. Koodilla 1.3 puolestaan merkittiin kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä. Tällä tarkoitettiin oppilaan kirjan sisältöjä, joissa oppilasta ohjataan pohtimaan ja tarkistamaan, onko ratkaisu ja saatu tulos tehtäväkontekstin kannalta järkevä ja mielekäs.

Sisällönanalyysien lisäksi aineiston käsittelyssä hyödynnettiin sisällön erittelyä eli kvantitatiivista tarkastelua (Tuomi & Sarajärvi 2018, s. 119). Kvantifiointi toteutettiin määrittämällä, kuinka monta kertaa tietyn luokan sisältämä asia esiintyy aineistossa (Elo ym., 2022). Kvantifioinnin tulokset esitetään frekvensseinä ja suhteellisina frekvensseinä luvussa 6. Tarkasteltaessa eri luokkien painotusten eroja ja niiden tilastollista merkitsevyyttä opetussuunnitelmien välillä hyödynnettiin ristiintaulukointia sekä khiin neliö -testiä. Tilastollisen merkitsevyyden rajana käytettiin arvoa $p < .05$ (Tähtinen, Laakkonen & Broberg 2020, s. 42). Kuviossa 3 on esitetty tiivistetysti koko analyysiprosessi oppilaiden kirjojen osalta.



Kuvio 3 Analyysin eteneminen oppilaan kirjojen osalta.

5.3 Opettajaoppaiden analyysi

Toisen tutkimuskysymyksen kohdalla teorialähtöisessä sisällönanalyysissä hyödynnettiin Hemmin, Krzywackin ja Koljosen (2018) määritelmää pedagogisesta tuesta. Tämän tutkimuksen analyysissä pedagoginen tuki jaettiin kahteen, toisensa poissulkevaan luokkaan: 2.1 Opetusvinkit ja lisätieto, ja 2.2 Tehtäväkohtainen tarkistamisen maininta. Opetusvinkeillä ja lisätiedoilla tarkoitettiin opettajaoppaiden opettajille suunnattuja sisältöjä, jotka käsittelevät tarkistamista ja sen merkityksiä ja esimerkiksi ohjaavat tarkistamisen opettamiseen. Tehtäväkohtaisella tarkistamisen maininnalla puolestaan tarkoitettiin opettajaoppaiden sisältämien erilaisten tehtävien, pelien ja muiden aktiviteettien ohjeistuksissa olevaa yleistä tarkistamisen mainintaa. Opettajaoppaiden liitteinä olevia lisätehtävämonisteita ei sisällytetty analysoitavaan aineistoon. Analyysiyksikkönä käytettiin tekstikokonaisuutta, jossa jollakin tapaa ohjataan tarkistamiseen tai käsitellään tarkistamista. Tekstikokonaisuutena ymmärrettiin esimerkiksi ohjeistus liittyen oppilaan kirjan teoriaosioon, pelin tai harjoituksen ohje sekä opettajaopasta esittelevä tekstikappale.

Taulukossa 6 on esitetty opettajaoppaiden teorialähtöisessä sisällönanalyysissä käytetyt pääluokat aineistoesimerkkeineen. Taulukossa esitetyt aineistoesimerkit ovat eri analyysiyksiköiden pohjalta yhdistäen muodostettuja pelkistettyjä ilmaisuja. Suoria aineistositaatteja esitetään tuloksien yhteydessä luvussa 6.

Taulukko 6 Opettajaoppaiden teorialähtöisen sisällönanalyysin luokat

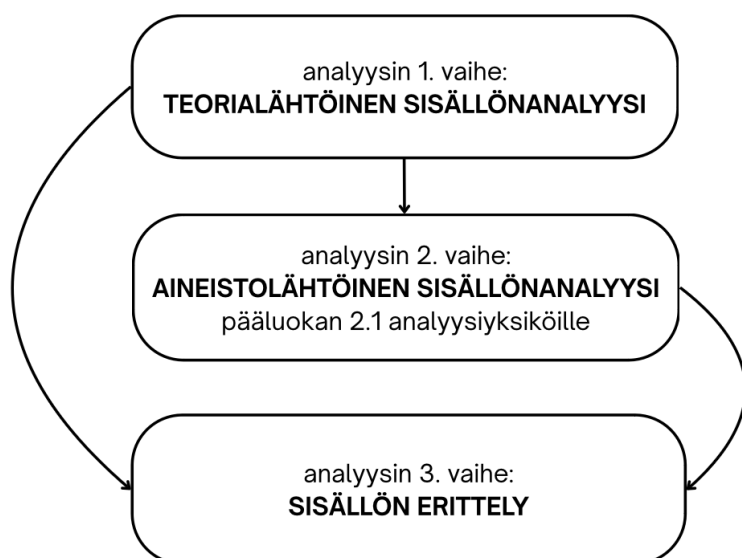
Yläluokka	Pääluokka	Alaluokka	Pelkistetty aineistoesimerkki
2 Tarkistamiseen ohjaaminen opettajaoppaan sisällössä	2.1 Opetusvinkit ja lisätieto	–	Laskinta käytettäessä on hyvä korostaa tulosten arviointia, ettei automaattisesti hyväksytä laskimen antamaa tulosta. Oppilaalta voi kysyä, mistä hän tietää vastauksen olevan oikein.
	2.2 Tehtäväkohtainen tarkistamisen maininta	–	Ratkaistaan laskut vuorotellen. Pari tarkistaa vastauksen kääntämällä kortin.

Teorialähtöisen sisällönanalyysin jälkeen pääluokan 2.1 Opetusvinkit ja lisätieto analyysiyksiköille suoritettiin aineistolähtöinen analyysi, jotta saatiin vielä jäsentyneempi käsitys siitä, miten opettajaoppaissa käsitellään tarkistamista. Aineistolähtöinen analyysi aloitettiin redusoimalla eli tiivistämällä aineisto pelkistetyiksi ilmaisuiksi (Tuomi & Sarajärvi 2018, s. 123). Redusoinnin jälkeen toteutettiin aineiston klusterointi eli ryhmittely, jossa pelkistetyistä ilmaisuista lähdettiin etsimään samankaltaisuuksia ja muodostamaan ja nimeämään alaluokkia (Tuomi & Sarajärvi 2018, s. 124; Elo ym., 2022). Tässä tutkimuksessa muodostettiin toisensa poissulkevat luokat. Alaluokkia yhdistävänä pääluokkana oli jo määritelty luokka 2.1 Opetusvinkit ja lisätieto. Taulukossa 7 on esitetty esimerkkejä aineiston redusoinnista ja klusteroinnista. Alaluokkia muodostettiin kaikkiaan yhdeksän; nämä on esitetty tuloksissa luvussa 6.2.

Sisällönanalyysien lisäksi opettajaoppaiden tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä tarkasteltiin sisällön erittelyllä aineistoa kvantifioiden. Määrällinen aineiston tarkastelu suoritettiin samoja menetelmiä käyttäen kuin oppilaiden kirjojen sisältöjen kohdalla (ks. luku 5.2). Kuviossa 4 on kuvattu kokonaisuudessaan opettajaoppaita koskevan analyysin vaiheet.

Taulukko 7 Esimerkkejä aineiston redusoinnista ja klusteroinnista.

Alkuperäisilmaus	Pelkistetty ilmaus	Alaluokka
<p>“Laskinta käytettäessä on hyvä korostaa tuloksen arviointia, ettei hyväksytä ilman muuta laskimella saatua tulosta.” (Laskutaito 3K, 1994, s. 68)</p> <p>“Kuudennella luokalla laskinta kannattaa käyttää ainakin silloin tällöin erityisten laskintehtävien tekemiseen ja/tai tulosten tarkistamiseen.” (Laskutaito 6S, 1994, s. 9)</p> <p>“Oppilaan tulee tietää, mitä ja miksi hän näppäilee laskimeensa ja hänen tulee oppia suhtautumaan kriittisesti laskimen antamaan tulokseen.” (Laskutaito 3K, 1994, s. 5)</p>	<p>Laskinta käytettäessä harjoitellaan tuloksen järkevyyden arviointia.</p> <p>Laskinta voidaan käyttää tulosten tarkistamiseen.</p> <p>Laskimen antamaan tulokseen tulee oppia suhtautumaan kriittisesti.</p>	<p>Tarkistaminen ja laskimen käyttö</p>
<p>”Yhteinen pohdinta ja keskustelu ratkaisuihin ja ratkaisumenetelmistä on tärkeää.” (Laskutaito 6K, 1994, s. 25)</p> <p>”Paras tapa ratkoa vastausten oikeellisuutta on pyytää oppilaita aina perustelemaan, selostamaan ja kuvailemaan, miten he päätyivät omiin ratkaisuihinsa, jotta metakognitiiviset taidot kehittyisivät.” (Mieti ja laske 3K, 1994, s. 241)</p> <p>”- huomion tulisi kiinnittyä oppilaiden ajatteluun, ei niinkään vastauksen oikeellisuuteen, kuten koulussa perinteisesti. Tämä edellyttää vastauksista keskustelemista, erilaisten vaihtoehtojen löytämistä. Millaiset eri laskutavat voivat johtaa samaan lopputulokseen? Mikä päättelyssä meni pieleen, jos vastaus ei ole oikea?” (Mieti ja laske 6S, 1994, s. 10)</p>	<p>Ratkaisuihin on tärkeää keskustella.</p> <p>Ratkaisujen perusteleminen auttaa vastausten oikeellisuuden arvioimisessa ja kehittää metakognitiivisia taitoja.</p> <p>Yhteisen keskustelun myötä voidaan oppia erilaisista ratkaisutavoista ja huomata päättelyssä mahdollisesti ilmeneviä virheitä tai puutteita.</p>	<p>Keskustelu ja perusteleminen osana tarkistamista</p>



Kuvio 4 Analyysin eteneminen opettajaoppaiden osalta.

5.4 Tutkimuksen eettisyys

Tutkimuksen kaikissa vaiheissa pyrittiin noudattamaan Tutkimuseettisen neuvottelukunnan (TENK) tutkijoille ja korkeakouluopiskelijoille laatimia hyvän tieteellisen käytännön peruseriaatteita eli luotettavuutta, rehellisyyttä, arvostusta ja vastuunkantoa (TENK 2023). Tutkimusprosessin vaiheet on kuvattu mahdollisimman tarkasti ja avoimesti, jotta niiden luotettavuutta on mahdollista arvioida. Myös prosessiin liittyvät puutteet ja rajoitteet on pyritty tunnistamaan ja raportoimaan. Tutkimusta tehdessä on kunnioitettu muiden tutkijoiden työtä viittaamalla lähdeaineistoihin asianmukaisesti.

Tutkimuksen raportoinnissa huomioitiin Euroopan parlamentin ja neuvoston antama direktiivi (EU) 2016/2102, jolla pyritään edistämään saavutettavuutta (Laki digitaalisten palvelujen tarjoamisesta 306/2019). Direktiivi velvoittaa huolehtimaan tutkielmatiedostojen saavutettavuudesta kattaen sekä sisällön ymmärrettävyyden että teknisen saavutettavuuden (Turun yliopisto, 2025). Turun yliopiston (2025) antamien ohjeiden mukaisesti tutkimuksessa on käytetty selkeää ja ymmärrettävää kieltä sekä pyritty selkeään, loogisesti etenevään ja ulkoasultaan helppolukuiseen rakenteeseen. Tutkimuksessa esitetyille kuville ja kuvioille on laadittu tekstivastineet.

Koska aineistona käytettiin kustannettuja oppimateriaaleja, aineiston ja tulosten esittäminen edellytti eettistä pohdintaa ja tarkastelua tekijänoikeudellisten asioiden näkökulmasta. Tekijänoikeusjärjestö Kopiosto (2024) on myöntänyt korkeakouluille kopiointiluvat opetus-, tutkimus- ja hallintotoimintaan. 1.8.2024 alkaen toistaiseksi voimassa olevan kopiointiluvan lupaehdoissa kuitenkin säädetään, että kopiointilupa ei koske tehtävä- ja ratkaisukirjoja. Kopiointiluvalla ei saa myöskään julkaista kopioita osana julkaisua (Kopiosto 2024). Näin ollen tutkimusraporttiin ei liitetty kopioita aineiston oppikirjoista, vaan analyysiyksiöitä kuvailtiin sanallisesti, suorilla kirjallisilla sitaateilla sekä aineiston pohjalta itse laadituilla havainnollistavilla kuvilla.

6 Tulokset

Seuraavissa alaluvuissa esitetään saadut tutkimustulokset tutkimuskysymysten järjestystä mukailleen. Ensin käsitellään, millä tavoin oppikirjojen sisällöt ohjaavat oppijoita tarkistamiseen, ja tämän jälkeen tarkastellaan opettajaoppaiden tarjoamaa pedagogista tukea. Tulokset on esitetty vuosiasteittain niin, että kirjasarjojen kunkin lukuvuoden oppikirjojen frekvenssit on laskettu yhteen: esimerkiksi Tuhattaituri 1S- ja Tuhattaituri 1K -kirjoja koskevat tulokset on näin ollen esitetty yhdessä ja nimetty yleisesti Tuhattaituri 1. Eri opetussuunnitelmien aikaisten oppimateriaalien välillä mahdollisesti ilmeneviä eroja tarkastellaan muiden tulosten yhteydessä.

6.1 Tarkistamiseen ohjaaminen matematiikan oppikirjojen oppilaille suunnatuissa sisällöissä

Taulukoissa 8 ja 9 on esitetty kaikkien tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit sekä tarkistamisen sisältöjen osuudet kaikista kirjan sisällöistä. Saatujen tulosten mukaan tarkistamiseen ohjaaminen matematiikan oppikirjoissa on kaiken kaikkiaan hyvin vähäistä. Vuoden 1994 osalta oppilaan kirjojen tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen osuus kaikista teoria- ja tehtäväsisällöistä on 1,2 prosenttia. Vastaavasti vuoden 2004 oppikirjojen osalta kaikkien tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen osuus on 6,1 prosenttia. Khiin neliö -testin mukaan tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen osuuksissa on tilastollisesti merkitsevä ero ($p < .001$): tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssi sekä suhteellinen frekvenssi ovat vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa aineiston oppikirjoissa suuremmat kuin vuoden 1994 oppimateriaaleissa. Tarkistamisen sisältöjen esiintymisessä on eri opetussuunnitelmien välillä eroa noin viiden prosenttiyksikön verran.

Tuhattaituri-kirjasarjassa korostuvat ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavat sisällöt, kuten ”rengasta tulos” -tyyppiset tehtävänannot. Tämä on havaittavissa kaikkien tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen suurempina frekvensseinä muihin aineiston kirjasarjoihin verrattuna ja kasvattaa näin ollen myös vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisten oppikirjojen yhteenlaskettua frekvenssiä kaikkien tarkistamisen sisältöjen osalta. Laskutaito- sekä Mieti ja laske -kirjasarjoissa kaikkien tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit ovat keskenään samaa suuruusluokkaa. Yksittäisenä poikkeuksena aineistosta voidaan osoittaa Laskutaito 6 (1994) -oppikirjat, joissa koko lukuvuoden aikana esiintyy ainoastaan kaksi tarkistamiseen ohjaavaa sisältöä.

Taulukko 8 Kaikkien tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.

Oppikirjan sisältö	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Mieti ja laske 1	Mieti ja laske 3	Mieti ja laske 6	Yhteensä (1994)
kaikki teoria- ja tehtäväsisällöt, f	569	802	1022	621	972	1428	5414
kaikki tarkistamiseen ohjaavat sisällöt, f (%)	11 (1,9 %)	22 (2,7 %)	2 (0,2 %)	12 (1,9 %)	11 (1,1 %)	9 (0,6 %)	67 (1,2 %)

Taulukko 9 Kaikkien tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.

Oppikirjan sisältö	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Tuhat- taituri 1	Tuhat- taituri 3	Tuhat- taituri 6	Yhteensä (2004)
kaikki teoria- ja tehtäväsisällöt, f	614	741	1056	915	1038	1065	5429
kaikki tarkistamiseen ohjaavat sisällöt, f (%)	11 (1,8 %)	21 (2,8 %)	14 (1,3 %)	47 (5,1 %)	144 (13,9 %)	95 (8,9 %)	332 (6,1 %)

Taulukoissa 10 ja 11 on esitetty ei-matemaattiseen, matemaattiseen ja kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit sekä niiden osuudet suhteessa kaikkiin tarkistamisen sisältöihin. Molempien opetussuunnitelmien aikaisissa matematiikan oppikirjoissa eri tarkistamisen tyypeihin ohjaavien sisältöjen painotukset ovat samansuuruisia: ei-matemaattisen tarkistamisen osuus on 88–89 prosenttia, matemaattisen tarkistamisen osuus 9–10 prosenttia ja kontekstuaalisen tarkistamisen osuus 1–3 prosenttia. Tarkasteltaessa kunkin opetussuunnitelman aikaisten oppikirjojen yhteenlaskettuja frekvenssejä tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen osuuksissa ei ilmennyt khiin neliö -testin mukaan tilastollisesti merkitsevää eroa ($p = .539$).

Saatujen tulosten mukaan ainoastaan Mieti ja laske 6 (1994) -kirjoissa sekä Tuhattaituri 3 (2004) -kirjoissa on edustettuna kaikki kolme tarkistamisen pääluokkaa, vaikkakin yksittäisten pääluokkien frekvenssit ovat niissäkin osittain hyvin pieniä. Mieti ja laske 1- ja Mieti ja laske 3 (1994) -kirjoissa sekä Laskutaito 6 (1994) -kirjoissa on puolestaan ainoastaan ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä. Suurimmassa osassa aineiston oppikirjoista esiintyy sekä ei-matemaattiseen että matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä. Kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä on ainoastaan Mieti ja laske 6 (1994) -, Laskutaito 6 (2004) - sekä Tuhattaituri 3 (2004) -kirjoissa.

Taulukko 10 Tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.

Koodi	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Mieti ja laske 1	Mieti ja laske 3	Mieti ja laske 6	Yhteensä (1994)
1.1 Ei-matemaattinen tarkistaminen, f (%)	10 (91 %)	18 (82 %)	2 (100 %)	12 (100 %)	11 (100 %)	6 (67 %)	59 (88 %)
1.2 Matemaattinen tarkistaminen, f (%)	1 (9 %)	4 (18 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (11 %)	6 (9 %)
1.3 Kontekstuaalinen tarkistaminen, f (%)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (22 %)	2 (3 %)

Taulukko 11 Tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.

Koodi	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Tuhat- taituri 1	Tuhat- taituri 3	Tuhat- taituri 6	Yhteensä (2004)
1.1 Ei-matemaattinen tarkistaminen, f (%)	8 (73 %)	17 (81 %)	11 (79 %)	35 (74 %)	131 (91 %)	93 (98 %)	295 (89 %)
1.2 Matemaattinen tarkistaminen, f (%)	3 (27 %)	4 (19 %)	0 (0 %)	12 (26 %)	12 (8 %)	2 (2 %)	33 (10 %)
1.3 Kontekstuaalinen tarkistaminen, f (%)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (21 %)	0 (0 %)	1 (1 %)	0 (0 %)	4 (1 %)

6.1.1 Ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaaminen oppilaiden kirjojen sisällöissä

Ei-matemaattisen tarkistamisen sisällöt ovat määrällisen osuutensa lisäksi myös sisällöllisesti varsin samankaltaisia molempien opetussuunnitelmien aikaisissa oppikirjoissa. Seuraavat sitaatit ovat aineistoesimerkkejä tyypillisistä luokan 1.1 Ei-matemaattinen tarkistaminen sisällöistä:

”Laske. Ympyröi tulokset alhaalta.” (Laskutaito 3K, 1994, s. 69.)

”Ratkaise. Väritä vastaus kuvasta vihreällä.” (Mieti ja laske 3K, 1994, s. 247.)

”Laske. Merkitse tulosta vastaava kirjain ruutuun.” (Tuhattaituri 6S, 2004, s. 178.)

Edellä kuvattujen esimerkkien lisäksi ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaaminen ilmeni aineiston oppikirjoissa myös muun muassa kehotuksena tarkistaa tehtävä parin kanssa tai esimerkiksi laskimella:

”Harjoitelkaa pareittain kertotaulukorteilla ja ruudukoilla. - - Tarkistakaa vastaus kääntämällä kortit.” (Mieti ja laske 3S, 1994, s. 155.)

”- - Kun olet päässyt reitin loppuun, voit vielä itse tarkistaa tai antaa parisi tarkistaa reitille valitut laskutoimitukset.” (Laskutaito 6K, 1994, s. 150.)

”Laske vihkoosi. Tarkista laskut lopuksi laskimella.” (Tuhattaituri 6S, 2004, s. 27.)

Ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaaminen korostuu kaikissa aineiston oppikirjoissa. Taulukoissa 12 ja 13 on eritelty ei-matemaattisen tarkistamisen alaluokkien frekvenssit sekä niiden osuudet suhteessa kaikkiin ei-matemaattisen tarkistamisen sisältöihin. Vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa korostuu alaluokka 1.1a Tulospalkilliset sisällöt, joissa vaihtoehtoja on eri määrä kuin tehtäviä. Kokonaan tulospalkittomia ei-matemaattisen tarkistamisen sisältöjä on puolestaan selvästi vähiten. Vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisten oppikirjojen osalta ei-matemaattisen tarkistamisen alaluokkien painottuminen on puolestaan tasaisempaa: alaluokan 1.1a Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on eri määrä kuin tehtäviä havaintojen osuus on 44 prosenttia, alaluokan 1.1b Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on sama määrä kuin tehtäviä osuus on 27 prosenttia ja alaluokan 1.1c Ei-matemaattisen tarkistamisen sisällöt, joissa ei erillistä tulospalkkia osuus on 29 prosenttia. Tulospalkittomia ei-matemaattisen tarkistamisen sisältöjä on näin ollen suhteessa enemmän kuin tulospalkillisia sisältöjä, joissa vastausvaihtoehtoja on sama määrä kuin tehtäviä. Khiin neliö -testin myötä eri opetussuunnitelmien aikaisten oppikirjojen välillä todettiin olevan tilastollisesti merkitsevä ero ($p < .001$) kaikkien ei-matemaattisen tarkistamisen alaluokkien suhteen.

Taulukko 12 Ei-matemaattisen tarkistamisen alaluokkien frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.

Koodi	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Mieti ja laske 1	Mieti ja laske 3	Mieti ja laske 6	Yhteensä (1994)
1.1a Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on eri määrä kuin tehtäviä, f (%)	7 (70 %)	7 (39 %)	0 (0 %)	7 (58 %)	4 (36 %)	1 (17 %)	26 (44 %)
1.1 b Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on sama määrä kuin tehtäviä, f (%)	3 (30 %)	11 (61 %)	0 (0 %)	1 (8 %)	1 (9 %)	0 (0 %)	16 (27 %)
1.1c Ei-matemaattisen tarkistamisen sisällöt,	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (100 %)	4 (33 %)	6 (55 %)	5 (83 %)	17 (29 %)

Koodi	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Mieti ja laske 1	Mieti ja laske 3	Mieti ja laske 6	Yhteensä (1994)
joissa ei ole erillistä tulospalkkia, f (%)							

Taulukko 13 Ei-matemaattisen tarkistamisen alaluokkien frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa.

Koodi	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Tuhat- taituri 1	Tuhat- taituri 3	Tuhat- taituri 6	Yhteensä (2004)
1.1a Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on eri määrä kuin tehtäviä, f (%)	1 (13 %)	8 (47 %)	0 (0 %)	33 (94 %)	115 (88 %)	87 (94 %)	244 (83 %)
1.1 b Tulospalkilliset sisällöt, joissa vastausvaihtoehtoja on sama määrä kuin tehtäviä, f (%)	7 (88 %)	9 (53 %)	3 (27 %)	1 (3 %)	15 (11 %)	3 (3 %)	38 (13 %)
1.1c Ei-matemaattisen tarkistamisen sisällöt, joissa ei ole erillistä tulospalkkia, f (%)	0 (0 %)	0 (0 %)	8 (73 %)	1 (3 %)	1 (1 %)	3 (3 %)	13 (4 %)

6.1.2 Matemaattiseen tarkistamiseen ohjaaminen oppilaiden kirjojen sisällöissä

Molempien opetussuunnitelmien aikaisissa aineiston oppikirjoissa kaikista tarkistamisen sisällöistä matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen osuus on noin 10 prosenttia (Taulukot 10 & 11). Vuoden 1994 oppikirjojen kohdalla frekvenssi on 6 ja vuoden 2004 oppikirjojen kohdalla puolestaan 33. Määrällisesti matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä on siis enemmän uudemman opetussuunnitelman aikaisissa oppikirjoissa, ja koko aineiston osalta matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavat sisällöt painottuvatkin Tuhattaituri-sarjan (2004) kirjoihin. Laskutaito- ja Mieti ja laske -kirjoissa matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssi vaihtelee 0–4 välillä luokka-astetta kohden (Taulukot 10 & 11). Koko aineiston 24 oppikirjasta 15 kirjassa matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä ei esiinny ollenkaan.

Kaikki aineistossa esiintyvät matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavat sisällöt käsittelevät joko jakolaskun tarkistamista kertolaskulla tai vähennyslaskun tarkistamista yhteenlaskulla. Näistä esimerkkeinä ovat seuraavat aineistositaatit:

”Las-ke [vähennyslasku]. Tar-kis-ta tu-los yh-teen-las-kul-la.” (Laskutaito 1K, 1994, s. 102.)

”Jakolaskun voi tarkistaa kertolaskulla.” (Tuhattaituri 3S, 2004, s. 166.)

”Laske [jakolasku]. Tarkista kertolaskun avulla.” (Tuhattaituri 6K, 2004, s. 38.)

6.1.3 Kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaaminen oppilaiden kirjojen sisällöissä

Kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä oli molempien opetussuunnitelmien aikaisissa aineiston oppikirjoissa vähiten kaikkiin tarkistamisen sisältöihin nähden.

Kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen osuus kaikista tarkistamisen sisällöistä on vuoden 1994 oppikirjoissa kolme prosenttia ja vuoden 2004 oppikirjoissa yksi prosentti; eri opetussuunnitelmien aikaisissa oppikirjoissa ei havaittu khiin neliö -testin mukaan tilastollisesti merkitsevää eroa ($p = .539$). Kontekstuaalisen tarkistamisen sisällöt keskittyivät saatujen vastausten järkevyyden arvioimiseen sanallisten tehtävien yhteydessä:

”Kerratkaa ratkaisemisvaiheet: - - Arvioi, voiko vastaus olla totta. Tarkista lopuksi.” (Mieti ja laske 6S, 1994, s. 82.)

”Arvioi laskun vastauksen suuruusluokka ensin. Tarkista sitten laskimella. Vertaa, onko laskimella saamasi vastaus järkevän suuruinen.” (Mieti ja laske 6S, 1994, s. 85.)

”Ratkaisemme sanallisia tehtäviä. Opettajalla on kolme putkiloa. Jokaisessa putkilossa on neljä palloa. Lisäksi opettajalla on yksi pallo taskussa. Kuinka monta palloa hänellä on yhteensä? a. Mitä kysytään. Alleviivaa kysymys. - - e. Mieti, onko tulos järkevä. Kirjoita tulos.” (Tuhattaituri 3S, 2004, s. 122.)

”Sanallisen tehtävän ratkaiseminen. 1. Lue tehtävä tarkasti, tarvittaessa useaan kertaan. - - 6. Vertaa vastausta kysymykseen ja mieti, onko vastaus järkevä.” (Laskutaito 6S, 2004, s. 24.)

”Esimerkki 1. Olivia ostaa 15 euroa maksavan T-paidan ja kaksi keskenään samanlaista huivia. Yhteensä ostokset maksavat 27 euroa. Kuinka paljon yksi huivi maksaa? - - Lausekkeena saadaan $(27 \text{ €} - 15 \text{ €}) : 2 = 12 \text{ €} : 2 = 6 \text{ €}$ V:Huivi maksaa 6 €. Koska $6 \text{ €} + 6 \text{ €} + 15 \text{ €} = 27 \text{ €}$, vastaus on oikein.” (Laskutaito 6S, 2004, s. 24.)

”Esimerkki 2. Mikko ostaa paidan ja farkut. Farkut maksavat 25 euroa enemmän kuin paita. Yhteensä ostokset maksavat 79 euroa. Kuinka paljon farkut maksavat ja kuinka paljon paita? - - V: Paita maksaa 27 € ja farkut 52 €. Koska $27 \text{ €} + 52 \text{ €} = 79 \text{ €}$, vastaus on järkevä.” (Laskutaito 6S, 2004, s. 24.)

Kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaavista aineiston sisällöistä puolet eli kolme viimeisintä sitaattia ovat samalta Laskutaito 6 -kirjan sivulta, jonka teoriaosiossa käsitellään sanallisten tehtävien ratkaisemista. Kyseisen sivun esimerkkitehtävät 1 ja 2 olisi voitu myös tulkita matemaattiseen tarkistamiseen ohjaaviksi sisällöiksi, sillä niissä tarkastellaan vastauksen järkevyyttä yhteenlaskun avulla. Teoriaosiossa sanallisten tehtävien ratkaisemisprosessin viimeisenä vaiheena oppilasta kehoitetaan vertaamaan saatua vastausta alkuperäiseen kysymykseen ja pohtimaan, onko vastaus järkevä, ja näin ollen esimerkkitehtävien tulkittiin demonstroivan ennen kaikkea tätä kontekstuaalisen tarkistamisen ydinsisältöä.

Koko 24 kirjaa kattavassa aineistossa kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä on ainoastaan kuusi ($f=6$), joista puolet sijaitsevat samalla oppikirjan sivulla. Voidaan siis todeta, että tarkistamiseen ohjaaminen on aineiston oppikirjoissa käytännössä olematonta.

6.2 Tarkistamiseen liittyvä pedagoginen tuki matematiikan opettajaoppaissa

Opettajaoppaiden tarjoamaa tarkistamiseen liittyvää pedagogista tukea tarkasteltiin kahden pääluokan kautta: 2.1 Opetusvinkit ja lisätieto, sekä 2.2 Tehtäväkohtainen tarkistamisen maininta. Taulukoissa 14 ja 15 on esitetty tarkistamista käsittelevien sisältöjen frekvenssit sekä pääluokkien 2.1 ja 2.2 osuudet suhteessa kaikkiin opettajaoppaiden tarkistamista käsitteleviin sisältöihin. Molempien opetussuunnitelmien aikaisten opettajaoppaiden tarkistamisen sisältöjen yhteenlasketuista frekvensseistä määritettiin prosenttiosuudet: sekä vuoden 1994 että 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisten matematiikan opettajaoppaiden tarkistamista käsittelevistä sisällöistä 25 prosenttia on opetusvinkkejä ja lisätietoa ja 75 prosenttia tarkistamiseen liittyviä tehtäväkohtaisia mainintoja tehtävän tai pelin ohjeissa. Opetussuunnitelmakohtaisista prosenttiosuuksista poiketen Mieti ja laske 6 (1994) - sekä Tuhattaituri 1 (2004) -kirjoissa alaluokan 2.1 Opetusvinkit ja lisätieto frekvenssi on suurempi kuin alaluokan 2.2 Tehtäväkohtainen tarkistamisen maininta. Pääluokkien 2.1 ja 2.2 frekvensseissä ei ilmene khiin neliö -testin mukaan tilastollisesti merkitsevää eroa eri opetussuunnitelmien aikaisten opettajaoppaiden välillä ($p = .967$).

Taulukko 14 Tarkistamista koskeva pedagoginen tuki vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan opettajaoppaissa.

Koodi	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Mieti ja laske 1	Mieti ja laske 3	Mieti ja laske 6	Yhteensä (1994)
2 Tarkistamiseen ohjaaminen opettajaoppaan sisällössä, f	32	87	64	19	21	17	240
2.1 Opetusvinkit ja lisätieto, f (%)	3 (9 %)	17 (20 %)	16 (25 %)	3 (16 %)	9 (43 %)	13 (76 %)	61 (25 %)
2.2 Tehtäväkohtainen tarkistamisen maininta, f (%)	29 (91 %)	70 (80 %)	48 (75 %)	16 (84 %)	12 (57 %)	4 (24 %)	179 (75 %)

Taulukko 15 Tarkistamista koskeva pedagoginen tuki vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan opettajaoppaissa.

Koodi	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Tuhat- taituri 1	Tuhat- taituri 3	Tuhat- taituri 6	Yhteensä (2004)
2 Tarkistamiseen ohjaaminen opettajaoppaan sisällössä, f	37	86	38	29	83	16	289
2.1 Opetusvinkit ja lisätieto, f (%)	2 (5 %)	4 (5 %)	7 (18 %)	18 (62 %)	34 (41 %)	8 (50 %)	73 (25 %)
2.2 Tehtäväkohtainen tarkistamisen maininta, f (%)	35 (95 %)	82 (95 %)	31 (82 %)	11 (38 %)	49 (59 %)	8 (50 %)	216 (75 %)

6.2.1 Tarkistamiseen liittyvät opetusvinkit ja lisätieto matematiikan opettajaoppaissa

Opetusvinkeillä ja lisätiedoilla tarkoitettiin opettajaoppaiden opettajille suunnattuja sisältöjä, jotka käsittelevät tarkistamista, sen merkityksiä, ja esimerkiksi ohjaavat tarkistamisen opettamiseen. Näihin lukeutui muun muassa opettajalle suunnattuja vinkkejä teorian opettamiseen ja taulutyöskentelyyn, ehdotuksia tunnin kuluksi sekä opettajaoppaiden pedagogisia ratkaisuja kuvaavia tekstejä. Esimerkkejä tästä luokasta ovat seuraavat aineistositaatit:

”Vähennyslaskun tarkistaminen yhteenlaskun avulla on monelle ensiluokkalaiselle vaikeasti ymmärrettävä asia. Harva ymmärtää sen vielä niin hyvin, että pystyy käyttämään tarkistusta hyväkseen. Asiaa voidaan kokeilla laskuhelmillä.” (Laskutaito 1K, 2004, s. 110.)

”Laskinta käytettäessä on hyvä korostaa tulosten arviointia, ettei hyväksytä ilman muuta laskimella saatua tulosta.” (Laskutaito 3K, 1994, s. 68.)

”Oppilailta voi kysyä: Mistä tiedät, että vastauksesi on oikein? Miten päädyit vastaukseen? Heikon matemaattisen itsetunnon omaavat oppilaat alkavat heti epäillä vastauksensa oikeellisuutta, kun opettaja kysyy ratkaisuperusteita.

Kysymysten usein toistuttua hekin kuitenkin tottuivat siihen, että ajatteluaan ja ratkaisujaan saa perustella muulloinkin, kuin virheen sattuessa. Näin metakognitiiviset taidot kehittyvät ja oppilaan itsetunto kehittyy hänen saadessaan selostuksestaan myönteistä palautetta.” (Mieti ja laske 3K, 1994, s. 226.)

”Kiinnitetään huomiota siihen, että tarkistuslaskun tulos täytyy oikeasti laskea, jotta siitä olisi tarkistamisessa hyötyä.” (Tuhattaituri 1K, 2004, s. 122.)

”Yksinkertaisen piirroksen tekeminen auttaa tehtävän jäsentämisessä, oikean lausekkeen merkitsemisessä, tehtävän ratkaisemisessa ja tarkistamisessa.” (Tuhattaituri 1K, 2004, s. 53.)

”Tulospalkin luvut ovat peräkkäin ilman välejä, jotta kaikki oppilaat malttaisivat laskea laskun loppuun, eivätkä arvaisi tulosta palkin avulla. Rengastaminen tapahtuu kuitenkin entiseen tapaan. Tätä tarkistamistapaa käytetään jatkossa algoritmien kohdalla.” (Tuhattaituri 3K, 2004, s. 98.)

”Oppikirjan tulospalkilla pyritään ensisijaisesti siihen, että oppilas saa välittömän palautteen suorituksestaan. Näin hän esimerkiksi saa heti tiedon siitä, onko ymmärtänyt tehtävän oikein ja osaa pyytää opettajalta apua, mikäli sitä tarvitsee. Oppilaan on myös helppo korjata mahdollinen virhe saman tien, mikä on oppimisen kannalta tärkeä asia.” (Tuhattaituri 6S, 2004, s. 15.)

”Tavoitteena on harjoitella ratkaisemaan sanallisia tehtäviä ja arvioimaan vastauksen järkevyyttä.” (Laskutaito 6S, 2004, s. 24.)

Päälukun 2.1 Opetusvinkit ja lisätieto analyysiyksiköille suoritettiin aineistolähtöinen sisällönanalyysi (ks. luku 5.3), jonka myötä muodostettiin yhdeksän opettajaoppaiden tarkistamiseen ohjaamisen tapoja kuvaavaa alaluokkaa (Taulukko 16).

Taulukko 16 Opettajaoppaiden tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen alaluokat.

Alaluokka	Esimerkkejä pelkistetyistä ilmauksista
2.1a Käänteisoperaatioiden hyödyntäminen tarkistamisessa	Vähennyslaskun voi tarkistaa yhteenlaskulla.
	Tavoitteena on oppia jakolaskun tarkistaminen kertolaskulla.
	Millä laskulla jakolaskun tuloksen voi tarkistaa?
2.1b Keskustelu ja perusteleminen osana tarkistamista	Ratkaisuista on tärkeää keskustella.
	Ratkaisujen perusteleminen auttaa vastausten oikeellisuuden arvioimisessa ja kehittää metakognitiivisia taitoja.
	Yhteisen keskustelun myötä voidaan oppia erilaisista ratkaisutavoista ja huomata päättelyssä mahdollisesti ilmeneviä virheitä tai puutteita.
2.1c Tarkistaminen ja laskimen käyttö	Laskinta voidaan käyttää tulosten tarkistamiseen.

Alaluokka	Esimerkkejä pelkistetyistä ilmauksista
	<p>Laskimen antamaan tulokseen tulee oppia suhtautumaan kriittisesti.</p> <p>Laskinta käytettäessä harjoitellaan tuloksen järkevyyden arviointia.</p>
2.1d Muu tuloksen järkevyyden arvioimista käsittelevä kohta	<p>Tavoitteena on oppia arvioimaan vastauksen järkevyyttä.</p> <p>Millä perusteella oppilaan pitäisi huomata, että tulos ei ole järkevää?</p> <p>Tuloksen arviointikykyä tulee korostaa, sillä se on hyödyllinen arkielämän taito.</p>
2.1e Oppilaan kirjan tarkistamismetodia selittävä kohta	<p>Tulospalkilla pyritään siihen, että oppilas saa välittömän palautteen suorituksestaan ja hänen on helppo korjata mahdollinen virhe.</p> <p>Tulospalkin luvut ovat peräkkäin ilman välejä, jotta oppilaat eivät arvaisi tulosta palkin avulla.</p> <p>Sanatarkistuksella pyritään motivoimaan laskemista ja helpottamaan tehtävien tarkistusta. Oikeat sanat varmistavat, että lasku on oikein.</p>
2.1f Kotitehtävien tarkistaminen	<p>Oppitunti ehdotetaan aloitettavan kotitehtävien tarkistuksella.</p> <p>Kotitehtävien tarkistamiseen voi valita luokalle sopivimman tavan. Kotitehtävien tarkistamista voidaan toteuttaa ryhmänä, pareittain, itsenäisesti tai opettajajohtoisesti ja esimerkiksi keskustellen tai vastauskirjaa hyödyntäen.</p>
2.1g Päässälaskujen tarkistaminen	<p>Päässälaskuihin voidaan vastata numerokortteja nostamalla, jolloin opettaja näkee kaikkien vastaukset. Päässälaskuihin voidaan vastata myös kirjallisesti ja opettaja tai oppilastoveri voi tarkistaa tulokset.</p> <p>Päässälaskuja voidaan laskea ja tarkistaa parityöskentelynä vastausliuskoja hyödyntämällä.</p>
2.1h Oppilaalle annettava vinkki tarkistamisen tueksi	<p>Yksinkertaisen piirroksen tekeminen auttaa tehtävän hahmottamisessa, ratkaisemisessa ja tarkistamisessa.</p> <p>Tehtävän voi tehdä tai tarkistaa peilin avulla.</p>
2.1i Muut yksittäiset tarkistamiseen liittyvät sisällöt	<p>Algoritmien opettamisen vaarana voi olla, että oppilas luottaa sokeasti saamaansa tulokseen [tarkistamatta sitä].</p> <p>Opettaja voi jakson aikana kerätä oppilaiden kirjat ja tarkistaa, ettei niihin jää määritelmiin ja nimityksiin liittyviä virheitä.</p>

Taulukko 17 Tarkistamiseen liittyvät opetusvinkit ja lisätiedot vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan opettajaoppaissa.

Koodi	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Mieti ja laske 1	Mieti ja laske 3	Mieti ja laske 6	Yhteensä (1994)
2.1 Opetusvinkit ja lisätieto, f (%)	3	17	16	3	9	13	61 (100 %)
2.1a Käänteisoperaatioiden hyödyntäminen tarkistamisessa, f (%)	1	2	0	0	0	1	4 (7 %)
2.1b Keskustelu ja perusteleva osana tarkistamista, f (%)	1	2	8	3	5	5	24 (39 %)
2.1c Tarkistaminen ja laskimen käyttö, f (%)	0	11	8	0	0	0	19 (31 %)
2.1d Muu tuloksen järkevyyden arvioimista käsittelevä kohta, f (%)	0	0	0	0	1	4	5 (8 %)
2.1e Oppilaan kirjan tarkistamismetodia selittävä kohta, f (%)	1	0	0	0	0	0	1 (2 %)
2.1f Kotitehtävien tarkistaminen, f (%)	0	0	0	0	1	0	1 (2 %)
2.1g Päässälaskujen tarkistaminen, f (%)	0	1	0	0	0	3	4 (7 %)
2.1h Oppilaalle annettava vinkki tarkistamisen tueksi, f (%)	0	0	0	0	0	0	0 (0 %)
2.1i Muut yksittäiset tarkistamiseen liittyvät sisällöt, f (%)	0	1	0	0	2	0	3 (5 %)

Koko aineiston osalta suurimmiksi alaluokiksi muodostuivat 2.1a Käänteisoperaatioiden hyödyntäminen tarkistamisessa, 2.1b Keskustelu ja perusteleva osana tarkistamista sekä 2.1c Tarkistaminen ja laskimen käyttö (Taulukot 17 & 18). Vuoden 1994 opettajaoppaissa alaluokan 2.1a osuus on 7 prosenttia, alaluokan 2.1b osuus 39 prosenttia ja alaluokan 2.1c osuus 31 prosenttia. Vuoden 2004 opettajaoppaissa puolestaan alaluokan 2.1a osuus on 47 prosenttia, alaluokan 2.1b osuus 4 prosenttia ja alaluokan 2.1c osuus 8 prosenttia. Kyseisten alaluokkien osuudet eroavat toisistaan khiin neliö -testin mukaan tilastollisesti merkitsevästi eri opetussuunnitelmien aikaisten opettajaoppaiden välillä ($p < .001$).

Myös alaluokan 2.1h Oppilaalle annettava vinkki tarkistamisen tueksi osuudet eroavat khiin neliö -testin mukaan tilastollisesti merkitsevästi ($p < .001$) eri opetussuunnitelmien aikaisten opettajaoppaiden välillä: vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa materiaaleissa kyseisen alaluokan sisältöjä ei esiinny lainkaan, ja vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa

opettajaoppaissa alaluokan osuus on noin 7 prosenttia kaikista tarkistamiseen liittyvistä opetusvinkeistä ja lisätiedosta. Muiden alaluokkien suhteen ei ilmene tilastollisesti merkittävää eroa eri opetussuunnitelmien aikaisten aineiston opettajaoppaiden välillä.

Taulukko 18 Tarkistamiseen liittyvät opetusvinkit ja lisätiedot vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan opettajaoppaissa

Koodi	Lasku- taito 1	Lasku- taito 3	Lasku- taito 6	Tuhat- taituri 1	Tuhat- taituri 3	Tuhat- taituri 6	Yhteensä (2004)
2.1 Opetusvinkit ja lisätieto, f (%)	2	4	7	18	34	8	73 (100 %)
2.1a Käänteisoperaatioiden hyödyntäminen tarkistamisessa, f (%)	1	1	0	12	16	4	34 (47 %)
2.1b Keskustelu ja perusteleva osana tarkistamista, f (%)	1	2	0	0	0	0	3 (4 %)
2.1c Tarkistaminen ja laskimen käyttö, f (%)	0	0	5	0	1	0	6 (8 %)
2.1d Muu tuloksen järkevyyden arvioimista käsittelevä kohta, f (%)	0	0	2	0	1	0	3 (4 %)
2.1e Oppilaan kirjan tarkistamismetodia selittävä kohta, f (%)	0	0	0	0	6	1	7 (10 %)
2.1f Kotitehtävien tarkistaminen, f (%)	0	0	0	0	7	0	7 (10 %)
2.1g Päässälaskujen tarkistaminen, f (%)	0	0	0	0	0	1	1 (1 %)
2.1h Oppilaalle annettava vinkki tarkistamisen tueksi, f (%)	0	0	0	1	3	1	5 (7 %)
2.1i Muut yksittäiset tarkistamiseen liittyvät sisällöt, f (%)	0	1	0	5	0	1	7 (10 %)

Käänteisoperaatioiden hyödyntäminen tarkistamisessa korostuu vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa Tuhattaituri-kirjoissa (Taulukko 18). Kyseiset analyysiyksiköt käsittelevät jakolaskujen tarkistamista kertolaskuilla sekä vähennyslaskujen tarkistamista yhteenlaskujen avulla ja sijaitsevat samoissa kirjojen luvuissa kuin oppikirjojen matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavat sisällöt. Alaluokkien 2.1b Keskustelu ja perusteleva osana tarkistamista sekä 2.1c Tarkistaminen ja laskimen käyttö sisällöt puolestaan painottuvat vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa opettajaoppaissa. Ratkaisutavoista ja tuloksista keskusteleminen sekä ajattelun sanallistaminen ja

perusteleminen liitetään aineiston oppimateriaaleissa eritoten ongelmanratkaisutaitojen sekä metakognitiivisten taitojen kehittämiseen. Suullisen ilmaisun lisäksi oppilaita voidaan kehottaa kirjoittamaan ajatteluaan auki apukysymysten avulla, kuten: ”Mistä tiedät, milloin ratkaisusi on oikein?” (Mieti ja laske 6S, 1994, s. 19). Laskinta ohjataan käyttämään tulosten oikeellisuuden tarkistamiseen, erityisesti erikseen mainittavien laskinharjoitusten yhteydessä, ja laskimella laskemisen yhteydessä korostetaan tulosten kriittistä arvioimista.

6.2.2 Tehtäväkohtaiset tarkistamisen maininnat matematiikan opettajaoppaissa

Päälukulla 2.2 Tehtäväkohtainen tarkistamisen maininta tarkoitettiin opettajaoppaissa esitetyissä tehtävien ja pelien ohjeistuksissa olevia yleisiä, tehtäväkohtaisia kehotuksia tarkistamiseen. Valtaosa, noin 75 prosenttia kaikista aineiston opettajaoppaiden tarkistamiseen liittyvistä sisällöistä ovat näitä tehtävien ja pelien yhteydessä olevia tarkistamisen mainintoja. Vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa opettajaoppaissa analyysiyksiköiden frekvenssi vaihtelee 4–70 välillä ja vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa opettajaoppaissa puolestaan 8–82 välillä (Taulukot 14 & 15). Eri opetussuunnitelmien aikaisten matematiikan opettajaoppaiden välillä ei ole khiin neliö -testin mukaan tilastollisesti merkitsevää eroa tehtäväkohtaisten tarkistamisen mainintojen suhteen ($p = .967$).

Tarkistamiseen kehottamista esiintyy erilaisten, niin yksilö-, pari- kuin ryhmätyöskentelynä tarkoitettujen harjoitteiden ohjeistuksissa. Tarkistamiseen kehoitetaan tehtävästä riippuen joko yleisellä tasolla todeten tai tarkemmin määritellyllä tavalla, esimerkiksi tarkistuskorttia tai -monistetta hyödyntäen tai ryhmän kanssa yhteisesti läpikäyden. Seuraavat sitaatit ovat esimerkkejä aineiston opettajaoppaissa esiintyvistä tehtäväkohtaisista kehotuksista tarkistamiseen:

”Toinen parista näyttää lukumäärän sormilla tai palikoilla ja toinen ottaa pulpetille yhtä monta palikkaa. Pari tarkistaa lukumäärän. Kolmen kerran jälkeen osat vaihtuvat.” (Laskutaito 1S, 1994, s. 14.)

”Kukin oppilas vuorollaan lukee lapussaan olevan laskun ja sanoo sen tuloksen. Jos tulos on oikein, muut reagoivat sovitulla merkillä, esim. nostamalla käden ylös.” (Laskutaito 1K, 1994, s. 12.)

”Ratkaistaan lasku ruudukon avulla yhdessä tai vuorotellen. Vastaus tarkistetaan kääntämällä kortti.” (Mieti ja laske 3S, 1994, s. 155.)

”Lopuksi parit voivat vaihtaa paperia toisen parin kanssa ja tarkistaa toistensa vastaukset.” (Laskutaito 6K, 2004, s. 80.)

”Oppilaat laativat pareittain sanallisia tehtäviä rahamääristä. Tehtävät viedään ratkaisemattomien tehtävien purkkiin, josta tehtäviä voi sitten käydä sopivan hetken tullen hakemassa. Tehtävän laatijat laittavat lappuun myös oman nimensä, sillä tehtävän ratkaisija vie ratkaisun laatijoille tarkistettavaksi.” (Tuhattaituri 1K, 2004, s. 44.)

7 Pohdinta

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli kartoittaa, miten vuosien 1994 ja 2004 perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteiden aikaisissa alakoulun matematiikan oppimateriaaleissa ohjataan tarkistamiseen. Lisäksi tarkasteltiin, esiintyykö eri opetussuunnitelmien aikaisten oppimateriaalien välillä eroja tarkistamiseen ohjaamisessa. Tutkittavana olivat sekä oppilaille suunnatut oppikirjat että pedagogista tukea tarjoavat opettajaoppaat. Tutkimus toteutettiin osana laajempaa matematiikan oppimateriaalitutkimusprojektia (Matematiikan Oppikirja-analyysi MOPPI), jonka tavoitteena on kartoittaa oppimateriaalien merkitystä suomalaisten nuorten matematiikan oppimistulosten heikkenemisen taustalla.

Tässä luvussa käsitellään tämän tutkimuksen päätuloksia ja peilataan niitä aikaisempaan tutkimuskirjallisuuteen. Tämän jälkeen pohditaan tutkimuksen luotettavuutta ja esitetään johtopäätökset. Luvun lopussa ehdotetaan jatkotutkimusaiheita, joiden myötä oppimateriaalitutkimusta ja erityisesti tarkistamiseen ohjaamisen analysointia voitaisiin viedä eteenpäin.

7.1 Oppilaiden kirjoja koskevat päätulokset

Sekä vuoden 1994 Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2000) että vuoden 2004 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2004) matematiikan sisällöissä tarkistaminen sekä tulosten ja ratkaisuprosessien arvioiminen nähdään tärkeinä taitoina. Siihen nähden, kuinka keskeisinä nämä taidot opetussuunnitelmissa esitetään, tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen määrä aineiston oppikirjoissa vaikuttaa hyvin vähäiseltä. Vanhemman opetussuunnitelman aikaisissa oppilaiden oppikirjoissa tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen osuus kaikista kirjojen tehtävä- ja teoriasisällöistä on 1,2 prosenttia ja vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa oppikirjoissa puolestaan 6,1 prosenttia. Saatujen tulosten mukaan oppilaiden kirjojen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä on siis vähän enemmän vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa materiaaleissa ja ero on khiin neliö -testin mukaan tilastollisesti merkitsevä.

Molempien opetussuunnitelmien aikaisissa matematiikan oppilaiden kirjoissa eri tarkistamisen tyyppeihin ohjaavien sisältöjen osuudet kaikista tarkistamisen sisällöistä ovat samankaltaisia: ei-matemaattisen tarkistamisen osuus on 88–89 prosenttia, matemaattisen tarkistamisen osuus 9–10 prosenttia ja kontekstuaalisen tarkistamisen osuus 1–3 prosenttia. Ei-matemaattiseen

tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä on siis molempien opetussuunnitelmien aikaisissa aineiston oppimateriaaleissa selvästi eniten. Tulos poikkeaa aikaisemmasta tutkimuksesta, jossa analysoitavana olleissa singaporelaisissa ja espanjalaisissa matematiikan oppimateriaaleissa esiintyi eniten matemaattista tarkistamista ja muilta osin ei-matemaattista tarkistamista ilman kontekstuaalista näkökulmaa (Vicente, Sánchez & Verschaffel, 2020).

Ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavat sisällöt korostuvat kaikissa aineiston oppikirjoissa ja ilmenevät oppilaan kirjoissa tyypillisimmin tehtävinä, joiden vastaus on tarkoitus tarkistaa tulospalkista, jossa vastausvaihtoehtoja on eri määrä kuin ratkaistavia laskutehtäviä. Aineiston opettajaoppaiden mukaan tulospalkeilla pyritään siihen, että oppilas saa välittömän palautteen suorituksestaan ja hänen on helppo tarkistaa tehtävä ja korjata mahdolliset virheet (Tuhattaituri 6S, 2004, s. 15; Laskutaito 1K, 1994, s. 69). Kaiken kaikkiaan tulospalkillisten tehtävien, joissa vastausvaihtoehtoja on eri määrä kuin laskutehtäviä, voidaan tulkita tukevan tarkistamisen taitoja ja ehkäisevän tulosten arvaamista paremmin kuin tulospalkkien, joissa vastausvaihtoehtoja on saman verran kuin itse tehtäviä. Näitä tulospalkillisia tehtäviä, joissa vastausvaihtoehtoja on eri määrä kuin laskutehtäviä, on enemmän vuoden 2004 aikaisissa oppikirjoissa.

Molempien opetussuunnitelmien aikaisissa aineiston oppikirjoissa ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen voidaan tulkita tukevan tarkistamisen ulottuvuuksista tuloksien oikeellisuuden tarkistamista (Pólya, 1985, s. 14; Verschaffel ym., 1999; Pretz, Naples & Sternberg, 2003; Kusaka & Ndiokubwayo, 2022) sekä jossakin määrin virheiden huomaamista ja korjaamista (García ym., 2019). On kuitenkin syytä suhtautua kriittisesti ei-matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen mahdollisuuksiin kehittää oppilaiden tarkistamisen taitoja ja metakognitiivista säätelyä tarkistamisen osalta: tehtävät, joissa pyydetään pelkkää vastausta ilman niiden oikeellisuuden pohtimista ja perustelemista, tarjoavat vain heikon mahdollisuuden matemaattisen ajattelun kehittymiselle (Gresalfi, 2009). On mahdollista, että oppilas ei edes ajattele tarkistavansa ratkaisuaan esimerkiksi ympyröidessään vastausta tai tiedä, mitä olisi syytä tehdä, mikäli saamaansa tulosta vastaavaa lukua ei löydykään tulospalkista.

Matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä on molempien opetussuunnitelmien aikaisissa oppikirjoissa vain noin 10 prosenttia kaikista tarkistamisen sisällöistä. Suhteellisissa osuuksissa ei ole eri opetussuunnitelmien aikaisissa materiaaleissa eroa, mutta vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa oppikirjoissa matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä

on frekvenssien osalta moninkertainen määrä vanhempiin oppikirjoihin verrattuna. Laadultaan molempien opetussuunnitelmien matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavat sisällöt ovat kuitenkin samanlaisia: sisällöt käsittelevät joko jakolaskun tarkistamista kertolaskulla tai vähennyslaskun tarkistamista yhteenlaskulla, muita matemaattisia tarkistustapoja ei esitellä. Näin ollen matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavat sisällöt tukevat tarkistamisen ulottuvuuksista nimenomaan taitoa tarkistaa yksittäisiä laskutoimituksia (Pólya, 1985, s. 14; Goos, Galbriath & Renshaw, 2000; Montague, Warger & Morgan, 2000).

Kontekstuaalisen tarkistamisen suhteen saadut tulokset ovat linjassa aikaisemman tutkimuksen kanssa (Vicente, Sánchez & Verschaffel, 2020): Koko 24 kirjaa kattavassa aineistossa kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaavien sisältöjen frekvenssi rajoittuu ainoastaan kuuteen analyysiyksikköön, joista puolet sijaitsevat samalla oppikirjan sivulla. Voidaan siis todeta, että tarkistamiseen ohjaaminen on aineiston oppikirjoissa käytännössä olematonta. Ne kontekstuaaliseen tarkistamiseen ohjaavat sisällöt, joita aineistossa kuitenkin esiintyy, keskittyvät vastausten järkevyyden arvioimiseen sanallisten tehtävien yhteydessä. Tarkistamisen ulottuvuuksista nämä sisällöt painottuvat siis perustelemisen taitoon (Lester, 1989) ja osittain ratkaisuprosessin arvioimiseen ja tarkistamiseen (Pólya, 1985, s. 14; Bransford & Stein, 1993, s. 20, 36–37; Goos, Galbriath & Renshaw, 2000; Yimer & Ellerton, 2010; Kusaka & Ndiokubwayo, 2022).

Mieti ja laske 6S (1994)-, Tuhattaituri 3S (2004)- sekä Laskutaito 6S (2004) -kirjoissa ohjataan kontekstuaaliseen tarkistamiseen esittelemällä sanallisen tehtävän ratkaisemisen vaiheet. Kaikissa edellä mainituissa kohdissa ratkaiseminen ohjataan aloittamaan selvittämällä, mitä kysytään. Ratkaisuvaiheissa edetään annettujen tietojen selvittämiseen, apukuvien piirtämiseen, erilaisten ratkaisutapojen pohtimiseen ja laskulausekkeen muodostamiseen ja suorittamiseen. Prosessin viimeisenä vaiheena ohjeistetaan arvioimaan saadun tuloksen järkevyyttä. Oppikirjoissa esitetyt ratkaisustrategiat mukailevat siis vahvasti muun muassa Pólyan (1985) kuvaamaa ongelmanratkaisumallia. Aineiston oppikirjoissa ei kuitenkaan toteudu Fernandezin, Hadawayn ja Wilsonin (1994) korostama ongelmanratkaisun dynaamisuus ja joustavuus.

7.2 Opettajaoppaita koskevat päätulokset

Saatujen tulosten mukaan molempien opetussuunnitelmien aikaisissa opettajaoppaissa tarkistamiseen liittyvistä sisällöistä suurin osa, 75 prosenttia, on tehtävien ja pelien ohjeistuksissa olevia yleisiä, tehtäväkohtaisia tarkistamisen mainintoja. 25 prosenttia

tarkistamisen sisällöistä on puolestaan opetusvinkkejä ja lisätietoa. Tarkistamisen sisältöjen osuuksissa ei ole eroa eri opetussuunnitelmien aikaisten opettajaoppaiden välillä. Tarkistamiseen liittyvien sisältöjen määrää suhteessa kaikkiin sisältöihin ei tässä tutkimuksessa analysoitu, sillä opettajaoppaiden kaikkien sisältöjen määrä ei ollut tiedossa.

Tarkistamiseen liittyvien opetusvinkkien ja lisätiedon osalta vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa opettajaoppaissa painottuvat pääosin tuloksista ja ratkaisuprosesseista keskusteleminen sekä erilaisten ratkaisuprosessien esittelemine ja perustelemine. Opettajaoppaiden mukaan ratkaisujen perustelemine kehittää oppilaiden metakognitiivisia taitoja (Mieti ja laske 3K, 1994, s. 241; Mieti ja laske 6S, 1994, s. 13). Nämä taidot tuodaan keskeisinä esille myös valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa, jonka mukaan oppimistilanteista tulisi luoda keskustelunomaisia (Opetushallitus, 2000).

Toiseksi eniten vuoden 1994 opetussuunnitelman aikaisissa opettajaoppaissa tuodaan esiin tarkistamisen tärkeyttä laskimen käytön yhteydessä. Laskimen käyttöön liittyviä sisältöjä tosin esiintyy vanhemman opetussuunnitelman aikaisten opettajaoppaiden osalta ainoastaan Laskutaito 3 (1994)- ja Laskutaito 6 (1994) -materiaaleissa. Laskinta ohjataan käyttämään tulosten tarkistamiseen, ja laskimen antamiin tuloksiin kannustetaan suhtautumaan kriittisesti omaa arviointikykyä käyttäen. Nämä taidot ovat niin ikään linjassa opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2000) esitettyjen matematiikanopetuksen sisältöjen ja tavoitteiden kanssa.

Vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa opettajaoppaissa puolestaan tuodaan tarkistamiseen liittyvien opetusvinkkien ja lisätiedon osalta eniten esiin käänteisoperaatioiden hyödyntäminen tarkistamisessa. Kyseiset sisällöt painottuvat erityisesti Tuhattaituri-sarjan materiaaleissa. Opettajaoppaissa käsitellään jakolaskujen tarkistamista kertolaskuilla sekä vähennyslaskujen tarkistamista yhteenlaskujen avulla. Nämä sisällöt sijoittuvat oppimateriaaleissa samoihin lukuihin ja kappaleisiin kuin oppilaiden kirjojen matemaattiseen tarkistamiseen ohjaavat sisällöt.

7.3 Tutkimuksen validiteetti ja reliabiliteetti

Tutkimuksella pyrittiin luomaan kokonaiskäsitystä eri opetussuunnitelmien aikaisten oppimateriaalien tavoista käsitellä tarkistamista sekä tarkastelemaan näiden mahdollisia eroja. Tutkimuksen sisäistä validiteettiä, eli kykyä mitata tutkittavaa asiaa tarkoituksenmukaisesti, pyrittiin vahvistamaan pohjaamalla aineiston luokittelu ja käytetyt analyysimenetelmät

aikaisempaan tutkimukseen (Cohen, Manion & Morrison, 2018, s. 252). Tutkimuksen ulkoista validiteettia eli tulosten yleistettävyyttä (Cohen, Manion & Morrison, 2018, s. 254) arvioidessa on puolestaan syytä huomioida, että analysoitavana olivat ainoastaan kolmen luokka-asteen kirjat ja vain kaksi kirjasarjaa valtakunnallista opetussuunnitelmaa kohden, eikä mahdollisia lisä- ja digimateriaaleja sisällytetty aineistoon. Tässä tutkimuksessa ei myöskään analysoitu kirjasarjoihin kuuluvia vastauskirjoja; jatkossa olisikin mielenkiintoista selvittää, sisältävätkö ne vastausten lisäksi ohjeita tarkistamisen toteuttamiseen.

Kyseessä ei siis ole koko alakoulun matematiikan oppimateriaalit kattava systemaattinen katsaus, ja näin ollen saatuihin tuloksiin tulee suhtautua suuntaa antavina. Tulosten yleistettävyyttä pyrittiin kuitenkin vahvistamaan valitsemalla tutkimusaineistoksi molempien opetussuunnitelmien aikaisia suosituimpia kirjasarjoja (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010, s. 142; Hemmi, Krzywacki & Koljonen, 2018). Vaikka tutkimuksessa vertailtiin eri kustantajien oppimateriaaleja, tarkoituksena ei ollut arvottaa niitä keskenään, vaan tarkastella tutkittavan ilmiön, tarkistamiseen ohjaamisen, suhteen.

Reliabiliteetilla tarkoitetaan muun muassa toistettavuutta sekä tutkimuksen sisäistä johdonmukaisuutta (Cohen, Manion & Morrison, 2018, s. 268–269). Tässä tutkimuksessa reliabiliteettia heikentää se, että analyysit suoritettiin yhden ihmisen toimesta, eikä aineiston analyysiä koskevaa arvioitsijareliabiliteettia voitu näin ollen määrittää. Tutkimuksen reliabiliteettia pyrittiin kuitenkin vahvistamaan arvioimalla koodauksen johdonmukaisuutta prosessin aikana. Analyysikategoriat muodostettiin keskustellen oppikirjatutkimusryhmän kokeneen jäsenen kanssa. Sisällönanalyysin aikana muutamia aineiston oppimateriaaleja käytiin läpi uudestaan tarkistaen, että koodaukset ovat pysyneet analyysiluokkien määritelmien mukaisina. Lisäksi koko aineiston koodaamisen jälkeen kaikki analyysiyksiköt käytiin läpi analyysiluokka kerrallaan.

Tutkimuksen reliabiliteettia toistettavuuden näkökulmasta heikentää aineistolähtöiseen sisällönanalyysiin liittynyt tulkinnanvaraisuus. Erityisesti opettajaoppaiden kohdalla pääluokan 2.1 Opetusvinkit ja lisätieto analyysiyksikköjen aineistolähtöisessä sisällönanalyysissä ja alaluokkien muodostamisessa käytettiin paljon omaa tulkintaa. Alaluokat pyrittiin muodostamaan niin, että ne kuvaisivat mahdollisimman kattavasti tarkistamisen käsittelemistä aineiston opettajaoppaissa. Samalla kuitenkin tiedostettiin, että klusterointi ja alaluokkien nimeäminen olisi voitu suorittaa myös erilaisia luokittelukriteerejä hyödyntäen.

Myös teorialähtöiseen sisällönanalyysiin liittyi tulkinnanvaraisuutta. Jotkin aineiston oppimateriaalien sisällöistä olisivat voineet lukeutua mahdollisesti useammankin pääluokan alle sisältäen esimerkiksi jossain määrin sekä kontekstuaalisen että matemaattisen tarkistamisen piirteitä. Tutkimuksessa päädyttiin kuitenkin luomaan toisensa poissulkevat koodit, jotta nähdään, miten erilaiset tarkistamisen sisällöt painottuvat aineiston oppimateriaaleissa. Näin ollen aineistoa koodatessa parin analyysiyksikön kohdalla tehtiin tulkinta siitä, mitä tarkistamisen osa-aluetta kyseisessä kohdassa ensisijaisesti harjoitellaan: Laskutaito 6S (2004) oppilaan kirjan sivulla 18 käsitellään sanallisten tehtävien ratkaisemista ja annetaan tähän ohjeet. Ohjeiden viimeisessä kohdassa oppilasta kehoitetaan vertaamaan saamaansa vastausta kysymykseen ja pohtimaan, onko vastaus järkevä. Tämä teoriasisältö on koodattu kontekstuaaliseksi tarkistamiseksi. Sanallisen tehtävän ratkaisemista on samalla sivulla demonstroitu kahdella esimerkkit tehtävällä, joissa sanoitetaan ratkaisuprosessia auki. Saatua vastausta verrataan sanallisessa tehtävässä annettuihin tietoihin suorittamalla yhteenlasku. Summan perusteella vastauksen todetaan olevan järkevä. Ratkaisuprosessissa siis hyödynnetään matemaattista tarkistamista, mutta pääpaino tulkittiin olevan vastauksen mielekkyyden arvioimisessa suhteessa ongelmaan ja siinä asetettuihin ehtoihin. Näin ollen kyseiset analyysiyksiköt koodattiin kontekstuaaliseksi tarkistamiseksi. Kaiken kaikkiaan analysointi kuitenkin onnistui suhteellisen helposti, mikä tukee tulkintaa tutkimuksen luotettavuudesta.

7.4 Johtopäätökset

Aineiston oppimateriaaleissa esiintyy kaikkia viittä tarkistamisen ulottuvuutta: ratkaisuprosessin arvioimista, yksittäisten laskutoimitusten tarkistamista, tuloksen oikeellisuuden arvioimista, ratkaisumallien esittelemistä ja perustelemista sekä tarkistamisen myötä havaittujen virheiden korjaamista (ks. Kuvio 2), mutta näitä on hyvin vähän. Oppilaiden kirjoissa pääpaino on selvästi tulosten tarkistamisessa. Myös opettajaoppaiden tarkistamisen sisältöjen enemmistö eli tehtäväkohtaiset tarkistamisen maininnat näyttäisivät painottuvan tuloksien oikeellisuuden tarkistamiseen. Tämän pääluokan analyysiyksiköitä ei kuitenkaan analysoitu tarkemmin, joten edellä mainittua tulosta voidaan pitää alustavana havaintona.

Kaiken kaikkiaan tarkistamiseen ohjaavia sisältöjä on vuoden 2004 opetussuunnitelman aikaisissa matematiikan oppikirjoissa vähän enemmän kuin vanhemmissa kirjoissa. Ei-matemaattisen, matemaattisen ja kontekstuaalisen tarkistamisen osuuksissa ei ole eri

opetussuunnitelmien aikaisissa oppikirjoissa eroa, mutta ei-matemaattisen tarkistamisen osalta uudemmissa oppikirjoissa esiintyy enemmän tulospalkillisia tehtäviä, joissa vastausvaihtoehtoja on eri määrä kuin laskutehtäviä. Opettajaoppaiden osalta vanhemmissa kirjoissa painottuvat enemmän perustelevinen ja eri ratkaisumalleista keskusteleminen, kun taas uudemmissa opettajaoppaissa käsitellään eniten käänteisoperaatioiden hyödyntämistä laskutoimitusten tarkistamisessa. Molempien opetussuunnitelmien aikaisissa opettajaoppaissa tarkistamiseen ohjaaminen on kuitenkin vähäistä.

Tarkasteltaessa saatuja tuloksia suhteessa suomalaisten matematiikan oppimistuloksiin ja niiden laskuun 2000–2010-luvuilla vaikuttaisi siltä, että matematiikan oppimateriaalien tarkistamiseen ohjaamisessa ei ole tapahtunut muutoksia, jotka olisivat yhteydessä oppimistulosten laskuun. Havainto on linjassa aikaisempien tutkimustulosten (mm. Fan & Zhu, 2007; Vicente, Sánchez & Verschaffel, 2020) kanssa, joiden mukaan tarkistamisen vähäinen esiintyminen matematiikan oppimateriaaleissa ei ole ainakaan suoraan yhteydessä menestymiseen matemaattista osaamista mittaavissa tutkimuksissa (ks. Beaton, 1996; Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2023). Olisi kuitenkin mielenkiintoista selvittää, heijastuisivatko tarkistamisen systemaattisempi opettaminen ja harjoittelu ja muun muassa kontekstuaalisen tarkistamisen painottaminen opetuksessa entistä korkeampina pistemäärinä kansainvälisissä mittauksissa.

On tärkeää tiedostaa, että, vaikka oppimateriaalit eivät sisällä jotakin elementtiä, se ei automaattisesti tarkoita, etteivätkö opettajat sisällyttäisi kyseistä asiaa opetukseensa. Oppimateriaaleja tutkimalla saadaan ensisijaisesti tietoa oppimateriaaleista – ei opetuksesta tai oppimisesta. Samaa aikaa lukuisat tutkimustulokset (Haggarty & Pepin, 2002; Perkkilä, 2002; Fan, Zhu & Miao, 2013; Howson, 2013; Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015; Karvonen, Tainio & Routarinne, 2017; Perkkilä, Joutsenlahti & Sarenius, 2018) ovat kuitenkin osoittaneet oppikirjoilla olevan vahva asema matematiikan opetuksessa. Niukat ja yksipuoliset tarkistamiseen ohjaavat sisällöt vuosien 1994 ja 2004 opetussuunnitelmien aikaisissa matematiikan oppimateriaaleissa ovat siis tältä osin jättäneet paljon tilaa opettajien omalle matemaattiselle ajattelulle ja opetuksen suunnittelulle.

7.5 Jatkotutkimusaiheet

Alustavien havaintojen mukaan aineiston opettajaoppaista löytyvät pelit ja harjoitteet ovat monet tarkoitettu toteutettavaksi pari- tai ryhmätyönä. Näin ollen monen tällaisen tehtävän

kohdalla myös tarkistaminen kehoitetaan suoritettavan esimerkiksi parin kanssa. Jatkossa olisikin mielenkiintoista syventää tutkimusta analysoiden, miten matematiikan oppimateriaalit ohjaavat vuorovaikutteisuuden tarkistamisessa. Lisäksi olisi tärkeää selvittää, miten tarkistamiseen ohjaaminen toteutuu tällä hetkellä käytössä olevissa matematiikan oppimateriaaleissa.

Tässä tutkimuksessa ei tarkemmin analysoitu ja eritelty, miten tarkistamiseen ohjaaminen ilmenee eri luokka-asteilla. Aineistosta tehtiin kuitenkin yksittäinen havainto, jossa tuodaan esille näkemys nuorempien oppilaiden valmiudesta oppia tarkistamista:

”Vähennyslaskun tarkistaminen yhteenlaskun avulla on monelle ensiluokkalaiselle vaikeasti ymmärrettävä asia. Harva ymmärtää sen vielä niin hyvin, että pystyy käyttämään tarkistusta hyväkseen. Asiaa voidaan kokeilla laskuhelmillä.” (Laskutaito 1K, 2004, s. 110.)

Tutkittaessa espanjalaisia matematiikan oppikirjoja havaittiin, että ongelmanratkaisun ja tarkistamisen tueksi annettavia vinkkejä oli sitä enemmän, mitä ylemmän luokka-asteen oppikirjasta oli kyse (Vicente, Sánchez & Verschaffel, 2020). Vicenten, Sánchezin ja Verschaffelin (2020) mukaan tämä saattaa ilmentää harhakäsitystä, jonka mukaan nuoremmilla oppilailla ei olisi kykyä ymmärtää ongelmanratkaisuun liittyviä tekijöitä. Jatkossa olisikin mielenkiintoista tutkia suomalaisia matematiikan oppimateriaaleja luokka-asteiden mukaan ja analysoida, miten tarkistamisen ohjaamiseen liittyvä *scaffolding* toteutuu.

Vaikka matematiikan oppimateriaaleja on tutkittu monesta eri näkökulmasta, tulevaisuudessa tarvitaan enemmän tutkimusta oppikirjojen ja oppilaiden oppimistulosten välisestä suhteesta (Fan, Zhu & Miao, 2013). Oppikirjatutkimuksien perimmäisenä tavoitteena on kuitenkin paremman opetuksen tuottamiseksi selvittää, miksi tietyt tavat esittää ja opettaa erilaisia aiheita ovat parempia kuin toiset (Fan, 2013). Ennen kaikkea jatkossa olisi siis tärkeää kehittää oppimateriaalitutkimusta sisältöjen analysoinnista kohti käytäntöä ja tutkia, muun muassa havainnoimalla ja haastattelemalla, oppimateriaalien käyttämistä opetuksen ja opiskelun välineenä. Lisäksi olisi mielenkiintoista tutkia, millä tavalla ja kuinka paljon tarkistamista harjoitellaan matematiikan oppitunneilla. Jotta tulevaisuudessa saamme metakognitiivisesti vahvoja matematiikan osaajia ja ongelmanratkaisijoita, olennaisinta on se, mitä luokkahuoneissa tapahtuu.

Lähteet

- Annevirta, T., Iiskala, T., & Katajisto, T. (2003). *Miten tukea oppilaiden metakognitiota luokkatyöskentelyssä* (1. painos.). Turku: Turun yliopisto, oppimistutkimuksen keskus.
- Beaton, A. E. (1996). *Mathematics Achievement in the Middle School Years. IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Boston College, Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Champion Hall 323, Chestnut Hill, MA. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED406419.pdf> (Viitattu 8.9.2024)
- Bingolbali, E. (2020). An analysis of questions with multiple solution methods and multiple outcomes in mathematics textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(5), 669–687.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1606949>
- Bransford, J. D., & Stein, B. S. (1993). *The ideal problem solver: A guide for improving thinking, learning and creativity* (2. painos). New York: W.H. Freeman.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117–151.
<https://doi.org/10.1080/10986060903460070>
- Chytrý, V., Říčan, J., Eisenmann, P., & Medová, J. (2020). Metacognitive knowledge and mathematical intelligence—Two significant factors influencing school performance. *Mathematics (Basel)*, 8(6), 969-. <https://doi.org/10.3390/MATH8060969>
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (Keith R. B.). (2018). *Research methods in education* (Eighth edition). Routledge.
- Desoete, A., Baten, E., Vercaemst, V., De Busschere, A., Baudonck, M., & Vanhaeke, J. (2019). Metacognition and motivation as predictors for mathematics performance of Belgian elementary school children. *ZDM*, 51(4), 667–677.
<https://doi.org/10.1007/s11858-018-01020-w>

- Efklides, A. (2009). The role of metacognitive experiences in the learning process. *Psicothema*, 21(1), 76–82. <https://www.redalyc.org/pdf/727/72711818013.pdf> (Viitattu 5.8.2024)
- Ekström, R. (2024). Opettaja havaitsi matematiikan oppikirjojen vaatimustason laskeneen – Näin kommentoi professori. *Helsingin Sanomat* 7.5.2024. <https://www.hs.fi/suomi/art-2000010408435.html> (Viitattu 24.9.2024)
- Elo, S., Kajula, O., Tohmola, A., & Kääriäinen, M. (2022). Laadullisen sisällönanalyysin vaiheet ja eteneminen. *Hoitotiede*, 34(4), 215–225. <https://journal.fi/hoitotiede/article/view/128987/78028>
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, 45(5), 765–777. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6>
- Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 61–75. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9069-6>
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, 45(5), 633–646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>
- Fernandez, M. L., Hadaway, N., & Wilson, James. W. (1994). Problem Solving: Managing It All. *The Mathematics Teacher*, 87(3), 195–199. <https://www.jstor.org/stable/27968793> (Viitattu 15.4.2024)
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive Apects of Problem Solving. Teoksessa L. B. Resnick (toim.) *The nature of intelligence : [papers presented at a conference held March 1974 at the Learning research and development center, University of Pittsburgh]*. Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum, 231–235.

- Flavell, J. H. (1987). Spectaculations About the Nature and Development of Metacognition. Teoksessa F. E. Weiner & R. H. Kluwe (toim.) *Metacognition, motivation, and understanding*. Hillsdale, N.J: Erlbaum, 21–30.
- García, T., Boom, J., Kroesbergen, E. H., Núñez, J. C., & Rodríguez, C. (2019). Planning, execution, and revision in mathematics problem solving: Does the order of the phases matter? *Studies in Educational Evaluation*, 61, 83–93.
<https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2019.03.001>
- Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1003–1024.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849>
- Goos, M., Galbriath, P., & Renshaw, P. (2000). A money problem: A source of insight into problem solving action. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.
https://www.researchgate.net/publication/43487463_A_money_problem_A_source_of_insight_into_problem_solving_action (Viitattu 24.8.2024)
- Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F. L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(Suppl 1), 105–123.
<https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6>
- Gresalfi, M. S. (2009). Taking Up Opportunities to Learn: Constructing Dispositions in Mathematics Classrooms. *The Journal of the Learning Sciences*, 18(3), 327–369.
<https://doi.org/10.1080/10508400903013470>
- Güner, P., & Erbay, H. N. (2021). Metacognitive Skills and Problem-Solving. *International Journal of Research in Education and Science*, 7(3), 715-.
<https://doi.org/10.46328/ijres.1594>

- Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28(4), 567–590.
<https://doi.org/10.1080/0141192022000005832>
- Hannula, M. (2014). Suomenkielisen laitoksen esipuhe. Teoksessa G. Pólya, J. Järnström & M. Hannula. *Ratkaisemisen taito : kuinka lähestyä matemaattisia ongelmia*. Helsinki: Art House.
- Hemmi, K., Krzywacki, H., & Koljonen, T. (2018). Investigating Finnish Teacher Guides as a Resource for Mathematics Teaching. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 62(6), 911–928. <https://doi.org/10.1080/00313831.2017.1307278>
- Hiltunen, J., & Nissinen, K. (2018). Erinomaiset matematiikan osaajat. Teoksessa J. Rautopuro, & K. Juuti (toim.), *PISA pintaa syvemältä : PISA 2015 Suomen pääraportti* (pp. 213–234). Suomen kasvatustieteellinen seura. Kasvatusalan tutkimuksia, 77. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-5401-82-0> (Viitattu 24.2.2023)
- Howson, G. (2013). The development of mathematics textbooks: historical reflections from a personal perspective. *ZDM*, 45(5), 647–658. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0511-9>
- Joutsenlahti, J. (2006). Matematiikan oppimateriaali ja oppilaan matemaattinen ajattelu. Teoksessa T. Asunta & J. Viiri (toim.) *Pathways into research-based teaching and learning in mathematics and science education = Polkuja tutkimukselliseen opettamiseen ja oppimiseen matemaattisissa aineissa*. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Joutsenlahti, J., & Vainionpää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*, 137–148. Helsinki: Opetushallitus.

- Jäder, J., Lithner, J., & Sidenvall, J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(7), 1120–1136. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1656826>
- Karvonen, U., Tainio, L. & Routarinne, S. (2017). Oppia kirjoista. Systemaattinen katsaus suomalaisten perusopetuksen oppimateriaalien tutkimukseen. *Kasvatus & Aika* 11(4), 39–57. <https://journal.fi/kasvatusjaaika/article/view/68764> (Viitattu 27.2.2023)
- Kopiosto 2024. Kopiointiluvan lupaehdot. <https://kopiosto.fi/wp-content/uploads/2024/10/Korkeakoulut.pdf> (Viitattu 11.2.2025)
- Krammer, H. P. M. (1985). The textbook as classroom context variable. *Teaching and Teacher Education*, 1(4), 273–278. [https://doi.org/10.1016/0742-051X\(85\)90015-0](https://doi.org/10.1016/0742-051X(85)90015-0)
- Kusaka, S., & Ndiokubwayo, K. (2022). Metacognitive strategies in solving mathematical word problems: a case of Rwandan primary school learners. *SN Social Sciences*, 2(9). <https://doi.org/10.1007/s43545-022-00495-5>
- Kuzle, A., Rott, B., & Cadez, T. H. (toim.). (2016). *Problem solving in the mathematics classroom : perspectives and practices from different countries* (1. painos). Münster: WTM - Verlag für Wissenschaftliche Texte und Medien.
- Laki digitaalisten palvelujen tarjoamisesta 306/2019. Annettu Helsingissä 15.3.2019.
- Leino, K., Ahonen, A. K., Hienonen, N., Hiltunen, J., Lintuvuori, M., Lähteinen, S., Lämsä, J., Nissinen, K., Nissinen, V., Puhakka, E., Pulkkinen, J., Rautopuro, J., Sirén, M., Vainikainen, M.-P., & Vettenranta, J. (2019). PISA 18 : ensituloksia. Suomi parhaiden joukossa. Opetus- ja kulttuuriministeriö. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja, 2019:40. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-263-678-2> (Viitattu 24.2.2023)
- Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers’ view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (3–4), 129–156. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/20_34_129156_lepik.pdf (Viitattu 24.2.2023)

- Lester, F. K. (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Seven Classes. Final Report.*
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED314255.pdf> (Viitattu 15.8.2025)
- Loula, P. (2023). Oppimistulokset romahtavat, eikä kukaan tunnu tietävän miksi – Mitä kouluissa on tapahtunut? Helsingin Sanomat 12.1.2023. <https://www.hs.fi/kotimaa/art-2000009322569.html> (Viitattu 24.2.2023)
- Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science*, 26(1/2), 49–63.
<https://doi.org/10.1023/a:1003088013286>
- Metsämuuronen, J. & Nousiainen, S. (2021). Matematiikkaa COVID-19-pandemian varjossa. Matematiikan osaaminen 9. luokan keväällä 2021. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 27:2021. https://karvi.fi/wp-content/uploads/2021/12/KARVI_2721.pdf (Viitattu 24.2.2023)
- Metsämuuronen, J. & Ukkola, A. (2019). Alkumittaus – matematiikan ja äidinkielen ja kirjallisuuden osaaminen ensimmäisen luokan alussa. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 17:2019. https://karvi.fi/wp-content/uploads/2019/07/KARVI_1719.pdf (Viitattu 27.2.2023)
- Montague, M., Warger, C., & Morgan, T. H. (2000). Solve It! Strategy Instruction To Improve Mathematical Problem Solving. *Learning Disabilities Research and Practice*, 15(2), 110–116. https://doi.org/10.1207/SLDRP1502_7
- Morosanova, V. I., Fomina, T. G., Kovas, Y., & Bogdanova, O. Y. (2016). Cognitive and regulatory characteristics and mathematical performance in high school students. *Personality and Individual Differences*, 90, 177–186.
<https://doi.org/10.1016/j.paid.2015.10.034>
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 International Results in Mathematics. In *International Association for the Evaluation of*

Educational Achievement. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED544554.pdf> (Viitattu 11.9.2024)

Muncer, G., Higham, P. A., Gosling, C. J., Cortese, S., Wood-Downie, H., & Hadwin, J. A. (2022). A Meta-Analysis Investigating the Association Between Metacognition and Math Performance in Adolescence. *Educational Psychology Review*, 34(1), 301–334. <https://doi.org/10.1007/s10648-021-09620-x>

Opetushallitus (2000). *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994* (4. korj. p.). Helsinki: Opetushallitus.

Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Helsinki: Opetushallitus. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen-opetussuunnitelman-perusteet_2004.pdf (Viitattu 4.12.2023)

Opetus- ja kulttuuriministeriö (2023). PISA 22 ensituloksia lyhyesti. <http://urn.fi/URN:NBN:fi-fe20231204151292> (Viitattu 19.9.2024)

Opetus- ja kulttuuriministeriö (2024). PISA-tutkimus ja tulokset 2022. <https://okm.fi/pisa-2022> (Viitattu 19.9.2024)

Perkkilä, P. (2002). Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius, V-M. (2018). Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & R. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 344–367.

Pólya, G., Järnström, J., & Hannula, M. (2014). *Ratkaisemisen taito : kuinka lähestyä matemaattisia ongelmia*. Helsinki: Art House.

Pólya, G. (1985). *How to solve it : A new aspect of mathematical method* (2. ed.). Princeton U.P.

- Pretz, J. E., Naples, A. J., & Sternberg, R. J. (2003). Recognizing defining, and re-presenting problems. Teoksessa J. E. Davidson, & R. J. Sternberg (toim.). *The psychology of problem solving* (pp. 3–30). New York: Cambridge University Press.
- Purnomo, Y. W., Sharill, M., Pandansari, O., Susanti, R., & Winarni, W. (2022). Cognitive demands on geometrical tasks in Indonesian elementary school mathematics textbook. *Jurnal Elemen Program Studi Pendidikan Matematika STKIP Hamzanwadi Selong*, 8(2), 466–479. <https://doi.org/10.29408/jel.v8i2.5235>
- Rott, B., Kuzle, A. & Cadez, T. H. (2016). Problem solving: A Short Introduction. Teoksessa A. Kuzle, B. Rott & T. H. Cadez (toim.) *Problem solving in the mathematics classroom : perspectives and practices from different countries* (1. painos). Münster: WTM – Verlag für Wissenschaftliche Texte und Medien, 11–16.
- Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. Teoksessa L. B. Resnick & L. E. Klopfer (toim.), *Toward a thinking curriculum: Current cognitive research* (pp. 83– 103). Washington, DC: Association for Supervisors and Curriculum Developers.
- Sievert, H., van den Ham, A.-K., & Heinze, A. (2021). Are first graders' arithmetic skills related to the quality of mathematics textbooks? A study on students' use of arithmetic principles. *Learning and Instruction*, 71, 101401–. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101401>
- Sipola, T. (2022). Opettajat ovat voimattomia matematiikan opetuksen kriisissä – ratkaisuja on tiedossa, mutta koulu ei pysty kaikkiin niihin yksin. *Yle Uutiset* 16.10.2022. <https://yle.fi/a/74-20001408> (Viitattu 24.2.2023)
- Tárraga-Mínguez, R., Tarín-Ibáñez, J., & Lacruz-Pérez, I. (2021). Analysis of word problems in primary education mathematics textbooks in Spain. *Mathematics (Basel)*, 9(17), 2123–. <https://doi.org/10.3390/math9172123>

- Tay, L. Y., Chan, M., Chong, S. K., Tan, J. Y., & Aiyooob, T. B. (2024). Learning of Mathematics: A Metacognitive Experiences Perspective. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22(3), 561–583. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10385-8>
- TENK (2023). Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsitteleminen Suomessa. https://tenk.fi/sites/default/files/2023-03/HTK-ohje_2023.pdf
- Tian, Y., Fang, Y., & Li, J. (2018). The effect of metacognitive knowledge on mathematics performance in self-regulated learning framework-multiple mediation of self-efficacy and motivation. *Frontiers in Psychology*, 9, 2518–2518. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.02518>
- Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi* (Uudistettu laitos.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.
- Turun yliopisto (2025). UTUGradu. Saavutettavuus. <https://utuguides.fi/opinnayte/saavutettavuus> (Viitattu 16.4.2025)
- Tähtinen, J., Laakkonen, E., & Broberg, M. (2020). Tilastollisen aineiston käsittelyn ja tulkinnan perusteita. Turun yliopisto.
- van Zanten, M., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM*, 50(5), 827–838. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0973-x>
- Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to Solve Mathematical Application Problems: A Design Experiment With Fifth Graders. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(3), 195–229. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0103_2
- Vicente, S., Sánchez, R., & Verschaffel, L. (2020). Word problem solving approaches in mathematics textbooks: a comparison between Singapore and Spain. *European*

Journal of Psychology of Education, 35(3), 567–587. <https://doi.org/10.1007/s10212-019-00447-3>

Viholainen, A., Eronen, I., & Kettunen, J. (2022). Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto sekä luova päättely lukion matematiikan ensimmäisen opintojakson harjoitustehtävissä. *Fmsera journal*, 5(1), 3–17.
<https://journal.fi/fmsera/article/view/115724/75030> (Viitattu 1.3.2023)

Vilalta Riera, A., Deulofeu Piquet, J., & Morera Úbeda, L. (2024). Enriching math teaching guides from a competency-based perspective. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2477-.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/14761>

Wilson, J., & Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, 16(2), 25–48.
<https://doi.org/10.1007/BF03217394>

Yang, D.-C., & Sianturi, I. A. J. (2022). Analysis of algebraic problems intended for elementary graders in Finland, Indonesia, Malaysia, Singapore, and Taiwan. *Educational Studies*, 48(1), 75–97. <https://doi.org/10.1080/03055698.2020.1740977>

Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2010). A five-phase model for mathematical problem solving: Identifying synergies in pre-service-teachers' metacognitive and cognitive actions. *ZDM*, 42(2), 245–261. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0223-3>

Tutkimusaineiston oppimateriaalit

Laskutaito 1S (1994) = Rikala, S., Sieppi, H., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R. (1996). *Laskutaito. 1, Syysosan opettajan kirja* (4.–5. p.). Helsinki: WSOY/Weilin + Göös.

- Laskutaito 1K (1994) = Rikala, S., Sieppi, H., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R. (1996). *Laskutaito. 1, Kevätosan opettajan kirja* (4. p.). Helsinki: WSOY/Weilin + Göös.
- Laskutaito 3S (1994) = Rikala, S., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R. (1999). *Laskutaito. 3, Syysosan opettajan kirja* (4.–5. p.). Helsinki: WSOY.
- Laskutaito 3K (1994) = Rikala, S., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R. (1998). *Laskutaito. 3, Kevätosan opettajan kirja* (4. uud. p.). Helsinki: WSOY.
- Laskutaito 6S (1994) = Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R. (1997). *Laskutaito. 6, Opettajan kirjan syysosa* (1.–2. p.). Helsinki: WSOY/Weilin + Göös.
- Laskutaito 6K (1994) = Koivisto, M., Salonen, M. & Uus-Leponiemi, T. (2000). *Laskutaito. 6, Opettajan kirjan kevätosa* (1.–3. p.). Helsinki: WSOY/Weilin + Göös.
- Laskutaito 1S (2004) = Rikala, S., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2002). *Laskutaito. 1, Opettajan kirja: syysosa* (8. uud. p.). Helsinki: WSOY.
- Laskutaito 1K (2004) = Rikala, S., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2002). *Laskutaito. 1, Opettajan kirja: kevätosa* (8. uud. p.). Helsinki: WSOY.
- Laskutaito 3S (2004) = Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2004). *Laskutaito. 3, Opettajan kirja: syysosa* (8. uud. p.). Helsinki: WSOY.
- Laskutaito 3K (2004) = Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2004). *Laskutaito. 3, Opettajan kirja: kevätosa* (9. uud. p.). Helsinki: WSOY.
- Laskutaito 6S (2004) = Koivisto, M., Salonen, M., Sintonen, A.-M., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R. (2007). *Laskutaito. 6, Opettajan kirja: syysosa* (1. p.). Helsinki: WSOY.
- Laskutaito 6K (2004) = Koivisto, M., Salonen, M., Sintonen, A.-M., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R. (2007). *Laskutaito. 6, Opettajan kirja: kevätosa* (1.p.). Helsinki: WSOY.

Mieti ja laske 1S (1994) = Vähäpassi, A., Hartikainen, S., & Häggblom, L. (1997). *Mieti ja laske. 1, Syksy: opettajan kirja*. Helsinki: Kirjayhtymä.

Mieti ja laske 1K (1994) = Vähäpassi, A., Hartikainen, S., & Häggblom, L. (1998). *Mieti ja laske. 1, Kevät: opettajan kirja*. Helsinki: Kirjayhtymä.

Mieti ja laske 3S (1994) = Vähäpassi, A., Hartikainen, S., Vaahtokari, A., & Hänninen, L. (2004). *Mieti ja laske. 3, Syksy: opettajan kirja* (2. p.). Helsinki: Tammi.

Mieti ja laske 3K (1994) = Vähäpassi, A., Hartikainen, S., Vaahtokari, A., & Hänninen, L. (2005). *Mieti ja laske. 3, Kevät: opettajan kirja* (2. p.). Helsinki: Kirjayhtymä.

Mieti ja laske 6S (1994) = Nordström, M., Vähäpassi, A., & Vaahtokari, A. (2002). *Mieti ja laske. 6, Syksy: opettajan kirja*. Helsinki: Tammi.

Mieti ja laske 6K (1994) = Nordström, M., Vähäpassi, A., & Vaahtokari, A. (2002). *Mieti ja laske. 6, Kevät: opettajan kirja*. Helsinki: Tammi.

Tuhattaituri 1S (2004) = Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P., & Voima, J. (2005). *Tuhattaituri. 1a, Opettajan opas* (Uud. laitoksen 2. p.). Helsinki: Otava.

Tuhattaituri 1K (2004) = Haapaniemi, S., Rajamäki, M., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P., & Voima, J. (2007). *Tuhattaituri. 1b, Opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Otava.

Tuhattaituri 3S (2004) = Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P. (2008). *Tuhattaituri. 3a, Opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Otava.

Tuhattaituri 3K (2004) = Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P. (2008). *Tuhattaituri. 3b, Opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Otava.

Tuhattaituri 6S (2004) = Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P. (2011). *Tuhattaituri. 6a, Opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Otava.

Tuhattaituri 6K (2004) = Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P.
(2012). *Tuhattaituri. 6b, Opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Otava.