TURUN
YLIOPISTO

Pell’n yhtälön sovelluksia

Matematiikan
pro gradu -tutkielma

Laatija:
Salla Puhtimäki

Ohjaaja:
Professori Vesa Halava

18.6.2023
Turku

Pro gradu -tutkielma

Oppiaine: Matematiikka
Tekijä: Salla Puhtimäki
Otsikko: Pell'n yhtälön sovelluksia
Ohjaaja: professori Vesa Halava
Sivumäärä: 41 sivua
Päivämäärä: 18.6.2023

Tässä tutkielmassa esitetään Pell'n yhtälön ominaisuuksia ja sovelluksia. Pell'n yhtälöksi kutsutaan yhtälöä $x^2 - dy^2 = 1$, missä luvut x ja y ovat kokonaislukuja ja d on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole minkään kokonaisluvun neliö. Tässä tutkielmassa keskitytään Pell'n yhtälön kokonaislukuratkaisujen löytämiseen ja sen sovelluksien algebralliseen tarkasteluun.

Ensiksi tutkielmassa tarkastellaan lyhyesti Pell'n yhtälön historiaa sekä määritelmää ja triviaaleja ratkaisuja. Tämän jälkeen todistetaan, että Pell'n yhtälöllä on olemassa vähintään yksi epätriviaali kokonaislukuratkaisu kaikille positiivisille kokonaisluvuille d, jotka eivät ole neliöitä. Tämän jälkeen voidaan esittää menetelmä kaikkien Pell'n yhtälön ratkaisujen löytämiseksi.

Tutkielman jälkimmäisessä osassa tarkastellaan erilaisia lukuteoreettisia sovelluksia, joiden ratkaisemisessa käytetään apuna Pell'n yhtälön ominaisuuksia. Tätä varten määritellään yleistetty Pell'n yhtälö ja negatiivinen Pell'n yhtälö. Näiden yhtälöiden ominaisuuksia käytetään kolmio-neliölukuihin, Arkhimedeen karja-ongelman ratkaisemiseen, Pythagoraan kolmioihin, neliöjuuren likiarvon laskemiseen ja peräkkäisten lukujen ja neliöiden summien tarkasteluun.

Avainsanat: Pell'n yhtälö, Pell'n yhtälön sovellukset, lukuteoria

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä lukijalle Pell'n yhtälö ja sen sovelluksia. Pell'n yhtälöä voidaan käyttää monien lukuteorian sovelluksien ratkaisemiseen. Yhtälöä $x^2 - dy^2 = 1$, missä x ja y ovat kokonaislukuja ja $d \in \mathbb{Z}_+$ ei ole minkään kokonaisluvun neliö, kutsutaan Pell'n yhtälöksi. Yhtälölle on helposti löydettävissä reaalilukuratkaisut, joten tässä tutkielmassa keskitytäänkin pääosin yhtälön kokonaislukuratkaisujen löytämiseen.

Luvussa 2 kerrotaan aluksi Pell'n yhtälön historiasta. Yhtälö on nimetty matemaatikko John Pell'n (1610–1685) mukaan, vaikka hänellä itsellään ei ollut juuri tekemistä yhtälön kanssa. William Brouncker (1620–1684) löysi ensimmäisenä eurooppalaisena yleisen ratkaisumenetelmän yhtälölle $x^2 - dy^2 = 1$, mutta Leonhard Euler (1707–1783) virheellisesti luuli ratkaisun olevan peräisin Pell'ltä ja nimesi täten yhtälön tämän mukaan. Tosiasiassa Intiassa oli löydetty vastaavanlainen menetelmä ainakin kuusi vuosisataa aiemmin. [8, s.182.] Lisäksi luvussa 2 esitetään Pell'n yhtälön määritelmä sekä triviaalit ja epätriviaalit ratkaisut. Tämän jälkeen näytetään, kuinka tunnetusta ratkaisusta saadaan uusi ratkaisu ja näin ollen voidaan löytää yhtälön kaikki ratkaisut.

Luvussa 3 perehdytään erilaisiin lukuteoreettisiin sovelluksiin, joita voidaan tarkastella ja ratkaista Pell'n yhtälön avulla. Kappaleen alussa esitetään yleistetty Pell'n yhtälö. Sitten tarkastellaan kolmio-neliölukuja, joita käytetään muun muassa Arkhimedeen karjaongelmassa, joka on varhaisimpia ongelmia, jossa Pell'n yhtälö esiintyy. Lisäksi Pell'n yhtälön avulla voidaan löytää Pythagoraan kolmioita, joiden kahden sivun pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja. Tämän jälkeen tarkastellaan Pell'n yhtälön avulla, kuinka algebrallisesti voidaan löytää approksimaatioita neliöjuurille. Lopuksi esitetään, miten voidaan löytää peräkkäisten kokonaislukujen sekä peräkkäisten neliöiden muodostamat yhtä suuret summat.

Tutkielmaan valittuja sovelluksia yhdistää niiden ratkaiseminen algebrallisesti. Pell'n yhtälö ja esimerkiksi neliöjuurien approksimaatiot voidaan ratkaista ketjumurtolukujen avulla, mutta tässä tutkielmassa on keskitytty algebrallisiin ratkaisumenetelmiin. Tutkielman keskeisinä lähteinä toimivat erityisesti Keith Conradin esitykset [3, 4, 5, 6].

2 Pell'n yhtälö

Tässä luvussa esitetään Pell'n yhtälön historiaa, määritelmä, triviaaliratkaisut, epätriviaalin ratkaisun olemassaolo sekä uusien ratkaisujen kehittäminen tunnetuista ratkaisuista. Lauseita ja yhtälön ominaisuuksia havainnollistetaan esimerkkien avulla.

2.1 Historia

Pell'n yhtälö on nimetty englantilaisen matemaatikko John Pell'n mukaan väärinkäsityksen seurauksena, sillä todellisuudessa hän ei ollut tekemisissä yhtälön ratkaisun kanssa. Pell'n yhtälö on esiintynyt ja sitä on tutkittu jo ennen ajanlaskun alkua. Pell'n yhtälö on ensimmäisen kerran kohdattu Arkhimedeen karjaongelman yhteydessä, mitä tarkastellaan lisää myöhemmin tässä tutkielmassa.

Pell'n yhtälön ratkaiseminen edistyi merkittävästi Intiassa. Vuonna 628 Brahmagupta (598–670) selvitti, miten tunnettuja ratkaisuja voidaan käyttää Pell'n yhtälön uusien ratkaisujen muodostamiseen. Vuonna 1150 toinen intialainen matemaatikko Bhaskaracharya (1114–1185) jatkoi Brahmaguptan työtä, ja käyttämällä jatkuvasti pieneneviä likiarvoja hän löysi Pell'n yhtälön ratkaisun. Bhaskaracharya havainnollisti menetelmäänsä ratkaisemalla yhtälön $x^2 - 61y^2 = 1$. Intialaisten merkittävät työt Pell'n yhtälön ratkaisemisessa jäivät kuitenkin pitkään tuntemattomiksi eurooppalaisille.

Pell'n yhtälön niin kutsuttu eurooppalainen historia sai alkunsa vuonna 1657, kun Pierre de Fermat (1601–1665) haastoi muut matemaatikot ratkaisemaan yhtälön $x^2 - 61y^2 = 1$. Useat matemaatikot löysivät pienimmän ratkaisun, joka on $(x, y) = (1766319049, 226153980)$, ja samana vuonna Brouncker esitti yleisen ratkaisumenetelmän Pell'n yhtälölle. John Wallis (1616–1703) kuvasi Brounckerin menetelmän kirjassaan, joka käsitteli algebraa ja lukuteoriaa, mutta Euler myöhemmin erehtyi luulemaan kuvattua menetelmää Pell'n kehittämäksi. Näin ollen yhtälö $x^2 - dy^2 = 1$ tunnetaan tänä päivänäkin Pell'n yhtälönä. [9, s. 216-217.]

2.2 Määritelmä ja triviaaliratkaisut

Tässä kappaleessa esitetään Pell'n yhtälön määritelmä ja triviaaliratkaisut. Tämä kappale perustuu lähteeseen [4, s. 1].

Määritelmä 2.1. Yhtälöä

$$\mathrm{x}^2 - d\mathrm{y}^2 = 1, \tag{1}$$

missä d on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole täydellinen neliö, kutsutaan Pell'n yhtälöksi. Täydellisellä neliöllä tarkoitetaan kokonaislukua, joka voidaan muodostaa, kun jokin kokonaisluku kerrotaan itsensä kanssa.

Tässä tutkielmassa keskitytään epätriviaaleihin ratkaisuihin (x, y), missä x ja y ovat kokonaislukuja. Yhtälön triviaalit ratkaisut ovat $(x, y) = (\pm 1,0)$. Tapauksia, joissa d on neliö, ei tarkastella. Tällöin Pell'n yhtälöllä on vain triviaaliratkaisut, sillä jos $d = c^2$, kun $c \in \mathbb{Z}$, niin silloin $x^2 - dy^2 = x^2 - (cy)^2$. Koska ainoat peräkkäiset neliöt, jotka eroavat yhdellä ovat luvut 0 ja 1, niin $x^2 - (cy)^2 = 1$, jolloin saadaan, että $x = \pm 1$ ja $y = 0$.

2.3 Epätriviaalit ratkaisut

Seuraavaksi todistetaan, että Pell'n yhtälöllä on olemassa epätriviaali ratkaisu. Todistus ei ole konstruktiivinen. Todistuksessa käytetään apuna kyyhkyslakkaperiaatetta sekä lemmaa koskien luvun $\sqrt{d}$ kokonaislukumonikertoja, jotka ovat lähellä kokonaislukuja, ja etäisyyden kontrolloimista luvun $\sqrt{d}$ kertoimella. Kappale pohjautuu lähteeseen [5, s. 1-3], ja kappaleen lopussa esitetyt esimerkit ovat peräisin lähteestä [4].

Lemma 2.2 (Kyyhkyslakkaperiaate). *Jos n on positiivinen kokonaisluku ja $n + 1$ objektia sijoitetaan n määrään laatikkoja, niin silloin ainakin yksi laatikko sisältää kaksi tai useampaa objektia. Jos äärettömän monta objektia jaetaan äärelliseen määrään laatikoita, on jossain laatikossa oltava ääretön määrä objekteja.*

Todistus. Oletetaan, että missään n laatikossa ei ole enempää kuin yksi objekti. Täten objektien kokonaismäärä olisi enimmillään n. Tämä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että objekteja on $n + 1$ kappaletta. □

Lemma 2.3. *Kaikille positiivisille kokonaisluvuille d, jotka eivät ole neliöitä, on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua x ja y niin, että $\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{y}$.*

Todistus. Käytetään kyyhkyslakkaperiaatetta. Tarkastellaan aluksi lukuja

$$0, \sqrt{d}, 2\sqrt{d}, ..., n\sqrt{d}, \tag{2}$$

jollekin kokonaisluvulle $n \geq 2$. Lukuja on selvästi $n + 1$ kappaletta. Lukujen desimaaliosat ovat välillä $[0, 1[$. Tämä väli voidaan jakaa n puoliavoimeen väliin $[0, \frac{1}{n}[$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$, ..., $[\frac{n-1}{n}, 1[$.

Kyyhkyslakkaperiaatteen mukaan kahdella luvulla luvuista (2), esimerkiksi luvuilla $a\sqrt{d}$ ja $b\sqrt{d}$, kun $a < b$ ja $a, b \in \mathbb{Z}_{+}$, on desimaaliosat samalla välillä, eli

$$a\sqrt{d} = A + \varepsilon, \qquad b\sqrt{d} = B + \delta, \tag{3}$$

missä $A, B \in \mathbb{Z}$ ja ε ja δ kuuluvat samaan väliin $[\frac{i}{n}, \frac{(i+1)}{n}[$. Näin ollen

$$|\varepsilon - \delta| < \frac{1}{n}.$$

Epäyhtälö on aito, sillä käytetyt välit ovat puoliavoimia. Edellisestä epäyhtälöstä saadaan käyttämällä yhtälöitä (3), että $\left|\left(a\sqrt{d} - A\right) - \left(b\sqrt{d} - B\right)\right| < \frac{1}{n}$, josta seuraa, että $|(B - A) -$ $b-ad<1n$.

Asetetaan nyt $x = B - A$ ja $y = b - a$, jolloin aikaisempien oletusten mukaisesti x ja y ovat kokonaislukuja, joille pätee $0 < y \leq n$. Täten

$$\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{y}. \tag{4}$$

Koska luvun x etäisyys luvusta $y\sqrt{d}$ on korkeintaan 1, niin saadaan, että

$$0 < \sqrt{d} - 1 \leq y\sqrt{d} - 1 < x,$$

eli $x \geq 1$.

Nyt on siis löydetty yksi positiivinen kokonaislukupari (x, y), joille $\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{y}$. Jotta saadaan toinen pari samalla ominaisuudella, valitaan positiivinen kokonaisluku n', jolle pätee $\frac{1}{n'} < \left|x - y\sqrt{d}\right|$. Tällainen luku n' on olemassa, sillä $x - y\sqrt{d} \neq 0$, koska luku d ei ole neliö, joten luku $\sqrt{d}$ on irrationaaliluku. Toistetaan luvulle n' samat edellä esitetyt vaiheet kuin luvulle n, jolloin löydetään positiiviset kokonaisluvut x' ja y', jotka toteuttavat epäyhtälön $\left|x' - y'\sqrt{d}\right| < \frac{1}{n'}$, kun $y' \leq n'$. Nyt $\left|x' - y'\sqrt{d}\right| < \frac{1}{y'}$. Epäyhtälöistä

$$\left|x' - y'\sqrt{d}\right| < \frac{1}{n'} < \left|x - y\sqrt{d}\right| \tag{5}$$

nähdään, että positiiviset kokonaislukuparit (x, y) ja (x', y') eivät ole samat. Toistamalla jälleen samat vaiheet saadaan pienempi luku $\left|x'' - y''\sqrt{d}\right|$, minkä seurauksena saadaan uusi positiivinen kokonaislukupari (x'', y''), niin että $\left|x'' - y''\sqrt{d}\right| < \frac{1}{y''}$. Tätä prosessia toistamalla löydetään ääretön määrä positiivisia kokonaislukuja x ja y, joille pätee $\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{y}$, kun d on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole neliö. □

Lause 2.4. *Pell'n yhtälöllä* $x^2 - dy^2 = 1$ *on epätriviaaliratkaisu kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla* d*, jotka eivät ole neliölukuja.*

Todistus. Aluksi osoitetaan, että on olemassa nollasta poikkeava kokonaisluku N, jolle on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukuparia (x, y), joille $x^2 - dy^2 = N$. Tämän jälkeen väite todistetaan jäännösluokkien mod N avulla.

Lemmasta 2.3 tiedetään, että $\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{y}$ äärettömän monelle $x, y \in \mathbb{Z}_+$. Osoitetaan, että tällaisille luvuille x ja y pätee

$$|x^2 - dy^2| < 1 + 2\sqrt{d},$$

missä olennaista on, että yläraja ei sisällä lukuja x tai y.

Ensiksi lukua x rajoitetaan ylhäältä luvun y suhteen:

$$x = x - y\sqrt{d} + y\sqrt{d} \leq \left|x - y\sqrt{d}\right| + y\sqrt{d} < \frac{1}{y} + y\sqrt{d} \leq 1 + y\sqrt{d}.$$

Tällöin

$$|x^2 - dy^2| = \left(x + y\sqrt{d}\right)\left|x - y\sqrt{d}\right| < \left(1 + y\sqrt{d} + y\sqrt{d}\right)\frac{1}{y} = \frac{1}{y} + 2\sqrt{d} \leq 1 + 2\sqrt{d}.$$

Täten $|x^2 - dy^2| < 1 + 2\sqrt{d}$ kaikille positiivisille kokonaislukupareille (x, y), jotka toteuttavat yhtälön $\left|x - \sqrt{d} < \frac{1}{y}\right|$. Tällaisia pareja on ääretön määrä, ja koska kokonaislukuja välillä $\left[-\left(1 + 2\sqrt{d}\right), 1 + 2\sqrt{d}\right]$ on äärellinen määrä, on kyyhkyslakkaperiaatteen mukaan on olemassa $N \in \mathbb{Z}$, $|N| < 1 + 2\sqrt{d}$, ja

$$x^2 - dy^2 = N \tag{6}$$

äärettömän monelle positiiviselle kokonaislukuparille (x, y). Lisäksi $N \neq 0$, sillä $x^2 - dy^2 = 0$ eli $x^2 = dy^2$ vain jos $x = 0$ ja $y = 0$, koska luku d ei ole neliö.

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälön (6) toteuttavia lukuja $x, y \in \mathbb{Z}_+$ modulo $|N|$. Pareja $(x \bmod |N|, y \bmod |N|)$ on äärettömän monta, joten jonkin parin täytyy toistua äärettömän usein, koska on olemassa vain äärellinen määrä kokonaislukupareja modulo N. Näin ollen yhtälölle (6) on olemassa positiiviset kokonaislukuratkaisut (x_1, y_1) ja (x_2, y_2), joille pätee $x_1 \equiv x_2 \bmod |N|$, $y_1 \equiv y_2 \bmod |N|$, ja $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

Merkitään nyt $x_1 = x_2 + Nk$ ja $y_1 = y_2 + Nl$, missä $k, l \in \mathbb{Z}$. Täten

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = x_2 + y_2\sqrt{d} + N\big(k + l\sqrt{d}\big) \tag{7}$$

ja

$$x_1 - y_1\sqrt{d} = x_2 - y_2\sqrt{d} + N\big(k - l\sqrt{d}\big). \tag{8}$$

Koska $N = x_2^2 - dy_2^2 = \big(x_2 + y_2\sqrt{d}\big)\big(x_2 - y_2\sqrt{d}\big)$, sijoittamalla tämä yhtälöihin (7) ja (8) luvun N paikalle ja sieventämällä saadaan, että

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = \big(x_2 + y_2\sqrt{d}\big)\Big(1 + \big(x_2 - y_2\sqrt{d}\big)\big(k + l\sqrt{d}\big)\Big) \tag{9}$$

ja

$$x_1 - y_1\sqrt{d} = \big(x_2 - y_2\sqrt{d}\big)\Big(1 + \big(x_2 + y_2\sqrt{d}\big)\big(k - l\sqrt{d}\big)\Big). \tag{10}$$

Nyt yhtälön (9) oikean puolen toinen tekijä

$$1 + \big(x_2 - y_2\sqrt{d}\big)\big(k + l\sqrt{d}\big) = (1 + kx_2 - ldy_2) + (x_2l - y_2k)\sqrt{d}$$

ja yhtälön (10) oikean puolen toinen tekijä

$$1 + \big(x_2 + y_2\sqrt{d}\big)\big(k - l\sqrt{d}\big) = (1 + kx_2 - ldy_2) + (-x_2l + y_2k)\sqrt{d}.$$

Nyt merkitsemällä $x = 1 + kx_2 - ldy_2$ ja $y = (x_2l - y_2k)$ saadaan, että

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = \big(x_2 + y_2\sqrt{d}\big)\big(x + y\sqrt{d}\big)$$

$$x_1 - y_1\sqrt{d} = \big(x_2 - y_2\sqrt{d}\big)\big(x - y\sqrt{d}\big).$$

Kertomalla nämä yhtälöt keskenään saadaan $N = N(x^2 - dy^2)$. Täten saadaan $x^2 - dy^2 = 1$.

Näytetään vielä lopuksi, että $(x, y) \neq (\pm 1, 0)$. Jos $(x, y) = (1, 0)$, niin silloin $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksen $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ kanssa. Jos taas $(x, y) = (-1, 0)$, niin tällöin $x_1 = -x_2$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että luvut x_1 ja x_2 ovat positiivisia. $\square$

Yksinkertaisin tapa löytää epätriviaaliratkaisu yhtälölle (1) on kirjoittaa se muotoon $x^2 = dy^2 + 1$ ja asettaa $y = 1, 2, 3, \ldots$, kunnes löydetään arvo, jossa luku $dy^2 + 1$ on täydellinen neliö. Tätä arvoa merkitään luvulla x^2 ja täten saadaan ratkaisu (x, y).

Esimerkki 2.5. Yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ kaksi ratkaisua ovat $(3, 2)$ ja $(17, 12)$, sillä $2y^2 + 1$ on neliöluku, kun $y = 2$ ja $y = 12$, jolloin muuttujan x arvot ovat $9 = 3^2$ ja $289 = 17^2$. Alla oleva taulukko kuvaa ratkaisujen löytämistä.

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$2y^2 + 1$	3	9	19	33	51	73	99	129	163	201	243	289	339	393	451
Onko neliöluku?	ei	on	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	ei	on	ei	ei	ei

Huomautus 2.6. Lauseen 2.4 mukaan taulukoimalla lausekkeen $dy^2 + 1$ arvoja niin kauan, että saadaan neliöluku, saadaan yhtälön $x^2 - dy^2 = 1$ epätriviaaliratkaisu. Vaikka ratkaisuun aina lopulta päädytään, ei ole kuitenkaan selvää, kuinka kauan se vie aikaa. Pell'n yhtälön pienin positiivinen ratkaisu voi olla hyvinkin suuri verrattuna lukuun d tai pienimmän positiivisen ratkaisun ero peräkkäisillä luvuilla d voi olla todella suuri. Alla oleva taulukko kuvaa näitä ominaisuuksia.

d	12	13	14	60	61	62	108	109	110
x	7	649	15	31	1766319049	63	1351	158070671986249	21
y	2	180	4	4	226153980	8	130	15140424455100	2

Pell'n yhtälölle voidaan siis löytää ainakin yksi epätriviaaliratkaisu. Seuraavassa kappaleessa esitetään, miten voidaan löytää kaikki olemassa olevat Pell'n yhtälön ratkaisut käyttämällä tunnettua ratkaisua apuna.

2.4 Pell'n yhtälön kaikki ratkaisut

Edellisen kappaleen perusteella tiedetään, että Pell'n yhtälöllä $x^2 - dy^2 = 1$ on ainakin yksi epätriviaali ratkaisu, kun d ei ole neliö. Seuraavaksi tarkastellaan, miten voidaan määrittää kaikki Pell'n yhtälön epätriviaalit ratkaisut. Kaikkien ratkaisujen löytämiseksi käytettäviä lauseita ja todistuksia seurataan lähteen [7] mukaan. Tarkastellaan ensiksi Diofantoksen yhtälön

$$T^2 - dU^2 = 4\sigma \tag{11}$$

ratkaisuja, kun $\sigma \in \{-1, 1\}$ ja U on erisuuri kuin 0. Jos luvut T, U ja σ toteuttavat yhtälön (11), niin $T \equiv dU$ (mod 2). Tarkastellaan tapausta $T \equiv dU \equiv 0$ (mod 2). Kun $\sigma = 1$, saadaan kaksi mahdollista alitapausta. Ensinnäkin, jos $T \equiv U \equiv 0$ (mod 2), saadaan jakamalla puolittain luvulla 4 yhtälöstä (11) yhtälö (1), jolloin $x = \frac{T}{2}$ ja $y = \frac{U}{2}$. Toisessa tapauksessa taas $T \equiv 0$ (mod 2) ja $U \equiv 1$ (mod 2), jolloin välttämättä $d \equiv 0$ (mod 4). Sijoittamalla $x = \frac{T}{2}$ ja $y = U$, saadaan jälleen yhtälö (1), kun luku d korvataan luvulla $\frac{d}{4}$. Yhtälöllä (11) on siis lauseen 2.4 mukaan aina epätriviaali ratkaisu, jolle $T \equiv U \equiv 0$ (mod 2) ja $\sigma = 1$. Seuraavaksi osoitetaan, että yhtälöllä (11) on ääretön määrä epätriviaaleja ratkaisuja. Merkinnällä (T, U, σ) tarkoitetaan jatkossa jotakin yhtälön (11) kokonaislukuratkaisua. Todistuksessa käytetään hyväksi tietoa, että

$$\begin{aligned}(t^2 - Du^2)(p^2 - Dq^2) &= t^2p^2 - t^2Dq^2 - p^2Du^2 + D^2u^2q^2 \\ &= (tp + Duq)^2 - D(tq + up)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Lause 2.7. *Jos* (t_1, u_1, σ_1) *ja* (t_2, u_2, σ_2) *ovat yhtälön (11) ratkaisuja, missä* $t_1 \neq \eta t_2$ *ja* $u_1 \neq -\eta u_2$, *kun* $\eta \in \{-1, 1\}$, *niin* (t_3, u_3, σ_3) *on yksi yhtälön (11) ratkaisu, missä*

$$t_3 = \frac{t_1t_2 + du_1u_2}{2}, \qquad u_3 = \frac{t_1u_2 + t_2u_1}{2}, \qquad \sigma_3 = \sigma_1\sigma_2.$$

Todistus. Yhtälöiden (12) ja (11) mukaan $(t_1^2 - du_1^2)(t_2^2 - du_2^2) = (t_1t_2 + du_1u_2)^2 - d(t_1u_2 + t_2u_1)^2 = \sigma_1\sigma_2 4^2$, joten $\frac{(t_1t_2+du_1u_2)^2}{4} - \frac{d(t_1u_2+t_2u_1)^2}{4} = \sigma_1\sigma_2 4$. Koska $\frac{(t_1t_2+du_1u_2)^2}{4} = \left(\frac{t_1t_2+du_1u_2}{2}\right)^2$ ja $\frac{(t_1u_2+t_2u_2)^2}{4} = \left(\frac{t_1u_2+t_2u_1}{2}\right)^2$, riittää osoittaa, että neliöön korotettavat luvut ovat kokonaislukuja eli että

$$t_1u_2 + t_2u_1 \equiv t_1t_2 + du_1u_2 \equiv 0 \text{ (mod 2)}$$

ja $u_3 \neq 0$. Huomataan, että kongruenssiyhtälö toteutuu, sillä $t_1 \equiv du_1$ ja $t_2 \equiv du_2$ (mod 2). Tehdään vastaoletus, että $u_3 = 0$. Tällöin $t_1 = -\frac{t_2u_1}{u_2}$ ja $t_3^2 = 4\sigma_1\sigma_2$ mistä seuraa, että $t_3 = \pm 2$. Jos valitaan $\eta = \frac{t_1}{t_2}$, niin silloin $\frac{u_1}{u_2} = -\eta$, ja koska $t_3 = \pm 2$, niin silloin tästä seuraa, että $\eta(t_2^2 - du_2^2) = \frac{t_2^2 t_1}{t_2} + \frac{du_2^2 u_1}{u_2} = t_1 t_2 + du_1 u_2 = 2t_3 = \pm 4$. Koska oletuksen mukaan $t_2^2 - du_2^2 = 4\sigma_2$ ja $\sigma_2 = \pm 1$, niin saadaan, että $|\eta| = 1$. Täten on päädytty ristiriitaan. □

Huomautus 2.8. Jos t_1, t_2, t_3, u_1, u_2 ja u_3 ovat määritelty samoin kuin lauseessa 2.7, niin merkitään $\lambda_1 = \frac{t_1 + u_1\sqrt{d}}{2}$ ja $\lambda_2 = \frac{t_2 + u_2\sqrt{d}}{2}$, jolloin saadaan, että

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{t_3 + u_3\sqrt{d}}{2}.$$

Jos (t_1, u_1, σ_1) on jokin yhtälön (11) ratkaisu, niin käyttämällä lausetta 2.7 niin, tä(t_1, u_1, σ_1) on molempien ratkaisujen paikalla, saadaan, että $\left((t_1^2 + du_1^2), t_1u_1, \sigma_1^2\right)$ on myös yhtälön (11) ratkaisu. Merkitään $\left((t_1^2 + du_1^2), t_1u_1, \sigma_1^2\right) = (t_2, u_2, \sigma_2)$. Nyt $\lambda_1^2 = \frac{t_2 + u_2\sqrt{d}}{2}$. Iteroimalla tätä, yhtälölle voidaan muodostaa ääretön määrä ratkaisuja (t_n, u_n, σ_1^n), $n = (1, 2, 3, \dots)$, missä

$$\frac{t_n + u_n\sqrt{d}}{2} = \lambda_1^n.$$

Nämä ratkaisut ovat erisuuria, sillä jos $(t_m, u_m, \sigma_1^m) = (t_n, u_n, \sigma_1^n)$, kun $n > m$, niin silloin $\lambda_1^n = \lambda_1^m$ ja $\lambda_1^{n-m} = 1$. Tämä kuitenkin tarkoittaisi, että $u_{n-m} = 0$, mikä on lauseen 2.7 todistuksen mukaan mahdotonta.

Seuraavaksi näytetään, kuinka kaikki yhtälön (11) ratkaisut voidaan generoida. Tätä varten esitetään ensin apulauseita.

Lemma 2.9. *Jos (t, u, σ) on jokin yhtälön $T^2 - dU^2 = 4\sigma$, missä $\sigma \in \{-1, 1\}$, ratkaisu, niin silloin $t + u\sqrt{d} > 2$ jos ja vain jos $t > 0$, $u > 0$.*

Todistus. Selvästi, jos $t, u > 0$, niin $t + u\sqrt{d} \geq 1 + \sqrt{d} > 2$. Oletetaan, että $t + u\sqrt{d} > 2$. Koska

$$\left(t + u\sqrt{d}\right)\left(t - u\sqrt{d}\right) = t^2 - du^2 = 4\sigma,$$

saadaan, että

$$\frac{|t - u\sqrt{d}|}{2} = \frac{2}{t + u\sqrt{d}} < 1.$$

Näin ollen $-2 < t - u\sqrt{d} < 2$. Koska $t + u\sqrt{d} > 2$, niin $t - u\sqrt{d} < t + u\sqrt{d}$, mistä seuraa, että $-u\sqrt{d} < u\sqrt{d}$, joten $u > 0$. Vastaavasti, koska $-2 < t - u\sqrt{d}$, niin $-t + u\sqrt{d} < 2$, mistä saadaan, että $-t + u\sqrt{d} < t + u\sqrt{d}$ eli $-t < t$, joten myös $t > 0$. □

Lemma 2.10. Jos (t, u, σ) on yksi yhtälön $T^2 - dU^2 = 4\sigma$, missä $\sigma \in \{-1, 1\}$, ratkaisu ja $t, u > 0$, niin $2ud \geq 8$. Jos $t > 0$ ja $u > 1$, niin silloin $2t + 1 + (2u - 1)d > 8$.

Todistus. Selvästi molemmat epäyhtälöt pätevät, kun $d \geq 8$. Oletetaan, että $d < 8$. Koska d ei ole täydellinen neliö, se voi saada ainoastaan arvot $d = 2, 3, 5, 6, 7$. Jos $d = 2, 3, 6, 7$, niin silloin $2|t$ ja $2|u$, mikä tarkoittaa, että tällöin $t \geq 2$, $u \geq 2$ ja täten molemmat epäyhtälöt toteutuvat. Jos $d = 5$, niin tällöin $2ud \geq 10 > 8$, ja jos $t \geq 1$, $u \geq 1$, niin $2t + 1 + (2u - 1)d > 8$. □

Lause 2.11. *Oletetaan, että (t_1, u_1, σ_1) ja (t_2, u_2, σ_2) ovat yhtälön $T^2 - dU^2 = 4\sigma$, missä $\sigma \in \{-1, 1\}$, ratkaisuja. Jos $t_1, t_2, u_1, u_2 > 0$, niin saadaan, että*

$$t_2 + u_2\sqrt{d} > t_1 + u_1\sqrt{d}$$

jos ja vain jos $t_2 > t_1$ ja $u_2 \geq u_1$.

Todistus. On selvää, että jos $t_2 > t_1$ ja $u_2 \geq u_1$, niin $t_2 + u_2\sqrt{d} > t_1 + u_1\sqrt{d}$. Oletetaan nyt, että $t_2 + u_2\sqrt{d} > t_1 + u_1\sqrt{d}$. Tarkastellaan kahta tapausta luvun $t_1 - u_1\sqrt{d}$ merkin mukaan. Käytetään tietoa, että $(t_i + u_i\sqrt{d})(t_i - u_i\sqrt{d}) = t^2 - du^2 = 4\sigma_i$, kun $i = 1, 2$.

(1) Oletetaan, että $t_1 - u_1\sqrt{d} > 0$.

Lauseen oletuksen mukaan $t_i + u_i\sqrt{d} > 0$, kun $i = 1, 2$. Siis $\sigma_1 = 1$ ja

$$\frac{t_1 - u_1\sqrt{d}}{2} = \frac{2}{t_1 + u_1\sqrt{d}} > \frac{2}{t_2 + u_2\sqrt{d}} = \frac{|t_2 - u_2\sqrt{d}|}{2}.$$

Täten

$$\frac{u_1\sqrt{d} - t_1}{2} < \frac{t_2 - u_2\sqrt{d}}{2} < \frac{t_1 - u_1\sqrt{d}}{2}.$$

Koska $t_2 + u_2\sqrt{d} > t_1 + u_1\sqrt{d}$, nähdään, että

$$-u_2\sqrt{d} = \frac{-t_2 - u_2\sqrt{d}}{2} + \frac{t_2 - u_2\sqrt{d}}{2} < \frac{-t_1 - u_1\sqrt{d}}{2} + \frac{t_1 - u_1\sqrt{d}}{2} = -u_1\sqrt{d},$$

joten $u_2 > u_1$. Nyt $du_2^2 > du_1^2 + 2du_1$, sillä $u_2 > u_1 + 1$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} t_2^2 &= du_2^2 + 4\sigma_2 > du_1^2 + 2du_1 + 4\sigma_2 = t_1^2 - 4\sigma_1 + 4\sigma_2 + 2du_1 \\ &\geq t_1^2 + 2du_1 - 8 \geq t_1^2, \end{aligned}$$

joten $t_2 > t_1$.

(2) Oletetaan, että $t_1 - u_1\sqrt{d} < 0$.

Tällöin $\sigma_1 = -1$ ja

$$\frac{u_1\sqrt{d} - t_1}{2} = \frac{2}{t_1 + u_1\sqrt{d}} > \frac{2}{t_2 + u_2\sqrt{d}} = \frac{|t_2 - u_2\sqrt{d}|}{2},$$

mikä tarkoittaa, että $\frac{t_1 - u_1\sqrt{d}}{2} < \frac{t_2 - u_2\sqrt{d}}{2} < \frac{u_1\sqrt{d} - t_1}{2}$, joten

$$t_2 = \frac{t_2 - u_2\sqrt{d}}{2} + \frac{t_2 + u_2\sqrt{d}}{2} > \frac{t_1 - u_1\sqrt{d}}{2} + \frac{t_1 + u_1\sqrt{d}}{2} = t_1.$$

Jos $u_2 < u_1$, niin tällöin on oltava $u_2 \leq u_1 - 1$ ja

$$4\sigma_2 \geq (t_1 + 1)^2 - d(u_1 - 1)^2 = 4\sigma_1 + 2t_1 + 1 + (2u_1 - 1)d.$$

Koska $u_2 > 0$, tämän seurauksena pätee, että $u_1 > 1$. Lisäksi lemman 2.10 mukaan

$$2t_1 + 1 + (2u_1 - 1)d > 8 \geq 4\sigma_2 - 4\sigma_1 \geq 2t_1 + 1 + (2u_1 - 1)d,$$

minkä seurauksena päädytään ristiriitaan. Täten $u_2 \geq u_1$. □

Lauseen 2.4 perusteella tiedetään, että yhtälöllä (11) on ratkaisu $(t, u, 1)$, missä $t \equiv u \equiv 0 \pmod 2$. Lisäksi voidaan olettaa, että $t, u > 0$. Oletetaan seuraavaksi, että on olemassa toinen yhtälön (11) ratkaisu (t_1, u_1, σ_1), jolle $t_1, u_1 > 0$ ja $t_1 + u_1\sqrt{d} < t + u\sqrt{d}$. Lauseen 2.11 perusteella tiedetään, että $t_1 < t$ ja $u_1 \leq u$. Näiden rajoitteiden seurauksena ratkaisun (t_1, u_1, σ_1) muodostavan vaihtoehtojen määrä on äärellinen ja täten on olemassa vain äärellinen määrä vaihtoehtoja muodostaa luku $t_1 + u_1\sqrt{d}$. Näin ollen voidaan määrittää yksikäsitteinen ratkaisu (t_1, u_1, σ_1) yhtälölle (11), jolle pätee, että $t_1 + u_1\sqrt{d} > 2$ luku $t_1 + u_1\sqrt{d}$ on pienin mahdollinen. Kutsutaan tätä pienintä ratkaisua *fundamentaaliseksi ratkaisuksi*. Merkitään nyt $\epsilon = \frac{(t_1 + u_1\sqrt{d})}{2}$. Huomataan, että $\epsilon > 1$.

Lause 2.12. *Jos* (t', u', σ') *on jokin yhtälön* $T^2 - dU^2 = 4\sigma$*, missä* $\sigma \in \{-1, 1\}$*, ratkaisu, niin silloin*

$$\eta = \frac{\left(t' + u'\sqrt{d}\right)}{2} = \pm\epsilon^n$$

jollekin $n \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Koska

$$\left(\frac{t' - u'\sqrt{d}}{2}\right)\left(\frac{t' + u'\sqrt{d}}{2}\right) = \sigma',$$

nähdään, että yksi ja vain yksi luvuista $\eta, -\eta, \eta^{-1}$ tai $-\eta^{-1}$ on suurempi kuin 1. Olkoon tämä luku γ. Lemman 2.9 perusteella tiedetään, että $\gamma = \frac{\left(|t'| + |u'|\sqrt{d}\right)}{2}$, ja että $(|t'|, |u'|, \sigma')$ on yhtälön (11) ratkaisu. Koska $\gamma > 1$ ja $\epsilon > 1$, on oltava olemassa jokin ei-negatiivinen luku $n \in \mathbb{Z}$, jolle

$$\epsilon^n \leq \gamma < \epsilon^{n+1}.$$

Jos $\gamma = \epsilon^n$, niin todistus on valmis, koska $n \neq 0$ ja $\eta \in \{\gamma, -\gamma, \gamma^{-1}, -\gamma^{-1}\}$. Jos $\gamma \neq \epsilon^n$, niin silloin

$$1 < \gamma\epsilon^{-n} < \epsilon.$$

Koska $\frac{\epsilon\left(t_1 - u_1\sqrt{d}\right)}{2} = \sigma_1$, saadaan, että

$$\epsilon^{-n} = \sigma_1^n \left(\frac{t_1 - u_1\sqrt{d}}{2}\right)^n.$$

Koska $(t_1, -u_1, \sigma_1)$ on yhtälön (11) ratkaisu, huomautuksesta 2.8 seuraa, että $\left(\frac{t_1 - u_1\sqrt{d}}{2}\right)^n$ antaa ratkaisun yhtälölle (11) ja yhdistämällä tämä ratkaisun $(|t'|, |u'|, \sigma')$ kanssa saadaan lauseen 2.7 avulla, että luku

$$\lambda = \gamma\epsilon^{-n} = \frac{t_2 + u_2\sqrt{d}}{2}$$

antaa ratkaisun $(t_2, u_2, \sigma'\sigma_1^n)$ yhtälölle (11), missä $t_2, u_2 \in \mathbb{Z}$, kun $t_2 \equiv du_2$ (mod 2). Lisäksi, koska $\lambda > 1$, lemman 2.9 mukaan saadaan, että $t_2, u_2 > 0$.

Näin ollen $(t_2, u_2, \sigma'\sigma_1^n)$ on yhtälön (11) ratkaisu, missä $t_2, u_2 > 0$, ja $1 < \lambda < \epsilon$. Tämä on ristiriidassa luvun ϵ minimaalisuuden kanssa. □

Lauseen 2.4 perusteella tiedetään, että Pell'n yhtälöllä (1) on ratkaisu. Kutsutaan *Pell'n yhtälön fundamentaaliseksi ratkaisuksi* ratkaisua (x_i, y_i), joille on voimassa $x_i, y_i > 0$ ja $x_i + y_i\sqrt{d}$ on pienin mahdollinen luku.

Korollaari 2.13. *Oletetaan, että* (x_i, y_i) *on Pell'n yhtälön fundamentaalinen ratkaisu. Jos*

$$x^2 - dy^2 = 1 \quad ja \quad x, y > 0,$$

niin silloin

$$x + y\sqrt{d} = \left(x_i + y_i\sqrt{d}\right)^n,$$

missä n *on jokin positiivinen kokonaisluku.*

Todistus. Koska $x_i^2 - dy_i^2 = 1$, niin $(2x_i)^2 - d(2y_i)^2 = 4$, joten $(2x_i, 2y_i, 1)$ on yhtälön (11) ratkaisu. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että $(2x, 2y, 1)$ on yhtälön (11) ratkaisu. Lauseen 2.12 perusteella tiedetään, että

$$\frac{2x_i+2y_i\sqrt{d}}{2} = x_i + y_i\sqrt{d} = \epsilon^k$$

ja

$$\frac{2x+2y\sqrt{d}}{2} = x + y\sqrt{d} = \epsilon^m,$$

jollekin $k, m \in \mathbb{Z}$. Koska (x_i, y_i) on yhtälön (1) fundamentaalinen ratkaisu, on oltava $m > k > 0$. Olkoon

$$m = nk + r,$$

missä $n > 0$ ja $0 \leq r < k$. Tällöin

$$x + y\sqrt{d} = \left(x_i + y_i\sqrt{d}\right)^n \epsilon^r$$

ja

$$1 \leq \epsilon^r = \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x_i - y_i\sqrt{d}\right)^n.$$

Koska $\epsilon^r = \frac{(t' + y'\sqrt{d})}{2}$ joillekin $t', u' \in \mathbb{Z}$, nähdään, että jos $r > 0$, niin (t', u', σ) on yhtälön (11) ratkaisu jollakin $\sigma \in \{-1, 1\}$, joten välttämättä $t' \equiv u' \equiv 0$ (mod 2) ja

$$\left(\frac{t'}{2}\right)^2 - d\left(\frac{u'}{2}\right)^2 = 1.$$

Koska $r < k$, saadaan, että $\epsilon^r < \epsilon^k = x_i + y_i\sqrt{d}$, mutta tämä on ristiriidassa ratkaisun (x_i, y_i) minimaalisuuden kanssa. Täten on oltava $r = 0$ ja

$$x + y\sqrt{d} = \left(x_i + y_i\sqrt{d}\right)^n. \qquad \square$$

Huomautus 2.14. Jos (x, y) on jokin Pell'n yhtälön ratkaisu, niin silloin

$$x + y\sqrt{d} = \pm\left(x_i + y_i\sqrt{d}\right)^n$$

jollekin kokonaisluvulle n, kun valitaan sopiva etumerkki.

Näin ollen voidaan löytää kaikki Pell'n yhtälön ratkaisut, kun tiedetään fundamentaalinen ratkaisu [7, s. 8-12]. Myös, korottamalla tunnettu Pell'n yhtälön ratkaisu n lukua $x + y\sqrt{d}$ potenssiin, joka on suurempi tai yhtä suuri kuin kaksi, saadaan yhtälölle uusia ratkaisuja.

Esimerkki 2.15 (vrt. [4, s. 7])**.** Yhtälön $x^2 - 5y^2 = 1$ positiivinen ratkaisu pienimmällä luvun y arvolla on $(9, 4)$, joten kaikki positiiviset ratkaisut saadaan luvun $\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^k$ kertoimista, kun $k \geq 1$.

Valitaan $k = 2$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}(9 + 4\sqrt{5})^2 &= 81 + 80 - 72\sqrt{5} \\ &= 161 - 72\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Näin ollen saadaan ratkaisupari $(x, y) = (161, 72)$. Sijoittamalla saadut luvut yhtälöön $x^2 - 5y^2 = 1$ saadaan, että

$$161^2 - 5 \cdot 72^2 = 1.$$

Nähdään, että luvut $(161, 72)$ toteuttavat yhtälön Pell'n yhtälön $x^2 - 5y^2 = 1$.

Vastaavasti valitsemalla esimerkiksi $k = 4$ saadaan, että

$$(9 + 4\sqrt{5})^4 = 25921 + 25920 - 23184\sqrt{5}$$

$$= 51841 - 23184\sqrt{5}.$$

Uusi yhtälön $x^2 - 5y^2 = 1$ toteuttava ratkaisupari on nyt siis $(x, y) = (51841, 23184)$.

Tässä luvussa on esitetty Pell'n yhtälön keskeisempiä ominaisuuksia, joiden avulla voidaan seuraavaksi tarkastella Pell'n yhtälöön liittyviä sovelluksia. Tähän tutkielmaan on valittu esitettäväksi lauseita ja todistuksia, jotka käyttävät algebrallisia menetelmiä. Esimerkiksi kaikkien ratkaisujen löytämiseksi voidaan käyttää niin kutsuttua ketjumurtolukumenetelmää. Koska aihe on kuitenkin niin laaja, sitä ei tässä tutkielmassa käsitellä Pell'n yhtälön ominaisuuksien tai sovelluksien yhteydessä. Aiheeseen voi kuitenkin tutustua esimerkiksi lähteen [4] avulla.

3 Pell’n yhtälön sovelluksia

Tässä kappaleessa käsitellään Pell’n yhtälön sovelluksia, jotka pystytään esittämään algebrallisten menetelmien avulla. Tunnettuja sovelluksia, joiden ratkaisemisessa käytetään Pell’n yhtälöä, ovat yleistetty Pell’n yhtälö, negatiivinen Pell’n yhtälö sekä kolmio-neliöluvut. Historiallisesti ensimmäisiä sovelluksia, joissa Pell’n yhtälö on esiintynyt, on niin kutsuttu Arkhimedeen karjaongelma. Lisäksi esitetään, miten Pell’n yhtälön avulla voidaan löytää Pythagoraan kolmio, jossa kahden sivun pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja, ja tarkastellaan approksimaatioita neliöjuurille. Lopuksi esitetään, miten voidaan löytää Pell’n yhtälön ominaisuuksia käyttämällä peräkkäisten kokonaislukujen ja neliöiden muodostamat yhtä suuret summat.

3.1 Yleistetty Pell’n yhtälö

Tarkastellaan yleistettyä Pell’n yhtälöä, joka on muotoa

$$X^2 - dY^2 = N, \tag{13}$$

missä d on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole täydellinen neliöluku, ja N on kokonaisluku. Yhtälöä (13) vastaava Pell’n yhtälö on

$$x^2 - dy^2 = 1. \tag{14}$$

Yleistetyn Pell’n yhtälön ominaisuuksia ja ratkaisujen löytämistä tarkastellaan seuraamalla lähdettä [2]. Jos (X, Y) ja (x, y) ovat yhtälöiden (13) ja (14) ratkaisuja vastaavasti, niin silloin tulosta

$$\left(x + y\sqrt{d}\right)\left(X + Y\sqrt{d}\right) = (xX + yYd) + (xY + yX)\sqrt{d}$$

saadaan johdettua

$$(xX + yYd, xY + yX),$$

joka muodostaa uuden yleistetyn Pell’n yhtälön ratkaisun, sillä

$$(xX + yYd)^2 - d(xY + yX)^2 = (x^2 - dy^2)(X^2 - dY^2) = 1 \cdot N.$$

Sanotaan, että yleistetyn Pell’n yhtälön (13) ratkaisut (X, Y) ja $(X^{'}, Y')$ ovat ekvivalentteja, jos on olemassa Pell’n yhtälön (14) ratkaisu (x, y), jolle

$$(X', Y') = (xX + yYd, xY + yX).$$

Tällöin yleistetyn Pell'n yhtälön (13) kaikki ratkaisut voidaan jakaa ekvivalenttiluokkiin, joiden joukossa kukin ratkaisuluokka koostuu kahden termin jonoista:

$$X_{n+1} = xX_n + yY_nd \tag{15}$$

$$Y_{n+1} = xY_n + yX_n, \tag{16}$$

missä (x, y) on vastaavan Pell'n yhtälön (14) ratkaisu.

Yhtälöt (15) ja (16) voidaan ilmaista toisin, kun korvataan luku n luvulla $n - 1$:

$$X_n = xX_{n-1} + yY_{n-1}d \tag{17}$$

$$Y_n = xY_{n-1} + yX_{n-1}. \tag{18}$$

Eliminoimalla luvut Y_{n-1} ja X_{n-1} yhtälöistä (17) ja (18) ja huomaamalla, että $x^2 - dy^2 = 1$, saadaan seuraavat yhtälöt:

$$dyY_n = xX_n - X_{n-1}$$

$$yX_n = xY_n - Y_{n-1}.$$

Sijoittamalla nämä yhtälöihin (15) ja (16) saadaan, että

$$X_{n+1} = 2xX_n - X_{n-1}$$

$$Y_{n+1} = 2xY_n - Y_{n-1},$$

jotka yleistetyn Pell'n yhtälön ratkaisujen (15) ja (16) määräämän ekvivalenttien ratkaisujen jono toteuttaa.

3.1.1 Negatiivinen Pell'n yhtälö

Negatiivinen Pell'n yhtälö

$$X^2 - dY^2 = -1$$

on yleistetyn Pell'n yhtälön erikoistapaus. Negatiivinen Pell'n yhtälö mainitaan myöhemmin peräkkäisten kokonaislukujen muodostamien yhtä suurien summien yhteydessä, joten aihe esitellään lyhyesti seuraten lähdettä [4].

Lemma 3.1. *Jos yhtälöllä* $X^2 - dY^2 = 1$ *on ratkaisut* (x, y) *ja* (x', y'), *niin silloin* $(x +$ *ydx′+y′d=a+bd, ja pari (a, b) on myös yhtälön ratkaisu.*

Todistus. Koska

$$(x + y\sqrt{d})(x' + y'\sqrt{d}) = xx' + xy'\sqrt{d} + yx'\sqrt{d} + yy'd$$

$$= (xx' + dyy') + (xy' + yx')\sqrt{d},$$

niin väite seuraa yhtälöstä (12), kun käytetään sen vasemmalle puolelle tietoa, että $x^2 - dy^2 = 1 = x'^2 - dy'^2$. □

Pell'n yhtälön $x^2 - dy^2 = 1$ ratkaisut on siis mahdollista saada kertomalla kaksi ratkaisua keskenään, kun ne on esitetty muodossa $x + y\sqrt{d}$. Samaa menetelmää ei voi käyttää sellaisenaan negatiiviselle Pell'n yhtälölle, mutta soveltamalla lemmaa 3.1 on mahdollista löytää myös negatiivisen Pell'n yhtälön ratkaisut.

Lause 3.2. *Jos* $x^2 - dy^2 = n$ *ja* $x'^2 - dy'^2 = n'$, *niin tällöin lausekkeen* $(x + y\sqrt{d})(x' +$ *y′d kertoimet muodostavat yhtälön X2−dY2=nn′ ratkaisun.*

Todistus. Lemman 3.1 todistuksen mukaan $(x + y\sqrt{d})(x' + y'\sqrt{d}) = (xx' + dyy') + (xy' + yx')\sqrt{d}$ ja yhtälön (12) avulla saadaan, että

$$(xx' + dyy')^2 - d(xy' + yx')^2 = (x^2 - dy^2)(x'^2 - dy'^2) = nn'. \qquad \square$$

Edellisen lauseen perusteella, jos (x, y) on yhtälön $X^2 - dY^2 = -1$ ratkaisu, niin lausekkeen $(x + y\sqrt{d})^k = x_k + y_k\sqrt{d}$ kertoimet (x_k, y_k), $k \in Z_+$ ovat yhtälön $X^2 - dY^2 = (-1)^k$ ratkaisuja: parittomat potenssit antavat ratkaisuja negatiiviselle Pell'n yhtälölle $X^2 - dY^2 = -1$ ja parilliset potenssit antavat ratkaisuja yhtälölle $X^2 - dY^2 = 1$.

Esimerkki 3.3. Negatiivisen Pell'n yhtälön $x^2 - 2y^2 = -1$ ensimmäinen ratkaisu on $(1, 1)$. Toinen ratkaisu saadaan korottamalla lauseke $(1 + \sqrt{2})^k$ seuraavaan parittomaan potenssiin. Saadaan siis, että

$$(1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2},$$

eli toinen ratkaisupari on $(7, 5)$. Vastaavalla tavalla saadaan kolmas ratkaisupari:

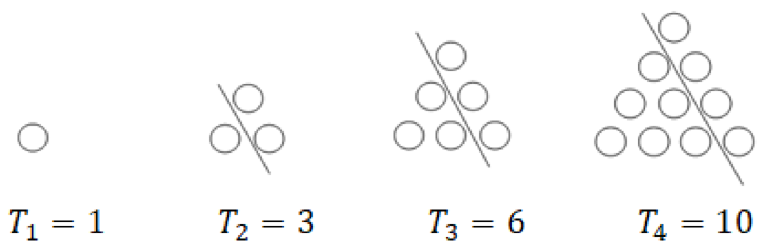
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^5 = 41 + 29\sqrt{2},$$

eli $(41, 29)$.

3.2 Kolmio-neliöluvut

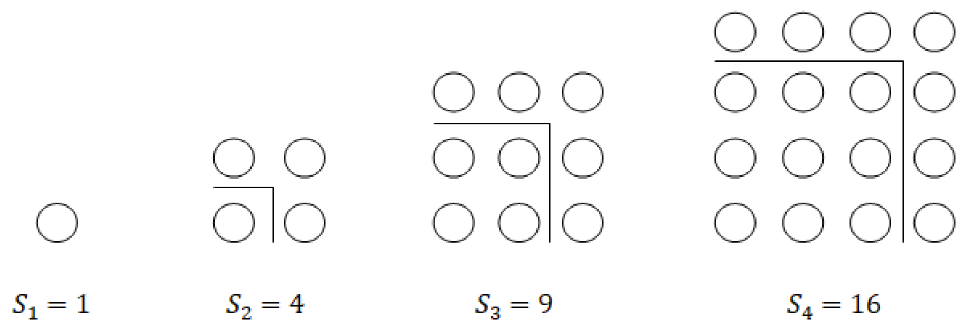
Tarkastellaan seuraavaksi kolmio-neliölukuja siten, että tutustutaan ensiksi kolmio- ja neliölukujen käsitteisiin. Tämä kappale perustuu lähteeseen [4].

Kolmioluvuksi kutsutaan positiivista kokonaislukua n, jos n pistettä voidaan järjestää siten, että muodostuu tasasivuinen kolmio. Neljä ensimmäistä kolmiolukua ovat $1, 3, 6$ ja 10. Kolmioluku voidaan muodostaa lisäämällä uusi sivu edellistä kolmiolukua kuvaavaan tasasivuiseen kolmioon säilyttäen tasasivuisen kolmion muodon, kuten nähdään kuvasta 1.

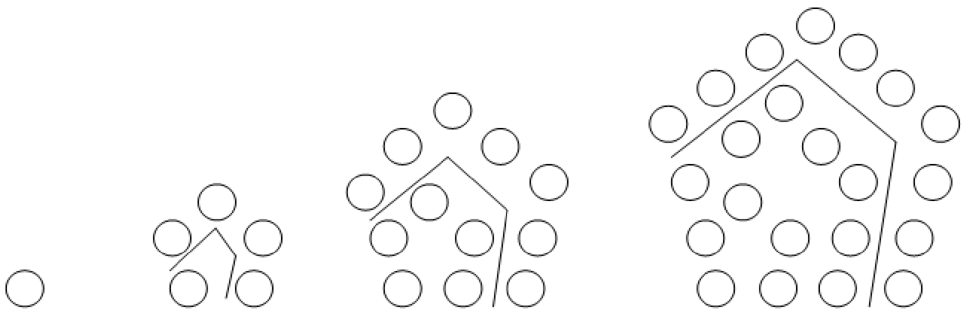


Kuva 1. Neljä ensimmäistä kolmiolukua havainnollistettuna.

Jos n pistettä voidaan järjestää siten, että ne muodostavat säännöllisen k-kulmion, kutsutaan positiivista kokonaislukua n *k-kulmioluvuksi*. Kuvissa 2 ja 3 esitetään esimerkkinä tapausten $k = 4$ ja $k = 5$ neljä ensimmäistä lukua, jotka vastaavat neliö- ja viisikulmiolukuja. Kulmiolukujen jonot alkavat erikoistapauksella 1.



Kuva 2. Havainnollistus neljästä ensimmäisestä neliöluvusta, joista ensimmäinen on erikoistapaus.



$P_1 = 1$ $P_2 = 5$ $P_3 = 12$ $P_4 = 22$

Kuva 3. Havainnollistus neljästä ensimmäisestä viisikulmioluvusta, joista ensimmäinen on erikoistapaus.

Kaavasta $S_n = n^2$ saadaan n. neliöluku S_n. Kuten kuvasta 1 voidaan huomata, n. kolmioluvun T_n kaava voidaan kirjoittaa aritmeettisen sarjan termien summana hyödyntäen tietoa edellisestä k-kolmioluvusta. Voidaan siis kirjoittaa, että

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k .$$

Aritmeettisen sarjan termien summan kaavan avulla saadaan, että

$$T_n = \frac{n(2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1)}{2} = \frac{n(2 + n - 1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Myös neliöluvut voidaan ilmaista vastaavasti summana:

$$S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2 .$$

Taulukossa 1 on esitetty kymmenen ensimmäistä kolmio- ja neliölukua, jotka on saatu neliö- ja kolmiolukujen kaavoja käyttämällä.

Taulukko 1. Kolmio- ja neliölukuja

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
S_n	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Taulukosta 1 nähdään, että luvun 1 lisäksi luku 36 on sekä kolmio- että neliöluku: $36 = T_8 = S_6$.

Määritelmä 3.4. *Kolmio-neliöluvuksi* kutsutaan positiivista kokonaislukua k, jos $k = T_m$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla m ja $k = S_n$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla n.

Kolmio-neliölukujen määrittämiseen voidaan käyttää tiettyä Pell'n yhtälöä.

Lause 3.5. *Pell'n yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ positiiviset kokonaislukuratkaisut x ja y tuottavat kolmio-neliölukuja.*

Todistus. Käyttämällä kolmio- ja neliölukujen kaavoja saadaan, että

$$T_m = S_n$$

eli

$$\frac{m(m+1)}{2} = n^2,$$

mistä seuraa, että

$$m^2 + m = 2n^2.$$

Lisäämällä ja vähentämällä luku $\frac{1}{4}$ saadaan, että

$$m^2 + m + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 2n^2,$$

jolloin kertomalla yhtälön molemmat puolet luvulla 4 saadaan, että

$$4m^2 + 4m + 1 - 1 = 2 \cdot 4n^2,$$

mikä on ekvivalenttia

$$(2m+1)^2 - 1 = 2(2n)^2$$

kanssa, jolloin lopulta saadaan, että

$$(2m+1)^2 - 2(2n)^2 = 1.$$

Pell'n yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ ratkaisu on siis $x = 2m + 1$ ja $y = 2n$. Koska kaikki vaiheet ovat ekvivalentteja, kolmio-neliölukujen löytäminen vastaa yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ ratkaisemista positiivisilla kokonaisluvuilla x ja y, missä $x = 2m + 1$ on pariton luku ja $y = 2n$ on parillinen luku. Siis $T_{(x-1)/2} = S_{y/2}$.

Tarkastellaan seuraavaksi käänteistä tapausta. Oletetaan nyt, että luvut x ja y ovat yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ ratkaisu. Kirjoittamalla Pell'n yhtälö muotoon $x^2 = 2y^2 + 1$ nähdään, että luku x^2 on pariton, joten myös luku x on pariton. Täten siis $x = 2m + 1$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla m. Sijoittamalla luku $x = 2m + 1$ tarkasteltavaan Pell'n yhtälöön saadaan, että

$$(2m + 1)^2 - 2y^2 = 1$$

eli

$$4m^2 + 4m + 1 - 2y^2 = 1,$$

mistä seuraa, että

$$y^2 = 2m^2 + 2m.$$

Luku y^2 on siis parillinen, joten luku y on näin ollen myös parillinen. Täten $y = 2n$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla n. Lukujen $x = 2m + 1$ ja $y = 2n$ ollessa Pell'n yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ ratkaisu, saadaan edellä esitetyn ekvivalenssiketjun nojalla, että

$$(2m + 1)^2 - 2(2n)^2 = 1$$

eli

$$T_m = S_n.$$

Luku k on kolmio-neliöluku, sillä $k = T_m = S_n$. □

Esimerkki 3.6. Eräs Pell'n yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ ratkaisupari on $(x, y) = (577, 408)$. Sijoittamalla luvut yhtälöihin $x = 2m + 1$ ja $y = 2n$ löydetään luvut m ja n. Saadaan siis, että

$$577 = 2m + 1,$$

jolloin $m = 288$

ja

$$408 = 2n,$$

jolloin $n = 204$, joten $T_{288} = S_{204}$. Käyttämällä kolmio- ja neliölukujen kaavoja löydetään, mistä kolmio-neliöluvusta on kyse. Nyt kun $n = 204$, neliölukujen kaavasta saadaan, että $n^2 = 204^2 = 41616$. Vastaavasti kolmiolukujen kaavasta saadaan, että

$$T_{288} = \frac{288(288+1)}{2} = 41616.$$

Luku $T_{288} = S_{204} = 41616$ on siis kolmio-neliöluku.

Taulukossa 2 on esitetty kuusi ensimmäistä kolmio-neliölukua, jotka voidaan muodostaa esimerkin 3.6 tavoin yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ ratkaisupareista.

Taulukko 2. Kolmio-neliölukujen ratkaiseminen

x	3	17	99	577	3363	19601
y	2	12	70	408	2378	13860
$m = (x-1)/2$	1	8	49	288	1681	9800
$n = y/2$	1	6	35	204	1189	6930
$T_m = S_n$	1	36	1225	41616	1413721	48024900

3.3 Arkhimedeen karjaongelma

Pell'n yhtälön yksi kuuluisimpia esimerkkejä on niin kutsuttu Arkhimedeen (287–212 EAA) karjaongelma. Ongelmassa tulee ratkaista valkoisten, mustien, täplikkäiden ja keltaisten sonnien ja lehmien lukumäärä. Ongelman ratkaiseminen on monivaiheinen ja ratkaisuiksi saadaan suuria lukuja. Tässä kappaleessa tutustutaan Arkhimedeen karjaongelmaan seuraten lähdettä [8]. Tässä kappaleessa ei esitetä suoraviivaisia ja pitkiä laskuja, vaan keskitytään ongelman ratkaisun esittelyyn.

Merkitään valkoisia sonneja luvulla x, mustia luvulla y, täplikkäitä luvulla z ja keltaisia sonneja luvulla t. Ongelmassa on määritelty sonnien määrän ratkaisemiseksi seuraavat yhtälöt:

$$x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)y + t,$$

$$y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)z + t,$$

$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)x + t.$$

Vastaavien värisiä lehmiä merkitään samassa järjestyksessä luvuilla x', y', z' ja t', ja näiden lukumäärät saadaan yhtälöistä

$$x' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(y + y'),$$

$$y' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(z + z'),$$

$$z' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(t + t'),$$

$$t' = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(x + x').$$

Lisäksi ongelmassa on rajoite, että lausekkeen $x + y$ on oltava neliö sekä lausekkeen $z + t$ on oltava kolmioluku. Ongelmaa lähdetään ratkaisemaan lineaarialgebran avulla ja ongelmalle on olemassa ratkaisu positiivisilla kokonaisluvuilla. Ensimmäisen kolmen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan, kun $(x, y, z, t) = m \cdot (2226, 1602, 1580, 891)$, missä m on positiivinen kokonaisluku. Seuraavat neljä yhtälöä ovat ratkeavia jos ja vain jos m on jaollinen luvulla 4657; kun $m = 4657 \cdot k$, saadaan, että

$$(x', y', z', t') = k \cdot (7206360, 4893246, 3515820, 5439213).$$

Luvun k on oltava sellainen luku, että $x + y = 4657 \cdot 3828 \cdot k$ on neliöluku ja $z + t = 4657 \cdot 2471 \cdot k$ on kolmioluku. Jakamalla luku 3828 alkutekijöihin saadaan $4657 \cdot 3828 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$. Nähdään, että ensimmäinen ehto on ekvivalentti yhtälön $k = al^2$ kanssa, missä $a = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$ ja l on kokonaisluku. Koska $z + t$ on kolmioluku jos ja vain jos $8(z + t) + 1$ on neliöluku, päädytään yhtälöön $h^2 = 8(z + t) + 1 = 8 \cdot 4657 \cdot 2471 \cdot al^2 + 1$, joka on Pell'n yhtälö muotoa $h^2 = dl^2 + 1$, sillä

$$d = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (2 \cdot 4657)^2 = 410\ 286\ 423\ 278\ 424.$$

August Amthorin (1845–1916) kehittämässä ratkaisussa keskeistä on huomio, että luku $d = 410\ 286\ 423\ 278\ 424 = (2 \cdot 4657)^2 \cdot d'$, missä $d' = 4729494$ ei ole neliöluku. Täten, jos x ja y ovat ratkaisu Pell'n yhtälölle luvulle d, niin silloin $(x, 2 \cdot 4657 \cdot y)$ on ratkaisu Pell'n yhtälölle luvulle d', joka taas on jollakin luvulla n

$$x + 2 \cdot 4657 \cdot y \cdot \sqrt{d'} = \left(x_1' + y_1'\sqrt{d'}\right)^n,$$

missä (x'_1, y'_1) on Pell'n yhtälön $X^2 - d'Y^2 = 1$ fundamentaalinen ratkaisu. Nyt karjaongelma sievenee kahteen yksinkertaisempaan ongelmaan: 1) ratkaistaan Pell'n yhtälö luvulle d', ja 2) etsitään pienin arvo luvulle n, jolle luku $y_n^{'}$ on jaollinen luvulla $2 \cdot 4657$.

Amthor käyttää ketjumurtolukualgoritmia luvulle d', missä hän havaitsi jakson pituudeksi 92 ja sai selvitettyä fundamentaalisen ratkaisun lausekkeeksi $x_1^{'} + y_1^{'}\sqrt{d'}$:

$$u = 109\,931986\,732829\,734979\,866232\,821433\,543901\,088049$$
$$+ 50549\,485234\,315033\,074477\,819735\,540408\,986340 \cdot \sqrt{d'}.$$

Koska $x + y\sqrt{d} = \left(\sqrt{(x-1)/2} + \sqrt{(x+1)/2}\right)^2$ aina, kun $x^2 = dy^2 + 1$, voidaan luku u ilmaista lyhyemmin muodossa

$$u = \left(300\,426607\,914281\,713365 \cdot \sqrt{609} + 84\,129507\,677858\,393258 \cdot \sqrt{7766}\right)^2.$$

Jotta olisi mahdollista löytää pienin mahdollinen arvo edellä määritellylle potenssille n, huomataan, että sen täytyy jakaa luku $\frac{(p+1)}{2} = 2329 = 17 \cdot 137$. Kokeilemalla eri jakajia huomataan, että pienin arvo luvulle n on yhtä suuri kuin 2329.

Fundamentaalinen ratkaisu Pell'n yhtälön luvulle d saadaan siis yhtälöstä $x_1 + y_1\sqrt{d} = u^{2329}$. Amthor ei kyennyt kokoamaan karjaongelman tuloksia yhteen, mutta Lenstra [8] onnistui kokoamaan kuvan 4 mukaisen taulukon kaikista mahdollisista karjaongelman ratkaisuista. Koska luvut ovat hyvin suuria, niitä ei ole esitetty kokonaisuudessaan.

Arkhimedeen karjaongelman kaikki ratkaisut

$$\mathrm{w} = 300\,426607\,914281\,713365 \cdot \sqrt{609} + 84\,129507\,677858\,393258 \cdot \sqrt{7766}$$

$$k_j = \frac{\left(\mathrm{w}^{4658 \cdot j} - \mathrm{w}^{-4658 \cdot j}\right)^2}{368\,238304} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

j. ratkaisu	*sonnit*	*lehmät*	*koko karja*
valkoinen	$10\,366482 \cdot k_j$	$7\,206360 \cdot k_j$	$17\,572842 \cdot k_j$
musta	$7\,460514 \cdot k_j$	$4\,893246 \cdot k_j$	$12\,353760 \cdot k_j$
täplikäs	$7\,358060 \cdot k_j$	$3\,515820 \cdot k_j$	$10\,873880 \cdot k_j$
keltainen	$4\,149387 \cdot k_j$	$5\,439213 \cdot k_j$	$9\,588600 \cdot k_j$
kaikki värit	$29\,334443 \cdot k_j$	$21\,054639 \cdot k_j$	$50\,389082 \cdot k_j$

Kuva 4. Arkhimedeen karjaongelman kaikki ratkaisut.

3.4 Pythagoraan kolmio, jonka kahden sivun pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja

Tarkastellaan seuraavaksi primitiivisiä Pythagoraan kolmikoita, joissa kahden sivun pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja; siis joko sivut a ja b tai b ja c ovat Pythagoraan kolmikon (a, b, c) peräkkäisiä termejä. Sanotaan, että kolmikko (a, b, c) on *primitiivinen*, jos $\text{syt}(a, b, c) = 1$. Tämän Pell'n yhtälön sovelluksen tarkastelussa seurataan lähdettä [6].

Lause 3.7. *Jos* (a, b, c) on *primitiivinen Pythagoraan kolmikko niin silloin luvuista* a *ja* b *toinen on parillinen ja toinen pariton luku. Olkoon luku* b *parillinen. Tällöin*

$$a = k^2 - l^2, \quad b = 2kl, \quad c = k^2 + l^2$$

kokonaisluvuille k *ja* l*, kun* $k > l > 0$, $(k, l) = 1$, *ja* $k \not\equiv l$ *mod 2. Toiseen suuntaan: edellä mainitun kaltaisille kokonaisluvuille* k *ja* l *yllä olevat yhtälöt tuottavat primitiivisen Pythagoraan kolmikon.*

Todistus. Osoitetaan, että luvuista a ja b toinen on pariton ja toinen parillinen käyttämällä vastaoletusta, jossa molemmat luvut ovat parittomia. Tällöin $a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \bmod 4$, joten $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \bmod 4$. Huomataan, että 2 mod 4 ei ole neliö. Täten on oltava, että a tai b on parillinen. Jos molemmat a ja b ovat parillisia, niin silloin kolmikko (a, b, c) ei ole primitiivinen, joten päädytään ristiriitaan. Välttämättä siis luvuista a ja b toinen on pariton ja toinen parillinen, jolloin $c^2 = a^2 + b^2$ on pariton.

Valitaan parilliseksi luvuksi b. Yhtälöstä

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$$

nähdään, että luvut $c + a$ ja $c - a$ ovat parillisia, sillä luvut a ja c ovat parittomia. Jakamalla yhtälö luvulla 4 saadaan, että

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c+a}{2}\frac{c-a}{2}. \tag{19}$$

Kokonaisluvut $(c + a)/2$ ja $(c - a)/2$ ovat suhteellisia alkulukuja, sillä jos d on niiden yhteinen tekijä, niin silloin d jakaa myös niiden summan ja erotuksen, eli luvut c ja a ja täten myös luvun b, joten primitiivisyyden nojalla $d = 1$. Koska $c > a > 0$, molemmat yhtälön (19) oikean puolen tekijät ovat positiivisia. Koska $(c + a)/2$ ja $(c - a)/2$ ovat suhteellisia alkulukuja ja niiden tulo on neliö, yksikäsitteisellä tekijöihin jaolla kokonaislukujenjoukossa saadaan, että

$$\frac{c+a}{2} = k^2 \tag{20}$$

ja

$$\frac{c-a}{2} = l^2 \tag{21}$$

joillekin positiivisille kokonaisluvuille k ja l. Huomataan, että myös luvut k ja l ovat suhteellisia alkulukuja. Vähentämällä puolittain luku a yhtälöstä (20) saadaan, että

$$a = k^2 - l^2$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöön (21) saadaan, että

$$c = k^2 + l^2.$$

Sijoittamalla yhtälöt (20) ja (21) yhtälöön (19) saadaan, että

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = k^2 l^2$$

eli

$$b^2 = 4k^2 l^2,$$

mistä saadaan, että

$$b = 2kl.$$

Osoitetaan vielä, että $k \not\equiv l \bmod 2$. Jos $k \equiv l \bmod 2$, niin silloin k ja l ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia lukuja. Koska k ja l ovat suhteellisia alkulukuja, niin k ja l eivät voi olla molemmat parillisia. Jos k ja l ovat molemmat parittomia, niin silloin $k^2 + l^2$, $2kl$ ja $k^2 - l^2$ olisivat kaikki parillisia lukuja, mikä on ristiriidassa kolmikon (a, b, c) primitiivisyyden kanssa. □

Tutkitaan ensin tapausta, jossa kateetit a ja b ovat peräkkäisiä kokonaislukuja. Jotta a ja b ovat peräkkäisiä lukuja, on oltava

$$(k^2 - l^2) - 2kl = \pm 1 \;\Leftrightarrow\; (k - l)^2 - 2l^2 = \pm 1,$$

missä $k - l$ on positiivinen ja pariton luku ja l on positiivinen luku. Lisäksi, jos yhtälölle $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ on olemassa positiiviset kokonaislukuratkaisut x ja y, niin silloin x on välttämättä pariton ja syt$(x, y) = 1$. Olkoon $k = x + y$ ja $l = y$, jolloin $k > l > 0$, syt$(k, l) = 1$ ja $k \not\equiv l$ mod 2. Täten $(k^2 - l^2, 2kl, k^2 + l^2)$ on primitiivinen kolmikko, joten Pythagoraan kolmikkojen, joiden kateetit ovat peräkkäisiä lukuja, löytäminen on sama kuin Pell'n yhtälön $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ positiivisten kokonaislukuratkaisujen löytäminen.. Taulukossa 3 on tästä kootusti esimerkkejä.

Taulukko 3. Kateetit, joiden pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja

x	y	k	l	a	b	c
1	1	2	1	3	4	5
3	2	5	2	21	20	29
7	5	12	5	119	120	169
17	12	29	12	697	696	985
41	29	70	29	4059	4060	5741

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, jossa kateetin ja hypotenuusan pituudet eroavat yhdellä. Hypotenuusan on oltava pariton, jotta se olisi peräkkäinen luku kateetin kanssa. Täten saadaan, että

$$k^2 + l^2 - 2kl = (k - l)^2, \tag{22}$$

joka on pariton neliö. Luku (22) on yhtäsuuri kuin yksi vain, jos $k = l + 1$, minkä seurauksena saadaan kolmikko $(2l + 1, 2l^2 + 2l, 2l^2 + 2l + 1)$. Neljä ensimmäistä esimerkkiä Pythagoraan kolmikoista, joiden hypotenuusa ja toinen kateetti ovat peräkkäisiä kokonaislukuja, on esitetty taulukossa 4.

Taulukko 4. Hypotenuusa ja kateetti, joiden pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja

l	$2l + 1$	$2l^2 + 2l$	$2l^2 + 2l + 1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41

Esimerkki 3.8. Ratkaistaan yhtälö $x^2 - 2y^2 = -1$. Tässä siis $x = 2m + 1$ ja $y = n$. Ratkaisupareiksi saadaan muun muassa $(7,5)$, $(41,29)$ ja $(239, 169)$. Näitä ratkaisupareja vastaavat

luvut m ja n ovat $(3{,}5)$, $(20{,}29)$ ja $(119{,}169)$. Näin ollen saadaan muodostettua Pythagoraan kolmikot, joissa kateettien arvot ovat peräkkäisiä kokonaislukuja:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$20^2 + 21^2 = 29^2$$

$$119^2 + 120^2 = 169^2.$$

3.5 Approksimaatiot neliöjuurille

Tarkastellaan seuraavaksi, miten Pell'n yhtälön avulla voidaan esittää approksimaatioita kokonaislukujen neliöjuurille seuraten lähdettä [11]. Tiedetään, että Pell'n yhtälöllä $x^2 - dy^2 = 1$ on aina ratkaisu, joka on kokonaisluku. Kun tiedetään mitkä tahansa kokonaislukuratkaisut x_1 ja y_1 Pell'n yhtälölle (1), saadaan generoitua ratkaisuja kaikille $n > 1$, jotka taas muodostavat rationaaliapproksimaation luvulle $\sqrt{d}$. Kappaleen 2.4 mukaan $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{n+1} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{n}\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right) = \left(x_n + y_n\sqrt{d}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right) = (x_1x_n + dy_1y_n) + (y_1x_n + x_1y_n)\sqrt{d}$, joten

$$x_{n+1} = x_1x_n + dy_1y_n \tag{23}$$

ja

$$y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n. \tag{24}$$

Kehitetään rekursiivisista lausekkeista (23) ja (24) uusia lausekkeita, joiden avulla voidaan laskea n. rationaalinen approksimaatio luvulle $\sqrt{d}$ käyttäen vain lukuja d, x_1 ja y_1. Seuraavaksi lauseessa 3.9 esitetään, että tuloksena saadut suhdeluvut $\frac{x_n}{y_n}$ suppenevat kohti lukua $\sqrt{d}$, kun $n \to \infty$.

Lause 3.9. *Kun otetaan huomioon lausekkeiden (23) ja (24) rekursiiviset ominaisuudet liittyen lukuun* $\sqrt{d}$ ja *tunnetut alkuratkaisut* x_1 *ja* y_1, *niin:*

(i) jono $C_n = \frac{x_n}{y_n} \to \sqrt{d}$ *kun* $n \to \infty$ *ja*

(ii) seuraavat lausekkeet pätevät luvuille x_n *ja* y_n: *parittomille alaindekseille* $n > 1$

$$x_n = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \binom{n}{2k} d^k x_1^{(n-2k)} y_1^{2k} \quad \text{ja} \quad y_n = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \binom{n}{2k+1} d^k x_1^{(n-2k-1)} y_1^{(2k+1)} \tag{25}$$

ja parillisille alaindekseille $n > 1$

$$x_n = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n} \binom{n}{2k} d^k x_1^{(n-2k)} y_1^{2k} \quad \text{ja} \quad y_n = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} \binom{n}{2k+1} d^k x_1^{(n-2k-1)} y_1^{(2k+1)}. \quad (26)$$

Todistus. Olkoot x ja y alkiot vektorille $X = [x \quad y]^T$ ja $X_1 = [x_1 \quad y_1]^T$. Olkoon A 2×2 matriisi, jolla on seuraavat ominaisuudet: $a_{11} = x_1$, $a_{12} = dy_1$, $a_{21} = y_1$ ja $a_{22} = x_1$. Täten lausekkeista (23) ja (24) huomataan, että

$$X_2 = AX_1,$$

ja edelleen kaikilla $n > 1$

$$X_n = [x_n \quad y_n]^T = A^{n-1} X_1. \quad (27)$$

Merkitään luvulla λ matriisin A ominaisarvoa. Matriisin A karakteristinen yhtälö on $(x_1 - \lambda)^2 - dy_1^2 = 0$ ja täten ominaisarvot ovat $\lambda_1 = \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)$ ja $\lambda_2 = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)$. Siis matriisi A on diagonalisoituva, sillä ominaisarvot ovat erisuuria. Olkoon I_2 2×2 identiteettimatriisi. Diagonalisaation avulla voidaan osoittaa, että

$$A^{n-1} = \left(\frac{\lambda_2(\lambda_1)^{n-1} - \lambda_1(\lambda_2)^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) I_2 + \left(\frac{(\lambda_2)^{n-1} - (\lambda_1)^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) A.$$

Sieventämällä yhtälö ja sijoittamalla se yhtälöön (27), saadaan vektorille X_n alkiot

$$x_n = \frac{\lambda_2^n + \lambda_1^n}{2} \quad \text{ja} \quad y_n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{2\sqrt{d}}.$$

Merkitään seuraavaksi $q_1 = y_1/x_1$, jolloin $y_1 = x_1 q_1$, ja sijoitetaan se lukujen λ_1 ja λ_2 yhtälöihin. Nyt siis $\lambda_1 = \left(x_1 - x_1 q_1 \sqrt{d}\right)$ ja $\lambda_2 = \left(x_1 + x_1 q_1 \sqrt{d}\right)$. Näin ollen saadaan, että

$$x_n = \frac{\left(x_1 + x_1 q_1 \sqrt{d}\right)^n + \left(x_1 - x_1 q_1 \sqrt{d}\right)^n}{2},$$

ja ottamalla luku x_1 yhteiseksi tekijäksi saadaan edelleen, että

$$x_n = x_1^n \frac{\left(1 + q_1\sqrt{d}\right)^n + \left(1 - q_1\sqrt{d}\right)^n}{2}. \quad (28)$$

Vastaavasti saadaan, että

$$y_n = x_1^n \frac{\left(1 + q_1\sqrt{d}\right)^n - \left(1 - q_1\sqrt{d}\right)^n}{2\sqrt{d}}. \quad (29)$$

Yhtälöistä (28) ja (29) saadaan, että

$$C_n = \frac{x_n}{y_n} = \frac{\left(1+q_1\sqrt{d}\right)^n + \left(1-q_1\sqrt{d}\right)^n}{\left(1+q_1\sqrt{d}\right)^n - \left(1-q_1\sqrt{d}\right)^n}\sqrt{d}. \tag{30}$$

Yhtälöstä (30) huomataan, että $\left(1 + q_1\sqrt{d}\right) > 1$ ja $\left|\left(1 - q_1\sqrt{d}\right)\right| < 1$. Täten, kun $n \to \infty$, $\left(1 - q_1\sqrt{d}\right)^n \to 0$ ja $C_n \to \sqrt{d}$. □

Huomautus 3.10. Pell'n yhtälö (1) voidaan kirjoittaa muotoon

$$x^2 = 1 + dy^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + d \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{d} + \frac{1}{y}.$$

Huomataan, että luku $\frac{x}{y}$ on lähellä arvoa $\sqrt{d}$ erityisesti, jos luku y on suuri. Näin ollen nähdään, että Pell'n yhtälön avulla voidaan approksimoida lukua $\sqrt{d}$, kun d on kokonaisluku.

Esimerkki 3.11. Approksimoidaan lukua $\sqrt{3}$. Käytetään Pell'n yhtälöä $x^2 - 3y^2 = 1$. Eräs yhtälön ratkaisu on $(7, 4)$, sillä $7^2 - 3(4)^2 = 1$. Nyt siis $x_1 = 7$, $y_1 = 4$ ja $d = 3$. Sijoitetaan nämä luvut yhtälöihin $x_{n+1} = x_1x_n + dy_1y_n$ ja $y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n$. Saadaan, että

$$x_2 = 7 \cdot 7 + 12 \cdot 4 = 97,$$

$$y_2 = 4 \cdot 7 + 7 \cdot 4 = 56$$

ja edelleen, että

$$x_3 = 7 \cdot 97 + 12 \cdot 56 = 1351,$$

$$y_3 = 4 \cdot 97 + 7 \cdot 56 = 780.$$

$$\therefore \frac{1351}{780} \approx 1{,}73205 \approx \sqrt{3}$$

Jatkamalla iterointia on mahdollista saada tarkempi likiarvo.

3.6 Peräkkäisten kokonaislukujen summa

Tarkastellaan seuraavaksi summia, jotka muodostuvat peräkkäisistä kokonaisluvuista. Kappale pohjautuu lähteeseen [3].

Esimerkki 3.12. Tapaus, jossa peräkkäisten kokonaislukujen summa on yhtä suuri kuin seuraavien peräkkäisten lukujen muodostama summa:

$$1 + 2 + \cdots + 14 = 15 + 16 + \cdots + 20.$$

Esimerkissä 3.12 esitetyt lausekkeet voidaan ilmaista muodossa

$$1 + 2 + \cdots + k = (k + 1) + \cdots + l. \tag{31}$$

Aritmeettisen summan kaavaa käyttämällä yhtälö (31) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{(1+k)k}{2} = \frac{(k+1+l)(l-k)}{2}. \tag{32}$$

Sievennetään yhtälöä (32):

$$k^2 + k = -k^2 + l - k + l^2$$

$$2k^2 + 2k = l^2 + l$$

$$2\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}(2k + 1)^2 - \frac{1}{2} = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$2(2k + 1)^2 - 2 = (2l + 1)^2 - 1$$

$$(2l + 1)^2 - 2(2k + 1)^2 = -1.$$

Yhtälön (31) ratkaiseminen on siis sama kuin negatiivisen Pell'n yhtälön $x^2 - 2y^2 = -1$ ratkaiseminen, missä $x, y > 0$ ja $x = 2l + 1$ ja $y = 2k + 1$. Lisäksi x ja y ovat parittomia lukuja.

Taulukossa 5 on listattu negatiivisen Pell'n yhtälön $x^2 - 2y^2 = -1$ ratkaisut x ja y sekä näiden ratkaisujen avulla muodostettavat luvut k ja l.

Taulukko 5. Luvut, joiden avulla voidaan muodostaa peräkkäisistä kokonaisluvuista muodostettuja yhtä suuria summia

x	1	7	41	239	1393	8119
y	1	5	29	169	985	5741
$k = (y-1)/2$	0	2	14	84	492	2870
$l = (x-1)/2$	0	3	20	119	696	4059

Taulukosta 5 nähdään lisää ratkaisuja, kuten

$$1 + 2 + \cdots + 84 = 85 + \cdots + 119.$$

Tarkastellaan seuraavaksi peräkkäisten kokonaislukujen muodostamia yhtäsuuria summia siten, että jätetään yksi kokonaisluku pois lausekkeiden välillä.

Esimerkki 3.13. Tapaus, jossa kokonaisluku 6 on jätetty pois:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8.$$

Merkitään pois jätettyä lukua muuttujalla k. Jälleen aritmeettisen summan kaavaa käyttämällä ja sieventämällä saadaan, että

$$1 + 2 + \cdots + (k - 1) = (k + 1) + \cdots + l, \tag{33}$$

$$\frac{k(k-1)}{2} = \frac{(k + 1 + l)(l - k)}{2},$$

$$2k^2 = l^2 + l,$$

$$2k^2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

$$2(2k)^2 = (2l + 1)^2 - 1,$$

$$(2l + 1)^2 - 2(2k)^2 = 1.$$

Yhtälön (33) ratkaisu saadaan siis Pell'n yhtälöstä $x^2 - 2y^2 = 1$, missä $x = 2l + 1$ ja $y = 2k$. Nähdään, että luku x on pariton ja luku y parillinen. Taulukossa 6 on koottu kuusi ensimmäistä Pell'n yhtälön $x^2 - 2y^2 = 1$ ratkaisuparia sekä näiden avulla muodostetut luvut k ja l.

Taulukko 6. Luvut, joiden avulla voidaan muodostaa peräkkäisistä kokonaisluvuista yhtä suuria summia siten, että lausekkeiden välistä on jätetty yksi kokonaisluku pois

x	3	17	99	577	3363	19601
y	2	12	70	408	2378	13860
$k = y/2$	1	6	35	204	1189	6930
$l = (x-1)/2$	1	8	49	288	1681	9800

Taulukosta 6 nähdään luvut, joiden avulla voidaan muodostaa peräkkäisten kokonaislukujen summia, kun lausekkeiden välistä on jätetty yksi kokonaisluku pois, kuten

$$1 + 2 + \cdots + 34 = 36 + \cdots + 49.$$

3.7 Peräkkäisten neliöiden yhtä suuret summat

Tarkastellaan seuraavaksi peräkkäisten positiivisten kokonaislukujen neliöiden muodostamia yhtäsuuria summia, kun summattavia on n ja $n + 1$, siis etsitään sellaiset positiiviset kokonaisluvut x ja y, että

$$x^2 + (x + 1)^2 + \cdots + (x + n - 1)^2 = y^2 + \cdots + (y + n)^2, \tag{34}$$

kun $n \in \mathbb{Z}_+$. Yhtälön (34) vasemmalla puolella on n neliötä ja oikealla puolella $n + 1$ neliötä. Lisäksi luvut n ja $n + 1$ eivät ole täydellisiä neliöitä. [10, s. 28-30.]

Esimerkki 3.14 (vrt. [3])**.** Eräs esimerkki peräkkäisten positiivisten kokonaislukujen neliöiden muodostamista summista on

$$13^2 + 14^2 = 365 = 10^2 + 11^2 + 12^2.$$

Jatketaan peräkkäisten kokonaislukujen muodostamien summien tarkastelua seuraamalla lähdettä [10, s. 28–30]. Kirjoitetaan yhtälö (34) muotoon

$$nx^2 + n(n - 1)x - n^2 = (n + 1)y^2 + n(n + 1)y.$$

Merkitsemällä $x = y + z$ saadaan, että

$$(y - n(z - 1))^2 = n(n + 1)z(z - 1). \tag{35}$$

Jatketaan tarkastelua tutkimalla kahta tapausta.

(1) Olkoon $n \equiv 1$ tai 2 (mod 4).

Jos $n \equiv 2$ (mod 4), niin olkoon $n = 2m$ ja määritellään sellaiset positiiviset kokonaisluvut a ja b, että luku b ei ole täydellinen neliö ja

$$m(2m + 1) = a^2b. \tag{36}$$

Jos $n \equiv 1$ (mod 4), niin olkoon $n + 1 = 2m$ ja määritellään sellaiset positiiviset kokonaisluvut a ja b, että luku b ei ole täydellinen neliö ja

$$(2m - 1)m = a^2b. \tag{37}$$

Sijoittamalla (36) yhtälöön (35) saadaan, että

$$(y - n(z - 1))^2 = 2m(2m + 1)z(z - 1),$$

eli

$$(y - n(z-1))^2 = 2a^2bz(z-1). \tag{38}$$

Myös sijoittamalla (37) yhtälöön (35) päädytään yhtälöön (38). Koska yhtälön (38) vasen puoli on jaollinen luvulla a^2, niin tästä seuraa, että $y - n(z-1)$ on jaollinen luvulla a. Koska yhtälön (38) vasen puoli on jaollinen luvulla b ja tämä ei ole täydellinen neliö, luku $y - n(z-1)$ on myös jaollinen luvulla b. Voidaan siis päätellä, että luku $y - n(z - 1)$ on jaollinen luvulla ab. Tämä on selvää, jos syt$(a, b) = 1$. Jos taas syt$(a, b) > 1$, niin olkoon p alkuluku, joka jakaa luvut a ja b. Lisäksi, olkoon luvun p suurin potenssi p^α, joka jakaa luvun a. Tällöin yhtälön (38) vasen puoli on jaollinen luvulla $p^{2\alpha+1}$ ja täten myös luvulla $p^{2\alpha+2}$, joten luku $y - n(z-1)$ on jaollinen luvulla $p^{\alpha+1}$. Käyttämällä samaa päättelyä kaikille alkuluvuille, jotka jakavat luvut a ja b, seuraa, että luku $y - n(z-1)$ on jaollinen luvulla ab, kun syt$(a, b) > 1$. Näin ollen, olkoon

$$y - n(z-1) = abw$$

ja sijoittamalla tämä yhtälö yhtälöön (37) saadaan:

$$(abw)^2 = 2a^2bz(z-1),$$

$$bw^2 = 2z(z-1),$$

$$4z(z-1) - 2bw^2 = 0,$$

$$4z^2 - 4z + 1 - 2bw^2 = 1,$$

$$(2z-1)^2 - 2bw^2 = 1, \tag{39}$$

joka on Pell'n yhtälö, missä $x = 2z - 1$, $y = w$ ja $D = 2b$. Koska luku b ei ole täydellinen neliö ja $b \neq 2$, niin ehto, että luku D ei ole täydellinen neliö, toteutuu. Ratkaisemalla Pell'n yhtälö (39) saadaan sen kaikki ratkaisut ja täten yhtälön (34) koko ratkaisujoukko tapaukselle (1).

(2) Olkoon $n \equiv 0$ tai 3 (mod 4).

Jos $n \equiv 0$ (mod 4), niin merkitään, että $n = 4m$ ja määritetään sellaiset positiiviset kokonaisluvut a ja b, että luku b ei ole täydellinen neliö ja

$$m(4m+1) = a^2b. \tag{40}$$

Jos $n \equiv 3 \pmod 4$, niin merkitään, että $n + 1 = 4m$ ja määritetään sellaiset positiiviset kokonaisluvut a ja b, että luku b ei ole täydellinen neliö ja

$$(4m - 1)m = a^2 b. \tag{41}$$

Sijoitetaan joko yhtälö (40) tai (41) yhtälöön (35), jolloin saadaan, että

$$(y - n(z - 1))^2 = 4a^2 bz(z - 1). \tag{42}$$

Koska yhtälön (42) vasen puoli on oltava jaollinen luvuilla a ja b, niin olkoon

$$y - n(z - 1) = abw,$$

josta päädytään jälleen Pell'n yhtälöön

$$(2z - 1)^2 - bw^2 = 1. \tag{43}$$

Yhtälön (34) ratkaisujoukko tapaukselle (2) saadaan ratkaisemalla Pell'n yhtälö (43), kun luku $2z - 1$ on pariton ja luku b ei ole täydellinen neliö.

Lause 3.15 (vrt. [10], [3])**.** *Olkoon $n(n + 1) = a^2 b$, missä luku b ei ole täydellinen neliö. Yhtälön*

$$x^2 + (x + 1)^2 + \cdots + (x + n - 1)^2 = y^2 + \cdots + (y + n)^2$$

ratkaiseminen on sama asia kuin yhtälön

$$v^2 - 4bw^2 = 1$$

ratkaiseminen, missä

$$x = \frac{(n + 1)v - (n - 1)}{2} + abw, \qquad y = n\frac{v - 1}{2} + abw.$$

Eräs yhtälön $v^2 - 4bw^2 = 1$ ratkaisu on $v = 2n + 1$ ja $w = a$, jolloin $x = 2n^2 + 2n + 1$ ja $y = 2n^2 + n$. Tällöin $5^2 = 3^2 + 4^2$, kun $n = 1$.

Esimerkki 3.16 (vrt. [3])**.** Kun $n = 8$, niin $n(n + 1) = 6^2 \cdot 2$, jolloin $a = 6$, $b = 2$ ja $v^2 - 4bw^2 = v^2 - 8w^2$. Alla olevaan taulukkoon on koottu lukujen v ja w ratkaisut sekä luvut x ja y.

v	3	17	99	577	3363	19601
w	1	6	35	204	1189	6930
x	22	145	862	5041	29398	171361
y	20	136	812	4752	27716	161560

Kun $n = 8$, saadaan siis yhtälö $x^2 + \cdots + (x + 7)^2 = y^2 + \cdots + (y + 8)^2$. Ratkaisuparilla $(v, w) = (3, 1)$ saadaan peräkkäisten neliöiden summaksi

$$22^2 + 23^2 + \cdots + 29^2 = 5244 = 20^2 + \cdots + 28^2.$$

Vastaavasti ratkaisuparilla $(v, w) = (17, 6)$ saadaan peräkkäisten neliöiden summaksi

$$145^2 + \cdots + 152^2 = 176460 = 136^2 + \cdots + 144^2.$$

Luvut n ja a voidaan löytää ratkaisemalla yhtälö $Y^2 - 4bX^2 = 1$.

Lähteet

[1] Adams, W. Goldstein, L. *Introduction to Number Theory*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[2] Chu, W. *Regular Polygonal Numbers and Generalized Pell Equations*. International Mathematical Forum, Vol. 2, No. 16 (2007), s. 785-786.

[3] Conrad, K. *Applications of Pell's Equation*, Expository papers, University of Connecticut, 2008, [Verkkodokumentti], [Viitattu 30.3.2023]. URL: https://kconrad.math.uconn.edu/ross2008/pelltalkOSU.pdf

[4] Conrad, K. *Pell's Equation, I*, Expository papers, University of Connecticut, [Verkkodokumentti], [Viitattu 4.5.2022]. URL: https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/pelleqn1.pdf

[5] Conrad, K. *Pell's Equation, II*, Expository papers, University of Connecticut, [Verkkodokumentti], [Viitattu 4.5.2022]. URL: https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/pelleqn2.pdf

[6] Conrad, K. *Pythagorean Triples*, Expository papers, University of Connecticut (2007), [Verkkodokumentti], [Viitattu 20.1.2023]. URL: https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/pythagtriple.pdf

[7] Jacobson, M. Williams, H. *Solving the Pell Equation*. CMS Books in Mathematics. Springer, New York, 2008.

[8] Lenstra, H. *Solving the Pell Equation*. Amer. Math. Soc., Vol. 49, No. 2 (2002), s. 182-187.

[9] Silverman, J. *A Friendly Introduction to Number Theory*. 3 ed. Pearson / Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2006.

[10] Simons, W. Alder, H. *n and n+1 Consecutive Integers with Equal Sums of Squares*. The American Mathematical Monthly, Vol 74, No. 1 (1967), s. 28-30.

[11] Surendran, K. Babu, D. *Expressions for Rational Approximations to Square Roots of Integers Using Pell's Equation*. The Mathematical Gazette, Vol 103, No. 556 (2019), s. 101-110.