



RIIPPUMATTOMIEN KOMPONENTTIEN ANALYYSI JA FOBI

Saku Korhonen

LuK-tutkielma
Toukokuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastajat:
FM Lauri Heinonen

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Saku Korhonen: Riippumattomien komponenttien analyysi ja FOBI
LuK-tutkielma, 15 s., 1 liites.
Tilastotiede
Toukokuu 2026

Tutkielma käsittelee riippumattomien komponenttien analyysiä ja tämän yhtä toteutusmenetelmää, neljännen asteen sokkotunnistusta eli FOBIa. Lisäksi tutkielmassa esitetään pääkomponenttianalyysin ja aineiston valkaisuun teoriaa.

Riippumattomien komponenttien analyysissä aineiston oletetaan koostuvan riippumattomien satunnaismuuttujien lineaarikombinaatioista. FOBI on yksi riippumattomien komponenttien analyysin toteutusmenetelmä, joka perustuu valkaistun aineiston kurtoosimatriisin ominaisarvohajotelmaan. FOBIa voidaan myös luonnehtia menetelmänä, joka perustuu epänormaaliuden maksimointiin kurtoosin otossuureen avulla. Tutkielmassa johdetaan FOBI ja esitetään sen taustalla olevat olennaiset tulokset. FOBIa käytetään simuloituihin ongelmiin, joista ensimmäisessä erotellaan sekoitettuja äänisignaaleja ja toisessa sekoitettuja kuvia. Käytännön esimerkeistä huomataan FOBI:n soveltuvuus monimuotoisiin aineistoihin, sekä tehokkuus sokkotunnistuksen ongelmissa.

Asiasanat: monimuuttujamenetelmät, lähteiden sokkoerotelu, pääkomponenttianalyysi, FOBI, riippumattomien komponenttien analyysi

Sisälllys

1 Johdanto	1
2 Momentit ja keskusmomentit	1
2.1 Momentit ja keskusmomentit	1
2.2 Kovarianssi- ja kurtoosimatriisi	2
3 Pääkomponenttianalyysi	3
4 Neljännen asteen sokkotunnistus	5
4.1 Riippumattomuus	5
4.2 Riippumattomien komponenttien analyysi	7
4.3 Valkaisu	7
4.4 Valkaistu FOBI	9
4.5 Riippumattomat komponentit epänormaaliuden maksimoinnilla . . .	11
5 Esimerkkejä	12
5.1 Cocktailkutsu -ongelma	12
5.2 Kuvaerottelu	13
Viitteet	16
Liitteet	17

1 Johdanto

Lähteiden sokkoerottelu (eng. blind source separation) on eräs signaalianalyysin ongelma, jossa aineisto koostuu tuntemattomasti sekoittuneista signaaleista. Yleisiä lähteiden sokkoerottelun ongelmia esiintyy esimerkiksi aivosähkökäyrien tutkimuksessa, äänilähteiden erottelussa ja tärähtäneiden kuvien korjaamisessa. Riippumattomien komponenttien analyysi on menetelmä joka soveltuu näiden ongelmien ratkaisuun. Tutkielmassa perehdytään riippumattomien komponenttien analyysiin (independent component analysis, ICA) ja tämän yksinkertaisimpaan toteutusmenetelmään, neljännen asteen sokkotunnistukseen (eng. fourth order blind identification, FOBI). Tutkielmassa esitellään FOBI:n lisäksi myös pääkomponenttianalyysi, joka on monimuuttujamenetelmänä teoreettisesti hyvin samankaltainen kuin FOBI.

Tämän tutkielman tavoitteena on esitellä yleistä monimuuttujamenetelmiin liittyvää teoriaa ja johtaa näiden avulla ratkaisumenetelmä lähteiden sokkoerottelulle. Luvussa 2 esitellään satunnaismuuttujien momentit, keskusmomentit ja näitä vastaavat matriisit. Luvussa 3 esitellään pääkomponenttianalyysi, ja johdetaan menetelmä tämän toteuttamiseksi. Luvussa 4 käsitellään satunnaismuuttujien riippumattomuutta ja riippumattomien komponenttien analyysiä yleisesti. Näiden lisäksi luvussa esitellään aineiston valkaisu ja ratkaistaan ICA-malli johtamalla neljännen asteen sokkotunnistuksen menetelmä. FOBI menetelmää havainnollistetaan lopuksi kahdella käytännön esimerkillä.

FOBI osoittautuu tehokkaaksi menetelmäksi lähteiden sokkoerotteluun. FOBI:n tuottamat komponentit vastaavat alkuperäisiä lähteitä kohtuullisella tarkkuudella monimutkaisissakin aineistoissa. Ensimmäinen esimerkki osoittaa, että FOBI soveltuu menetelmänä äänierotteluun, kun aineisto muunnetaan aikasarjamuotoon. Toinen esimerkki osoittaa, kuinka erityisen sekoittuneesta aineistosta on mahdollista erotella lähteet FOBI:n avulla.

2 Momentit ja keskusmomentit

Luvussa esitellään momenttien ja keskusmomenttien määritelmät satunnaismuuttujille. Keskusmomentit ovat keskeisiä monimuuttujamenetelmissä, sillä ne antavat tietoa satunnaismuuttujan jakaumasta ja käyttäytymisestä. Luvussa esitellään satunnaisektoreiden keskusmomenteja vastaavat matriisit, erityisesti kovarianssimatriisi ja skaalattu kurtoosimatriisi. Kovarianssimatriisia hyödynnetään pääkomponenttianalyysissä ja kurtoosimatriisia FOBI:ssa. Satunnaismuuttujille määritellyjä tuloksia voidaan soveltaa otostasolla, jolloin tulee huomioida käytettävien estimaattorien harhattomuus ja otoskoon tuoma epävarmuus.

2.1 Momentit ja keskusmomentit

Tarkastellaan yksiulotteista jatkuvaa satunnaismuuttujaa X , jolla on tiheysfunktio $f_X(x)$. Määritellään, että satunnaismuuttujan X , n :s momentti on odotusarvo

$$\nu_n = \mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx.$$

Momentit antavat paljon tietoa satunnaismuuttujan ominaisuuksista. Esimerkiksi ensimmäinen momentti on satunnaismuuttujan odotusarvo $\nu_1 = \mu_X$.

Määritetään vastaavasti n :nnes keskusmomentti

$$m_n = \mathbb{E}[\{x - \mu_X\}^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^n f_X(x) dx.$$

Keskusmomentit on laskettu odotusarvon ympäriltä. Keskusmomenttien laskemista helpottaa, jos aineisto on keskistetty. Keskistämisesä aineiston muuttujista vähennetään niiden keskiarvo, jolloin jokaisen muuttujan keskiarvoiksi tulee nolla. Aineiston $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, jossa n on havaintojen ja p muuttujien määrä, keskistämisen voi tehdä keskistämismatriisilla \mathbf{H}_n joka määritellään kuten luentomonisteessa [1]

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{J}_n,$$

jossa \mathbf{I}_n on identiteettimatriisi ja $\mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}'_n$ on $n \times n$ -matriisi jossa jokainen alkio on 1. Kun aineistoa kerrotaan keskistymatriisilla, jokaisesta sarakkeesta erotetaan tämän otoskeskiarvo, $\mathbf{H}_n \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{1}_n \bar{\mathbf{x}}' = [x_{ij} - \bar{x}_j]_{n \times p}$. Keskistetyille satunnaismuuttujille keskusmomentit ovat samat kuin momentit $\mathbb{E}[(X - \mu_X)^n] = \mathbb{E}[(X - 0)^n] = \mathbb{E}[X^n]$.

2.2 Kovarianssi- ja kurtoosimatriisi

Tarkastellaan nyt p -ulotteista jatkuvaa satunnaisvektoria $\mathbf{x} = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$. Satunnaismuuttujalle X_j toinen keskusmomentti on satunnaismuuttujan varianssi

$$\sigma_j^2 = \text{Var}(X_j) = \mathbb{E}[(X - \mu_{X_j})^2].$$

Vastaavasti voidaan määrittää myös kahden satunnaismuuttujan välinen kovarianssi, $\sigma_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})]$. Satunnaismuuttujan kovarianssi itsensä kanssa vastaa tämän varianssia

$$\text{Cov}(X_j, X_j) = \text{Var}(X_j).$$

Aineistolle otoskovarianssimatriisi määritellään

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,p} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p,1} & \sigma_{p,2} & \dots & \sigma_p^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

joka voidaan kirjoittaa matriisitulon avulla muodossa

$$\frac{1}{n-1} (\mathbf{H}\mathbf{X})' (\mathbf{H}\mathbf{X}) = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}' \mathbf{H} \mathbf{X}.$$

Otoskovarianssimatriisi on symmetrinen neliömatriisi joka on positiivisesti semi-definiitti [1]. Korreloimattomille satunnaismuuttujille kovarianssimatriisi on muotoa $\text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2)$.

Jokaiselle keskusmomentille on teoreettisesti mahdollista muodostaa vastaava matriisesitys samaan tapaan kuin toiselle momentille. Neljättä astetta korkeampia momenteja käytetään kuitenkin harvoin. Korkeampien momenttien matriisit ovat rakenteeltaan monimutkaisempia ja vaikeasti tulkittavia, eikä niitä vastaavat odotusarvot ole aina äärellisiä. Korkeamman momentin tutkiminen rajaa pois satunnaismuuttujia, joille kyseiset momentit eivät ole enää äärellisiä.

Kolmannen- ja neljännen asteen keskusmomenttimatriisit ovat kuitenkin useasti hyödyllisiä. Kolmannen keskusmomentin matriisia voidaan käyttää tutkittaessa satunnaismuuttujien vinoutta ja jakaumien symmetrisyyttä. Neljännen asteen momenteja käytetään hyväksi osassa ICA-menetelmiä, joissa usein käytetään keskusmomenttien sijasta *kurtoosia*. Kurtoosi määritellään tunnuslukuna, joka on keskistetylle satunnaismuuttujalle X muotoa

$$\text{kurt}(x) = \mathbb{E}[x^4] - 3[\mathbb{E}[x^2]]^2.$$

Vastaavasti normalisoitu kurtoosi määritellään tunnuslukuna

$$\tilde{\kappa} = \frac{\mathbb{E}[x^4]}{[\mathbb{E}[x^2]]^2} - 3.$$

Normaalisti jakautuneelle satunnaismuuttujalle pätee $\tilde{\kappa}[X] = 0$. Normalisoitua kurtoosia voidaankin käyttää eräänlaisena normaaliuden mittana.

Kurtoosimatriisin muodostamista voidaan lähestyä muutamilla eri tavoilla. Yleisesti kurtoosimatriisin voidaan määrittää käyttäen esimerkiksi ristikumulantteja [2]. Tällöin päädytään käyttämään tensorilaskentaa, jolloin matriisista tulee $p^2 \times p^2$ -ulotteinen. Vaihtoehtoisesti olettamalla, että satunnaisvektorin odotusarvovektori on $\mathbf{0}$ ja kovarianssimatriisi \mathbf{I}_p , kurtoosimatriisi voidaan määritellä muodossa

$$\mathbf{\Omega} = \mathbb{E}[\mathbf{xx}'\mathbf{xx}'] \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

Huomataan, että matriisin keskellä on termi $\mathbf{x}'\mathbf{x}$ joka on vektorin \mathbf{x} pituuden neliö $\|\mathbf{x}\|^2$. Koska pituuden neliö on skalaari, voimme sieventää kurtoosimatriisin $\mathbf{\Omega}$ muotoon

$$\mathbf{\Omega} = \mathbb{E}[\mathbf{x}\|\mathbf{x}\|^2\mathbf{x}'] = \mathbb{E}[\mathbf{xx}'\|\mathbf{x}\|^2]. \quad (2)$$

Kurtoosimatriisin alkio kohdassa (i, j) voidaan laskea muodossa

$$\Omega_{i,j} = \mathbb{E} \left[\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j \sum_{k=1}^p \mathbf{X}_k^2 \right]. \quad (3)$$

3 Pääkomponenttianalyysi

Tässä luvussa esitellään pääkomponenttianalyysi pääpiirteittäin. Luvun pääkomponenttianalyysiä käsittelevät määritelmät mukailevat Jolliffen kirjaa [3] sekä Hyvärisen ICA-kirjaa [2]

Pääkomponenttianalyysi on monimuuttujamenetelmien klassisimpia tekniikoita. Sen tarkoituksena on löytää *pääkomponentteja*. Pääkomponentit ovat aineiston lineaarikombinaatioista muodostuvia varianssia parhaiten selittäviä muuttujia. Pääkomponenttianalyysi ei edellytä oletuksia muuttujien jakaumista. Menetelmä on hyödyllinen tiivistämään aineistoa muuttujien välisten kovarianssien avulla.

Pääkomponenttianalyysin johtaminen

Olkoon \mathbf{x} p -ulotteinen jatkuva satunnaisvektori. Pääkomponenttien määrittämiseksi etsitään lineaarikombinaatioita $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_p X_p = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_i$, joiden varianssi on mahdollisimman suuri. Kootaan varianssit maksimoivat painot vektoriksi $\boldsymbol{\alpha}_1$ jolloin

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 \mathbf{x} = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \dots + \alpha_{1p} X_p = \sum_{i=1}^p \alpha_{1i} X_i.$$

Etsitään seuraavaksi lineaarikombinaatio $\boldsymbol{\alpha}'_2 \mathbf{x}$ joka maksimoi varianssin rajoitteella, että lineaarikombinaatio $\boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{x}$ ei korreloi lineaarikombinaation $\boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{x}$ kanssa, toisin sanoen $\text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{x}) = 0$. Jotta kovarianssi voisi olla 0, on vektoreiden $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ pistetulon oltava 0. Tästä seuraa että vektorit $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ ovat kohtisuoria. Näin voidaan jatkaa $\boldsymbol{\alpha}_j$ asti ($j \leq p$), sillä rajoitteella, että $\boldsymbol{\alpha}_j$ on kohtisuorassa jokaisen vektorin $\boldsymbol{\alpha}_{j-1}, \boldsymbol{\alpha}_{j-2}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_1$ kanssa. Vektoreita $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_p$ kutsutaan pääkomponenttilatauksiksi ja näistä saatavia lineaarikombinaatioita $\mathbf{z}_i = \mathbf{x} \boldsymbol{\alpha}_i$ pääkomponenteiksi. Pääkomponenttianalyysin ideana on selvittää ja erotella nämä komponentit. Yksinkertaisin ja yleisin pääkomponenttianalyysin keino perustuu kovarianssimatriisin $\boldsymbol{\Sigma}$ ominaisarvoajotelmaan.

Lause 1. *Aineiston pääkomponenttilataukset $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_p$ ovat aineiston kovarianssimatriisin ominaisvektoreita.*

Todistus. Aloitetaan ensimmäisestä latauksesta $\boldsymbol{\alpha}_1$ Maksimoitavana on lineaarikombinaatioiden varianssi $\text{var}[\boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{X}] = \boldsymbol{\alpha}'_1 \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_1$. Asetetaan yleinen ehto $\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\alpha} = 1$ jotta varianssia ei voi kasvattaa mielivaltaisesti kertoimia kasvattamalla. Maksimoitavana on siis $\boldsymbol{\alpha}'_1 \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_1$ rajoitteella $\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\alpha} = 1$. Maksimointiongelmalla vastaava Lagrangen funktio on täten muotoa

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \lambda_1) = \boldsymbol{\alpha}'_1 \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_1 - \lambda(\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\alpha} - 1)$$

Derivoidaan $\boldsymbol{\alpha}_1$ suhteen ja lasketaan yhtälön nollakohdat.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_1} = 2\boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_1 - \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1$$

Tämä vastaa ominaisarvoyhtälöä, joten λ_1 on $\boldsymbol{\Sigma}$:n ominaisarvo. Koska maksimoitavana oleva yhtälö voidaan kirjoittaa, $\boldsymbol{\alpha}'_1 \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}'_1 \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}'_1 \boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1$, maksimi saavutetaan kun λ_1 on kovarianssimatriisin $\boldsymbol{\Sigma}$ suurin ominaisarvo ja $\boldsymbol{\alpha}_1$ on tätä vastaava ominaisvektori.

Toinen pääkomponenttilataus maksimoi varianssin $\boldsymbol{\alpha}'_2 \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_2$ rajoitteilla $\boldsymbol{\alpha}'_2 \boldsymbol{\alpha}_2 = 1$ ja $\boldsymbol{\alpha}'_2 \boldsymbol{\alpha}_1 = 0$. Rajoitteita vastaava Lagrangen funktio on

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}_2, \lambda_2, \phi) = \boldsymbol{\alpha}'_2 \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_2(1 - \boldsymbol{\alpha}'_2 \boldsymbol{\alpha}_2) + \phi \boldsymbol{\alpha}'_2 \boldsymbol{\alpha}_1,$$

jonka derivoimalla $\boldsymbol{\alpha}_2$ suhteen saamme yhtälön

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_2} = 2\boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 - \phi \boldsymbol{\alpha}_1 = 0. \quad (4)$$

Kertomalla vasemmalta vektorilla α'_1 , kaksi ensimmäistä termiä häviävät korreloimattomuusehdon takia, ja voimme päätellä että kerroin $\phi = 0$,

$$2\alpha'_1 \Sigma \alpha_2 - 2\alpha'_1 \lambda_2 \alpha_2 - \phi \alpha'_1 \alpha_1 = 0 \iff \phi \cdot 1 = 0 \iff \phi = 0.$$

Tästä seuraa että yhtälö 4 sieventyy ominaisarvoyhtälömuotoon $\Sigma \alpha_2 = \lambda_2 \alpha_2$, joten voimme päätellä että toinen pääkomponenttilataus α_2 on Σ toiseksi suurimpaa ominaisarvoa vastaava ominaisvektori. K:nen latauksen laskeminen voidaan tehdä vastaavasti maksimoimalla neliömuoto $\alpha'_k \Sigma \alpha_k$ rajoitteilla $\alpha'_k \alpha_k = 1$ ja $\alpha'_k \alpha_j = 0$ kaikilla $j < k$. Kuten pääkomponentille 2, on mahdollista osoittaa, että kaikki korreloimattomuusrajoitteita vastaavat Lagrangen kertoimet ϕ_j häviävät, jolloin ongelma palautuu takaisin ominaisarvoyhtälöön $\Sigma \alpha_k = \lambda_k \alpha_k$. Näin ollen pääkomponenttilataukset ovat kovarianssimatriisin Σ ominaisvektoreita, laskevassa suuruusjärjestyksessä $\lambda_1, \geq \lambda_2 \geq, \dots, \geq \lambda_k$.

□

Lauseesta 1 seuraa, että aineiston pääkomponentit Z_i on mahdollista saada yhtälöstä

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\alpha,$$

missä \mathbf{Z} sarakkeet muodostavat vastaavat pääkomponentit laskevassa järjestyksessä, esimerkiksi kolmas sarake on muotoa $Z_3 = \mathbf{X}\alpha_3$.

Pääkomponenttianalyysi on hyödyllinen menetelmä monimuuttujia aineiston kanssa työskennellessä. Usein suurin osa aineiston varianssista selittyy jo muutama ensimmäisellä pääkomponentilla. Aineisto voidaan esittää paljon tiiviimmässä muodossa, ja sen taustalla olevia tekijöitä voidaan mahdollisesti arvioida paremmin, kuin koko aineistoa tutkimalla. Riippumattomien komponenttien analyysin kontekstissa pääkomponenttianalyysi on usein kätevä esikäsittelyvaihe.

4 Neljännen asteen sokkotunnistus

Tässä luvussa tutkitaan satunnaismuuttujien riippumattomuutta ja riippumattomien komponenttien analyysiä. Tämän jälkeen esitellään valkaisu pääkomponenttianalyysin laajenuksena. Lopulta esitellään ja johdetaan neljännen asteen sokkotunnistuksen menetelmä ja vertaillaan tätä pääkomponenttianalyysiin.

4.1 Riippumattomuus

Riippumattomilla satunnaismuuttujilla on tilastollisesti paljon käytännöllisiä ominaisuuksia. Näiden ominaisuuksien vuoksi satunnaismuuttujien riippumattomuus oletetaan usein teoriaa kehittäessä, jolloin on esimerkiksi mahdollista johtaa uskottavuusfunktiot suljetussa muodossa. Tilastollinen riippumattomuus on perustavanlaatuisen käsite riippumattomien komponenttien analyysissä.

Käytännössä satunnaismuuttuja X on riippumaton satunnaismuuttujasta Y jos tiedolla X arvosta ei ole vaikutusta Y :n jakaumaan. Määritellään että satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, jos niitä vastaaville yhteistiheysfunktioille pätee

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

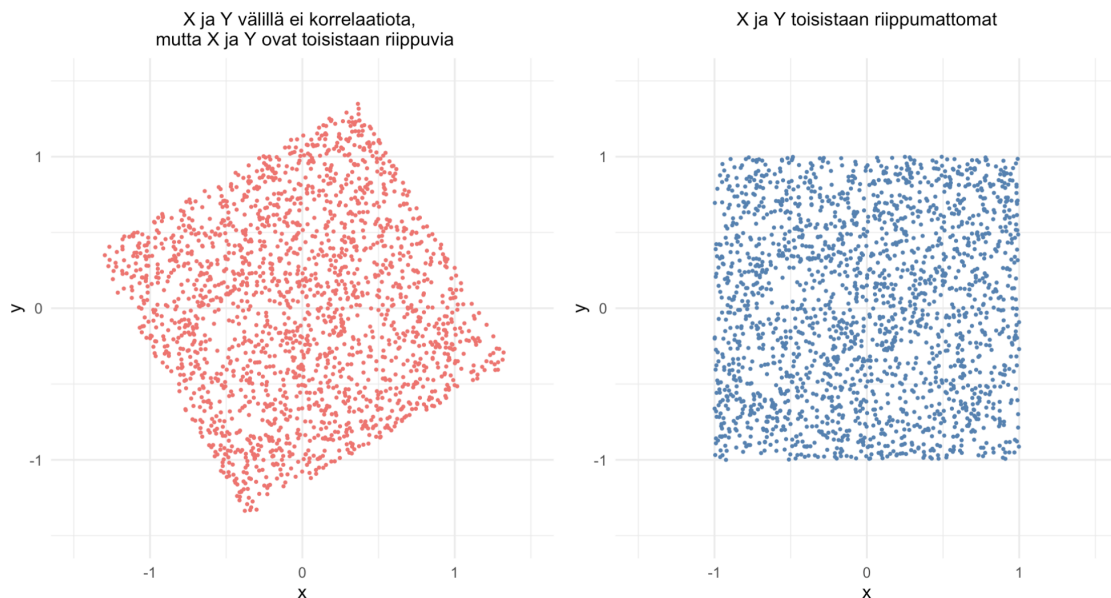
Määritelmästä seuraa useita hyödyllisiä tuloksia. Erityisesti riippumattomien satunnaismuuttujien odotusarvoille pätee

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \quad (5)$$

Tulos voidaan todistaa suoraviivaisesti laskemalla, sillä

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

Riippumattomuus on huomattavasti vahvempi ominaisuus kuin korreloimattomuus. Riippumattomuudesta seuraa aina korreloimattomuus, mutta korreloimattomuus ei välttämättä tarkoita riippumattomuutta. Esimerkiksi yhtälö 5 ei päde aina korreloimattomille satunnaismuuttujille. Eroa korreloimattomuuden ja riippumattomuuden välillä voidaan havainnollistaa geometrisesti. Kuvassa 1 on simuloitu kaksi otosta tasajakautuneista satunnaismuuttujista. Kummassakaan tilanteessa satunnaismuuttujien välillä ei ole lineaarista riippuvuutta, joten otoskorrelaatio on lähellä nollaa. Vasemmanpuoleisessa kuvaajassa satunnaismuuttujat ovat kuitenkin toisistaan riippuvia. Tietämällä X :n arvon saadaan tietoa Y :n mahdollisesta arvokoukosta. Oikeanpuoleisessa kuvaajassa satunnaisotos on muodostettu riippumattomista muuttujista, jolloin yhteistiheyden alusta on akselien suuntainen neliö. Tällöin satunnaismuuttujien arvot eivät riipu toisistaan.



Kuva 1: Korreloimattomat satunnaismuuttujat eivät ole välttämättä riippumattomia.

Riippumattomuudelle ei ole olemassa suoraa otosuuretta, vaan se on määritelty vain satunnaismuuttujille. Sovelluksissa ja koeasetelmissä tämä ongelma voidaan

sivuuttaa olettamalla riippumattomuuden toteutuvan riittävän hyvin. Otossuureen puuttuminen tekee riippumattomuuden tutkimisesta hieman hankalaa. Otostasolla riippumattomuuden tutkimiseen voidaan käyttää esimerkiksi informaatioteoriaa tai korkeamman asteen momenteja.

4.2 Riippumattomien komponenttien analyysi

Riippumattomien komponenttien analyysissä aineiston oletetaan koostuvan lineaarisesti sekoittuneista, keskenään riippumattomista tuntemattomista lähteistä. ICA:n tavoitteena on yrittää erotella nämä lähteet takaisin alkuperäisiksi komponenteiksi.

Lause 2. *Matriisimuodossa yleinen ICA-malli [2] voidaan kirjoittaa muodossa*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

missä \mathbf{A} on tuntematon sekoitusmatriisi, \mathbf{y} on riippumattomista lähteistä koostuva lähdevektori ja \mathbf{x} on havaittu aineisto. ICA-malli olettaa että lähdevektorin komponenteista korkeintaan yksi noudattaa normaalijakaumaa.

Useissa sovelluksissa on realistista olettaa, että malliin sisältyy myös kohinaa. Yleiseen ICA-malliin 2 voidaan lisätä kohinatermi μ , jolloin malli on muotoa

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mu.$$

Kohina μ on satunnaista, mutta usein estimoitavissa, kun riippumattomat komponentit on saatu parhaan mukaan eroteltua. Käytännössä ICA-mallin 2 ratkaisu perustuu sekoitusmatriisin selvittämiseen tai tämän käänteismatriisin ratkaisuun. ICA menetelmät perustuvat riippumattomuuden ja epänormaaliuden maksimointiin. Riippumattomuuden ja epänormaaliuden yhteys perustuu keskeiseen raja-arvolauseeseen. Sen mukaan riippumattomien satunnaismuuttujien summa lähestyy normaalijakaumaa. Osoittautuu että keskeisestä raja-arvolauseeseen avulla on mahdollista määrittää hyvä riippumattomuuden estimaattori otokselle. Jos määritämme vektorin jolla kerrottuna aineiston epänormaalius maksimoituu, olemme samalla määrittäneen yhden riippumattomista komponenteista [2].

4.3 Valkaisu

Olkoon \mathbf{X} satunnaisvektori. Satunnaisvektoria kutsutaan *valkaistuksi* jos sitä vastaava kovarianssimatriisi Σ on identiteettimatriisi \mathbf{I} ja odotusarvovektori μ on nollavektori $\mathbf{0}$. Voidaan osoittaa, että valkaistu aineisto on suljettu ortogonaalisten kuvausten suhteen.

Lause 3. *Valkaistut satunnaisvektorit ovat suljettuja ortogonaalisten kuvauksien suhteen*

Todistus. Olkoon \mathbf{T} ortogonaalisen kuvauksen määrittävä $n \times n$ matriisi. Kuvataan valkaistu satunnaisvektori \mathbf{x} matriisilla \mathbf{T} .

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}.$$

Odotusarvon lineaarisuudesta seuraa, että matriisin \mathbf{y} odotusarvolle saadaan

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}] = \mathbb{E}[\mathbf{T}\mathbf{x}] = \mathbf{T}\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Kovarianssin riippumattomuuden säilyminen seuraa ortogonaalisten matriisien ominaisuudesta, jossa ortogonaalisten matriisien käänteiskuvaus on matriisin transpoosi

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}'] = \mathbb{E}[(\mathbf{T}\mathbf{x})(\mathbf{T}\mathbf{x})'] = \mathbf{T}\mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}']\mathbf{T}' = \mathbf{T}\mathbf{T}' = \mathbf{I}$$

□

Riippumattomien komponenttien analyysin yleinen esivaihe on valkaisu, jolla aineistosta saadaan poistettua kahden ensimmäisen keskusmomentin vaikutus. Aineiston valkaisu voidaan toteuttaa *valkaisumatriisilla*. Osoittautuu, että valkaisumatriisin määrittäminen on suoraviivaista pääkomponenttianalyysin laajennuksella [2].

Lause 4. *Valkaisumatriisi \mathbf{V} saadaan lineaarikuvauksella $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}'$, missä \mathbf{D} ja \mathbf{U} ovat aineiston kovarianssimatriisin ominaisarvohajotelman ominaisarvomatriisi $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ ja ominaisvektorematriisi $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$. Koska \mathbf{D} on diagonaalimatriisi $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}})$.*

Todistus. Kovarianssimatriisi keskistetylle aineistolle $\mathbf{\Sigma} = \mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}']$ on täysiasteisena positiivisesti definiitti, joten ominaisarvojen neliöjuuret $\lambda^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ovat aina olemassa. Merkitään $\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x}$, missä \mathbf{z} on valkaistu satunnaisvektori, $\mathbf{V} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}'$ on valkaisumatriisi ja \mathbf{x} satunnaisvektori. Hyödyntämällä $\mathbf{\Sigma}$ ominaisarvohajotelmaa ja \mathbf{U} :n ortogonaalisuutta saamme

$$\mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{z}'] = \mathbf{V}\mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}']\mathbf{V}' = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}'\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}'\mathbf{U}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I}.$$

Täten \mathbf{z} on keskistettynä valkaistu satunnaisvektori. □

Huomioitavaa on, että määritelty \mathbf{V} ei ole yksikäsitteinen valkaisumatriisi. Käy ilmi, että jos valkaisumatriisi \mathbf{V} kerrotaan millä tahansa ortogonaalimatriisilla \mathbf{O} tulo $\mathbf{O}\mathbf{V}$ on myös valkaisumatriisi. Tämä on seuraus lauseesta 3. Myös yhtälössä 6 esiintyvä matriisi $\mathbf{O}\mathbf{V}$ on valkaisumatriisi.

Valkaisu auttaa ICA-mallin sekoitematriisin ratkaisussa, sillä aineiston valkaisun jälkeen lähteiden sekoitematriisi on ortogonaalinen. Tämän jälkeen riippumattomat lähteet on mahdollista saada avaruuden ortogonaalisilla kuvauksilla eli rotaatioilla.

Lause 5. *ICA-malli 2 voidaan valkaisun avulla esittää muodossa*

$$\mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{z} = \mathbf{O}\mathbf{y}, \tag{6}$$

missä \mathbf{V} on valkaisumatriisi, \mathbf{z} on valkaistu aineisto ja \mathbf{O} on ortogonaalinen matriisi.

Todistus. Tarkastellaan ICA-mallia $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Valkaistaan aineisto \mathbf{x} valkaisumatriisilla \mathbf{V} ja merkitään tätä \mathbf{z} . Nyt voimme kirjoittaa

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{V}(\mathbf{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{V}\mathbf{A})\mathbf{y}.$$

Merkitään matriisia $\mathbf{V}\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Oletuksen mukaan lähteet \mathbf{y} ovat riippumattomia ja valkaistuja eli $E\{\mathbf{y}\mathbf{y}'\} = \mathbf{I}$. Valkaistun aineiston \mathbf{z} kovarianssimatriisi voidaan kirjoittaa muodossa

$$E\{\mathbf{z}\mathbf{z}'\} = E\{\mathbf{B}\mathbf{y}(\mathbf{B}\mathbf{y})'\} = \mathbf{B}E\{\mathbf{y}\mathbf{y}'\}\mathbf{B}' = \mathbf{B}\mathbf{B}'.$$

Koska \mathbf{z} on valkaistu, $E\{\mathbf{z}\mathbf{z}'\} = \mathbf{I}$ ja saamme $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{I}$. Tämä on ortogonaalisen matriisin määritelmä, joten merkitään $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. Sijoittamalla $\mathbf{V}\mathbf{A} = \mathbf{O}$ takaisin alkuperäiseen ICA-malliin, voimme todeta että alkuperäinen sekoitusmatriisi on muotoa

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{O}$$

Tällöin ICA-malli on muotoa

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{O}\mathbf{y}$$

ja valkaistulle aineistolle ICA-malli on muotoa

$$\mathbf{z} = \mathbf{O}\mathbf{y}$$

□

Valkaisu korostaa normaaleiden lähteiden ongelmallisuutta ICA-malleissa. Kuva 2 havainnollistaa tätä, sillä valkaisun jälkeen kahden tai useamman normaalin lähteen aineisto muodostaa symmetrisen pallon, jolloin jälkeen sekoitusmatriisin selvittäminen on mahdotonta [4]. Pallolla on nimittäin ääretön määrä symmetrioita, eikä alkuperäisten satunnaismuuttujien mukaisten akseleita voida löytää ortogonaalisilla kuvauksilla.

4.4 Valkaistu FOBI

Luvun määritelmät ja toditukset seuraavat Cardoso'n artikkelia, jossa FOBI esiteltiin ensimmäistä kertaa [5] sekä Hyvärisen ICA-kirjaa [2].

Tarkastellaan nyt ICA-mallia 2, ja erityisesti sen riippumattomia komponentteja \mathbf{y} . Neljännen asteen sokkotunnistuksen menetelmä perustuu siihen, että riippumattomille ja valkaistuille satunnaisvektoreille kurtoosimatriisi 2 on diagonaalinen. Tällöin osoittautuu, että ICA-mallissa 6 esiintyvä tuntematon ortogonaalimatriisi \mathbf{O} saadaan ratkaistua havaintovektorin kurtoosimatriisin ominaisarvohajotelmasta.

Lemma 1. *Riippumattomille satunnaisvektoreille kurtoosimatriisi $\mathbf{\Omega}$ on diagonaalimatriisi.*

Todistus. Olkoon \mathbf{y} p -ulotteinen valkaistu ja riippumaton satunnaisvektori. Tarkastellaan kurtoosimatriisin alkioita $\Omega_{i,j}$, jolle $i \leq j$. Tulos voidaan osoittaa symmetrisesti alkioille, joille $j \leq i$. Määritelmän mukaan kurtoosimatriisin alkio (i, j) on muotoa

$$\Omega_{i,j} = \sum_{k=1}^p \mathbb{E}[y_i y_j y_k^2]$$

Havainnot normaaleista lähteistä ennen valkaisuä Epänormaalien lähteiden havainnot valkaisuun jälkeen



Havainnot normaaleista lähteistä ennen valkaisuä Normaalien lähteiden havainnot valkaisuun jälkeen



Kuva 2: Sekoitettut havainnot ja näiden valkaisuut kahden muuttujan normaaleille ja epänormaalille aineistoille

Riippumattomuuden vuoksi, voimme erottaa lausekkeen odotusarvot

$$\Omega_{i,j} = \sum_{k=1}^p \mathbb{E}[y_i] \mathbb{E}[y_j] \mathbb{E}[y_k^2] = 0 \cdot 0 \cdot \sum_{k=1}^p \mathbb{E}[y_k^2] = 0.$$

Kurtoosimatriisin diagonaalilla alkiot ovat

$$\begin{aligned} \Omega_{i,i} &= \sum_{k=1}^p \mathbb{E}[y_i^2 y_k^2] = \mathbb{E}[y_i^4] + \sum_{k \neq i}^p \mathbb{E}[x_i^2 x_k^2] \\ &= \tilde{\kappa}(y) + \sum_{k \neq i}^p \text{Var}(y_i) \text{Var}(y_k) = \tilde{\kappa}(y_i) + \sum_{i=1}^{p-1} 1 = \tilde{\kappa}(y_i) + p - 1. \end{aligned}$$

Riippumattomille satunnaisvektoreille kurtoosimatriisi on siis muotoa $\text{diag}(\tilde{\kappa}(y_1) + p - 1, \tilde{\kappa}(y_2) + p - 1, \dots, \tilde{\kappa}(y_p) + p - 1)$

□

Tarkastellaan nyt ICA-mallin valkaistun havaintovektorin \mathbf{z} kurtoosimatriisia. Merkitään $\mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{z}$ jolloin $\mathbf{z} = \mathbf{O}\mathbf{y}$ 4.3. Kurtoosimatriisi saadaan kirjoitettua muodossa

$$\mathbf{\Omega}_z = \mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{z}'||\mathbf{z}|^2] = \mathbb{E}[\mathbf{O}\mathbf{y}\mathbf{O}\mathbf{y}'||\mathbf{O}\mathbf{y}|^2] = \mathbf{O}\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}'||\mathbf{y}|^2]\mathbf{O}' = \mathbf{O}\mathbf{\Omega}_y\mathbf{O}'.$$

Huomataan, että tämä on valkaistun havaintovektorin \mathbf{z} kurtoosimatriisin ominaisarvohajotelma. Koska ortogonaalinen diagonalisaatio on yksikäsitteinen mikäli ominaisarvot ovat erisuuret, on ICA-mallin ratkaisuun tarvittavalle ortogonaaliselle matriisille \mathbf{O} löydetty menetelmä jolla tämä voidaan määrittää. Koska \mathbf{O} on ortogonaalinen, sen käänteismatriisi on sen transpoosi. Riippumaton lähdevektori saadaan siis kertomalla valkaistu havaintomatriisi tämän kurtoosimatriisin ominaisvektorimatriisilla

$$\mathbf{O}'\mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (7)$$

Jotta lähdevektori saadaan eroteltua FOBIn avulla, muutaman oletuksen on toteutettava. Ensinnäkin neljännen momentin on oltava äärellinen. Toisena riippumattomien komponenttien kurtoosit eivät saa olla samat. Tällöin FOBI ei pysty erottelemaan yksikäsitteisesti lähteitä y_i joka rajoittaa FOBIn käyttöä huomattavasti. Tilanteessa jossa havaintovektori on ulottuvuudeltaan suurempi kuin lähdevektori, on FOBIn tehtävä muutoksia. Tällöin havaintovektorin kovarianssimatriisi $\mathbf{\Sigma}_X$ ei ole kääntyvä, ja valkaisu ei onnistu, sillä ominaisarvomatriisin neliöjuuri $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$ ei ole määritetty. M lähteen aineistossa, lähteiden virittämä aliavaruus on M -ulotteinen. Jos havaintovektori on korkeampiulotteinen, voidaan tämä projektoida lähteiden aliavaruudelle pääkomponenttianalyysin avulla. Valitaan kuvata aineisto M ensimmäisellä pääkomponenttilatauksella, jonka jälkeen valkaisu ja FOBI voidaan toteuttaa tavanomaisesti.

Neljännen asteen sokkotunnistus

1. Keskitä aineisto käyttäen keskitysmatriisia \mathbf{H}_n .
2. Määritä aineiston otoskovarianssimatriisi $\mathbf{\Sigma}$ ja tätä vastaava ominaisarvohajotelma $\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}'$
3. Valkaise keskistetty aineisto käyttäen valkaisumatriisia $\mathbf{V}\mathbf{H}_n\mathbf{x} = \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}'\mathbf{H}_n\mathbf{x} = \mathbf{z}$
4. Määritä saadun vektorin \mathbf{z} kurtoosimatriisi, ja laske tämän ominaisarvohajotelma $\mathbf{\Omega}_z = \mathbf{O}\mathbf{\lambda}\mathbf{O}'$.
5. Riippumattomista komponenteista koostuva lähdevektori \mathbf{y} saadaan laskemalla $\mathbf{O}'\mathbf{z}$

4.5 Riippumattomat komponentit epänormaaliuden maksimoinnilla

Kurtoosin otossuure on teoreettisesti varsin mielenkiintoinen. Otossuurena kurtoosi on erotettava kuvailevassa tilastotieteessä toisinaan esiintyvistä jakauman *huippukuuden* käsitteestä. Syynä tähän on esimerkiksi se, että kaksihuippuisen jakauman

otoskurtoosi voi olla negatiivinen, vaikka samaa jakaumaa voitaisiin kuvailla hui-pukkaaksi.

Normaalisti jakautuneelle muuttujalle kurtoosi on 0 [2]. Tätä ominaisuutta voidaan hyödyntää normaaliuden mittaamiseen. Mitä suurempi satunnaismuuttujan kurtoosin itseisarvo on, sitä enemmän se poikkeaa normaalijakaumasta. Kurtoosi onkin matemaattisesti yksi yksinkertaisimmista normaaliuden mittareista. Sen merkittävien ongelma on herkkyys poikkeaville havainnoille. Esimerkiksi tuhannen havainnon otoksessa, yksikin poikkeava havainto saattaa kasvattaa otoskurtoosia huomattavasti. Tästä syystä kurtoosi ei ole robusti normaaliuden mittari.

Valkaistulle aineistolle FOBIn 7 matemaattinen muoto muistuttaa hyvin paljon kovarianssimatriisin ominaisarvohajotelmaan perustuvaa pääkomponenttiansalyysiä. FOBI voidaankin luonnehtia menetelmäksi, jossa etsitään aineiston äärimmäiset kurtoosit eli poikkeamat normaaliudesta. FOBIn tapauksessa kurtoosimatriisin ominaisvektorit vastaisivat kurtoosilatauksia. Erityisen mielenkiinnon kohteena ovat tällöin suurimpien positiivisten kurtoosien lisäksi myös negatiivisimmat kurtoosit. Riippumattomien komponenttien analyysissä on olennaista epänormaaliuden maksimointi, ja FOBI 7 on tästä selkeä osoitus, sillä päätyisimme samaan muotoon, yrittäessä etsiä kurtoosit maksimoivat lineaarikombinaatiot.

5 Esimerkkejä

Havainnollistetaan FOBIa kahdella käytännön esimerkillä lähteiden sokkoerottelusta. Ensimmäisessä esimerkissä FOBIn avulla saadaan eroteltua sekoittuneita äänilähteitä toisistaan, simuloiden niin kutsuttua cocktailkutsuilmiötä. Tämä demonstraatio on klassinen ICA-esimerkki, joka juontaa juurensa 1990-luvun puoliväliin, jolloin ICA-tutkimus alkoi nousta uutena merkittävänä ja innostavana tutkimusalueena [2].

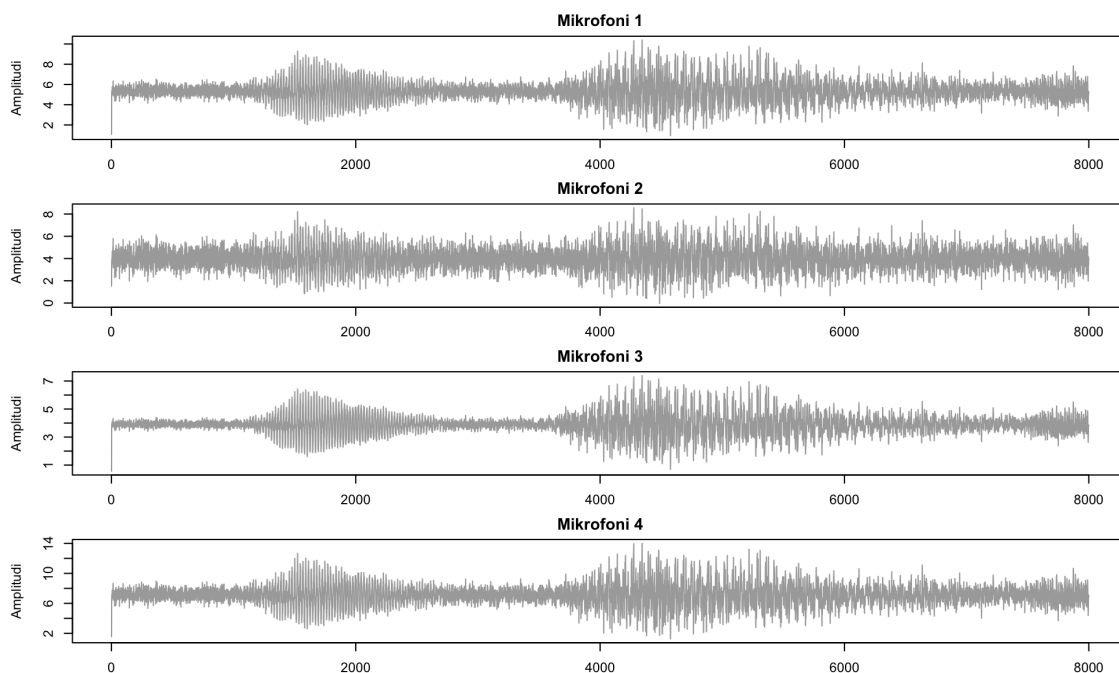
Toisessa esimerkissä aineistona on kolme kuvatiedostoa, jotka on sekoitettu tunnistamattomaksi havaintoaineistoksi. FOBI tunnistaa havaintoaineistosta sen muodostavat riippumattomat lähteet ja onnistuu erottelemaan ne.

5.1 Cocktailkutsu -ongelma

Käytetään aineistona R:n JADE -kirjaston [6] Cocktail party problem- aineistoa (CPPdata). Aineistolla simuloidaan psykologiassa esiintyvää cocktailkutsuilmiön kaltaista tilannetta, missä ihminen pystyy erottamaan ja keskittymään yhden ihmisen puheeseen taustahälyn ja puheensorinan keskellä. Tarkoituksena on tarkastella kuinka riippumattomien komponenttien avulla voidaan erotella eri äänilähteistä koostuvaa sekoittunutta äänisignaalia. Aineistona neljä aikasarjaa, joissa on 6,25 sekuntia sekoittuneita äänisignaaleja. Äänitteet on digitoitu 8 000 hertsin taajuudella, ja kukin neljästä muuttujasta muodostuu 50 000 havainnon pituisesta aikasarjasta. Riippumattomat komponentit, eli äänilähteet muodostuvat kolmesta erityyppisestä musiikista, jotka on tarkoitettu parhaan mukaan erotella FOBIn avulla. Neljäs komponentti on standardinormaalisti jakautunutta valkoista kohinaa sisältävä lähde. Havainnot ovat näiden sekotteita eri mikrofoneista. Voimme kirjoittaa aineiston ICA-mallin 2 muodossa

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

missä \mathbf{x} on mikrofonien tallentamat ääniaineistot, \mathbf{y} on eroteltavat äänilähteet ja \mathbf{A} tuntematon sekoitematriisi. Tarkastellaan havaitun aineiston ensimmäinen sekuntia (Kuva 3).



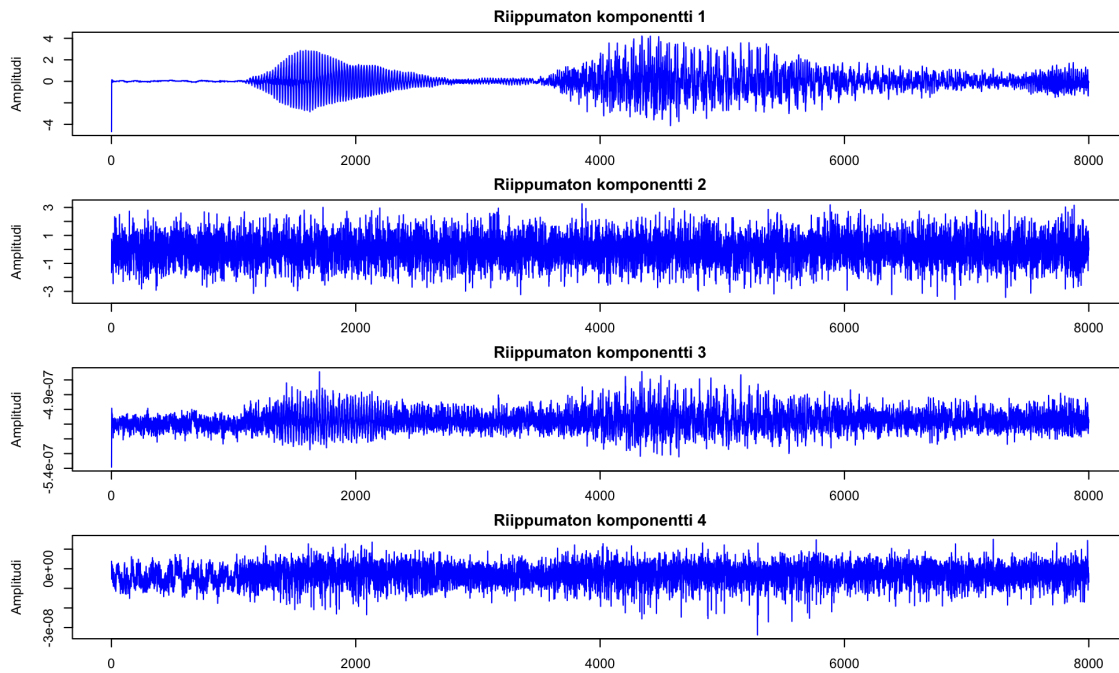
Kuva 3: Mikrofonien tallenteet ennen FOBIa

Kuvasta huomataan, että aikasarjat muistuttavat toisiaan, ja ne korreloivat vahvasti toistensa kanssa. Suoritetaan aineistolle FOBI luvun 4 mukaisesti. Kuvassa 4 on FOBIlla erotut äänisignaalit. Kuvasta huomataan alkuperäisten riippuvuussuhteiden poistuminen. Huomattavaa on, kuinka kuvassa 3 jokaisessa havainnossa esiintyy riippumattoman komponentin 1 vaikutus. Visuaalisessa tarkastelussa voidaan todeta, että valkoista kohinaa sisältänyt komponentti ollaan saatu eroteltua. Se voidaan huomata riippumattomasta komponentista 2.

Varmistetaan, että erotellut komponentit vastaavat alkuperäisiä lähteitä. Tämä voidaan tehdä muuttamalla saadut komponentit wav tiedostomuotoon R tuneR [7] ohjelmistopakettilla. Kaksi ensimmäistä lähdevektoria kuulostavat tismalleen samalta kuin puhtaana. Myös valkoinen kohina on saatu eroteltua, kuten visuaalisessa tarkastelussa huomattiin. Kolmas alkuperäinen lähde on sekoittunut kahteen ensimmäiseen. Ottaen huomioon FOBI:n yksinkertaisuuden, menetelmä toimi hyvin tehokkaasti.

5.2 Kuvaerottelu

Riippumattomien komponenttien analyysiä voidaan havainnollistaa kuva-aineistolla. Yksi esimerkki ICA:n käytöstä visuaalisesta lähde-erottelussa on artikkelissa [4], lisäksi JADE-paketissa [6] on aineisto, jolla tämä voidaan toteuttaa. Tutkielman soveltaa samankaltaista ideaa eri aineistoilla.



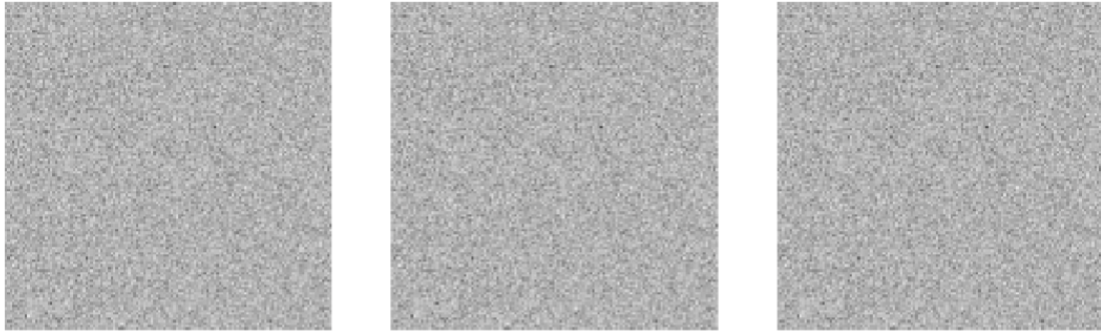
Kuva 4: FOBilla erotetut komponentit

Tavoitteena on simuloida visuaalinen lähteiden sokkoerottelun ongelma sekoittamalla kuvatiedostoja. Alkuperäisinä lähteinä toimii kuva kissasta ja -pellostä (Kuva 5). Kolmas lähde on valkoista kohinaa. Kuvat ovat mustavalkoisia ja resoluutioltaan 130 x 130 pikseliä. Mustavalkokuvat voidaan ilmaista matriiseina, joissa 0 vastaa valkoista pikseliä ja 1 mustaa. Harmaan sävyt saadaan liukulukuna näiden välistä. Tarkemmat kuvat toimivat analogisesti.



Kuva 5: Kuvalähteet

Vektoroidaan kuvat pystyvektoreiksi. Havaintoina voidaan pitää yhden pikselin arvoa. Peräkkäiset havainnot ovat vahvasti korreloituneita keskenään. Valokuvien pikselit ovat jakautuneet hyvin epänormaalisti, joten teoriassa kurtoositarkastelun avulla kuvien tulisi erottautua hyvin. Vektoroinnin jälkeen luodaan sekoitematriisi ja sekoittuneita havaintoja. Sekoittuneet havainnot \mathbf{x} ovat nyt ICA-mallin 2 mukaisia. Kuvassa 6 on havainnot, jotka on sekoitettu. Paljaalla silmällä kuvista ei saa erotettua mitään säännönmukaisuutta.



Kuva 6: Sekoitetut havainnot

Suoritetaan nyt kuvassa 6 oleville havainnolle FOBI. FOBIlla estimoidut lähdesignaalit ja kohinakomponentti näkyvät kuvassa 7. Kuten äänierotteluesimerkissä, estimaatit eivät ole täydellisiä, mutta ne ovat käyttökelpoisia.



Kuva 7: FOBI:n erottelemat komponentit

Viitteet

- [1] H. Nyberg, *Matriisilaskenta tilastotieteessä* -luentomoniste. Turun yliopisto. Tammikuu 2024.
- [2] A. Hyvärinen, J. Karhunen, and E. Oja, *Independent component analysis*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control, New York: Wiley, 2001.
- [3] I. T. Jolliffe, *Principal Component Analysis*. Springer Series in Statistics, New York: Springer-Verlag, 2002.
- [4] K. Nordhausen and H. Oja, “Independent component analysis: A statistical perspective,” *WIREs Computational Statistics*, vol. 10, no. 5, p. e1440, 2018.
- [5] J.-F. Cardoso, “Source separation using higher order moments,” in *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 2109–2112 vol.4, 1989.
- [6] J. Miettinen, K. Nordhausen, and S. Taskinen, “Blind source separation based on joint diagonalization in R: The packages JADE and BSSasymp,” *Journal of Statistical Software*, vol. 76, no. 2, pp. 1–31, 2017.
- [7] U. Ligges, S. Krey, O. Mersmann, and S. Schnackenberg, *tuneR: Analysis of Music and Speech*, 2023. R package version 1.4.6.

Liitteet

R-koodit

R koodi FOBIn toteuttamiseen. Koodissa käytetään JADE R-pakettia [6], ja tämän aineistoa CPPdata

```
1 # NIEROTTELU
2 # Ladataan JADE paketti josta saadaan data ja FOBIn funktio.
3 library(JADE)
4 data("CPPdata")
5 X <- as.matrix(CPPdata)
6
7 # Valitaan ensimmäinen sekunti äänitteistä
8 n_pisteet <- 1:8000
9
10
11 # Piirretään havainnot
12 par(mfrow = c(4, 1), mar = c(2, 4, 2, 1))
13 for(i in 1:4) {
14
15 plot.ts(X[n_pisteet, i], main = paste("Mikrofoni", i),
16
17 ylab = "Amplitudi", col = "darkgrey")
18 }
19
20 # Suoritetaan FOBIn ja erotellaan riippumattomat komponentit
21 fobi_tulos <- FOBIn(X)
22 y <- fobi_tulos$$
23 # Piirretään erotellut lähteet
24 par(mfrow = c(4, 1), mar = c(2, 4, 2, 1))
25 for(i in 1:4) {
26 plot.ts(y[n_pisteet, i], main = paste("Riippumaton komponentti", i),
27
28 ylab = "Amplitudi", col = "blue")
29 }
30
31
32 # KUVAESIMERKKI
33 library(magick)
34
35 set.seed(1)
36 # Luetaan kuva-aineistot ja luodaan näistä matriisi. Tehdään myös normaalisti
37 # jakautunut kohinalähde.
38 y1 <- as.numeric(image_data(image_resize(image_convert(image_read("kissa.jpeg"), "
39 gray"), "130x130!"), "gray")) / 255
40 y2 <- as.numeric(image_data(image_resize(image_convert(image_read("pelto.jpeg"), "
41 gray"), "130x130!"), "gray")) / 255
42 y3 <- rnorm(130*130)
43
44 # Vektoroidaan aineisto kolmeksi pystyvektoriksi.
45 Y <- cbind(as.vector(y1), as.vector(y2), y3)
46
47 # Piirretään alkuperäiset lähteet
48 for(i in 1:3) image(t(matrix(Y[,i], 130, 130))[, 130:1], col = gray.colors(256),
49 axes = FALSE, asp = 1)
50
51 # Sekoitetaan aineisto ICA-mallin mukaisesti
52 X <- Y %*% t(matrix(runif(9, 0.5, 1.5), 3, 3))
53
54 # 3. Havaintojen erottelu FOBIn avulla
55 fobi_res <- FOBIn(X)
56
57 # Määritetään tulosteen kuva-parametrit, jotta saadaan havainnot yläriville, ja
58 # alariville erotellut komponentit
59 par(mfrow = c(2, 3), mar = c(1, 1, 1, 1))
60
61 # Piirretään havainnot X
62 for(i in 1:3) image(t(matrix(X[,i], 130, 130))[, 130:1], col = gray.colors(256),
63 axes = FALSE, asp = 1)
64
65 # Piirretään erotetut komponentit
66 for(i in 1:3) image(t(matrix(fobi_res$$S[,i], 130, 130))[, 130:1], col = gray.colors
67 (256), axes = FALSE, asp = 1)
```