



SPERNERIN LEMMA

LuK Terhi Heinonen

LuK-tutkielma
Lokakuu 2025

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastaja:
Dos. Ilkka Törmä

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

TERHI HEINONEN: Spernerin lemma
LuK-tutkielma, 9 s., 5 liites.
Matematiikka
Lokakuu 2025

Tutkielmassa esitetään Spernerin lemman ja sen monikulmioita koskevan yleistyksen todistus. Spernerin lemma on kombinatorinen tulos, jonka mukaan jokainen sopivalla tavalla väritetty kolmio sisältää ainakin yhden sateenkaarisolun, eli solun, jonka kaikki kärkipisteet ovat erivärisiä. Lopuksi tarkastellaan lemman sovellusta Brouwerin kiintopistelauseen todistuksessa.

Asiasanat: Spernerin lemma, Spernerin väritys, Brouwerin kiintopistelause.

Sisällys

| | |
|----------------------------------------------|----------|
| Johdanto | 1 |
| 1 Teoria | 1 |
| 1.1 Spernerin lemma | 1 |
| 1.2 Spernerin lemma monikulmioille | 3 |
| 2 Brouwerin kiintopistelause | 7 |

Johdanto

Spernerin lemma on trianguloitujen simpleksien väriytyksiin liittyvä kombinatorinen tulos. Sen alkuperäisen todistuksen esitti saksalainen matemaatikko Emanuel Sperner vuonna 1928.[1] Lemman mukaan trianguloidut simpleksit, joiden solujen kärkipisteillä on tietynlainen Spernerin väritys, sisältävät ainakin yhden solun, jonka kaikki kärkipisteet ovat erivärisiä.

Lemmalle on useita sovelluksia, joista tunnetuin on Browerin kiintopistelauseen todistus. Tätä tarkastellaan luvussa 2. Lemmaa on hyödynnetty myös muiden tulosten, kuten Hall:n teoreeman todistuksessa. [2]

Tulos yleistyy myös monikulmioille. Kaksiulotteisen tapauksen todisti bulgarialainen matemaatikko Krassimir Todorov Atanassov vuonna 1996. Todistuksen yhteydessä esitettiin Atanassovin konjektuuri, jonka mukaan yleistys pätee myös n -ulotteisten monikulmioiden tapauksessa. Kyseisen konjektuurin todistus esitettiin vuonna 2001.[3]

Lemmalle on olemassa myös muita versioita, kuten kuutio- ja sateenkaarivariantit. Kuutioiden tapauksessa tarkastellaan kuutiota, joka on jaettu pienempiin kuutioihin.

1 Teoria

1.1 Spernerin lemma

Simpleksi on yksinkertaisimman monikulmion eli kolmion n -ulotteinen yleistys. Yksiulotteisena se on jana, kaksiulotteisena kolmio ja kolmiulotteisena tetraedri.

Määritelmä 1. Simpleksi on kolmion n -ulotteinen yleistys. Jos pisteillä u_0, u_1, \dots, u_n vektorit $u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0$ ovat lineaarisesti riippumattomia, niiden määrittelemä n -ulotteinen simpleksi on pistejoukko

$$C = \{x_0u_0 + x_1u_1 + \dots + x_ku_k \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1 \text{ ja } x_i \geq 0 \text{ kaikille } i = 0, 1, \dots, k\}.$$

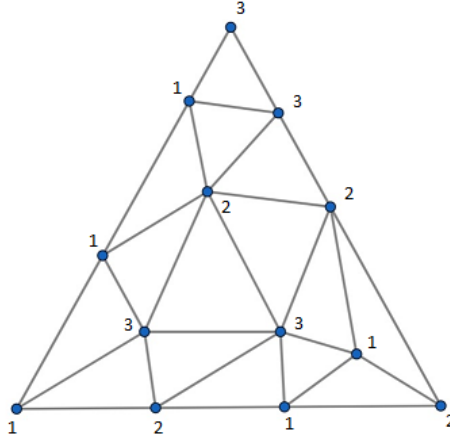
Pisteitä (x_0, x_1, \dots, x_n) kutsutaan pisteen x barysentrisiksi koordinaateiksi.

Jos S on n -simpleksi, sen kärkipisteiden (u_0, u_1, \dots, u_n) mikä tahansa k -alkioinen kombinaatio määrittää simpleksin S ($k - 1$)-ulotteisen sivun.

Määritelmä 2. Triangulaatio tarkoittaa n -ulotteisen monikulmion jakamista n -ulotteisiin simplekseihin, jotka ovat joko kokonaan erillisiä tai jakavat k -ulotteisen sivun, $k < n$.

Triangulaation simpleksejä kutsutaan suurinta simpleksiä lukuun ottamatta soluiksi. Kuvassa 1 esimerkki trianguloidusta kolmiosta.

Määritelmä 3. Olkoon S trianguloitu n -ulotteinen simpleksi, jonka pisteillä on väritys. Väritystä kutsutaan Spernerin väriytykseksi, jos se täyttää seuraavat ehdot:



Kuva 1: Spernerin väritys 2-ulotteisessa tapauksessa.

1. Jokainen suurimman simpleksin S kärkipiste u_i on erivärinen. Merkitään värejä $1, 2, \dots, n + 1$.
2. Jos pienemmän solun kärkipiste a_i kuuluu simpleksin S kärkipisteiden u_p, u_q, \dots, u_s määräämään sivuun, a_i voi saada värin vain joukosta $\{p, q, \dots, s\}$.
3. Jos a_i ei kuulu mihinkään simpleksin S sivuun, se voidaan värittää millä vain joukkoon $\{1, \dots, n + 1\}$ kuuluvalla värillä.

Soluja, joiden jokainen kärkipiste on erivärinen, kutsutaan *sateenkaarisoluiksi*.

Lemma 1. (*Spernerin lemma*) Jokainen simpleksi S , jolla on Spernerin väritys, sisältää parittoman määrän sateenkaarisoluja.

Todistus. Todistetaan induktiolla.

Yksiulotteisessa tapauksessa simpleksi on jana. Koska kärkipisteet ovat erivärisiä, värinvaihtoja on oltava pariton määrä.

Olkoon S trianguloitu kolmio, jolla on Spernerin väritys. Merkitään värejä numeroilla 1, 2 ja 3. Olkoon Q $(1, 1, 2)$ ja $(1, 2, 2)$ väritettyjen solujen lukumäärä ja R sateenkaarisolujen eli $(1, 2, 3)$ väritettyjen solujen lukumäärä. Olkoon X solujen niiden sivujen lukumäärä, joilla on väritys $(1, 2)$ ja jotka ovat kolmion S reunoilla. Olkoon Y niiden reunojen lukumäärä, jotka ovat kolmion S sisäpuolella ja joilla on väritys $(1, 2)$. Jokaisella tyyppin Q solulla on kaksi reunaa, joilla on väritys $(1, 2)$, ja tyyppin R solulla yksi. Täten jokainen sisäreuna lasketaan kahdesti, ja jokainen ulkoreuna vain kerran. Siis $2Q + R = X + 2Y$.

Tyyppin X reunat voivat sijaita vain kolmion S sillä reunalla, jonka kärkien väritys on $(1, 2)$. Kuten 1-ulotteisessa tapauksessa havaittiin, tällä reunalla esiintyy pariton määrä värinvaihtoja, eli solujen $(1, 2)$ reunoja on pariton määrä. Siten X on pariton, ja $R = X + 2(Y - Q)$.

Näin ollen myös R on pariton, ja siten vähintään 1.

Käsitellään seuraavaksi n -ulotteinen tapaus. Olkoon S n -ulotteinen trianguloitu simpleksi, jolla on Spernerin väritys käyttäen värejä $\{1, 2, \dots, n+1\}$. Olkoon R sateenkaarisolujen lukumäärä ja Q niiden solujen lukumäärä, joiden värityksessä esiintyvät värit $\{1, 2, \dots, n\}$. Näissä soluissa siis tasan yksi väri esiintyy kaksi kertaa. Tarkastellaan niiden $(n-1)$ -ulotteisten sivujen lukumäärää, jotka on väritetty väreillä $(1, 2, \dots, n)$. Merkitään kirjaimella X niiden sivujen lukumäärää, jotka sijaitsevat simpleksin S reunolla, ja kirjaimella Y niiden sivujen lukumäärää, jotka ovat simpleksin S sisäisiä. Jokaisella tyyppin Q solulla on kaksi sivua värityksellä $(1, 2, \dots, n)$ ja jokaisella tyyppin R solulla yksi. Simpleksin S sisäosien sivut esiintyvät kahdessa solussa, ja ulkoiset sivut yhdessä solussa. Siten saadaan yhtälö $2Q + R = X + 2Y$.

Ulkoreunalla olevat $(n-1)$ -ulotteiset sivut värityksellä $(1, 2, \dots, n)$ voivat esiintyä vain sillä reunalla, jonka kärkipisteiden väritys on $(1, 2, \dots, n)$. Induktio-oletuksen perusteella tällä reunalla esiintyy pariton määrä $(1, 2, \dots, n)$ väritettyjä $(n-1)$ -ulotteisia soluja, joten X ja R ovat parittomia. \square

1.2 Spernerin lemma monikulmioille

Alaluku perustuu lähteeseen [5].

Monikulmiota, jonka kärkipisteet ovat A_1, A_2, \dots, A_n , merkitään $p(A_1, A_2, \dots, A_n)$. Merkinnällä $[A_i/A_j]p(A_1, A_2, \dots, A_n)$ tarkoitetaan sitä, että värityksessä jokainen j korvataan värillä i . Merkintä $R(p(A_1, \dots, A_n))$ on niiden Sperner-väritettyjen solujen lukumäärä, joiden kaikki kärkipisteet ovat erivärisiä.

Määritelmä 4. Spernerin väritys monikulmioille. Olkoon $p(A_1, A_2, \dots, A_n)$ trianguloitu n -kulmio, jonka pisteillä on väritys. Väritystä kutsutaan Spernerin väritykseksi seuraavissa tapauksissa:

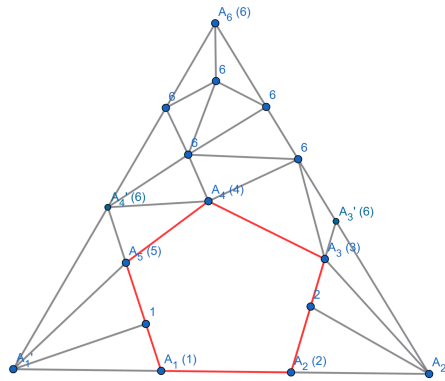
1. Jokainen kärkipiste A_1, A_2, \dots, A_n on erivärinen. Merkitään värejä $\{1, 2, \dots, n\}$.
2. Jokainen kärkipisteiden A_i, A_{i+1} määräämällä sivulla oleva solun kärkipiste voi saada värin joukosta $\{i, i+1\}$.
3. Monikulmion sisäpisteet voivat saada minkä tahansa värin joukosta $\{1, 2, \dots, n\}$.

Lemma 2. *Jokaiselle luonnolliselle luvulle i ja j on voimassa*

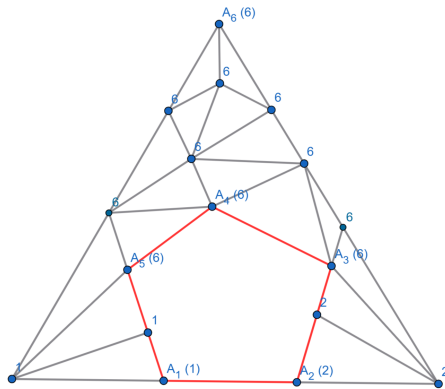
$$R([A_i/A_j]p(A_1, A_2, \dots, A_n)) \leq R(p(A_1, A_2, \dots, A_n)).$$

Todistus. Olkoot $1 \leq i, j \leq n$ ja $i \neq j$. Kolmiot monikulmion $p(A_1, A_2, \dots, A_n)$ triangulaatiossa voidaan jakaa kolmeen ryhmään:

- Kolmiot, joilla ei ole kärkipistettä värillä j .
- Kolmiot, joilla on yksi kärkipiste värillä j .
- Kolmiot, joilla on kaksi tai kolme kärkipistettä värillä j .



Kuva 2: Väritys 1.



Kuva 3: Väritys 2.

Kärkipisteiden värien vaihtaminen ensimmäisessä ja viimeisessä ryhmässä ei vaikuta sateenkaarisolujen määrään. Keskimmäisen ryhmän vaihdoksien myötä sateenkaarisolujen määrä voi joko pysyä samana tai vähentyä. \square

Lemma 3. *Jos A ja B ovat kaksi vierekkäistä kärkipistettä konveksissa monikulmiossa $p(A_1, A_2, \dots, A_n)$, on olemassa ainakin yksi sateenkaarisolun, jossa on mukana molempien pisteiden väri.*

Todistus. Oletetaan, ettei yhdessäkään sateenkaarisolussa esiinny samaan aikaan vierekkäisten pisteiden A_1 ja A_2 värejä. Konstruoidaan kolmio $t(A'_1, A'_2, A_{n+1})$, joka sisältää monikulmion $p(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ja pisteet A_1 ja A_2 sijaitsevat sivulla $A'_1 A'_2$.

Olkoon piste A'_3 suorien $l(A'_2 A_{n+1})$ ja $l(A_2 A_3)$ ja piste A'_n suorien $l(A'_1 A_{n+1})$ ja $l(A_1 A_n)$ leikkauspisteessä. Konstruoidaan kolmioille $t'(A'_1, A_1, A'_n)$ ja $t''(A_2, A'_2, A_3)$ triangulaatio siten, että kärkipisteistä A'_1 ja A'_2 vedetään janat sivuilla $A_1 A'_n$ ja $A_2 A'_3$ oleviin pisteisiin, kuten kuvassa 2. Kolmion $t(A'_1, A'_2, A_{n+1})$ muu osa on myös väritetty siten, että kaikki pisteet, lukuunottamatta monikulmion $p(A_1, A_2, \dots, A_n)$ reunaa, saavat värin $n + 1$. Väritetään kolmio $t(A'_1, A'_2, A_{n+1})$ uudelleen,

$$t(A'_1, A'_2, A_{n+1}) = [A_1/A'_1][A_2/A'_2][A_{n+1}/A_3] \dots [A_{n+1}/A_n]t(A'_1, A'_2, A_{n+1}).$$

Havainnollistus kuvassa 3. Muutoksen jälkeen kolmioissa $t'(A'_1, A_1, A'_n)$ ja $t''(A_2, A'_2, A_3)$ ei ole sateenkaarisoluja lemmän 2 perusteella. Monikulmiossa $p(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ei ollut kolmiota kulmilla 1, 2, joten kolmiossa $t(A'_1, A'_2, A_{n+1})$ ei ole sateenkaarisoluja, mikä on Spernerin lemmän perusteella ristiriita. \square

Lause 1. *Jokaisessa trianguloidussa Spernerin värityksen omaavassa n -kulmiossa, missä $n \geq 3$, on ainakin $n - 2$ sateenkaarisolua.*

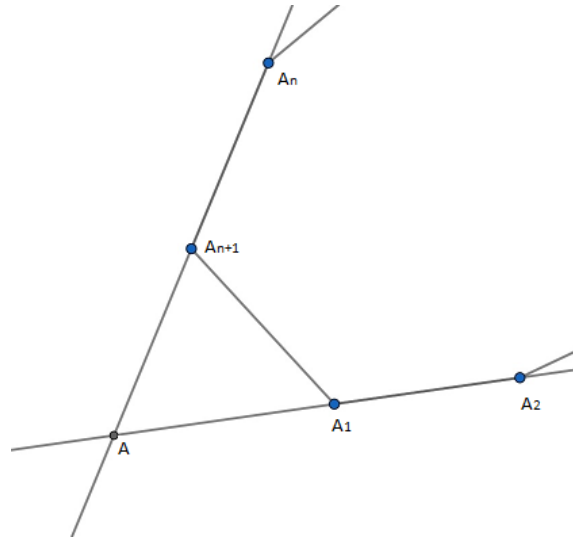
Todistus. Todistetaan induktiolla konvekseille monikulmioille. Ei-konveksien monikulmioiden tapaus seuraa, sillä jokainen ei-konvekssi monikulmio on topologisesti ekvivalentti jonkin konveksin monikulmion kanssa. Tapauksessa $n = 3$ on kyseessä Spernerin lemma. Oletetaan, että lause on voimassa arvolla n . Olkoon $p'(A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1})$ konvekssi $(n + 1)$ -kulmio. Lukuunottamatta tapausta, jossa monikulmio p on suunnikas, on olemassa kolme sivua $A_n A_{n+1}$, $A_{n+1} A_1$ ja $A_1 A_2$ siten, että suorilla $l(A_n, A_{n+1})$ ja $l(A_2, A_1)$ on leikkauspiste A . Pisteiden A konstruointia havainnollistetaan kuvassa 4 Tarkastellaan konveksia monikulmiota $p''(A, A_2, \dots, A_n)$. Monikulmiossa $p'(A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1})$ säilyy sisäinen triangulaatio ja Spernerin väritys. Pisteestä A saattaa kulkea janoja sivulla $A_{n+1} A_1$ kulkeviin pisteisiin, jos sellaisia on. Saadaan n -kulmio

$$p(A, A_2, \dots, A_n) = [A_1/A][A_1/A_{n+1}]p''(A, A_2, \dots, A_n).$$

Induktio-oletuksen nojalla $R(p(A_1, A_2, \dots, A_n)) \geq n - 2$.

Tapauksessa, jossa monikulmio $p(A_1, A_2, A_3, A_4)$ on suunnikas, pisteen A konstruointi ei ole mahdollista. Konstruoidaan tällöin pisteet B ja C , joilla B kuuluu pisteiden A_3 ja A_4 kautta kulkevalle suoralle ja C kuuluu pisteiden A_3 ja A_2 kautta kulkevalle suoralle siten, että piste A_1 kuuluu pisteiden B ja C väliselle janalle. Pisteiden konstruointi havainnollistetaan kuvassa 5 Kolmiosta $p''(B, C, A_3)$ saadaan

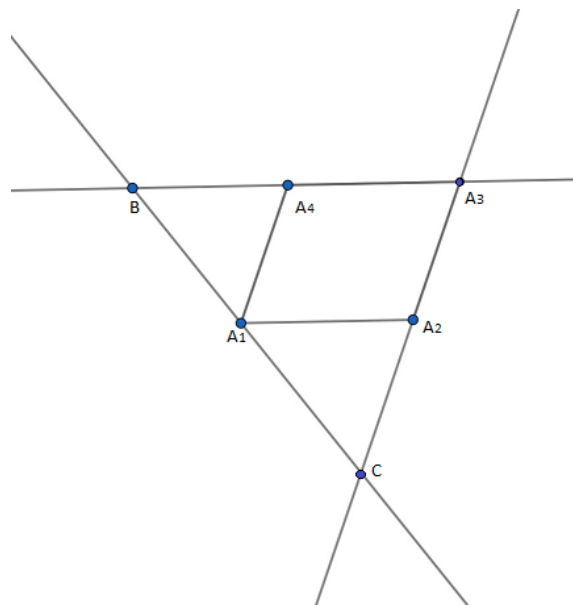
$$p(A_1, A_2, A_3) = [A_1/B][A_1/A_4][A_2/C]p''(B, C, A_3).$$



Kuva 4: Pisteen A konstruointi.

Spernerin lemmasta seuraa, että $R(p(A_1, A_2, A_3)) \geq 1$.

Lemman 3 perusteella värit 1 ja $n+1$ osallistuvat ainakin yhden sateenkaarisolun väriytykseen. Koska tämä kolmio ei ole sateenkaarisolun monikulmiossa $p(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ja tämä kolmio ei sisällä sateenkaarisoluja monikulmion $p'(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$ ulkopuolella, on sateenkaarisolujen lukumäärä monikulmiossa $p'(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$ aidosti suurempi kuin monikulmiossa $p(A_1, A_2, \dots, A_n)$. \square



Kuva 5: Pisteiden B ja C konstruointi.

2 Brouwerin kiintopistelause

Luku perustuu Schäferin kirjassa [4] esitettyyn todistukseen.

Määritelmä 5. Suljettu joukko. Joukon S sanotaan olevan suljettu, jos jokaisella sen komplementtiin S^c kuuluvalla pisteellä x on ympäristö, joka ei leikkaa joukkoa S .

Määritelmä 6. Rajoitettu joukko. Joukko S on rajoitettu, jos se sisältyy johonkin palloon, jonka säde on äärellinen.

Lemma 4. *Olkoon S simpleksi ja pisteet $x, y \in S$ annettuna barysentrisissä koordinaateissa $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Tällöin jos $x \geq y$, eli $x_i \geq y_i$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$, niin $x = y$*

Todistus. Oletetaan, että $x \neq y$ ja $x \geq y$. Tällöin on olemassa jokin i , jolla $x_i > y_i$. Koska

$$1 = \sum_{i=1}^n x_i > \sum_{i=1}^n y_i = 1,$$

päädytään ristiriitaan. □

Lause 2. *(Brouwerin kiintopistelause simplekseille) Olkoon $S \subseteq \mathbb{R}^n$ n -ulotteinen simpleksi ja $f : S \mapsto S$ jatkuva. Tällöin on olemassa piste $x^* \in S$, jolla $f(x^*) = x^*$.*

Todistus. Jokaiselle pisteelle $x \in S$ pätee $f(x) \in S$. Siten

$$\sum_{i=0}^n x_i = 1 = \sum_{i=0}^n f_i(x).$$

Tässä $f_i(x)$ tarkoittaa alkion $f(x)$ i :nnettä koordinaattia. Oletetaan, että $f(x) \neq x$

kaikilla $x \in S$. Jokaiselle joukon S pisteelle on oltava jokin $x_i \neq f_i(x)$, ja jokin j , jolla $x_j > f_j(x)$. Määritellään jokaiselle pisteelle x väritys

$$m(x) = \min\{j : 0 \leq j \leq n, x_j > f_j(x)\} \quad (1)$$

Konstruoidaan jono simpleksin S triangulaatioita S_1, S_2, S_3, \dots . Jokainen S_k on edeltävän jaon S_{k-1} triangulaatio, ja kun $k \rightarrow \infty$, niin jaon S_k solujen piirin pituus lähestyy nollaa.

Jos x kuuluu simpleksin S johonkin reunaan S_F , sen ne kertoimet x_i barysentrisessä esityksessä $x = x_0u_0 + \dots + x_nu_n$, jotka kuuluvat reunaan kuulumattomiin kärkipisteisiin u_i , ovat nolla.

Jos $u_p, u_q, \dots, u_s \in S_F$ ja loput pisteet $u_i \notin S_F$, niin $x = x_pu_p + x_qu_q + \dots + x_su_s$. Koska $x_j > f_j(x) \geq 0$, niin $m(x) \in \{p, q, \dots, s\}$ kaikille $x \in S_F$. Kyseessä on siis Spernerin väritys.

Spernerin lemmän perusteella simpleksillä S on jokin solu, jonka kärkipisteet ovat $v_0(k), v_1(k), \dots, v_n(k)$ ja joille on voimassa $m(v_i(k)) = i$ kaikilla $i \in \{0, \dots, n\}$. Määritelmän 1 perusteella on siis voimassa $x_i > f_i(x)$, kun $x = v_i(k)$. Tämä pätee kaikilla jaoilla S_k , kun $k > 0$.

Koska S on rajoitettu ja suljettu, on olemassa osajono k_l , jolla $\lim_{l \rightarrow \infty} v_0(k_l) = v^*$, $v^* \in S$. Kun k on suuri, kaikki kärkipisteet v_i ovat lähellä toisiaan, eli $\lim_{l \rightarrow \infty} v_i(k_l) = v^*$. Kuvauksen f jatkuvuuden perusteella $\lim_{l \rightarrow \infty} f(v_i(k_l)) = f(v^*)$ kaikille $i \in \{0, \dots, n\}$. Tästä saadaan

$$\begin{aligned} x_0^* &\geq f_0(x^*) \\ x_1^* &\geq f_1(x^*) \\ &\vdots \\ x_n^* &\geq f_n(x^*). \end{aligned}$$

Lemman 4 perusteella $x^* = f(x^*)$, mikä on ristiriita. □

Viitteet

- [1] Sperner, Emanuel: Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. Abh. Math. Sem. Hamburg VI, s. 265–272. joulukuu 1928.
- [2] Ron Aharoni, Penny Haxell: Hall's theorem for hypergraphs. Journal of Graph theory, volyymi 35, numero 2. s. 83-88. syyskuu 2000.
- [3] Jesus A. De Loera, Elisha Peterson, Francis Edward Su: A Polytopal Generalization of Sperner's Lemma. Journal of Combinatorial Theory, Series A volyymi 100, numero 1. s. 1-26. lokakuu 2002.
- [4] Schäfer, U. (2014). From Sperner's Lemma to Differential Equations in Banach Spaces.: An Introduction to Fixed Point Theorems and their Applications. KIT Scientific Publishing. 2014.

- [5] K. T. Atanassov: On Sperner's lemma. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 32. s. 71-74. 1996.