



Uniformisen avaruuden Hausdorffin täydellistymä

Henri Tuominen

Pro gradu -tutkielma  
Toukokuu 2007

UNIVERSITY OF TURKU  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FIN-20014 TURKU  
FINLAND

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Esitietoja uniformista avaruuksista</b>	<b>1</b>
2.1	Yleistä . . . . .	1
2.2	Relaatioiden ominaisuuksia . . . . .	2
2.3	Uniformiset avaruudet . . . . .	3
2.4	Uniformiteetin indusoima topologia . . . . .	4
2.5	Tasaisesti jatkuvat kuvaukset . . . . .	5
2.6	Uniformiteettien vertailu . . . . .	5
2.7	Indusoidut uniformiteetit . . . . .	6
2.8	Uniformisen avaruuden aliavaruudet . . . . .	7
2.9	Uniformisten avaruuksien tuloavaruus . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Uniformisen avaruuden pseudometristyvyys</b>	<b>8</b>
3.1	Yleistä . . . . .	8
3.2	Pseudometrisen avaruuden tekijäavaruus . . . . .	8
3.3	Pseudometriikan virittämä uniformiteetti . . . . .	9
3.4	Pseudometristyvyys . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Konvergenssi topologisessa avaruudessa</b>	<b>14</b>
4.1	Yleistä . . . . .	14
4.2	Filtterit . . . . .	15
4.3	Filttereiden järjestys . . . . .	15
4.4	Filtterin generointi . . . . .	17
4.5	Alifiltteri . . . . .	20
4.6	Tulofiltteri . . . . .	20
4.7	Alkeisfiltteri . . . . .	21
4.8	Filtterin raja-arvo . . . . .	21
4.9	Verkko . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Cauchyn filtterit ja verkot</b>	<b>25</b>
5.1	Yleistä . . . . .	25
5.2	Lähistön suhteen pienet joukot . . . . .	25
5.3	Määritelmä . . . . .	26
5.4	Minimaaliset Cauchyn filtterit . . . . .	27
5.5	Cauchyn verkot . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Täydellinen uniforminen avaruus</b>	<b>29</b>
6.1	Yleistä . . . . .	29
6.2	Täydellisyyden määritelmä . . . . .	30

6.3	Täydellisten uniformisten avaruuksien aliavaruudet . . . . .	34
6.4	Täydellisten uniformisten avaruuksien tuloavaruudet . . . . .	34
6.5	Tasaisesti jatkuvan kuvauksen laajennus . . . . .	35
6.6	Surjektion koindusoima uniformiteetti . . . . .	37
6.7	Uniformisen avaruuden täydellistymä . . . . .	40
6.8	Uniformiseen avaruuteen liitetty Hausdorffin uniforminen avaruus	50
6.9	Indusoitujen uniformiteettien täydellistymät . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Uniformisoituvuus ja kompaktius</b>	<b>52</b>
7.1	Yleistä . . . . .	52
7.2	Uniformisoituvuus . . . . .	52
7.3	Uniformisen avaruuden kompaktius . . . . .	55
7.4	Uniformisen avaruuden kompaktit osajoukot . . . . .	57
7.5	Yhdistetyt joukot kompaktissa avaruudessa . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Topologisten vektoriavaruuksien uniformiteetti</b>	<b>62</b>
8.1	Yleistä . . . . .	62
8.2	Topologiset vektoriavaruudet . . . . .	62
8.3	Seminormi . . . . .	63
8.4	Absorboivat, balansoidut ja konveksit joukot . . . . .	64
8.5	Lokaalisti konvekssi topologinen vektoriavaruus . . . . .	67
	<b>Kirjallisuutta</b>	<b>71</b>

# 1 Johdanto

Tutkielman aiheena on uniformisen avaruuden Hausdorffin täydellistymä. Niin täydellisyyden luonnehtimiseen käsitteenä kuin täydellistymän konstruktion voidaan käyttää hyvin monia näennäisesti erilaisia menetelmiä. Lähteenä oleessa Bourbakin kirjassa yleistetään Cantorin reaalilukujen konstruktio. Konvergenssi ja siten myös täydellisyys käsitellään filttareiden avulla. Duaaliavaruuksena on minimaalisten Cauchy filttareiden joukko. Toinen erilainen tapa esitetään Kelleyn kirjassa. Uniforminen avaruus osoittautuu aina tietyn pseudometriikkaperheen indusoimaksi sekä edelleen isomorfiseksi pseudometristen avaruuksien tuloalijavaruuden kanssa. Näin konstruktio voidaan palauttaa pseudometristen avaruuksien täydellistymään sekä täydellisyyden säilymiseen tuloissa ja inklusioissa. Myös täydellisyyden karakterisointi perustuu verkkoihin filttareiden sijasta.

Käytetty lähestymistapa perustuu pääsääntöisesti Bourbakin tekniikkaan. Teorian kehittäminen tapahtuu filttareiden avulla vaikka yhteys verkkoihin todistetaan. Kuitenkin käsitellään uniformisten avaruuksien virittämisen pseudometriikkojen avulla ja virittäjäsiirryminen täydellistymään. Erityisesti näin saavutetaan sekä Kelleyn tulokset koskien niiden avaruuksien täydellistymää, jotka eivät täytä Hausdorffin ehtoa, kuin myös Bourbakin tulos koskien kyseisten avaruuksien luhistumista täydellisiksi Hausdorffin avaruuksiksi.

Hausdorffin täydellistymän tärkeänä sovelluksena käsitellään Hausdorffin avaruuden kompaktisuuden karakterisointia uniformisten ominaisuuksien prekompaktisuuden ja täydellisyyden avulla. Muita käsiteltäviä aiheita ovat esimerkiksi tasaisesti jatkuvien kuvausten laajennukset ja kompaktien sekä lokaalisti kompaktien Hausdorffin avaruuksien komponentit ja kvasikomponentit. Lopuksi käsitellään vielä lokaalisti konveksien topologisten vektoriavaruuksien uniformisointuvuutta.

Esitietoina oletetaan topologian ja joukko-opin alkeet. Käytetyistä kirjallisuudessa osittain toisistaan poiketen määrittelyistä käsitteistä mainittakoon, että ympäristön ei vaadita olevan avoin joukko eikä kompaktiudelta vaadita Hausdorffin ehtoa.

## 2 Esitietoja uniformista avaruuksista

### 2.1 Yleistä

Esitetään joitakin tarvittavia uniformisiin avaruuksiin liittyviä määritelmiä ja perustuloksia kolmannesta aineesta. Helpohkot todistukset sivuutetaan.

## 2.2 Relaatioiden ominaisuuksia

Joukon  $X$  kaksipaikkaiset relaatiot voidaan samastaa karteesisen tulon  $X \times X$  osajoukkoihin  $\{(x, y) \mid xRy\}$ . Käsitellään aluksi joitakin näiden joukkojen ominaisuuksia.

**Määritelmä 2.1.** Olkoon  $X$  joukko ja  $V$  karteesisen tulon  $X \times X$  osajoukko. Määritellään joukko:  $\bar{V}^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in V\}$ .

**Määritelmä 2.2.** Olkoon  $X$  joukko. Karteesisen tulon  $X \times X$  osajoukko  $V$  on *symmetrinen*, jos  $V = \bar{V}^{-1}$ .

**Määritelmä 2.3.** Olkoon  $X$  joukko. Olkoot edelleen  $V$  ja  $W$  karteesisen tulon  $X \times X$  osajoukkoja. Määritellään *kompositio* seuraavasti.

$$V \circ W = \{(x, y) \in X \times X \mid (\exists z \in X)((z, y) \in V \wedge (x, z) \in W)\}.$$

Edelleen induktiivisesti käytetään merkintää  $\bar{V}^n = V \circ \bar{V}^{n-1}$ , kun  $n > 1$ . Voidaan myös merkitä  $\bar{V}^1 = V$ , jolloin  $\bar{V}^2 = V \circ \bar{V}^1$ .

**Lemma 2.4.** *Kompositio on assosiatiivinen, eli  $Y \circ (Z \circ W) = (Y \circ Z) \circ W$  aina, kun  $Y, Z, W \in P(X \times X)$ . Voidaan siis käyttää merkintää  $Y \circ Z \circ W$ .*

**Lemma 2.5.** *Olkoot  $V, V', W, W' \in P(X \times X)$ . Jos  $V \subset W$  sekä  $V' \subset W'$ , niin  $V \circ V' \subset W \circ W'$ .*

**Määritelmä 2.6.** Olkoon  $X$  joukko. *Diagonaali*  $\Delta_X$  on karteesisen tulon  $X \times X$  osajoukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$ .

**Lemma 2.7.** *On voimassa  $V \circ \Delta_X = V$  sekä  $\Delta_X \circ V = V$  kaikille joukon  $X \times X$  osajoukoille  $V$ .*

**Lemma 2.8.** *Jos  $\bar{V}^{-1} \subset W$ , niin  $V \subset \bar{W}^{-1}$ .*

**Määritelmä 2.9.** Olkoon  $x \in X$  sekä  $V$  joukon  $X \times X$  osajoukko. Määritellään *sektio* joukon  $X$  osajoukkona  $V(x)$  seuraavasti:

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\}.$$

Edelleen yleistetään määritelmä joukon  $X$  osajoukoille  $A$ :

$$V(A) = \{y \in X \mid (\exists x \in A)((x, y) \in V)\} = \cup_{x \in A} V(x).$$

**Lemma 2.10.** *Olkoon  $A$  joukon  $X$  osajoukko sekä  $V$  karteesisen tulon  $X \times X$  symmetrinen osajoukko. On voimassa  $V \circ (A \times A) \circ V = V(A) \times V(A)$ .*

## 2.3 Uniformiset avaruudet

Esitetään uniformiteetin sekä uniformiteetin kannan määritelmät.

**Määritelmä 2.11.** Olkoon  $X$  joukko sekä  $U \in P(P(X \times X))$ . Parin  $(X, U)$  muodostama rakenne on *uniforminen avaruus*,  $U$  on joukon  $X$  *uniformiteetti*, ja joukon  $U$  alkioita kutsutaan *lähistöiksi*, jos  $U$  täyttää seuraavat aksioomat.

**f 2.** Jos  $A, B \in U$ , niin  $A \cap B \in U$ .

**f 3.** Jos  $A \in U$  ja  $A \subset B$ , niin  $B \in U$ .

**u 1.** Jos  $V \in U$ , niin  $\Delta_X \subset V$ .

**u 2.** Jos  $V \in U$ , niin  $V^{-1} \in U$ .

**u 3.** Jos  $V \in U$ , niin on olemassa sellainen joukko  $W \in U$ , joka täyttää ehdon  $W \circ W \subset V$ .

**Huomautus 2.12.** Jos sekaannuksen vaaraa ei ole, niin uniformiseen avaruuteen voidaan viitata pelkästään joukolla  $X$ .

**Määritelmä 2.13.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Lähistöjen joukon  $U$  osajoukko  $B$  on uniformisen avaruuden  $X$  *kanta*, jos jokaista lähistöä  $W$  kohti on olemassa joukkoon  $B$  kuuluva joukko  $V$ , jolle  $V \subset W$ .

**Määritelmä 2.14.** Joukko  $A$  on uniformisen avaruuden  $(X, U)$  *esikanta*, jos äärelliset leikkaukset joukon  $A$  alkioista muodostavat avaruuden  $(X, U)$  kannan.

**Lause 2.15.** Olkoon  $B$  jokin uniformisen avaruuden kanta. Joukko

$$B(n) = \{\overset{n}{V} \mid V \in B\}$$

on saman avaruuden kanta aina, kun  $n \in \mathbb{N}$  ja  $n > 0$ .

**Lause 2.16.** Joukon  $P(X \times X)$  osajoukko  $B$  on jonkin uniformisen avaruuden  $(X, U)$  kanta, jos ja vain jos seuraavat ehdot ovat voimassa.

(1) Jos  $V, W \in B$ , niin on olemassa sellainen joukko  $A \in B$ , joka täyttää ehdon  $A \subset V \cap W$ .

(2) Jokaiselle joukolle  $A \in B$  pätee  $\Delta_X \subset A$ .

(3) Jos  $V \in B$ , niin on olemassa sellainen  $V' \in B$ , että  $V' \subset V^{-1}$ .

(4) Jos  $V \in B$ , niin on olemassa sellainen  $W \in B$ , jolle  $\overset{2}{W} \subset V$ .

Lisäksi  $(X, U)$  on yksikäsitteinen, eli kanta määrittää uniformiteetin yksiselitteisesti.

**Lause 2.17.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Kaikkien symmetristen lähistöjen joukko  $S$  on avaruuden  $(X, U)$  kanta.*

**Määritelmä 2.18.** Uniformiset avaruudet  $(X, U)$  ja  $(X', U')$  ovat isomorfiset, jos on olemassa sellainen bijektiivinen kuvaus  $f : X \rightarrow X'$ , että  $(f \times f)(V) \in U'$  aina, kun  $V \in U$ , sekä kääntäen  $(f \times f)^{-1}(V') \in U$  aina, kun  $V' \in U'$ .

## 2.4 Uniformiteetin indusoima topologia

Uniformiteetti osoittautuu seuraavien tarkastelujen mukaisesti myös topologiseksi käsitteeksi.

**Lause 2.19.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $x \in X$ . Määritellään joukot  $B(x) = \{V(x) \mid V \in U\}$ . On olemassa yksikäsitteinen joukon  $X$  topologia, jossa  $B(x)$  on pisteen  $x$  ympäristöjen joukko.*

**Määritelmä 2.20.** Lauseen 2.19 nojalla olemassa olevaa topologiaa kutsutaan *uniformiteetin indusoiduksi topologiaksi*, ja käytetään merkintää  $\tau_U$ .

**Huomautus 2.21.** Vastaisuudessa, jos  $(X, U)$  on uniforminen avaruus, viitataan topologisilla käsitteillä topologiaan  $\tau_U$  ja sen indusoimaan karteesisen tulon  $X \times X$  tulotopologiaan, ellei toisin mainita.

**Lause 2.22.** *Jos uniformisen avaruuden  $(X, U)$  lähistö  $V$  on avoin joukon  $X \times X$  tulotopologiassa, niin  $V(x)$  on avoin topologiassa  $\tau_U$ . Analogisesti, jos  $V$  on suljettu tulotopologiassa, niin  $V(x)$  on suljettu.*

**Lause 2.23.** *Jos  $B$  on uniformisen avaruuden  $(X, U)$  kanta, niin joukko  $\{V(x) \mid V \in B\}$  on pisteen  $x$  ympäristökanta topologiassa  $\tau_U$ .*

**Lause 2.24.** *Jos  $(X, U)$  ja  $(X', U')$  ovat kaksi isomorfista uniformista avaruutta, niin isomorfismi  $f : X \rightarrow X'$  on myös homeomorfismi indusoitujen topologioiden suhteen.*

**Huomautus 2.25.** Eri uniformiteetit voivat indusoida saman topologian.

**Lause 2.26.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Jos  $V$  on symmetrinen lähistö ja  $M$  joukon  $X \times X$  osajoukko, niin  $V \circ M \circ V$  on joukon  $M$  ympäristö joukon  $X \times X$  tulotopologiassa. Joukon  $M$  sulkeuma tulotopologiassa on*

$$\overline{M} = \bigcap_{V \in S} V \circ M \circ V, \quad (1)$$

missä  $S$  on symmetristen lähistöjen joukko.

**Lause 2.27.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $A$  joukon  $X$  osajoukko. Edelleen olkoon  $V$  symmetrinen lähistö. Joukko  $V(A)$  on joukon  $A$  ympäristö indusoidussa topologiassa  $\tau_U$ , sekä*

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in S} V(A) = \bigcap_{V \in U} V(A), \quad (2)$$

missä  $S$  on kaikkien symmetristen lähistöjen joukko.

**Lause 2.28.** Joukot  $\{\bar{V} \mid V \in U\}$ ,  $\{intV \mid V \in U\}$ ,  $\{V \mid V \in U, V \text{ on avoin}\}$ ,  $\{V \mid V \in U, V \text{ on suljettu}\}$ ,  $\{V \mid V \in U, V \text{ on avoin ja symmetrinen}\}$  sekä  $\{V \mid V \in U, V \text{ on suljettu ja symmetrinen}\}$  ovat uniformisen avaruuden  $(X, U)$  kantoja.

**Lemma 2.29.** Jos  $V$  on tulotopologiassa suljettu lähistö, niin  $V(x)$  on pisteen  $x$  suljettu ympäristö.

**Lause 2.30.** Jokainen uniformiteetin indusoima topologinen avaruus  $(X, \tau_U)$  on  $T_3$ -avaruus. Jokainen Hausdorffin  $(X, \tau_U)$  on säännöllinen.

**Lause 2.31.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Topologinen avaruus  $(X, \tau_U)$  on Hausdorff, jos ja vain jos  $\bigcap_{V \in U} V = \Delta_X$ .

## 2.5 Tasaisesti jatkuvat kuvaukset

Uniformisten avaruuksien yksi tärkeä ominaisuus on se, että metrinen avaruuksien tasaisen jatkuvuuden käsite voidaan yleistää.

**Määritelmä 2.32.** Kuvauksen  $f : X \rightarrow X'$ , missä  $X$  ja  $X'$  ovat uniformisia avaruuksia, sanotaan olevan *tasaisesti jatkuva*, jos jokaista uniformisen avaruuden  $(X', U')$  lähistöä  $V'$  kohti on olemassa sellainen uniformisen avaruuden  $(X, U)$  lähistö  $V$ , että aina kun  $(x, y) \in U$ , niin  $(f(x), f(y)) \in V'$ .

**Huomautus 2.33.** Jos  $g = f \times f$ , niin  $f$  on tasaisesti jatkuva, jos ja vain jos  $g^{-1}(V') \in U$  aina, kun  $V' \in U'$ .

**Lause 2.34.** Tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva indusoidun topologian suhteen.

**Huomautus 2.35.** Käänteinen väite ei pidä paikkaansa. Indusoidun topologian suhteen jatkuva kuvaus ei ole välttämättä tasaisesti jatkuva.

**Lause 2.36.** Jos  $f$  ja  $g$  ovat tasaisesti jatkuvia kuvauksia, niin yhdistetty kuvaus  $g \circ f$  on tasaisesti jatkuva.

**Lause 2.37.** Olkoot  $X$  ja  $X'$  uniformisia avaruuksia. Bijektiivinen kuvaus  $f : X \rightarrow X'$  on isomorfismi, jos ja vain jos  $f$  sekä  $f^{-1}$  ovat tasaisesti jatkuvia.

## 2.6 Uniformiteettien vertailu

Tutkitaan lyhyesti inklusion antamaa tietyn joukon uniformiteettien järjestystä.

**Määritelmä 2.38.** Olkoot  $(X, U_1)$  ja  $(X, U_2)$  uniformisia avaruuksia. Uniformiteetti  $U_1$  on *hienompi* kuin  $U_2$  ja vastaavasti  $U_2$  *karkeampi* kuin  $U_1$ , jos identtinen kuvaus  $id : X \rightarrow X$  on tasaisesti jatkuva silloin, kun lähtöjoukko on varustettu uniformiteetilla  $U_1$  ja maalijoukko uniformiteetilla  $U_2$ . Jos  $U_1 \neq U_2$ , niin kyseessä on *aito hiennommuus* ja *aito karkeammuus*.

**Huomautus 2.39.** Kyseessä on tietyn kiinteän joukon uniformiteettien järjestyks. Koska identtinen kuvaus uniformiselta avaruudelta itselleen on selvästi tasaisesti jatkuva, on relaatio refleksiivinen. Transitivisuus seuraa lauseesta 2.36. Antisymmetrisyys seuraa puolestaan lauseesta 2.37.

**Lause 2.40.** Uniformiteetti  $U_1$  on *hienompi* kuin uniformiteetti  $U_2$ , jos ja vain jos aina, kun  $V \in U_2$ , niin on voimassa myös  $V \in U_1$ . Toisin sanoen  $U_2 \subset U_1$ .

**Lause 2.41.** Olkoon  $\tau_{U_1}$  uniformiteetin  $(X, U_1)$  indusoima topologia ja vastaavasti  $\tau_{U_2}$  uniformiteetin  $(X, U_2)$  indusoima topologia. Jos  $U_1$  on *hienompi* kuin  $U_2$ , niin  $\tau_{U_1}$  on *hienompi* kuin  $\tau_{U_2}$ .

## 2.7 Indusoidut uniformiteetit

Kuvaukset indusoivat uniformiteetin vastaavalla tavalla kuin topologiainkin.

**Lause 2.42.** Olkoon  $X$  joukko. Olkoon edelleen  $(Y_i, U_i)_{i \in I}$  perhe uniformisia avaruuksia yli joukon  $I$ . Olkoon  $f_i : X \rightarrow Y_i$  kuvaus aina, kun  $i \in I$ . Käytetään edelleen merkintää  $g_i = f_i \times f_i$  kaikilla  $i \in I$ . Olkoon  $A$  kaikkien muotoa  $g_i^{-1}(V_i)$ , missä  $V_i \in U_i$ , olevien joukkojen joukko. Tällöin  $A$  on yksikäsitteisen uniformisen avaruuden  $(X, U)$  esikanta. Edelleen jokainen uniformiteetti, jonka suhteen jokainen kuvaus  $f_i$  on tasaisesti jatkuva on *hienompi* kuin  $(X, U)$ . Olkoon edelleen kuvaus  $h : Z \rightarrow X$ , missä  $Z$  on uniforminen avaruus. Kuvaus  $h$  on tasaisesti jatkuva, jos ja vain jos jokainen kuvaus  $f_i \circ h$  on tasaisesti jatkuva kuvaus uniformiselta avaruudelta  $Z$  uniformiseen avaruuteen  $Y_i$ .

**Määritelmä 2.43.** Lauseen 2.42 nojalla saatu joukon  $X$  uniformiteetti on kuvausten  $f_i$  *indusoima uniformiteetti*.

**Lause 2.44.** Indusoidun uniformiteetin indusoima topologia on myös *karkein* topologia, jonka suhteen kaikki kuvaukset  $f_i$  ovat jatkuvia eli kuvausten  $f_i$  *indusoima topologia*.

**Lause 2.45.** Olkoon  $X$  joukko. Edelleen olkoon  $(Z_i)_{i \in I}$  perhe uniformisia avaruuksia yli joukon  $I$ . Olkoon  $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$  joukon  $I$  ositus. Olkoon edelleen  $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$  perhe joukkoja yli joukon  $L$ . Olkoon lisäksi  $h_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$  kuvaus aina, kun  $\lambda \in L$ . Olkoon edelleen  $g_{\iota, \lambda} : Y_\lambda \rightarrow Z_\iota$  kuvaus aina, kun  $\iota \in I$  sekä  $\lambda \in L$ . Käytetään yhdistetyille kuvauksille merkintää  $f_\iota = g_{\iota, \lambda} \circ h_\lambda$ . Olkoon joukossa  $Y_\lambda$  kuvausten

$g_{\iota, \lambda}$  indusoima uniformiteetti aina, kun  $\iota \in J_\lambda$  sekä  $\lambda \in L$ . Tällöin kuvaukset  $(f_\iota)_{\iota \in I}$  ja  $(h_\lambda)_{\lambda \in L}$  indusoivat saman uniformiteetin joukkoon  $X$ .

## 2.8 Uniformisen avaruuden aliavaruudet

Indusoinnin sovelluksena voidaan tutkia uniformisen avaruuden aliavaruuksia.

**Määritelmä 2.46.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus ja  $A$  joukon  $X$  osajoukko. Inklusiokuvaus  $i : A \rightarrow X$ , jolle  $i(x) = x$ , indusoi joukkoon  $A$  uniformiteetin lauseen 2.42 nojalla. Kyseessä on *relatiiviuniformiteetti*, ja  $(A, U_i)$  on uniformisen avaruuden  $(X, U)$  *uniforminen aliavaruus*. Merkitään aliavaruuden lähistöjen joukkoa  $U_{X|A}$ :lla.

**Lause 2.47.** Uniformisen avaruuden  $(X, U)$  aliavaruuden  $(A, U_{X|A})$  indusoima joukon  $A$  topologia  $\tau_{U_{X|A}}$  on sama kuin joukon  $A$  relatiivitopologia uniformiteetin  $U$  induoiman joukon  $X$  topologian  $\tau_U$  suhteen.

**Lause 2.48.** Jos  $(A, U_{X|A})$  on uniformisen avaruuden  $(X, U)$  aliavaruus ja  $f : X \rightarrow X'$  tasaisesti jatkuva kuvaus uniformiseen avaruuteen  $(X', U')$ , niin rajoittuma  $f|_A$  on tasaisesti jatkuva relatiiviuniformiteetin  $U_{X|A}$  suhteen. Lisäksi, jos uniformisen avaruuden  $(X', U')$  aliavaruus  $A'$  toteuttaa ehdon  $f(X) \subset A'$ , niin myös tällöin  $f$  on tasaisesti jatkuva relatiiviuniformiteetin  $U_{X'|A'}$  suhteen.

**Lause 2.49.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $A \subset B \subset X$ . Aliavaruus  $A$  on identtinen sekä aliavaruuden  $B$  että avaruuden  $X$  aliavaruutena.

**Lause 2.50.** Olkoon  $A$  tiheä uniformisen avaruuden  $X$  osajoukko. Olkoon  $B = \{\bar{V} \mid V \in U_{X|A}\}$ . Joukko  $B$  on uniformisen avaruuden  $(X, U)$  kanta.

## 2.9 Uniformisten avaruuksien tuloavaruus

Toinen indusoinnin tärkeä sovellus on uniformisten avaruuksien tulo.

**Määritelmä 2.51.** Olkoon  $[(X, U)_\iota]_{\iota \in I}$  perhe uniformisia avaruuksia. Olkoon edelleen  $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$  karteesin tulo. Projektoiden  $pr_\iota : X \rightarrow X_\iota$  perhe indusoi lauseen 2.42 nojalla joukkoon  $X$  uniformiteetin  $U$ , jolloin  $(X, U)$  on *uniformisten avaruuksien tuloavaruus*. Perheen  $[(X, U)_\iota]_{\iota \in I}$  jäsenet ovat tuloavaruuden *tekijöitä*.

**Lause 2.52.** Uniformisten avaruuksien tuloavaruuden indusoima topologia on sama kuin tekijöiden induoimien topologioiden tulotopologia.

**Lause 2.53.** Olkoon  $f = (f_\iota)$  kuvaus joltakin uniformiselta avaruudelta  $Y$  uniformisten avaruuksien tuloavaruuteen  $X$ . Kuvaus  $f$  on tasaisesti jatkuva, jos ja vain jos jokainen  $f_\iota$  on tasaisesti jatkuva.

**Lause 2.54.** *Olkoon  $(X_\iota)_{\iota \in I}$  ja  $(Y_\iota)_{\iota \in I}$  uniformisten avaruuksien perheitä yli saman indeksijoukon  $I$ . Olkoon lisäksi  $f_\iota : X_\iota \rightarrow Y_\iota$  kuvaus aina, kun  $\iota \in I$ . Jos jokainen  $f_\iota$  on tasaisesti jatkuva, niin myös tulokuvaus  $f : (x_\iota) \rightarrow (f_\iota(x_\iota))$  on tasaisesti jatkuva. Kääntäen, jos  $f$  on tasaisesti jatkuva ja joukot  $X_\iota$  ovat epätyhjiä, niin myös jokainen  $f_\iota$  on tasaisesti jatkuva.*

**Lause 2.55.** *Olkoon  $X$  joukko ja  $(Y_\iota)_{\iota \in I}$  perhe uniformisia avaruuksia. Olkoon edelleen jokainen  $f_\iota : X \rightarrow Y_\iota$  kuvaus. Olkoon  $f : X \rightarrow Y$  sellainen kuvaus, jolle  $f(x) = (f_\iota(x))$ . Olkoon  $U_X$  kuvausten  $f_\iota$  indusoima uniformiteetti. Tällöin  $U_X$  on sama kuin kuvauksen  $f$  indusoima uniformiteetti.*

**Lause 2.56.** *Olkoon  $(Y_\iota)_{\iota \in I}$  perhe uniformisia avaruuksia, sekä  $A_\iota$  uniformisen avaruuden  $X_\iota$  aliavaruus aina, kun  $\iota \in I$ . Uniformisten avaruuksien tulon  $Y = \prod_{\iota \in I} Y_\iota$  karteesiseen joukkotuloon  $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$  indusoima relatiiviuniformiteetti on sama kuin aliavaruuksien  $(A_\iota)$  tulona saatu uniformiteetti.*

### 3 Uniformisen avaruuden pseudometristyvyys

#### 3.1 Yleistä

Kappaleen tavoitteena on käsitellä lyhyesti Kelley'n General Topologyn mukainen uniformisen avaruuden virittäminen pseudometriikoilla.

#### 3.2 Pseudometrisen avaruuden tekijäavaruus

Ensiksi tarkastellaan pohjustuksena lyhyesti yleistä pseudometrisen avaruuden luhistamista metriseksi avaruudeksi.

**Lause 3.1.** *Olkoon  $(X, d')$  pseudometrisen avaruus. Muodostetaan ekvivalenssirelaatio  $R$  seuraavasti:  $xRy$ , jos ja vain jos  $d'(x, y) = 0$ . Käytetään merkintää  $\tilde{x} = \{y \in X \mid xRy\}$ . Määritellään edelleen kuvaus  $d : X/R \times X/R \rightarrow [0, \infty)$  asettamalla  $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d'(x, y)$ . Tällöin  $(X/R, d)$  on metrisen avaruus. Edelleen jokaisella pseudometrisellä avaruudella on tiheä aliavaruus, joka on metrisen avaruus.*

*Todistus.* Todetaan ensin, että  $R$  on todella ekvivalenssirelaatio. Refleksiivisyys ja symmetrisyys seuraavat välittömästi pseudometriikan aksioomista. Olkoon  $xRy$  sekä  $yRz$ . Tällöin  $d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z) = 0$ , ja relaatio on myös transitiivinen. Todetaan sitten, että kuvaus  $d$  on hyvin määritelty. Olkoon  $d'(x, x') = 0$  sekä  $d'(y, y') = 0$ . Tällöin

$$d'(x, y) \leq d'(x, x') + d'(x', y') + d'(y', y) = d'(x', y').$$

Vastaavasti saadaan käänteinen tulos  $d'(x', y') \leq d'(x, y)$ . Tällöin on oltava voimassa  $d(x, y) = d(x', y')$ , ja kuvaus ei riipu ekvivalenssiluokkien edustajiston valinnasta.

Pseudometriikan aksioomat periytyvät suoraan kuvaukselta  $d'$ . Lisäksi ehto  $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$  implikoi ehdon  $d'(x, y) = 0$ , jolloin  $\tilde{x} = \tilde{y}$ . Tekijäjoukot voidaan korvata konstruktiossa ekvivalenssiluokkien edustajistolla, jolloin saadaan tiheä aliavaruus.  $\square$

### 3.3 Pseudometriikan virittämä uniformiteetti

Pseudometriikka antaa aina joukkoon uniformiteetin seuraavan tarkastelun mukaisesti.

**Lause 3.2.** *Olkoon  $(X, d)$  pseudometrinen avaruus. Olkoon edelleen  $\epsilon > 0$ . Määritellään joukot  $V_\epsilon$  seuraavasti.*

$$V_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

*Joukot  $(V_\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$  muodostavat uniformisen avaruuden kannan.*

*Todistus.* On voimassa  $V_{\min\{\epsilon, \epsilon'\}} \subset V_\epsilon \cap V_{\epsilon'}$ , joten lauseen 2.16 ehto 1 on voimassa. Edelleen aina, kun  $x \in X$ , niin  $d(x, x) = 0$ . Tällöin siis aina  $\Delta_X \subset V_\epsilon$ , näin myös ehto 2 on voimassa. Ehto 3 on voimassa, koska  $d(x, y) = d(y, x)$ , jolloin siis ehto  $(x, y) \in V_\epsilon$  implikoi ehdon  $(y, x) \in V_\epsilon$  ja jokainen  $V_\epsilon$  on symmetrinen joukko. Ehto 4 seuraa puolestaan kolmioepäyhtälöstä. Jos  $(x, y) \in V_{\frac{\epsilon}{2}} \circ V_{\frac{\epsilon}{2}}$ , niin on olemassa sellainen  $z \in X$ , jolle  $d(x, z) < \frac{\epsilon}{2}$  sekä  $d(z, y) < \frac{\epsilon}{2}$ . Tällöin  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \epsilon$ , joten  $(x, y) \in V_\epsilon$ . Siispä  $V_{\frac{\epsilon}{2}} \circ V_{\frac{\epsilon}{2}} \subset V_\epsilon$ .  $\square$

**Määritelmä 3.3.** Lauseen 3.2 uniforminen avaruus on pseudometriikan  $d$  virittämä uniforminen avaruus  $(X, U_d)$ .

**Huomautus 3.4.** Jos ei toisin mainita, niin jatkossa oletetaan, että  $\mathbb{R}$  on varustettu euklidisen metriikan virittämällä uniformiteetilla, jota merkitään  $U_\epsilon$ :lla.

**Lause 3.5.** *Olkoon  $(X, d)$  pseudometrinen avaruus. Pseudometriikan  $d$  virittämän uniformiteetin  $U$  indusoima topologia on sama kuin pseudometriikan indusoima topologia.*

*Todistus.* Väite seuraa välittömästi siitä, että  $V_\epsilon(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V_\epsilon\} = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ .  $\square$

**Lause 3.6.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $(X, d)$  pseudometrinen avaruus. Kuvaus  $d$  on tasaisesti jatkuva joukon  $X \times X$  tulouniformiteetin suhteen, jos ja vain jos pseudometriikan  $d$  virittämä uniformiteetti on karkeampi kuin uniformiteetti  $U$ .*

*Todistus.* Projektoiden indusoimalla tulouniformiteetilla on kantanaan muotoa

$$\{(x, y), (u, v) \in (X \times X) \times (X \times X) \mid (x, y) \in V_1 \in U \wedge (u, v) \in V_2 \in U\}$$

olevat joukot. Jos  $d$  on tasaisesti jatkuva, niin jokaista positiivista reaalilukua  $\epsilon$  kohti on olemassa sellaiset  $V_1, V_2 \in U$ , että jos  $(x, y) \in V_1$  sekä  $(u, v) \in V_2$ , niin  $(d(x, y), d(u, v)) \in V_\epsilon \in U_\epsilon$ , toisin sanoen  $|d(x, y) - d(u, v)| < \epsilon$ . Erityisesti valinnalla  $u = v$  saadaan ehto  $d(x, y) < \epsilon$ , joka on sama kuin ehto  $(x, y) \in V_\epsilon \in U_d$ . Tällöin siis  $(x, y) \in V_\epsilon$  aina, kun  $(x, y) \in V_1$ , koska  $\Delta_X \subset V_2$ . Näin ollen  $V_1 \subset V_\epsilon$ , ja aksiooman f 3 nojalla  $V_\epsilon \in U$ .

Kääntäen ehdosta  $d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$  tai ehdosta  $d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, y) + d(y, v)$  seuraa ehto  $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(v, y)$ . Tällöin siis  $|d(x, y) - d(u, v)| < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ , jos  $(x, u), (v, y) \in V_{\frac{\epsilon}{2}} \in U_d$ . Näin ollen  $d$  on tasaisesti jatkuva, jos jokainen  $V_\epsilon \in U_d$  on myös uniformiteetin  $U$  lähistö.  $\square$

### 3.4 Pseudometristyvyys

Tutkitaan millaisin edellytyksin jokin uniformiteetti on jonkin pseudometriikan tai pseudometriikkaperheen virittämä.

**Lemma 3.7.** *Olkoon  $(U_n)$  sellainen jono joukon  $X \times X$  osajoukkoja, että jokainen joukko  $U_n$  sisältää diagonaalin  $\Delta_X$ . Oletetaan lisäksi  $U_0 = X \times X$  sekä, että ehto  $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$  täyttyy aina, kun  $n \in \mathbb{N}$ . Tällöin on olemassa kuvaus  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ , joka täyttää seuraavat ehdot.*

(1) *Pätee  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  aina, kun  $x, y, z \in X$ .*

(2) *On voimassa  $U_n \subset \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \frac{1}{2^n}\} \subset U_{n-1}$  aina, kun  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Jos joukot  $U_n$  ovat symmetrisiä, niin kuvaus  $d$  on pseudometriikka.*

*Todistus.* Määritellään kuvaus  $f : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  seuraavasti. Jos  $(x, y) \in U_{n-1} \setminus U_n$ , niin asetetaan  $f(x, y) = \frac{1}{2^n}$ . Edelleen asetetaan  $f(x, y) = 0$ , jos  $(x, y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ . Olkoon sitten  $K_{(x,y)}$  joukko, jonka alkioina ovat ne äärelliset jonot  $x_0, \dots, x_{k+1}$ , joille  $x = x_0$  sekä  $y = x_{k+1}$ , kun  $(x, y) \in X \times X$ . Käytetään edelleen merkintää  $S_{(x,y)} = \{\sum_{i=0}^k f(x_i, x_{i+1}) \mid (x_i)_{0 \leq i \leq k+1} \in K_{(x,y)}\}$ .

Voidaan määritellä kuvaus  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  kaavalla  $d(x, y) = \inf S_{(x,y)}$ . Olkoon  $(x_i)_{0 \leq i \leq k'} \in K_{(x,z)}$  ja  $(y_i)_{0 \leq i \leq k''} \in K_{(z,y)}$  sekä  $x, y, z \in X$ . Muodostetaan jono  $(z_i)_{0 \leq i \leq k'+k''+1} \in K_{x,y}$ . Asetetaan  $z_i = x_i$ , kun  $0 \leq i \leq k'$ , sekä edelleen  $z_i = y_{i-k'-1}$ , kun  $k' < i \leq k' + k'' + 1$ . Näin nähdään, että jos  $a \in S_{(x,z)}$  ja  $b \in S_{(z,y)}$ , niin  $a + b \in S_{(x,y)}$ . Edelleen siis on oltava  $\inf S_{(x,y)} \leq \inf S_{(x,z)} + \inf S_{(z,y)}$ , ja kolmioepäyhtälö toteutuu.

Koska  $\Delta_X \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ , niin  $d(x, x) = 0$  aina, kun  $x \in X$ . Jos joukot  $U_n$  ovat symmetrisiä, niin  $f(x, y) = f(y, x)$  aina, kun  $x, y \in X$ . Näin siis  $d(x, y) = d(y, x)$  aina, kun  $x, y \in X$ . Tällöin kuvaus  $d$  on pseudometriikka.

Jos  $(x, y) \in U_n$ , niin  $f(x, y) < \frac{1}{2^n}$ . Koska  $f(x, y) \in S_{(x, y)}$ , niin  $d(x, y) \leq f(x, y) < \frac{1}{2^n}$ . Tällöin

$$U_n \subset \{(x, y) \mid d(x, y) < \frac{1}{2^n}\}.$$

Todistetaan induktiolla kaava

$$f(x_0, x_{n+1}) \leq 2 \sum_{i=0}^n f(x_i, x_{i+1}).$$

Tapaus  $n = 0$  saa muodon  $f(x_0, x_1) \leq 2f(x_0, x_1)$ . Käytetään merkitä  $g(r, s) = \sum_{i=r}^s f(x_i, x_{i+1})$ . Olkoon  $k$  suurin luonnollinen luku, jolle pätee  $g(0, k-1) \leq \frac{g(0, n)}{2}$ . Tällöin myös  $g(k+1, n) \leq \frac{g(0, n)}{2}$ , koska muuten olisi

$$g(0, n) - g(k+1, n) = g(0, k) \leq \frac{g(0, n)}{2}$$

ja  $k$  ei olisi suurin ehdon täyttävä luku. Induktio-oletuksen nojalla on siis voimassa  $f(x_0, x_k) \leq 2g(0, k-1) \leq 2 \frac{g(0, n)}{2}$  sekä samoin  $f(x_{k+1}, x_{n+1}) \leq 2g(k+1, n) \leq 2 \frac{g(0, n)}{2}$ . Edelleen selvästi  $f(x_k, x_{k+1}) \leq g(0, n)$ . Olkoon  $m$  puolestaan pienin luonnollinen luku, jolle pätee  $\frac{1}{2^{m+1}} \leq g(0, n)$ . Tällöin

$$(x_0, x_k), (x_k, x_{k+1}), (x_{k+1}, x_{n+1}) \in U_m,$$

sillä

$$f(x_0, x_k), f(x_k, x_{k+1}), f(x_{k+1}, x_n) \leq g(0, n) < \frac{1}{2^m}.$$

Näin ollen

$$(x_0, x_{n+1}) \in U_m \circ U_m \circ U_m \subset U_{m-1}.$$

Tällöin  $f(x_0, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^m} = 2 \frac{1}{2^{m+1}} \leq 2g(0, n)$ , ja siis on aina voimassa  $f(x_0, x_{n+1}) \leq 2 \sum_{i=0}^n f(x_i, x_{i+1})$ . Jos siis  $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$ , niin  $f(x, y) < \frac{1}{2^{n-1}}$ . Näin  $(x, y) \in U_{n-1}$ , ja  $\{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \frac{1}{2^n}\} \subset U_{n-1}$ .  $\square$

**Lause 3.8.** *Uniforminen avaruus on pseudometriikan virittämä, jos ja vain jos sillä on numeroituva kanta.*

*Todistus.* Olkoon  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uniformisen avaruuden kanta sekä  $S$  symmetristen lähistöjen joukko. Lisäämällä kantaan tarvittaessa yksi joukko voidaan olettaa, että  $V_0 = X \times X$ , jolloin määritellään  $U_0 = X \times X$ . Lauseiden 2.17 ja 2.15 nojalla joukko  $\{U \mid U \in S\}$  on uniformiteetin kanta. Koska joukko  $V_1$  on lähistö, voidaan valita sellainen symmetrinen lähistö  $U_1$ , että  $U_1 \subset V_1$ . Edelleen saadaan lemموjen 2.7 ja 2.5 avulla tulos  $U_1 = U_1 \circ \Delta_X \circ \Delta_X \subset U_1 \subset V_1$ . Oletetaan nyt,

että symmetrinen lähistö  $U_{n-1}$  on valittu ja se täyttää ehdon  $U_{n-1} \subset V_{n-1}$ . Joukko  $W = U_{n-1} \cap V_n$  on aksiooman f 2 nojalla lähistö. Voidaan siis valita sellainen symmetrinen lähistö  $U_n$ , että ehto  $U_n \subset W$  täytyy. Samoin kuin edellä voidaan päätellä, että on myös voimassa

$$U_n \subset U_n \subset W \subset V_n.$$

Lisäksi  $U_n \subset W \subset U_{n-1}$ . Näin ollen on induktiivisesti määritelty lemmän 3.7 ehdot täyttävä jono  $U_n$ , joka on lisäksi uniformeetin  $U$  kanta. On siis olemassa sellainen pseudometriikka  $d$ , että

$$U_n \subset \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \frac{1}{2^n}\} \subset U_{n-1}.$$

Uniforminen avaruus  $(X, U)$  on näin pseudometriikan  $d$  virittämä.

Kääntäen, jos avaruus on pseudometriikan virittämä, niin joukot

$$\{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \frac{1}{2^n}\}$$

muodostavat uniformeetin numeroituvan kannan. □

**Lause 3.9.** *Uniforminen avaruus  $(X, U)$  on metriikan virittämä, jos ja vain jos se indusoi Hausdorffin topologian ja sillä on numeroituva kanta.*

*Todistus.* Olkoon  $(X, U)$  metriikan virittämä. Jos  $x$  ja  $y$  ovat avaruuden kaksi eri pistettä, niin  $d(x, y) > 0$ . Tällöin  $(x, y) \notin V_{\frac{d(x,y)}{2}}$ , jolloin  $\bigcap_{V \in U} V = \Delta_X$ . Näin lauseen 2.31 nojalla  $(X, U)$  on Hausdorff. Edelleen lauseen 3.8 perusteella on olemassa avaruuden  $(X, U)$  numeroituva kanta.

Kääntäen olkoon avaruudella  $(X, U)$  numeroituva kanta, sekä olkoon sen indusoima topologia Hausdorff. Lauseen 3.8 nojalla  $(X, U)$  on pseudometriikan  $d$  virittämä. Jos on olemassa sellaiset eri pisteet  $x$  ja  $y$ , joille  $d(x, y) = 0$ , niin piste  $(x, y)$  kuuluu jokaiseen lähistöön, mikä on vastoin lausetta 2.31. Näin ollen  $d$  on metriikka. □

**Lause 3.10.** *Olkoon  $X$  joukko sekä  $P$  kokoelma joukon  $X$  pseudometriikoita. Muotoa  $V_{d,\epsilon} = \{(x, y) \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ , missä  $d \in P$ , olevien joukkojen äärellisten leikkausten kokoelma  $B$  on erään joukon  $X$  uniformeetin  $U$  kanta.*

*Todistus.* Jos  $d \in P$ , niin määritelmän 3.3 mukaisesti on olemassa joukon  $X$  uniformeetti  $U_d$ . Tällöin lauseen 2.42 nojalla identtiset kuvaukset  $id_d : X \rightarrow X$  indusoivat joukkoon  $X$  uniformeetin  $U$ , kun maalijoukossa on aina uniformeetti  $U_d$ . Lauseen 2.42 perusteella  $B$  on uniformeetin  $U$  kanta. □

**Lause 3.11.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Olkoon  $P$  niiden pseudometriikkojen joukko, jotka ovat tasaisesti jatkuvia joukon  $X \times X$  tulouniformeetin*

suhteen. Muotoa  $V_{d,\epsilon} = \{(x,y) \in X \mid d(x,y) < \epsilon\}$ , missä  $d \in P$ , olevien joukkojen äärellisten leikkausten kokoelma on uniformisen avaruuden  $(X,U)$  kanta. Lisäksi joukko  $P$  on aina epätyhjä.

*Todistus.* Lauseesta 3.10 seuraa, että kyseinen äärellisten leikkausten kokoelma on jonkin joukon  $X$  uniformiteetin  $U'$  kanta. Olkoon  $V$  lähistö sekä  $U_0 = X \times X$ . Symmetriset lähistöt muodostavat uniformiteetin kannan lauseen 2.17 perusteella, joten voidaan valita sellainen symmetrinen lähistö  $U_1$ , että  $U_1 \subset V$ . Edelleen, koska myös muotoa  $\overset{3}{W}$ , missä  $W$  on symmetrinen lähistö, ovat joukot muodostavat uniformiteetin kannan lauseen 2.15 perusteella, voidaan edelleen valita symmetrinen lähistö  $U_2$ , jolle  $\overset{3}{U_2} \subset U_1$ . Määritelmää voidaan jatkaa induktiivisesti samoin kuin lauseen 3.8 todistuksessa. Tällöin lemmasta 3.7 seuraa, että on olemassa sellainen pseudometriikka  $d$ , jolle

$$U_2 \subset \{(x,y) \in X \times X \mid d(x,y) < \frac{1}{4}\} \subset U_1 \subset V$$

sekä yleisemmin

$$U_n \subset \{(x,y) \in X \times X \mid d(x,y) < \frac{1}{n}\} \subset U_{n-1}.$$

Näin siis aksiooman f 3 nojalla  $V \in U_d$ , sekä samoin jokainen  $V_{d,\epsilon} \in U$ . Lauseesta 3.6 seuraa siis, että  $U' \subset U$  ja toisaalta  $d$ :n tasainen jatkuvuus. Näin ollen  $U = U'$ .  $\square$

**Määritelmä 3.12.** Olkoon  $P$  kokoelma joukon  $X$  pseudometriikkoja. Merkitään  $B$ :llä joukkoa  $\{V_{d,\epsilon} \mid d \in P \wedge \epsilon \in [0, \infty)\}$ . Jos  $B$  on uniformisen avaruuden  $(X,U)$  kanta, niin  $P$  virittää uniformiteetin  $U$ .

**Lause 3.13.** Jokainen uniforminen avaruus on jonkin pseudometriikkojen kokoelman virittämä.

*Todistus.* Seuraa välittömästi lauseesta 3.11.  $\square$

**Huomautus 3.14.** Uniformisen avaruuden virittävien pseudometriikkojen kokoelma ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen. Kokoelmaksi voidaan aina lauseen 3.11 nojalla valita niiden pseudometriikoiden joukko, jotka ovat tasaisesti jatkuvia tulouniformiteetin suhteen ja jokainen virittäjäistö sisältyy tähän joukkoon. Kokoelmaa voidaan siis pitää eräänlaisena kanonisena virittäjäistöinä.

**Lause 3.15.** Olkoon  $(X,U)$  uniforminen avaruus, jonka virittää pseudometriikkojen kokoelma  $P$ . Avaruus  $X$  on Hausdorff, jos ja vain jos kaikkia sellaisia  $x,y \in X$ , joille  $x \neq y$ , kohti on olemassa sellainen  $d \in P$ , jolle  $d(x,y) > 0$ . Erityisesti, jos uniformisen avaruuden  $(X,U)$  virittäjäistöön  $P$  kuuluu yksikin metriikka, niin  $(X,U)$  induoi Hausdorffin topologian.

*Todistus.* Jos jollekin  $d \in P$  on voimassa  $d(x, y) > 0$  aina, kun  $x$  ja  $y$  ovat avaruuden  $X$  eri pisteitä, niin on olemassa lähistö  $V_{d, \frac{d(x,y)}{2}}$ , johon  $(x, y)$  ei kuulu. Näin ollen kaikkien lähistöjen leikkaus on diagonaali, ja väite seuraa lauseesta 2.31 ottaen huomioon, että päättelyn voi suorittaa myös käänteisessä järjestyksessä.  $\square$

**Lause 3.16.** *Jokainen uniforminen avaruus  $(X, U)$  on isomorfinen sellaisen tuloavaruuden aliavaruuden kanssa, että tuloavaruuden tekijät ovat pseudometriikan virittämiä. Jos  $(X, U)$  on Hausdorff, niin  $X$  on isomorfinen sellaisen tuloavaruuden aliavaruuden kanssa, että tuloavaruuden tekijät ovat metriikan virittämiä.*

*Todistus.* Olkoon  $P$  tulouniformiteetin suhteen tasaisesti jatkuvien pseudometriikkojen  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  kokoelma. Jokaisella pseudometrisellä avaruudella  $(X, d)$ , missä  $d \in P$ , on pseudometriikan virittäjä uniformiteetti  $U_d$ . Tällöin tuloavaruus  $\prod_{d \in P} (X, U_d)$  on uniforminen avaruus, jonka uniformiteetti on projektoiden indusoima. Määritellään kuvaus  $f : X \rightarrow \prod_{d \in P} (X, U_d)$  siten, että pätee  $[f(x)]_d = x$  aina, kun  $x \in X$ . Yhdistetty kuvaus  $pr_d \circ f$  on identtinen kuvaus jokaiselta pseudometriseltä avaruudelta itselleen. Näin ollen transitiivisuutta koskevan lauseen 2.45 perusteella kuvaus  $f$  indusoi joukkoon  $X$  saman uniformiteetin kuin identtiset kuvaukset, mikä on lauseen 3.10 todistuksen nojalla pseudometriikkojen virittäjä uniformiteetti. Kuvaus  $f$  on injektio, joten  $(X, U)$  on isomorfinen tuloavaruuden aliavaruuden  $f(X)$  kanssa.

Jos  $(X, U)$  on lisäksi Hausdorffin avaruus, niin merkitään kullakin  $d \in P$  lauseen 3.1 luhistavaa projektiota  $h_d$ :llä sekä  $d'$ :llä tekijäjoukon metriikkaa. Tällöin  $g = \prod_{d \in P} h_d \circ f$  on kuvaus uniformiselta avaruudelta  $(X, U)$  uniformiseen avaruuteen  $\prod_{d \in P} (X/R, d')$ . Tällöin  $pr_d \circ g = h_d$  on isometrinen kuvaus avaruudelta  $(X, d)$  avaruudelle  $(X/R, d')$  aina, kun  $d \in P$ . Lisäksi  $U$  on kuvausten  $h_d$  indusoima uniformiteetti transitiivisuutta koskevan lauseen 2.45 perusteella, sillä aina  $h_d = h_d \circ i$ , kun  $d \in P$ . Jälleen myös  $g$  on injektio lauseen 3.15 nojalla, koska  $(X, U)$  on Hausdorffin avaruus.  $\square$

## 4 Konvergenssi topologisessa avaruudessa

### 4.1 Yleistä

Määritellään kaikki topologisen avaruuden konvergenssin teoriaan tarvittavat käsitteet ja perustulokset. Filtrerit käsitellään Bourbakin teoksen General Topology perustuen. Lisäksi esitetään verkon määritelmä lyhyesti topologisten vektoriavaruuksien luentomonisteeseen nojautuen sekä todistetaan verkkojen ja filtereiden välinen yhteys.

## 4.2 Filtrit

Määritellään filtrin käsite, jolle konvergenssin teoria voidaan perustaa.

**Määritelmä 4.1.** Olkoon  $F$  epätyhjä kokoelma joukon  $X$  osajoukkoja. Joukko  $F$  on *filtrit* joukossa  $X$ , jos se toteuttaa seuraavat aksioomat.

**f 1.** *Pätee  $\emptyset \notin F$ .*

**f 2.** *Jos  $A, B \in F$ , niin  $A \cap B \in F$ .*

**f 3.** *Jos  $A \in F$  ja  $A \subset B$ , niin  $B \in F$ .*

**Esimerkki 1.** Olkoon  $(X, \tau)$  topologinen avaruus ja  $x \in X$ . Merkitään kaikkien pisteen  $x$  ympäristöjen joukkoa  $B(x)$ :llä. Tällöin  $B(x)$  on filtrit. Piste  $x$  kuuluu jokaiseen ympäristöönsä, joten aksiooma f 1 on voimassa. Jos  $W, W' \in B(x)$ , niin on olemassa sellaiset avoimet joukot  $V$  ja  $V'$ , että  $V \subset W$  sekä  $V' \subset W'$ . Tällöin leikkaus  $V \cap V'$  on sellainen avoin joukko, johon piste  $x$  kuuluu sekä  $V \cap V' \subset W \cap W'$ . Tällöin siis  $W \cap W'$  on pisteen  $x$  ympäristö, ja aksiooma f 2 on voimassa. Edelleen, jos  $W$  on pisteen  $x$  ympäristö ja  $W \subset W'$ , niin  $x \in V \subset W \subset W'$ , missä  $V$  on avoin joukko. Näin ollen myös  $W'$  on ympäristö, ja aksiooma f 3 toteutuu. Vastaavalla tarkastelulla huomataan myös topologisen avaruuden osajoukon ympäristöjen kokoelma filtriksi.

## 4.3 Filtrien järjestys

Inklusio antaa suuntauksen myös tietyn joukon filtrille. Myöhemmin esitettävä filtrin suppenemisen määritelmä perustuu tälle järjestykselle, joka näin on tärkeässä roolissa teorian kehittämisessä.

**Määritelmä 4.2.** Olkoot  $F$  ja  $F'$  filtrit joukossa  $X$ . Filtrit  $F$  on *hienompi* kuin  $F'$  ja vastaavasti  $F'$  on *karkeampi* kuin  $F$ , jos  $F' \subset F$ . Edelleen, jos lisäksi  $F' \neq F$ , niin kyseessä on *aito hiennommuus* sekä *aito karkeammuus*.

**Huomautus 4.3.** Kyseessä on joukon  $X$  filtrien järjestysrelaatio. Triviaalisti jokainen filtrit on itseään karkeampi. Inklusiorelaatio on lisäksi selvästi transitiiivinen ja antisymmetrinen.

**Lause 4.4.** *Olkoon  $(F_i)_{i \in I}$  epätyhjä perhe filtrit joukossa  $X$ . Leikkaus  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$  on filtrit ja perheen  $(F_i)_{i \in I}$  suurin alaraja.*

*Todistus.* Ensinnä leikkaus on epätyhjä, sillä  $X$  kuuluu jokaiseen perheen filtrtiin. Jos joukko  $A$  kuuluu leikkaukseen  $F$ , niin  $A$  kuuluu jokaiseen filtrtiin  $f_i$ , joista yksikään ei sisällä tyhjää joukkoa. Näin ollen  $A$  ei voi olla tyhjä joukko, ja aksiooma f 1 on voimassa.

Olkoot  $A$  ja  $B$  joukkoja, joille on voimassa  $A, B \in F$ . Tällöin  $A, B \in F_i$  aina, kun  $i \in I$ . Edelleen aksioman f 2 perusteella  $A \cap B \in F_i$  aina, kun  $i \in I$ . Näin ollen joukko  $A \cap B$  kuuluu leikkaukseen  $F$ , ja aksioma f 2 on voimassa.

Olkoon sitten  $A \in F$  sekä edelleen  $B$  joukko, jolle  $A \subset B$ . On voimassa  $A \in F_i$  aina, kun  $i \in I$ , jolloin myös  $B \in F_i$  aksioman f 3 perusteella. Näin ollen joukko  $B$  kuuluu leikkaukseen  $F$ , ja aksioma f 3 seuraa.

Selvästi leikkaus  $F$  sisältyy jokaiseen filttiin  $F_i$ , eli  $F$  on perheen  $(F_i)_{i \in I}$  alaraja. Kääntäen, jos filtille  $F'$  pätee  $F' \subset F_i$  aina, kun  $i \in I$ , niin  $F'$  sisältyy myös leikkaukseen  $F$ . Näin ollen siis  $F$  on perheen suurin alaraja.  $\square$

**Määritelmä 4.5.** Filtille  $F$  on *ultrafiltille*, jos ei ole olemassa sitä aidosti hienompaa filtille. Toisin sanoen ultrafiltille on järjestyksen suhteen maksimaalinen alkio kaikkien joukon  $X$  filtereiden joukossa.

**Lemma 4.6.** Jos  $F$  on ultrafiltille joukossa  $X$  sekä  $A$  ja  $B$  ovat joukon  $X$  sellaisia osajoukkoja, että  $A \cup B \in F$ , niin joko  $A \in F$  tai  $B \in F$ .

*Todistus.* Tehdään vastaoletus, että on olemassa joukon  $X$  osajoukot  $A$  ja  $B$ , joille pätee  $A \cup B \in F$  sekä  $A \notin F$  ja  $B \notin F$ . Olkoon sitten

$$F' = \{M \subset X \mid A \cup M \in F\}.$$

Tyhjä joukko ei kuulu joukkoon  $F'$ , koska  $A \notin F$ , siispä  $F'$  toteuttaa aksioman f 1. Edelleen, jos  $N, N' \in F'$ , niin De Morganin lakien nojalla  $(N \cap N') \cup A = (N \cup A) \cap (N' \cup A)$ . Aksioman f 2 nojalla siis  $N \cap N' \in F'$ . Tällöin aksioma f 2 toteutuu joukolle  $F'$ . Olkoon  $A \cup N \in F$  sekä  $N \subset N'$ . Tällöin  $A \cup N \subset A \cup N'$  ja aksioman f 3 nojalla  $A \cup N' \in F$ , eli  $N \in F'$ . Näin myös aksioma f 3 on voimassa joukolle  $F'$ , joka on siis filtille joukossa  $X$ . Edelleen  $B \in F'$ , sillä  $A \cup B \in F$ . Lisäksi, jos  $N \in F$ , niin  $A \cup N \in F$  aksioman f 3 nojalla, eli  $N \in F'$ . Filtille  $F'$  olisi siis aidosti hienompi kuin  $F$ , mikä on ristiriitaista.  $\square$

**Lause 4.7.** Olkoon  $(A_k)_{k \in K}$  äärellinen joukko joukon  $X$  osajoukkoja sekä  $F$  ultrafiltille joukossa  $X$ . Jos unioni  $\cup_{k \in K} A_k$  kuuluu ultrafiltille  $F$ , niin jokin joukoista  $A_k$  kuuluu ultrafiltille  $F$ .

*Todistus.* Todistetaan väite induktiolla. Tapaus  $n = 1$  on triviaali, sekä tapaus  $n = 2$  seuraa lemmasta 4.6. Jos nyt väite pätee tapauksessa  $n = m - 1$  sekä  $K = \{1, \dots, m\}$ , niin unioni  $\cup_{k \in K} A_k$  voidaan esittää muodossa  $(\cup_{k \in K'} A_k) \cup A_m$ , missä  $K' = \{1, \dots, m - 1\}$ . Tällöin lemmän 4.6 perusteella toteutuu ainakin toinen ehdoista  $\cup_{k \in K'} A_k \in F$  tai  $A_m \in F$ . Jälkimmäisessä tapauksessa väite on voimassa. Ensimmäisessä tapauksessa on induktio-oletuksen nojalla olemassa jokin  $A_k$  joka kuuluu ultrafiltille  $F$ .  $\square$

## 4.4 Filttlerin generointi

Tutkitaan, millaiset rakenteet generoivat filttlerin ja näin määritellään filttterikannan käsite.

**Lause 4.8.** *Olkoon  $X$  joukko sekä  $A$  kokoelma joukon  $X$  osajoukkoja. Jos ja vain jos jokaisella äärellisellä joukolla  $K \subset A$  on voimassa  $\cap K \neq \emptyset$ , niin on olemassa sellainen filttteri  $F$  joukossa  $X$ , että  $A \subset F$ .*

*Todistus.* Olkoon  $F$  filttteri, jolle  $A \subset F$ . Aksiooman f 2 ja induktion nojalla jokainen äärellinen leikkaus  $\cap K$  kuuluu joukkoon  $F$ . Toisaalta tyhjä joukko ei kuulu filttteriin  $F$ , joten mikään leikkauksista ei voi olla tyhjä joukko, siispä lauseen ehto on voimassa.

Kääntäen olkoon annettu ehto voimassa. Olkoon sitten

$$F = \{B \subset X \mid (\exists K \subset A)(\#K < \infty \wedge \cap K \subset B)\}.$$

Selvästi  $A \subset F$ . Todistetaan, että  $F$  on filttteri. Annetun ehdon nojalla jokaista joukkoa  $B \in F$  kohti on olemassa epätyhjä joukko  $\cap K$ , jolle  $\cap K \subset B$ . Aksiooma f 1 siis toteutuu.

Olkoot  $U, V \in F$ . Tällöin on olemassa joukon  $A$  äärelliset osajoukot  $K$  ja  $K'$ , jolle  $\cap K \subset V$  sekä  $\cap K' \subset U$ . Joukko  $(\cap K) \cap (\cap K')$  on äärellinen leikkaus joukon  $A$  osajoukoista, sekä  $(\cap K) \cap (\cap K') \subset U \cap V$ . Tällöin siis  $U \cap V \in F$ , ja näin aksiooma f 2 toteutuu.

Aksiooma f 3 on selvästi voimassa, sillä jos  $U \in F$  sekä  $U \subset V$ , niin on olemassa joukon  $A$  äärellinen osajoukko  $K$ , jolle  $\cap K \subset U \subset V$  ja siis  $V \in F$ .  $\square$

**Määritelmä 4.9.** Jos  $A \subset P(X)$  täyttää lauseen 4.8 ehdon, niin joukko  $A$  on lauseen 4.8 nojalla olemassa olevan filttlerin  $F$  esikanta.

**Lause 4.10.** *Olkoon  $B$  kokoelma joukon  $X$  osajoukkoja sekä*

$$F = \{A \subset X \mid (\exists V \in B)(V \subset A)\}.$$

*Tällöin  $F$  on filttteri, jos ja vain jos seuraavat ehdot ovat voimassa.*

(1) *Jos  $U, V \in B$ , niin on olemassa joukko  $W \in B$ , jolle  $W \subset U \cap V$ .*

(2) *Pätee  $B \neq \emptyset$  sekä  $\emptyset \notin B$ .*

*Todistus.* Oletetaan ensin, että ehdot 1 ja 2 ovat voimassa. Olkoon  $C$  joukon  $B$  joukkojen äärellisten leikkausten kokoelma. Ehdon 1 ja induktion nojalla jokaista  $N \in C$  kohti on olemassa  $W \in B$ , jolle  $W \subset N$ . Ehdon 2 nojalla  $W \neq \emptyset$ , joten lauseen 4.8 ehto täyttyy ja todistuksessa esiintyvä joukko

$$F' = \{N \subset X \mid (\exists K \subset B)(\#K < \infty \wedge \cap K \subset N)\} =$$

$$= \{N \subset X \mid (\exists N' \in C)(N' \subset N)\}$$

on filtteri. Jos  $M \in F'$ , niin on siis edellä todetun nojalla olemassa jokin  $M' \in F$ , jolle  $M' \subset M$  ja näin  $M \in F$ . Kääntäen, jos  $M \in F$ , niin on olemassa  $W \in B$ , jolle  $W \subset M$ . Toisaalta  $W$  on leikkaus yhdestä joukosta ja siis  $W \in C$ , eli  $M \in F'$ . Joukot ovat siis identtiset, ja  $F$  on filtteri.

Jos taas  $F$  on filtteri, niin aksiooman f 2 nojalla ehto 1 pätee, koska  $B \subset F$ . Jos  $B$  olisi tyhjä joukko, niin myös  $F$  olisi tyhjä joukko, mikä on mahdotonta. Edelleen, jos  $\emptyset \in B$ , niin  $\emptyset \in F$  vastoin aksioomaa f 1. Siispä myös ehto 2 on voimassa.  $\square$

**Määritelmä 4.11.** Jos joukko  $B$  toteuttaa lauseen 4.10 ehdot, niin se on *filtterikanta*, joka *generoi* filtterin  $F$ . Filtterikantojen, jotka generoivat saman filtterin sanotaan olevan *keskenään ekvivalentteja*. Jos filtterikanta  $B$  generoi filtterin  $F$  sanotaan myös, että  $B$  on *filtterin  $F$  kanta*.

**Lause 4.12.** *Jos  $A$  on filtterin  $F$  esikanta, niin joukko*

$$B = \{\bigcap_{k \in K} B_k \mid (\#K < \infty) \wedge (\forall k \in K)(B_k \in A)\}$$

*on filtterikanta, joka generoi filtterin  $F$ .*

*Todistus.* Jos  $A$  on esikanta, niin se täyttää lauseen 4.8 ehdon, jolloin  $\emptyset \notin B$ . Joukko  $B$  on selvästi suljettu äärellisiin leikkauksiin nähden, joten joukko  $B$  täyttää lauseen 4.10 ehdot. Lisäksi todistuksesta käy ilmi, että kannan  $B$  generoima filtteri on sama kuin esikannan  $A$  virittämä filtteri.  $\square$

**Lause 4.13.** *Filtterin  $F$  osajoukko  $B$  on  $F$ :n kanta, jos ja vain jos jokainen filtterin  $F$  joukko sisältää jonkin joukkoon  $B$  kuuluvan joukon.*

*Todistus.* Jos  $B$  on filtterikanta, niin määritelmän nojalla jokainen filtteriin kuuluva joukko sisältää kannan joukon. Kääntäen oletetaan nyt, että jokainen filtteriin kuuluva joukko sisältää jonkin joukkoon  $B$  kuuluvan joukon. Tällöin siis  $F \subset \{A \subset X \mid (\exists W \in B)(W \subset A)\} = V$ . Toisaalta aksiooman f 3 nojalla, jokainen joukko joka sisältää joukon  $B$  alkion kuuluu filtteriin. Joukot  $V$  ja  $F$  ovat siis identtiset, ja  $B$  on filtterikanta lauseen 4.10 nojalla.  $\square$

**Lause 4.14.** *Olko  $F$  ja  $F'$  filtereitä joukossa  $X$ . Olko  $B$  ja  $B'$  filtterikantoja, jotka generoivat filtteriä  $F$  ja  $F'$ . Filatteri  $F$  on hienompi kuin filatteri  $F'$ , jos ja vain jos jokainen kannan  $B'$  alkio sisältää jonkin kannan  $B$  alkion.*

*Todistus.* Jos  $F$  on hienompi kuin  $F'$ , niin jokainen  $M \in F'$  kuuluu myös joukkoon  $F$ . Erityisesti myös jokaiselle  $V' \in B'$  pätee  $V' \in F$ . Tällöin on lauseen 4.13 nojalla olemassa  $V \in B$ , jolle  $V \subset V'$ , eli ehto on voimassa

Kääntäen, jos jokainen kannan  $B'$  alkio sisältää kannan  $B$  alkion  $V$ , niin lauseen 4.13 nojalla jokainen  $U \in F'$  sisältää tällöin jonkin joukon  $V \in B$ , mistä seuraa aksiooman f 3 perusteella, että  $U \in F$ . On siis todettu, että  $F' \subset F$ .  $\square$

**Lause 4.15.** *Olkkoon  $F$  filttteri joukossa  $X$ . Olkkoot edelleen  $B$  ja  $B'$  filtlerin  $F$  kantoja. Kannat  $B$  ja  $B'$  ovat ekvivalentit, jos ja vain jos jokainen kannan  $B$  alkio sisältää kannan  $B'$  alkion sekä kääntäen jokainen kannan  $B'$  alkio sisältää kannan  $B$  alkion.*

*Todistus.* Seuraa heti lauseesta 4.14  $\square$

**Lause 4.16.** *Olkkoon  $(F_i)_{i \in I}$  perhe filtttereitä. Perheen pienin yläraja on olemassa, jos ja vain jos jokainen äärellinen leikkaus  $\bigcap_{k \in K} A_k$ , missä kukin  $A_k \in \bigcup_{i \in I} F_i$ , on epätyhjä.*

*Todistus.* Väite seuraa soveltamalla lausetta 4.8 unioniin  $\bigcup_{i \in I} F_i$ . Jos ja vain jos ehto täyttyy, niin on olemassa filttteri, joka sisältää unionin ja näin kaikkien unionin sisältävien filtttereiden leikkaus on selvästi vaadittu pienin yläraja lauseen 4.4 nojalla.  $\square$

**Lause 4.17.** *Olkkoon  $F$  filttteri joukossa  $X$ . On olemassa ultrafilttteri  $F'$  joukossa  $X$ , jolle  $F \subset F'$ , eli toisin sanoen  $F$  on karkeampi kuin  $F'$ .*

*Todistus.* Todistus nojautuu valinta-aksioomaan Zornin lemmän muodossa. Merkitään  $A$ :lla niiden joukon  $X$  filtttereiden joukkoa, joihin  $F$  sisältyy. Inklusiorelaatio antaa joukkoon  $A$  järjestyksen. Jos  $K \subset A$  on ketju, eli toisin sanoen osajoukko, johon järjestys indusoi täyden järjestyksen, niin jokaisella äärellisellä  $K' \subset K$  on selvästi pienin alkio, joka sisältyy epätyhjiin leikkaukseen  $\bigcap_{F \in K'} F$ . Näin lauseen 4.16 perusteella on olemassa filttteri, joka on perheen  $(F_k)_{k \in K}$  pienin yläraja. Yhdiste  $\bigcup_{i \in I} F_i$  on selvästi epätyhjä eikä tyhjä joukko kuulu yhdisteeseen, koska tyhjä joukko ei kuulu yhteenkään filttteristä  $F_i$ . Jos  $M, N \in \bigcup_{i \in I} F_i$ , niin on olemassa sellaiset filttterit  $F_i$  ja  $F_j$ , että  $M \in F_i$  sekä  $N \in F_j$ , missä  $i, j \in I$ . Tällöin joko  $F_i \subset F_j$  tai  $F_j \subset F_i$ . Siispä joko  $M \cap N \in F_i$  tai  $M \cap N \in F_j$ . Näin  $M \cap N \in \bigcup_{i \in I} F_i$ . Jos taas  $M \in \bigcup_{i \in I} F_i$  sekä  $M \subset N$ , niin on olemassa  $i \in I$ , jolle  $M \in F_i$  ja näin  $N \in F_i \subset \bigcup_{i \in I} F_i$ . Kyseinen pienin yläraja on siis unioni  $\bigcup_{i \in I} F_i$ , koska unioni on filttteri. Zornin lemmän mukaan joukossa  $A$  on tällöin maksimaalinen alkio, joka on ultrafilttteri ja sisältää filttterin  $F$ .  $\square$

**Lause 4.18.** *Olkkoot  $X$  ja  $X'$  joukkoja sekä  $f$  kuvaus  $X \rightarrow X'$ . Olkkoon edelleen  $B$  jokin joukon  $X$  filttterikanta. Joukko  $\{f(V) \mid V \in B\}$  on joukon  $X'$  filttterikanta.*

*Todistus.* Todistetaan, että joukko  $B' = \{f(V) \mid V \in B\}$  täyttää lauseen 4.10 ehdot. Olkoot  $N', M' \in B'$ . Tällöin on olemassa sellaiset joukot  $N, M \in B$ , joille  $f(N) = N'$  sekä  $f(M) = M'$ . Lauseen 4.10 nojalla on olemassa jokin  $V \in B$ , jolle  $V \subset N \cap M$ . Tällöin  $f(V) \subset f(N \cap M) \subset f(N) \cap f(M)$ , ja ehto 1 täyttyy.

Edelleen  $B' \neq \emptyset$ , koska joukko  $B$  ei voi olla tyhjä. Toisaalta, jos olisi voimassa  $\emptyset \in B'$ , niin täytyisi olla jokin  $M \in B$ , jolle  $f(M) = \emptyset$ , mikä on mahdotonta, koska  $\emptyset \notin B$ .  $\square$

## 4.5 Alifiltteri

Tutkitaan lyhyesti, millaisin edellytyksin joukon  $X$  filtteri joukkojen leikkaukset jonkin joukon  $X$  osajoukon kanssa muodostavat filtteriin.

**Lause 4.19.** *Olkoon  $A \subset X$  sekä  $F$  filtteri joukossa  $X$ . Joukko*

$$F_A = \{A \cap M \mid M \in F\}$$

*on filtteri joukossa  $A$ , jos ja vain jos leikkaus  $A \cap M \neq \emptyset$  aina, kun  $M \in F$ .*

*Todistus.* Ehdon nojalla  $F_A$  totetuttaa aksiooman f 1. Edelleen, koska

$$(M \cap A) \cap (N \cap A) = (M \cap N) \cap A,$$

niin aksiooma f 2 on voimassa. Toisaalta, jos  $M \cap A \subset P \subset A$ , niin  $P = (M \cup P) \cap A \in F_A$ . Siis myös aksiooma f 3 on voimassa.

Kääntäen, jos  $F_A$  on filtteri joukossa  $A$ , niin mikään leikkaus  $A \cap M$  ei voi olla epätyhjä aksiooman f 1 nojalla, kun  $M \in F$ .  $\square$

**Määritelmä 4.20.** Lauseen 4.19 nojalla konstruoitua filtteriä kutsutaan *alifiltteriksi*, ja siitä käytetään merkintää  $F_A$ .

## 4.6 Tulofiltteri

Tuloavaruuksien tarkastelemista varten tarvitaan vielä tulofiltterin käsite.

**Lause 4.21.** *Olkoon  $(X_\iota)_{\iota \in I}$  perhe joukkoja. Olkoon edelleen joukko  $B_\iota$  filtterikanta joukossa  $X_\iota$  aina, kun  $\iota \in I$ . Olkoot joukon  $B$  alkiot muotoa  $\prod_{\iota \in I} M_\iota$ , missä  $K \subset I$  on äärellinen sekä  $M_\iota = X_\iota$  aina, kun  $\iota \notin K$ , ja  $M_\iota \in B_\iota$  aina, kun  $\iota \in K$ . Tällöin  $B$  on filtterikanta karteesisessa tulossa  $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ .*

*Todistus.* Koska  $\prod_{\iota \in I} M_\iota \cap \prod_{\iota \in I} N_\iota = \prod_{\iota \in I} (M_\iota \cap N_\iota)$ , niin  $B$  on suljettu äärellisiin leikkauksiin nähden, ja väite seuraa lauseesta 4.10, sillä selvästi  $B$  on epätyhjä ja  $\emptyset \notin B$ .  $\square$

**Määritelmä 4.22.** Lauseessa 4.21 mainitun filtterikannan generoimaa filtteriä sanotaan *tulofiltteriksi*.

## 4.7 Alkeisfilatteri

Seuraavat tarkastelut ovat myöhemmin tarpeellisia tutkittaessa metrisiä ja pseudometrisiä avaruuksia yleisemmän teorian erityistapauksina.

**Lause 4.23.** *Olkoon  $X$  ääretön joukko. Joukko  $F = \{A \subset X \mid A^c \text{ on äärellinen}\}$  on filatteri.*

*Todistus.* Tyhjänjoukon komplementti on joukko  $X$ , joka on ääretön, ja aksiooma f 1 on näin voimassa. Jos  $A, B \in F$ , niin sekä  $A^c$  että  $B^c$  ovat äärellisiä. Edelleen äärellisten joukkojen unioni on äärellinen, joten De Morganin lain nojalla  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  on äärellinen, eli  $A \cap B \in F$ . Olkoon nyt  $A \in F$  ja  $A \subset B$  jollekin  $B \subset X$ . Tällöin on voimassa  $B^c \subset A^c$ , jolloin myös  $B^c$  on äärelliseen osajoukkoon sisältyvänä osajoukkona äärellinen. Siispä  $B \in F$ , ja aksiooma f 3 on voimassa.  $\square$

**Määritelmä 4.24.** Valitaan  $X = \mathbb{N}$  lauseessa 4.23, jolloin kyseessä on *Fréchet'n filatteri*.

**Määritelmä 4.25.** Olkoon  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jono joukossa  $X$ . Olkoon  $B$  jokin Fréchet'n filterin kanta sekä  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  kuvaus, jolle  $f(n) = x_n$ . Lauseen 4.18 nojalla joukko  $\{f(V) \mid V \in B\}$  on filterikanta, sen generoima filatteri  $F'$  on *jonon alkeisfilatteri*.

## 4.8 Filterin raja-arvo

Määritellään viimein filterin raja-arvon käsite inklusion antaman järjestyksen avulla.

**Määritelmä 4.26.** Olkoon  $X$  topologinen avaruus sekä  $F$  filatteri joukossa  $X$ . Filterin  $F$  sanotaan *suppenevan kohti pistettä  $x \in X$* , jos filatteri  $F$  on hienompi kuin pisteen  $x$  ympäristöfilatteri. Pisteen  $x$  sanotaan tällöin myös olevan *filtrin  $F$  raja-arvo*. Vastaavasti filterikannan sanotaan *suppenevan kohti pistettä  $x$* , jos sen generoima filatteri suppenee kohti pistettä  $x$ .

**Huomautus 4.27.** Hausdorffin avaruudessa  $X$  filterin raja-arvo on yksikäsitteinen, sillä jos filatteri  $F$  suppenee kohti eri pisteitä  $x, y \in X$ , niin on olemassa pisteiden erilliset ympäristöt  $U \in F$  ja  $V \in F$ . Tällöin aksiooma f 2 antaa ristiriidan  $\emptyset = U \cap V \in F$ .

**Lause 4.28.** *Filteerikanta  $B$  topologisessa avaruudessa  $X$  suppenee kohti pistettä  $x \in X$ , jos ja vain jos jokainen pisteen  $x$  mielivaltaisen ympäristökannan joukko sisältää joukon  $A \in B$ .*

*Todistus.* Jos ehto on voimassa, niin lauseen 4.14 nojalla kannan  $B$  generoima filttteri on hienempi kuin pisteen  $x$  ympäristöfilttteri. Samoin kääntäen lauseen 4.14 nojalla ehto on voimassa, jos kannan  $B$  generoima filttteri on hienempi kuin pisteen  $x$  ympäristöfilttteri.  $\square$

**Määritelmä 4.29.** Olkoon  $X$  topologinen avaruus. Piste  $x \in X$  on filttterikannan  $B$  klusteripiste, jos  $x \in \overline{A}$  aina, kun  $A \in B$ . Piste  $x \in X$  on filttterin  $F$  klusteripiste, jos se on filttterikannan  $B$  klusteripiste, kun  $B$  generoi filttterin  $F$ .

**Huomautus 4.30.** Helposti nähdään, että filttterin klusteripiste on hyvin määriteltä. Jos olisi olemassa ekvivalentit filttterikannat  $A$  ja  $B$  sekä kannan  $A$  klusteripiste  $x$ , joka ei olisi kannan  $B$  klusteripiste, niin voitaisiin valita sellainen  $M \in B$ , jolle  $x \notin \overline{M}$ . Kuitenkin lauseen 4.15 perusteella olisi olemassa  $N \in A$ , jolle  $N \subset M$ . Edelleen saataisiin ristiriita  $x \in \overline{N} \subset \overline{M}$ .

**Lause 4.31.** *Topologisen avaruuden  $X$  piste  $x$  on filttterikannan  $B$  klusteripiste, jos ja vain jos pisteen  $x$  mielivaltaisen ympäristökannan  $B(x)$  jokainen joukko kohtaa jokaisen filttterikannan joukon.*

*Todistus.* Oletetaan, että  $x$  ei ole filttterikannan  $B$  klusteripiste. Lauseen 4.28 perusteella on olemassa sellainen  $A \in B$ , että  $x \notin \overline{A}$ . Tällöin  $x$  kuuluu joukkoon  $\overline{A}^c$ , joka on avoin ja siis pisteen  $x$  ympäristö. On siis olemassa jokin sellainen ympäristökantaan kuuluva joukko  $V \subset \overline{A}^c$ , että leikkaus  $V \cap A$  on tyhjä, ja näin ollen lauseen ehto ei ole voimassa.

Samoin kääntäen nähdään, että jos lauseen ehto on voimassa ja  $A \in B$ , niin avoin joukko  $\overline{A}^c$  ei voi olla pisteen  $x$  ympäristö. Näin siis  $x \in \overline{A}$ , ja väite seuraa määritelmästä 4.29.  $\square$

**Lause 4.32.** *Topologisen avaruuden  $X$  piste  $x$  on filttterin  $F$  klusteripiste, jos ja vain jos olemassa filttteriä  $F$  hienempi filttteri  $F'$ , joka suppenee kohti pistettä  $x$ .*

*Todistus.* Olkoon ensin  $x$  filttterin  $F$  klusteripiste sekä  $B$  filttterin  $F$  kanta. Olkoon edelleen  $B'(x)$  pisteen  $x$  ympäristöfilttteri. Määritellään joukko

$$A = B \cup B'(x).$$

Olkoon  $K \subset A$  äärellinen. Jos  $K \subset B$  tai  $K \subset B'(x)$ , niin selvästi  $\cap K \neq \emptyset$ . Jos taas

$$K \cap (B \cap B'(x)) \neq \emptyset,$$

niin

$$\cap K = [\cap(K \cap B)] \cap [\cap(K \cap B'(x))] \neq \emptyset$$

lauseen 4.31 perusteella, sillä  $\cap(K \cap B) \in B$  sekä  $\cap(K \cap B'(x)) \in B'(x)$ , koska  $K$  on äärellinen. Joka tapauksessa siis jokainen joukon  $A$  alkioiden äärellinen

leikkaus on epätyhjä. Näin lauseen 4.8 ehto on voimassa, ja on olemassa sellainen filttteri  $F'$ , jolle  $F, B'(x) \subset A \subset F'$ .

Olkoon kääntäen olemassa filttteri  $F'$ , joka on hienempi kuin  $F$  sekä suppenee kohti pistettä  $x$ . Tällöin  $F'$  on myös hienempi kuin pisteen  $x$  ympäristöfilttteri. Olkoon  $B$  filttterin  $F$  sekä  $B'$  filttterin  $F'$  kanta. Tehdään vastaoletus, että  $x$  ei ole filttterin  $F$  klusteripiste. On siis lauseen 4.29 perusteella olemassa sellainen  $V \in B$ , jolle pätee  $x \in \overline{V}^c$ . Tällöin  $U = \overline{V}^c$  on suljetun joukon komplementtina avoin ja näin pisteen  $x$  ympäristö. Edelleen on olemassa  $V' \in B'$ , jolle  $V' \subset V$ . Toisaalta pisteen  $x$  ympäristöä  $U$  kohti on olemassa joukko  $W \in B'$ , jolle pätee  $W \subset U$ . Näin lauseen 4.10 ehdon 1 nojalla on olemassa joukko  $W' \in B'$ , joka sisältyy leikkaukseen  $V' \cap W$ . Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä leikkaus on tyhjä.  $\square$

**Määritelmä 4.33.** Olkoon  $X$  joukko sekä  $Y$  topologinen avaruus. Olkoon edelleen  $F$  filttteri joukossa  $X$  sekä  $f$  kuvaus  $X \rightarrow Y$ . Avaruuden  $Y$  pisteen  $y$  sanotaan olevan *funktion raja-arvo filttterin  $F$  suhteen*, jos  $y$  on filttterikannan  $\{f(V) \subset Y \mid V \in F\}$  raja-arvo. Jos  $Y$  on Hausdorff, niin raja-arvo on yksikäsitteinen, ja käytetään merkintää  $y = \lim f[F]$ .

**Lause 4.34.** *Piste  $y$  on funktion  $f$  raja-arvo filttterin  $F$  suhteen, jos ja vain jos jokaista pisteen  $y$  ympäristöä  $V$  kohti on olemassa  $M \in F$ , jolle  $f(M) \subset V$ . Ehto on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että  $f^{-1}(V) \in F$  aina, kun  $V$  on pisteen  $y$  ympäristö.*

*Todistus.* Lauseen 4.28 nojalla filttterikanta  $\{f(M) \subset V \mid M \in F\}$  suppenee kohti pistettä  $y$ , jos ja vain jos jokainen pisteen  $y$  ympäristö sisältää jonkin muotoa  $f(M)$  olevan joukon.

Edelleen ehto  $f(M) \subset V$  implikoi ehdon  $M \subset f^{-1}(V)$ . Ja tällöin aksioman f 3 perusteella  $f^{-1}(V)$  kuuluu filttteriin  $F$ . Kääntäen, jos  $f^{-1}(V) \in F$ , niin  $f(f^{-1}(V)) \subset V$ .  $\square$

**Lause 4.35.** *Kuvaus  $f$  topologiselta avaruudelta  $X$  topologiseen avaruuteen  $Y$  on jatkuva pisteessä  $a$ , jos ja vain jos  $f(a)$  on pisteen  $a$  ympäristöfilttterin kuvan  $\{f(M) \mid M \in B(a)\}$  raja-arvo.*

*Todistus.* Olkoon ensin  $f$  jatkuva pisteessä  $a$ . Tällöin jokaista pisteen  $f(a)$  ympäristöä  $U$  kohti on olemassa sellainen pisteen  $a$  ympäristö  $V$ , jolle  $f(V) \subset U$ . Lauseesta 4.34 seuraa, että  $f(a)$  on pisteen  $a$  ympäristöfilttterin kuvan raja-arvo. Päätelyn voi suorittaa myös käänteiseen suuntaan.  $\square$

**Lause 4.36.** *Olkoon  $X$  joukko sekä  $(Y_\iota)_{\iota \in I}$  perhe topologisia avaruuksia. Edelleen olkoon  $f_\iota$  kuvaus joukolta  $X$  avaruuteen  $Y_\iota$  aina, kun  $\iota \in I$ . Kuvaukset indusoivat joukkoon  $X$  topologian  $\tau$ . Filttteri  $F$  joukossa  $X$  suppenee to-*

pologian  $\tau$  suhteen kohti pistettä  $a \in X$ , jos ja vain jos jokainen filtterikanta  $\{f_\iota(V) \subset Y_\iota \mid V \in F\}$  suppenee kussakin avaruudessa  $Y_\iota$  kohti pistettä  $f_\iota(a)$ .

*Todistus.* Oletetaan, että filttteri  $F$  suppenee topologian  $\tau$  suhteen kohti pistettä  $a$ . Olkoon  $B(a)$  pisteen  $a$  ympäristöfilttteri. Kuvaukset  $f_\iota$  ovat jatkuvia, joten lauseen 4.35 perusteella kunkin pisteen  $f_\iota(a)$  ympäristöfilttteri on karkeampi kuin filttteri  $\{f_\iota(V) \mid V \in B(a)\}$ , joka puolestaan sisältyy filttteriin  $\{f_\iota(V) \mid V \in F\}$ , sillä  $B(a) \subset F$ .

Olkoon nyt ehto voimassa sekä  $a \in X$  piste, jolle kukin  $f_\iota(a)$  on filtterikannan  $\{f_\iota(V) \mid V \in F\}$  raja-arvo. Olkoon lisäksi  $V$  pisteen  $a$  ympäristö topologiassa  $\tau$ . Tällöin on olemassa sellainen äärellinen  $K \subset I$  ja sellaiset avoimet joukot  $U_\iota \subset Y_\iota$ , että

$$V \supset M = \bigcap_{\iota \in K} f_\iota^{-1}(U_\iota).$$

Lisäksi  $a \in M$ , joten aina  $f_\iota(a) \in U_\iota$ , kun  $\iota \in K$ . Lauseesta 4.34 seuraa, että on olemassa sellainen  $W_\iota \in F$ , jolle  $f_\iota(W_\iota) \subset U_\iota$  aina, kun  $\iota \in K$ . Tällöin

$$W_\iota \subset f_\iota^{-1}(f_\iota(W_\iota)) \subset f_\iota^{-1}(U_\iota).$$

Näin ollen kukin  $f_\iota^{-1}(U_\iota) \in F$ . Koska joukko  $K$  on äärellinen, niin joukko  $M$  kuuluu äärellisenä leikkauksena filttteriin  $F$ . Näin, koska siis  $M \subset V$ , niin  $V \in F$ , ja filttteri  $F$  suppenee määritelmän nojalla.  $\square$

## 4.9 Verkko

Tutkitaan vielä lyhyesti vaihtoehtoista tapaa määrittellä topologisen avaruuden konvergenssi sekä todistetaan määritelmien tietty ekvivalenssi.

**Määritelmä 4.37.** Olkoon  $S$  joukko. Relaatio  $\leq$  on *suuntaus* joukossa  $X$ , ja pari  $(S, \leq)$  on *suunnattu joukko*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa.

(1) Jos  $x, y, z \in S$  sekä  $x \leq y$  ja  $y \leq z$ , niin  $x \leq z$ .

(2) On voimassa  $x \leq x$  aina, kun  $x \in S$ .

(3) Jos  $x, y \in S$ , niin on olemassa sellainen  $z \in S$ , että  $x \leq z$  ja  $y \leq z$ .

**Määritelmä 4.38.** Olkoon  $(S, \leq)$  suunnattu joukko sekä  $X$  joukko. Kuvaus  $S \rightarrow X$  on *verkko*.

**Määritelmä 4.39.** Verkko  $\phi : S \rightarrow X$  topologisessa avaruudessa  $X$  *suppenee* kohti pistettä  $x$ , jos jokaista pisteen  $x$  ympäristöä  $W$  kohti on olemassa sellainen  $m \in S$ , että  $\phi(n) \in W$  aina, kun  $m \leq n$ .

**Esimerkki 2.** Luonnollisten lukujen joukon tavallinen järjestysrelaatio  $\leq$  on selvästi suuntaus joukossa  $\mathbb{N}$ . Näin jono topologisessa avaruudessa  $X$  on verkko, jonka suppeneminen tarkoittaa, että jokaista pisteen  $x \in X$  ympäristöä  $W$  kohti on olemassa sellainen  $m \in \mathbb{N}$ , että  $x_n \in W$  aina, kun  $n > m$ .

**Lause 4.40.** *Olkkoon  $\phi : S \rightarrow X$  verkko topologisessa avaruudessa  $X$ . Määritellään joukot  $A_n = \{\phi(m) \mid n \leq m\}$ . Tällöin kokoelma  $B = \{A_n \mid n \in S\}$  on filtterikanta joukossa  $X$ .*

*Todistus.* Olkkoot  $A_n, A_{n'} \in B$ . Määritelmän 4.37 nojalla on olemassa sellainen  $m \in S$ , että  $n \leq m$  sekä  $n' \leq m$ . Jos  $x \in A_m$ , niin on olemassa sellainen  $m' \in \phi^{-1}(\{x\})$ , että  $m \leq m'$  sekä transitiivisuuden nojalla  $n, n' \leq m'$  eli  $x \in A_n \cap A_{n'}$ . Tällöin  $A_m \subset A_n \cap A_{n'}$ . Suuntauksen määritelmästä 4.37 seuraa, että mikään  $A \in B$  ei voi olla tyhjä joukko. Väite seuraa nyt filtterikannan määritelmästä 4.11.  $\square$

**Määritelmä 4.41.** Olkkoon  $\phi$  verkko. Lauseen 4.40 filtterikannan generoima filteri on *verkon  $\phi$  sektiofilteri*.

**Lause 4.42.** *Verkko  $\phi$  topologisessa avaruudessa  $X$  suppenee kohti pistettä  $x$ , jos ja vain jos sen sektiofilteri suppenee kohti pistettä  $x$ .*

*Todistus.* Jos verkko  $\phi$  suppenee kohti pistettä  $x$ , niin jokaista pisteen  $x$  ympäristöä  $W$  kohti on olemassa sellainen  $m \in S$ , että  $\{\phi(n) \mid m \leq n\} \subset W$ . Tällöin sektiofilteri on hienompi kuin pisteen  $x$  ympäristöfilteri. Päättely voidaan suorittaa myös käänteisessä järjestyksessä.  $\square$

## 5 Cauchyn filterit ja verkot

### 5.1 Yleistä

Pohjustetaan täydellisyyden määrittelemistä esittämällä Cauchyn ehdot filtereille ja verkoille. Pääpaino on jälleen Bourbakin kirjan mukaisella filtereiden käsittelemisellä ja lyhyemmin tarkastellaan verkkoja Kelley'n kirjan ja topologisten vektoriarvaruuksien luentomonisteen mukaisesti.

### 5.2 Lähistön suhteen pienet joukot

Uniformiteetti tarjoaa keinon tietyllä tavalla mitata avaruuden osajoukon kokoa.

**Määritelmä 5.1.** Olkkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus ja  $V$  lähistö. Olkkoon edelleen  $A \subset X$ . Joukko  $A$  on  *$V$ -pieni*, jos  $A \times A \subset V$ .

**Lause 5.2.** *Jos uniformisen avaruuden  $X$  osajoukot  $A$  ja  $B$ , joiden leikkaus on epätyhjä, ovat  $V$ -pieniä, niin unioni  $A \cup B$  on  $\overset{2}{V}$ -pieni.*

*Todistus.* Olkoot  $x, y \in A \cup B$ , sekä olkoon  $z \in A \cap B$ . Tällöin joko  $(x, z) \in A \times A \subset V$ , kun  $x \in A$  tai vastaavasti  $(x, z) \in B \times B \subset V$ , kun  $x \in B$ . Samoin todetaan, että  $(z, y) \in V$ . Siispä  $(x, y) \in \overset{2}{V}$ .  $\square$

**Lemma 5.3.** *Olkoon  $V$  uniformisen avaruuden symmetrinen lähistö. Tällöin joukko  $V(x)$  on  $\overset{2}{V}$ -pieni.*

*Todistus.* Jos  $(a, b) \in V(x) \times V(x)$ , niin on symmetrisyyden nojalla voimassa  $(a, x), (x, b) \in V$ , jolloin siis  $(a, b) \in \overset{2}{V}$ .  $\square$

### 5.3 Määritelmä

Esitetään nyt yleistys metristen avaruuksien jonoja koskevalle Cauchyn ehdolle.

**Määritelmä 5.4.** Olkoon  $F$  filtteri joukossa  $X$  sekä  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Filatteri  $F$  on *Cauchyn filtteri*, jos jokaista lähistöä  $V$  kohti on olemassa  $A \subset X$ , joka on  $V$ -pieni sekä kuuluu joukkoon  $F$ . Filatterikanta on *Cauchyn filtterikanta*, jos sen generoima filtteri on Cauchyn filtteri.

**Huomautus 5.5.** Selvästi filtterikanta generoi Cauchyn filtlerin ja siis on Cauchyn filtterikanta, jos ja vain jos se sisältää jokaisen lähistön suhteen pienen joukon.

**Lause 5.6.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $F$  filtteri joukossa  $X$ . Jos  $F$  suppenee topologiassa  $\tau_U$ , niin  $F$  on Cauchyn filtteri.*

*Todistus.* Olkoon  $x$  avaruuden  $(X, \tau_U)$  piste, jota kohti  $F$  suppenee. Olkoon  $W$  lähistö. Tällöin  $W(x)$  on pisteen  $x$  ympäristö. Lauseiden 2.17 ja 2.15 nojalla on olemassa sellainen symmetrinen lähistö  $V$ , että  $\overset{2}{V} \subset W$ . Edelleen pisteen  $x$  ympäristö  $V(x)$  on  $\overset{2}{V}$ -pieni lemmän 5.3 nojalla ja siis myös  $W$ -pieni. Toisaalta on olemassa jokin  $M \in F$ , jolle  $M \subset V(x)$  ja näin myös  $M$  on  $W$ -pieni.  $\square$

**Lause 5.7.** *Olkoon  $f$  tasaisesti jatkuva kuvaus uniformiselta avaruudelta  $X$  uniformiseen avaruuteen  $X'$ . Olkoon edelleen  $B$  Cauchyn filtterikanta joukossa  $X$ . Joukko  $\{f(V) \mid V \in B\}$  on Cauchyn filtterikanta joukossa  $X'$ .*

*Todistus.* Olkoon  $V'$  lähistö avaruudessa  $X'$ . Joukko  $(f \times f)^{-1}(V')$  on lähistö avaruudessa  $X$ , sillä on olemassa sellainen  $V \in U$ , että  $V \subset (f \times f)^{-1}(V')$ . Tällöin on olemassa  $M \in B$ , joka on  $(f \times f)^{-1}(V')$ -pieni. Jos  $(x, y) \in f(M) \times f(M)$ , niin

$$(x, y) \in (f \times f)(M \times M) \subset (f \times f)[(f \times f)^{-1}(V')] \subset V'.$$

Näin ollen  $f(M)$  on  $V'$ -pieni, ja väite seuraa.  $\square$

**Lause 5.8.** *Olkoon  $X$  joukko sekä  $(Y_\iota)_{\iota \in I}$  perhe uniformisia avaruuksia. Olkoon edelleen  $f_\iota$  kuvaus joukolta  $X$  joukkoon  $Y_\iota$  aina, kun  $\iota \in I$ . Kuvaukset  $f_\iota$  indusoivat joukon  $X$  uniformiteetin  $U$ . Joukon  $X$  filtterikanta  $B$  on Cauchyn filtterikanta, jos ja vain jos jokainen joukko  $\{f_\iota(V) \mid V \in B\}$  on Cauchyn filtterikanta avaruudessa  $Y_\iota$ .*

*Todistus.* Jos  $B$  on Cauchyn filtterikanta, niin lauseen 5.7 sekä kuvausten  $f_\iota$  tasaisen jatkuvuuden nojalla jokainen joukko  $\{f_\iota(V) \mid V \in B\}$  on Cauchyn filtterikanta avaruudessa  $Y_\iota$ .

Kääntäen olkoon  $W$  uniformiteetin  $U$  lähistö. Tällöin on olemassa lähistö  $V \subset W$ , joka on muotoa  $\bigcap_{k \in K} (f \times f)^{-1}(V_k)$ , missä  $K \subset I$  on äärellinen ja kukin  $V_k$  on avaruuden  $Y_k$  lähistö. Jokaista indeksiä  $k$  kohti voidaan valita sellainen  $M_k \in B$ , että  $f_k(M_k)$  on  $V_k$ -pieni. Lauseen 4.10 ehdon 1 ja induktion nojalla on olemassa  $M \in B$ , jolle  $M \subset \bigcap_{k \in K} M_k$ . Jos  $x, y \in M$ , niin

$$(f_k(x), f_k(y)) \in f_k(M) \times f_k(M) \subset V_k$$

aina, kun  $k \in K$ . Näin ollen

$$(x, y) \in \bigcap_{k \in K} (f \times f)^{-1}(V_k),$$

jolloin siis  $M$  on  $V$ -pieni ja näin myös  $W$ -pieni. □

**Lause 5.9.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $A$  joukon  $X$  osajoukko. Jos  $F$  on Cauchyn filteri uniformisessa avaruudessa  $(X, U)$  ja  $F$  indusoi joukkoon  $A$  alifilterin  $F_A$ , niin  $F_A$  on Cauchyn filteri aliavaruudessa  $A$ .*

*Todistus.* Välitön seuraus inklusiokuvauksen soveltamisesta lauseeseen 5.8. □

**Lause 5.10.** *Filtterikanta  $B$  uniformisten avaruuksien tuloavaruudessa  $\prod_{\iota \in I} X_\iota$  on Cauchyn filtterikanta, jos ja vain jos  $pr_\iota(B)$  on Cauchyn filtterikanta avaruudessa  $X_\iota$  aina, kun  $\iota \in I$ .*

*Todistus.* Välitön seuraus projektoiden soveltamisesta lauseeseen 5.8. □

## 5.4 Minimaaliset Cauchyn filterit

Tutkitaan inklusion suhteen minimaalisia Cauchyn filtereitä. Myöhemmin osoittautuu, että juuri minimaaliset Cauchyn filterit muodostavat Hausdorffin avaruuden, joka on uniformisen avaruuden täydellistymä.

**Määritelmä 5.11.** Uniformisen avaruuden  $(X, U)$  Cauchyn filtereiden joukon minimaalisia alkioita inklusiorelaation suhteen kutsutaan *minimaalisiksi Cauchyn filtereiksi*. Tosin sanoen, jos  $F$  on minimaalinen Cauchyn filteri, niin ei ole olemassa sellaista Cauchyn filteriä  $F'$  uniformisessa avaruudessa  $(X, U)$ , jolle  $F' \subset F$ .

**Lause 5.12.** *Jokaista uniformisen avaruuden  $(X, U)$  Cauchyn filtteriä  $F$  kohti on olemassa yksikäsitteinen minimaalinen Cauchyn filtteri  $F_0$ , joka on karkeampi kuin  $F$ . Jos  $B$  on filtterin  $F$  kanta ja  $S$  on symmetristen lähistöjen muodostama uniformiteetin kanta, niin joukot  $V(M)$ , missä  $V \in S$  sekä  $M \in B$ , muodostavat filtterin  $F_0$  kannan.*

*Todistus.* Olkoot  $M, M' \in B$ . Lauseen 4.10 nojalla on olemassa sellainen joukko  $M'' \in B$ , jolle  $M'' \subset M \cap M'$ . Samoin, jos  $V$  ja  $V'$  ovat symmetrisiä lähistöjä, niin  $V \cap V'$  on aksiooman f 2 nojalla lähistö. Edelleen lauseen 2.17 nojalla on olemassa symmetrinen lähistö  $V''$ , jolle  $V'' \subset V \cap V'$ . Jos  $y \in V''(M'')$ , niin on olemassa sellainen  $x \in M'' \subset M \cap M'$ , että  $(x, y) \in V'' \subset V \cap V'$ . Näin ollen  $V''(M'') \subset V(M) \cap V'(M')$ , ja siis lauseen 4.10 ehdot ovat voimassa. Joukot  $V(M)$  muodostavat tällöin jonkin filtterin  $F_0$  kannan.

Olkoon  $W$  lähistö. Lauseiden 2.17 ja 2.15 perusteella on olemassa sellainen symmetrinen lähistö  $V$ , että  $V \subset W$ . Edelleen, jos joukko  $M$  on  $V$ -pieni, niin joukko  $V(M)$  on lemموjen 2.10 ja 2.5 nojalla  $V$ -pieni. Tällöin  $V(M)$  on myös  $W$ -pieni, ja  $F_0$  on Cauchyn filtteri, joka on karkeampi kuin  $F$ , sillä  $M \subset V(M)$  aina, kun  $M \in B$  ja  $V \in S$ .

Olkoon nyt  $F''$  jokin Cauchyn filtteri, joka on karkeampi kuin  $F$ . Olkoon edelleen  $M \in B$  ja  $V \in S$ . On olemassa  $N \in F'' \subset F$ , joka on  $V$ -pieni joukko. Koska  $N \in F$ , niin on olemassa sellainen  $M' \in B$ , jolle  $M' \subset N$ . Tällöin  $\emptyset \neq M' \cap M \subset N \cap M$ . Olkoon  $y \in N$ . Voidaan valita jokin  $x \in N \cap M$ , jolloin

$$(x, y) \in (N \cap M) \times N \subset N \times N \subset V.$$

Näin ollen  $N \subset V(M)$ , ja siis  $V(M) \in F''$ . Seuraa, että  $F''$  on hienompi kuin  $F_0$ .  $\square$

**Lause 5.13.** *Uniformisen avaruuden  $(X, U)$  jokaisen pisteen  $x$  ympäristöfiltteri  $B(x)$  on minimaalinen Cauchyn filtteri.*

*Todistus.* Sovelletaan lausetta 5.12 valitsemalla filtteriksi pisteen  $x$  ympäristöfiltteri diskreetissä topologiassa sekä edelleen kannaksi joukko, jonka ainut alkio on  $\{x\}$ . Selvästi  $V(\{x\}) = V(x)$ . Tällöin saadulla minimaalisella Cauchyn filterillä on kantanaan joukko  $\{V(x) \mid V \in S\}$ , joka on pisteen  $x$  ympäristökanta topologiassa  $\tau_U$  lauseiden 2.17 ja 2.23 perusteella.  $\square$

**Lause 5.14.** *Jokainen Cauchyn filtterin  $F$  klusteripiste on filtterin  $F$  raja-arvo.*

*Todistus.* Jos  $x$  on Cauchyn filtterin  $F$  klusteripiste, niin lauseen 4.32 nojalla on olemassa filtteri  $F'$ , joka on hienompi kuin  $F$  sekä hienompi kuin pisteen  $x$  ympäristöfiltteri  $B(x)$ . Koska  $F$  on Cauchyn filtteri, niin myös  $F'$  on Cauchyn filtteri. Lauseen 5.12 nojalla on olemassa yksikäsitteinen minimaalinen Cauchyn

filatteri  $F_0$ , joka on karkeampi kuin  $F'$ . Toisaalta myös  $B(x)$  on lauseen 5.13 nojalla minimaalinen Cauchyn filatteri. Näin filterit  $F_0$  ja  $B(x)$  ovat minimaalisia Cauchyn filtereitä sekä karkeampia kuin  $F'$ . Lauseen 5.12 yksikäsitteisyyspuolen nojalla filterit ovat samat, ja siis filatteri  $F$  on hienompi kuin  $B(x)$ .  $\square$

**Lause 5.15.** *Jokainen Cauchyn filatteri  $F$ , joka on karkeampi kuin pistettä  $x$  kohti suppeneva Cauchyn filatteri  $F'$ , suppenee kohti pistettä  $x$ .*

*Todistus.* Lauseesta 4.32 seuraa, että  $x$  on filterin  $F$  klusteripiste. Tällöin siis lauseesta 5.14 seuraa, että  $x$  on filterin  $F$  raja-arvo.  $\square$

**Lause 5.16.** *Minimaalisella Cauchyn filterillä on avoimista joukoista muodostuva kanta.*

*Todistus.* Lauseen 2.28 nojalla jokainen lähistö ja erityisesti symmetrinen lähistö  $V$  sisältää tulotopologiassa avoimen lähistön  $W$ . Jos  $M \subset X$ , niin joukko  $W(M) = \cup_{x \in M} W(x)$  on avoimien joukkojen yhdisteenä avoin ja sisältyy joukkoon  $V(M)$ . Näin väite seuraa lauseesta 5.12.  $\square$

## 5.5 Cauchyn verkot

Yleistetään Cauchyn ehto myös verkoille.

**Määritelmä 5.17.** Verkko  $\phi : S \rightarrow X$  uniformisessa avaruudessa on *Cauchyn verkko*, jos jokaista lähistöä  $V$  kohti on olemassa sellainen  $m \in S$ , että  $(\phi(k), \phi(l)) \in V$  aina, kun  $m \leq k$  sekä  $m \leq l$ .

**Lause 5.18.** *Verkko  $\phi$  on Cauchyn verkko, jos ja vain jos sen sektiofilatteri on Cauchyn filatteri.*

*Todistus.* Olkoon  $\phi : S \rightarrow X$  Cauchyn verkko sekä  $V$  lähistö. On olemassa jokin sellainen  $m \in S$ , että  $(\phi(k), \phi(l)) \in V$  aina, kun  $m \leq k$  ja  $m \leq l$ . Tällöin sektiofilteriin kuuluvalla joukolle  $\{\phi(n) \mid m \leq n\}$  pätee

$$\{\phi(n) \mid m \leq n\} \times \{\phi(n) \mid m \leq n\} \subset V.$$

Päätelyn voi myös kääntää.  $\square$

## 6 Täydellinen uniforminen avaruus

### 6.1 Yleistä

Kappaleessa määritellään täydellisyys käsite sekä filtereiden että verkkojen avulla. Lisäksi käsitellään tasaisesti jatkuvien kuvausten laajennuksia. Tuloksia

on niin Bourbakin kuin Kelley'n kirjasta. Edelleen tutkitaan surjektion koin-  
dusoimaa uniformiteettia pohjustuksena täydellistymän konstruktiolle. Nämä  
tulokset eivät perustu suoraan mihinkään lähteeseen vaikka Väisälän teoksesta  
Topologia II löytyy niiden osittaisia analogioita yhden kuvauksen koin-  
dusoimaa topologiaa koskien. Lisäksi yksi keskeisistä lauseista löytyy Bourbakin kirjasta  
huomautuksena. Päätavoitteena on tarkastella uniformiteetteja tilanteessa, jos-  
sa uniformiset avaruudet virittävät pseudometriikat vastaavat toisiaan bijektiivis-  
esti sekä jokin kuvaus on aina toisiaan vastaavien pseudometriikkojen suhteen  
isometrinen.

Siirryttäessä käsittelemään itse täydellisymää poikkeaa lähestymistapa aluk-  
si osin Bourbakin kirjasta, jossa virittäviä pseudometriikoita ei käsitellä. Mää-  
ritellään minimaalisten Cauchyn filttareiden duaaliavaruuden lisäksi laajempi  
kaikkien Cauchyn filttareiden muodostama duaaliavaruus samoin kuin Naga-  
tan kirjassa Modern General Topology. Jokaista alkuperäisen avaruuden virit-  
täjää kohti konstruoidaan virittäjä duaaliavaruuksiin ja todetaan kanoniset ku-  
vaukset isometrioksi toisiaan vastaavien virittäjien suhteen. Soveltamalla koin-  
dusointia koskevia tuloksia voidaan todeta duaaliavaruuden uniformiteetin vas-  
taavan Bourbakin kirjassa symmetristen lähistöjen avulla määritellyä uniformi-  
teettia. Avaruuksien tiheyttä ja täydellisyyttä koskeva todistus esitetään Bour-  
bakin kirjassa ja se toimii yleisemmin myös muille määritellyille avaruuksille,  
jolloin saavutetaan sekä Bourbakin että Kelley'n kirjan tulokset. Lisäksi tarkas-  
tellaan lyhyesti Hausdorffin avaruuden sellaisia täydellistymiä, jotka eivät täytä  
Hausdorffin ehtoa. Kappaleen loppuosa perustuu jälleen täysin Bourbakin kirjan  
tuloksiin.

## 6.2 Täydellisyyden määritelmä

Cauchyn jonojen yleistyksiä voidaan nyt soveltaa määrittelemällä uniformisen  
avaruuden täydellisyys.

**Lemma 6.1.** *Olkoon  $X$  joukko sekä  $A$  äärellisten leikkausten suhteen suljettu  
kokoelma joukon  $X$  osajoukkoja. Jos määritellään relaatio  $\leq$  ehdolla:  $M \leq N$ ,  
jos ja vain jos  $N \subset M$ , niin  $(A, \leq)$  on suunnattu joukko.*

*Todistus.* Olkoot  $U, V, W \in A$ , sekä olkoon  $U \leq V$  ja  $V \leq W$ . Tällöin  $W \subset V \subset U$ ,  
ja näin  $U \leq W$ . Selvästi  $U \leq U$ , sillä  $U \subset U$  aina, kun  $U \in A$ . Jos  $U, V \in A$ ,  
niin  $U \cap V \subset U$  sekä  $U \cap V \subset V$ , ja näin  $U, V \leq U \cap V$ .  $\square$

**Lause 6.2.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Seuraavat ehdot ovat keske-  
nään yhtäpitäviä.*

(1) *Jokainen Cauchyn filtti suppenee kohti jotakin pistettä.*

(2) Jokainen ultrafilteri, joka on myös Cauchyn filteri, suppenee kohti jotakin pistettä.

(3) Jokainen Cauchyn verkko suppenee kohti jotakin pistettä.

(4) Jokainen leikkaus sellaisesta suljettujen joukkojen kokoelmasta, jolla on äärellisten leikkausten ominaisuus ja joka sisältää jokaisen lähistön suhteen pieniä joukkoja, on epätyhjä.

*Todistus.* Oletetaan, että ehto 1 on voimassa. Tällöin lauseen 5.18 perusteella jokaisen Cauchyn verkon sektiofilteri on Cauchyn filteri ja näin suppenee kohti jotakin pistettä. Tällöin myös jokainen Cauchyn verkko suppenee lauseen 4.42 nojalla, ja ehto 3 täyttyy.

Kääntäen oletetaan, että ehto 3 on voimassa. Olkoon  $F$  Cauchyn filteri. Inklusiorelaatio antaa lemmän 6.1 mukaisen suuntauksen  $\leq$  joukkoon  $F$ . Voidaan määritellä kuvaus  $\phi : F \rightarrow X$  valitsemalla jokin  $\phi(A)$  joukosta  $A$  aina, kun  $A \in F$ . Jos  $V \in U$ , niin on olemassa  $A \in F$ , jolle  $A \times A \subset V$ . Jos sitten  $A_1, A_2 \leq A$ , niin  $A_1 \subset A$  sekä  $A_2 \subset A$ , ja näin  $(a_1, a_2) \in A \times A \subset V$  aina, kun  $\phi(A_1) = a_1 \in A_1$  ja  $\phi(A_2) = a_2 \in A_2$ . Tällöin  $\phi$  on Cauchyn verkko ja suppenee kohti jotakin pistettä. Verkon  $\phi$  sektiofilterille  $F'$  pätee  $F \subset F'$ , joten myös  $F$  suppenee kohti samaa pistettä lauseen 5.15 perusteella ja ehto 1 on voimassa.

Ehto 1 implikoi selvästi ehdon 2. Olkoon nyt ehto 2 voimassa. Jokaisella Cauchyn filterillä  $F$  on lauseen 4.17 perusteella hiennonnus, joka on ultrafilteri, ja näin ollen lauseen 5.15 perusteella  $F$  suppenee. Ehto 1 on siis voimassa.

Olkoon ehto 1 voimassa sekä  $A \subset P(X)$  suljettujen osajoukkojen kokoelma, joka sisältää jokaisen lähistön suhteen pieniä joukkoja sekä jolla on äärellisten leikkausten ominaisuus. Tällöin tyhjä joukko ei kuulu joukkoon  $B = \{\bigcap_{k \in K} A_k \mid (\forall k \in K)(A_k \in A) \wedge \#K < \infty\}$ . Koska  $B$  on selvästi suljettu äärellisiin leikkauksiin nähden ja se on myös selvästi epätyhjä sekä  $\emptyset \notin B$ , niin  $B$  on Cauchyn filterikanta lauseen 4.10 nojalla. Kannan generoima filteri  $F$  suppenee kohti jotakin pistettä  $a$ . Tällöin  $a$  on filterin  $F$  klusteripiste, ja näin ollen kuuluu jokaiseen sulkeumaan  $\overline{M}$ , missä  $M \in B$ . Koska joukon  $B$  alkiot ovat suljettujen joukkojen leikkauksina suljettuja, niin  $a \in \bigcap B$ , ja leikkaus  $\bigcap B$  on epätyhjä ehdon 4 mukaisesti.

Kääntäen olkoon ehto 4 voimassa. Jokaisen Cauchyn filterin joukkojen sulkeumilla on äärellisten leikkausten ominaisuus filterin aksioomien f 1 sekä f 2 perusteella. Tällöin on olemassa jokin piste  $a$ , joka kuuluu sulkeumien leikkaukseen. Näin  $a$  on Cauchyn filterin klusteripiste, ja filteri suppenee sitä kohti lauseen 5.14 perusteella.  $\square$

**Määritelmä 6.3.** Uniforminen avaruus  $(X, U)$  on *täydellinen*, jos se täyttää lauseen 6.2 keskenään yhtäpitävät ehdot.

**Lemma 6.4.** *Olkoon  $(X, d)$  pseudometrinen avaruus sekä  $(x_n)$  Cauchyn jono. Jonon  $(x_n)$  alkeisfilatteri on Cauchyn filatteri uniformiteetin  $U_d$  suhteen.*

*Todistus.* Olkoon  $V \in U_d$ . On olemassa  $\epsilon > 0$ , jolle  $V_{d,\epsilon} \subset V$ . Samoin on olemassa sellainen  $m \in \mathbb{N}$ , että  $d(x_n, x_{n'}) < \epsilon$  aina, kun  $n, n' \geq m$ . Joukko  $\{n \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$  kuuluu Fréchet'n filtertiin, ja näin joukko  $\{x_n \mid m \leq n\}$  kuuluu jonon alkeisfiltertiin. Lisäksi

$$\{x_n \mid m \leq n\} \times \{x_n \mid m \leq n\} \subset V_{d,\epsilon} \subset V,$$

eli joukko  $\{x_n \mid m \leq n\}$  on  $V$ -pieni. □

**Lemma 6.5.** *Olkoon  $(X, \tau)$  topologinen avaruus sekä  $(x_n)$  jono avaruudessa  $X$ . Jos jonon alkeisfilatteri suppenee, niin myös jono suppenee.*

*Todistus.* Olkoon  $a$  alkeisfilterin  $F$  raja-arvo sekä  $W$  jokin pisteen  $a$  ympäristö. Tällöin on olemassa  $M \in F$ , jolle  $M \subset W$ . Lisäksi on olemassa jokin Fréchet'n filtertiin kuuluva joukko  $A$ , jolle  $f(A) = M$ , kun  $f(n) = x_n$ . Joukko  $A^c$  on äärellinen, joten on olemassa maksimaalinen luonnollinen luku  $m \in A^c$ . Tällöin  $x_n = f(n) \in M \subset W$  aina, kun  $n > m$ . □

**Lause 6.6.** *Pseudometriikan  $d$  virittämä uniforminen avaruus  $(X, U_d)$  on täydellinen, jos ja vain jos  $(X, d)$  on täydellinen pseudometrinen avaruus.*

*Todistus.* Jos  $(X, U_d)$  on täydellinen, niin jokaisen Cauchyn jonon alkeisfilatteri on Cauchyn filatteri lemmän 6.4 nojalla ja näin ollen suppenee, jolloin myös jokainen Cauchyn jono suppenee lemmän 6.5 perusteella.

Kääntäen olkoon  $(X, d)$  täydellinen. Olkoon  $F$  kokoelma suljettuja joukkoja, joilla on äärellisten leikkausten ominaisuus ja jotka sisältävät jokaisen lähistön suhteen pieniä joukkoja. Valitaan jokaista luonnollista lukua  $n$  kohti sellainen joukko  $A_n \in F$ , joka on  $V_{\frac{1}{2^n}}$ -pieni. Valitaan edelleen jokin piste  $x_n$  jokaisesta joukosta  $A_n$ . Olkoot  $m, m' \in \mathbb{N}$ . Joukkojen  $A_m$  ja  $A_{m'}$  leikkaus on äärellisenä leikkauksena epätyhjä, ja voidaan valita sellainen piste  $z_{m,m'} \in A_m \cap A_{m'}$ , että

$$d(x_m, x_{m'}) \leq d(x_m, z_{m,m'}) + d(z_{m,m'}, x_{m'}) < \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m'}}.$$

Nähdään, että  $(x_m)$  on Cauchyn jono ja siis suppenee kohti pistettä  $y$ . Olkoon  $M \in F$ . Leikkaus  $A_n \cap M$  on jokaisella  $n \in \mathbb{N}$  epätyhjä ja siitä voidaan valita jonon  $(y_n)$  alkiot. Tällöin on voimassa  $d(x_n, y_n) < \frac{1}{2^n}$  ja näin myös jono  $(y_n)$  suppenee kohti pistettä  $y$ . Koska  $M$  on suljettu ja jokainen  $y_n \in M$ , niin  $y \in M$ . Väite seuraa siis lauseesta 6.2. □

**Lause 6.7.** *Olkoon  $X$  joukko sekä  $F$  filtteri joukossa  $X$ . Olkoon edelleen  $f$  kuvaus joukolta  $X$  täydelliseen avaruuteen  $X'$ . Tällöin kuvauksella  $f$  on raja-arvo filtlerin  $F$  suhteen, jos ja vain jos joukko  $\{f(V) \subset X' \mid V \in F\}$  on Cauchyn filtterikanta.*

*Todistus.* Jos funktiolla  $f$  on raja-arvo filtlerin  $F$  suhteen, niin määritelmän 4.33 nojalla joukko  $B = \{f(V) \subset X' \mid V \in F\}$  on filtterikanta, sekä edelleen lauseen 5.6 nojalla joukko  $B$  on Cauchyn filtterikanta.

Kääntäen, jos  $B$  on Cauchyn filtterikanta, niin uniformisen avaruuden  $X'$  täydellisyyden sekä määritelmän 4.33 nojalla funktiolla  $f$  on raja-arvo.  $\square$

**Lause 6.8.** *Olkoot  $U_1$  ja  $U_2$  sellaisia joukon  $X$  uniformiteetteja, että  $U_1$  on hienompi kuin  $U_2$ . Olkoon lisäksi olemassa uniformiteetin  $U_1$  kanta, joka muodostuu topologian  $\tau_{U_2}$  tulotopologiassa suljetuista joukoista. Tällöin joukon  $X$  filtteri  $F$  suppenee topologiassa  $\tau_{U_1}$ , jos ja vain jos  $F$  on Cauchyn filtteri uniformiteetin  $U_1$  suhteen sekä suppenee topologiassa  $\tau_{U_2}$ . Erityisesti, jos  $(X, U_2)$  on täydellinen uniforminen avaruus, niin myös  $(X, U_1)$  on täydellinen uniforminen avaruus.*

*Todistus.* Oletetaan ensin, että filtteri  $F$  suppenee topologiassa  $\tau_{U_1}$  kohti pistettä  $x$ . Koska  $\tau_{U_1}$  on hienompi kuin  $\tau_{U_2}$ , niin  $F$  suppenee myös topologiassa  $\tau_{U_2}$ . Lauseen 5.6 nojalla  $F$  on Cauchyn filtteri uniformiteetin  $U_1$  suhteen.

Kääntäen olkoot ehdot voimassa. Olkoon  $x$  filtlerin  $F$  raja-arvo topologian  $\tau_{U_2}$  suhteen, jolloin  $x$  on myös filtlerin  $F$  klusteripiste. Jos  $W \in U_1$  on topologian  $\tau_{U_2}$  tulotopologiassa suljettu lähistö, niin  $V = W \cap \overline{W}^{-1}$  on symmetrinen uniformiteetin  $U_1$  lähistö, joka on suljettu tulotopologiassa. On olemassa  $V$ -pieni joukko  $M \in F$ . Olkoot  $x', x'' \in M$ . Pätee  $(x', x'') \in M \times M \subset V$ . Näin ollen  $M \subset V(x')$  aina, kun  $x' \in M$ . Toisaalta  $V(x')$  on suljettu topologiassa  $\tau_{U_2}$ , ja näin  $x \in \overline{M} \subset V(x')$ . Siispä, jos  $x' \in M$ , niin  $(x, x') \in V$ , ja edelleen  $M \subset V(x)$ . Lauseista 2.17 ja 2.23 seuraa, että väite on voimassa, sillä niiden mukaan muotoa  $V(x)$  olevat joukot muodostavat pisteen  $x$  ympäristökannan.

Viimeinen väite seuraa siitä, että jokainen Cauchyn filtteri uniformiteetin  $U_1$  suhteen on myös Cauchyn filtteri uniformiteetin  $U_2$  suhteen.  $\square$

**Lause 6.9.** *Jos  $U_1$  ja  $U_2$  ovat saman joukon  $X$  eri uniformiteetteja, jotka indusoivat saman topologian sekä  $U_1$  on hienompi  $U_2$ , joka on täydellinen, niin molemmat avaruudet  $(X, U_1)$  ja  $(X, U_2)$  ovat täydellisiä.*

*Todistus.* Lauseen 6.8 ehdot täyttyvät, sillä  $\tau_{U_1} = \tau_{U_2}$  sekä lauseesta 2.28 seuraa, että tulotopologiassa suljetut lähistöt joukot muodostavat aina uniformiteetin kannan.  $\square$

### 6.3 Täydellisten uniformisten avaruuksien aliavaruudet

Tutkitaan millaisin ehdoin täydellisyys periytyy aliavaruuksiin.

**Lause 6.10.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus ja  $A \subset X$ . Jos  $(X, U)$  on täydellinen ja  $A$  suljettu, niin myös  $(A, U_{X|A})$  on täydellinen. Edelleen, jos  $(X, \tau_U)$  on Hausdorff ja  $(A, U_{X|A})$  täydellinen, niin  $A$  on suljettu topologisessa avaruudessa  $(X, \tau_U)$ .*

*Todistus.* Inklusiokuvaus on tasaisesti jatkuva, joten lauseen 5.7 nojalla Cauchyn filtteri joukossa  $A$  on Cauchyn filtterikanta joukossa  $X$  ja näin ollen täydellisyyden nojalla suppenee kohti pistettä  $x$ . Koska  $A$  on suljettu, niin  $x \in A$ . Tällöin siis filtteri  $F$  suppenee aliavaruudessa  $A$ .

Olkoon  $(X, \tau_U)$  Hausdorff. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan on olemassa täydellinen uniformisen avaruuden  $X$  aliavaruus  $A$ , joka ei ole suljettu. Olkoon  $b \in \bar{A} \setminus A$ . Olkoon edelleen  $B(b)$  pisteen ympäristöfiltteri topologiassa  $\tau_U$ . Toisaalta pisteen  $b$  ympäristöfiltteri topologiassa  $\tau_{U|A}$  on joukko  $\{V \cap A \mid V \in B(b)\}$ , joka on Cauchyn filtterikanta täydellisessä aliavaruudessa  $A$  lauseen 5.9 nojalla ja siis suppenee kohti pistettä  $c \in A$ . Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä  $b \neq c$  ja  $X$  on Hausdorff.  $\square$

**Lause 6.11.** *Olkoon  $A$  uniformisen avaruuden  $(X, U)$  tiheä aliavaruus. Jos jokainen Cauchyn filtterikanta joukossa  $A$  suppenee avaruudessa  $X$ , niin  $(X, U)$  on täydellinen uniforminen avaruus.*

*Todistus.* Lauseen 5.16 nojalla jokainen minimaalisen Cauchyn filtlerin  $F$  kannan  $B$  joukko sisältää avoimen joukon, ja siis näin ollen minkään joukon  $M \in F$  sisäosa ei ole tyhjä. Tällöin joukon  $A$  tiheyden ja lauseen 4.19 nojalla joukko

$$B' = \{V \cap A \mid V \in F\}$$

on Cauchyn filtteri aliavaruudessa  $A$  ja suppenee kohti avaruuden  $X$  pistettä  $x_0$ . Edelleen lauseen 5.7 sekä inklusiokuvauksen tasaisen jatkuvuuden nojalla  $B'$  on Cauchyn filtterikanta avaruudessa  $X$  ja siis generoi avaruuteen  $X$  Cauchyn filtlerin  $F'$ . Koska  $F$  on karkeampi kuin  $F'$ , niin  $F$  suppenee kohti pistettä  $x_0$  lauseen 5.15 nojalla. Samoin lauseen 5.15 nojalla jokainen Cauchyn filtteri suppenee, koska jokainen minimaalinen Cauchyn filtteri suppenee.  $\square$

### 6.4 Täydellisten uniformisten avaruuksien tuloavaruudet

Todetaan seuraavaksi täydellisyyden säilyminen tuloissa.

**Lause 6.12.** *Täydellisten uniformisten avaruuksien tuloavaruus on täydellinen, jos mikään tekijä ei ole tyhjä joukko. Kääntäen, jos uniformisten avaruuksien tuloavaruus on täydellinen eikä jälleen mikään tekijä ole tyhjä joukko, niin jokainen tekijä on täydellinen.*

*Todistus.* Ensimmäinen väite seuraa välittömästi lauseista 5.10 sekä 4.36. Käänteisesti olkoon tuloavaruus  $X$  täydellinen uniforminen avaruus. Merkitään tekijöiden  $X_i$  Cauchyn filttereitä  $F_i$ :llä, sekä kiinnitetään indeksi  $i$ . Jokainen muotoa  $F = \prod_{i \in I} F_i$  oleva tulofiltteri on lauseen 5.8 nojalla Cauchyn filttteri tuloavaruudessa  $X$ , ja  $F$  suppenee täydellisyyden nojalla. Edelleen lauseen 4.36 nojalla projektio  $pr_i F = F_i$  suppenee.  $\square$

## 6.5 Tasaisesti jatkuvan kuvauksen laajennus

Tutkitaan sitten tasaisesti jatkuvien kuvausten laajentamista tasaisesti jatkuviksi kuvauksiksi. Tulokset ovat myöhemmin keskeisessä asemassa todistettaessa Hausdorffin ehdon täyttävän täydellistymän isomorfiavaikalle yksikäsitteisyyttä.

**Lause 6.13.** *Olkoon  $A$  topologisen avaruuden  $X$  tiheä osajoukko. Olkoon edelleen  $f$  kuvaus joukolta  $A$  täydelliseen uniformiseen avaruuteen  $(X', U')$ , jonka indusoima topologia  $\tau_{U'}$  on Hausdorff. Tällöin  $f$  voidaan laajentaa jatkuvaksi kuvaukseksi  $X \rightarrow X'$ , jos ja vain jos jokaisen topologisen avaruuden  $X$  pisteen  $x$  ympäristöjen jälkien muodostaman joukon  $A$  filtlerin kuvajoukko  $\{f(N \cap A) \mid N \in B(x)\}$  on Cauchyn filtterikanta uniformisessa avaruudessa  $X'$ .*

*Todistus.* Funktio  $f$  on joukon  $X \times X'$  osajoukko. Olkoon  $(x, x') \in X \times X'$ . On voimassa  $(x, x') \in \bar{f}$  tarkalleen silloin, kun on olemassa joukon  $A$  filttteri  $F$ , jonka raja-arvo piste  $x$  on ja lisäksi joukon  $X'$  filtterikannan  $\{f(N) \mid N \in F\}$  raja-arvo on piste  $x'$ . Koska  $\bar{A} = X$ , niin jokaisen  $x \in X$  ympäristöfilttlerin jälki joukossa  $A$  voidaan valita filtteriksi  $F$ . Tällöin lauseen ehdon ja avaruuden  $X'$  täydellisyyden perusteella on olemassa  $x' \in X'$ , joka täyttää vaatimuksen. Tällöin  $(x, x') \in \bar{f}$ . Koska  $X'$  on Hausdorff, on  $x'$  yksikäsitteinen, ja sulkeuma  $\bar{f}$  on funktio. Lisäksi edellä todetun ja lauseen 4.35 nojalla  $\bar{f}$  on jatkuva funktio.

Kääntäen, jos  $f'$  on jokin kuvauksen  $f$  jatkuva laajennus ja  $B(x)$  jonkin pisteen  $x \in X$  ympäristöfilttteri, niin filtterikanta  $\{f'(N) \mid N \in B(x)\}$  suppenee kohti pistettä  $f'(x)$  lauseen 4.35 perusteella. Aina  $f(N \cap A) \subset f(N)$ , jolloin filtterikanta  $\{f(N \cap A) \mid N \in B(x)\}$  myös suppenee kohti pistettä  $f'(x)$  ja on näin lauseen 5.6 nojalla Cauchyn filtterikanta.  $\square$

**Lause 6.14.** *Olkoon  $f$  kuvaus uniformisen avaruuden  $X$  tiheältä osajoukolta  $A$  täydelliseen Hausdorffin uniformiseen avaruuteen  $X'$ . Jos  $f$  on tasaisesti jatkuva, niin  $f$  voidaan laajentaa tasaisesti jatkuvaksi kuvaukseksi  $X \rightarrow X'$ .*

*Todistus.* Koska lauseesta 5.7 seuraa, että lauseen 6.13 ehto on voimassa, niin on olemassa jatkuva laajennus  $\bar{f}$ . Olkoon  $V'$  avaruuden  $X'$  suljettu symmetrinen lähistö. Tällöin on olemassa sellainen avaruuden  $X$  lähistö  $V$ , että jos  $x, y \in V \cap A$ , niin  $(f(x), f(y)) \in V'$ . Lauseen 2.50 nojalla on olemassa sellainen avaruuden

$(A, U_{X|A})$  lähistö  $W$ , että  $\overline{W} \subset V$ . Koska  $\overline{f}$  on jatkuva, niin myös  $\overline{f} \times \overline{f}$  on jatkuva tulotopologiassa. Tällöin, koska on voimassa  $(f(x), f(y)) \in V'$  aina, kun  $(x, y) \in W \subset V \cap A$ , niin on myös voimassa ehto  $(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) \in V'$  aina, kun  $(x, y) \in \overline{W}$ , sillä  $V'$  on suljettu tulotopologiassa. Näin väite seuraa, koska lauseen 2.28 perusteella jokainen avaruuden  $X'$  lähistö sisältää suljetun ja symmetrisen lähistön.  $\square$

**Lemma 6.15.** *Olko  $X$  ja  $Y$  Hausdorffin topologisia avaruuksia sekä  $A \subset X$  ja  $B \subset Y$  tiheitä osajoukkoja. Olkoon kuvaus  $f : A \rightarrow B$  jatkuva. Kuvauksella  $f$  voi olla vain yksi laajennus jatkuvaksi kuvaukseksi  $X \rightarrow Y$ .*

*Todistus.* Olko  $g, g'$  kuvauksen  $f$  jatkuvia laajennuksia. Olkoon  $W = \{x \in X \mid g(x) = g'(x)\}$  sekä  $y \in W^c$ . Tällöin siis  $g(y) \neq g'(y)$ . On olemassa pisteiden  $g(y)$  ja  $g'(y)$  erilliset ympäristöt  $U_{g(y)}$  ja  $U_{g'(y)}$ . Kuvausten  $g$  ja  $g'$  jatkuvuuden nojalla on olemassa sellaiset pisteen  $y$  ympäristöt  $V_{g(y)}$  ja  $V_{g'(y)}$ , että  $g(z) \in U_{g(y)}$  aina, kun  $z \in V_{g(y)}$ , sekä vastaavasti  $g'(z) \in U_{g'(y)}$  aina, kun  $z \in V_{g'(y)}$ . Olkoon sitten  $V = V_{g(y)} \cap V_{g'(y)} \neq \emptyset$ , jolloin  $V$  on pisteen  $y$  ympäristö. Jos  $z \in V$ , niin  $g(z) \in U_{g(y)}$  sekä  $g'(z) \in U_{g'(y)}$ . Tällöin on oltava  $g(z) = g'(z)$ , koska ympäristöt ovat erilliset ja siis  $z \in W$ . Näin ollen  $W$  on avoimen joukon komplementtina suljettu.

Toisaalta  $A \subset W$ , jolloin  $X = \overline{A} \subset W$ . Tällöin  $W = X$  ja  $g = g'$ . Laajennus on siis yksikäsitteinen.  $\square$

**Lemma 6.16.** *Olkoon  $X$  Hausdorffin topologinen avaruus sekä  $A \subset X$  tiheä. Identtisen kuvauksen  $A \rightarrow A$  ainoa jatkuva laajennus kuvaukseksi  $X \rightarrow X$  on identtinen kuvaus.*

*Todistus.* Selvästi identtinen kuvaus  $X \rightarrow X$  on jatkuva. Toisaalta lemmän 6.15 nojalla laajennus on yksikäsitteinen.  $\square$

**Lause 6.17.** *Olko  $X$  ja  $X'$  täydellisiä Hausdorffin uniformisia avaruuksia. Olkoon edelleen  $A$  avaruuden  $X$  ja  $A'$  avaruuden  $X'$  tiheä aliavaruus. Jokainen isomorfismi  $f : A \rightarrow A'$  voidaan laajentaa isomorfismiksi  $\overline{f} : X \rightarrow X'$ .*

*Todistus.* Isomorfismina  $f$  on tasaisesti jatkuva ja voidaan siksi lauseen 6.14 nojalla laajentaa tasaisesti jatkuvaksi kuvaukseksi  $\overline{f} : X \rightarrow X'$ . Vastaavasti myös  $f^{-1}$  on tasaisesti jatkuva ja voidaan laajentaa tasaisesti jatkuvaksi kuvaukseksi  $\overline{f^{-1}} : X' \rightarrow X$ . Näin ollen kahden tasaisesti jatkuvan kuvauksen kompositio  $\overline{f^{-1}} \circ \overline{f} = g$  on tasaisesti jatkuva. Kuvauksen  $g$  rajoittuma joukkoon  $A$  on identtinen kuvaus. Samalla tavoin kuvauksen  $\overline{f} \circ \overline{f^{-1}} = g'$  rajoittuma joukkoon  $A'$  on identtinen kuvaus. Lemman 6.16 perusteella  $g$  ja  $g'$  ovat identtisiä kuvauksia. Tällöin kuvaukset  $\overline{f}$  ja  $\overline{f^{-1}}$  ovat bijektioita sekä siis tasaisesti jatkuvia ja toistensa käänteiskuvauksia.  $\square$

## 6.6 Surjektion koindusoima uniformiteetti

Koska jokainen lähistö sisältää diagonaalin, niin koindusoitua uniformiteettia ei indusoidusta uniformiteetista poiketen voida yleisesti määritellä analogisesti topologisen käsitteen kanssa. Tutkitaan kuitenkin tulevia tarkasteluja varten lyhyesti yhden surjektiivisen kuvauksen koindusoimaa uniformiteettia.

**Lause 6.18.** *Olkoon  $Y$  joukko sekä  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Olkoon lisäksi  $f : X \rightarrow Y$  surjektiivinen kuvaus. Joukko*

$$U' = \{V \subset Y \times Y \mid (f \times f)^{-1}(V) \in U\}$$

*on joukon  $Y$  uniformiteetti.*

*Todistus.* Olkoon  $(f \times f)^{-1}(V), (f \times f)^{-1}(V') \in U$ . Tällöin

$$(f \times f)^{-1}(V \cap V') = (f \times f)^{-1}(V) \cap (f \times f)^{-1}(V') \in U,$$

ja näin aksiooma f 2 toteutuu. Jos  $(f \times f)^{-1}(V) \in U$  ja  $V' \supset V$ , niin

$$(f \times f)^{-1}(V') \supset (f \times f)^{-1}(V) \in U,$$

ja näin myös aksiooma f 3 toteutuu. Jos  $(f \times f)^{-1}(V) \in U$ , niin

$$\Delta_X \subset (f \times f)^{-1}(V).$$

Näin ollen, koska selvästi  $\Delta_Y = (f \times f)(\Delta_X)$ , niin  $\Delta_Y \subset V$ , ja ehto u 1 täyttyy.

Lisäksi  $(f \times f)^{-1}(V) = (f \times f)^{-1}(\overline{V}^{-1})$ , ja myös ehto u 2 on voimassa.

Olkoon sitten  $V \in U'$ . On olemassa sellainen  $W \in U$ , että  $\overline{W}^2 \subset (f \times f)^{-1}(V)$ . Tällöin  $(f \times f)(\overline{W}^2) \subset V$ . Käytetään merkintää  $W' = (f \times f)(W)$ , jolloin

$$(f \times f)^{-1}(W') = (f \times f)^{-1}[(f \times f)(W)] \supset W \in U.$$

Näin  $W' \in U'$ . Olkoon  $(x, y) \in \overline{W'}^2$ . On olemassa sellainen  $z \in Y$ , jolle  $(x, z), (z, y) \in W' = (f \times f)(W)$ . On siis olemassa sellaiset  $x', y', z' \in X$ , joille  $(x', z'), (z', y') \in W$  ja lisäksi  $f(x') = x, f(y') = y$  sekä  $f(z') = z$ . Tällöin  $(x', y') \in \overline{W}^2$ . Edelleen  $(x, y) \in V$ , koska  $(f \times f)(\overline{W}^2) \subset V$ . Näin myös ehto u 3 täyttyy.  $\square$

**Määritelmä 6.19.** Lauseen 6.18 perusteella olemassa olevaa uniformiteettia kutsutaan surjektion  $f$  koindusoimaksi uniformiteetiksi.

**Lause 6.20.** *Surjektiivisen kuvauksen  $f$  koindusoima uniformiteetti  $U'$  on hienoin niistä joukon  $Y$  uniformiteeteista, joiden suhteen kuvaus  $f$  on tasaisesti jatkuva.*

*Todistus.* Selvästi kuvaus  $f$  on tasaisesti jatkuva koindusoidun uniformiteetin  $U'$  suhteen. Olkoon  $U''$  jokin uniformiteetti, jonka suhteen kuvaus  $f$  on tasaisesti jatkuva. Olkoon sitten  $V \in U''$ , jolloin  $(f \times f)^{-1}(V) \in U$ , koska  $f$  on tasaisesti jatkuva. Näin  $V \in U'$ .  $\square$

**Lause 6.21.** *Olkoon  $U'$  surjektion  $f$  joukkoon  $Y$  koindusoima uniformiteetti. Olkoon lisäksi  $(Z, U'')$  uniforminen avaruus sekä kuvaus  $g : Y \rightarrow Z$ . Kuvaus  $g$  on tasaisesti jatkuva, jos ja vain jos  $g \circ f$  on tasaisesti jatkuva.*

*Todistus.* Olkoon ensin  $g$  tasaisesti jatkuva, jolloin  $g \circ f$  on tasaisesti jatkuva tasaisesti jatkuvien kuvausten yhdisteenä. Olkoon sitten kääntäen  $g \circ f$  tasaisesti jatkuva sekä  $V \in U''$ . Tällöin  $(f \times f)^{-1}[(g \times g)^{-1}(V)] = (g \circ f \times g \circ f)^{-1}(V) \in U$ . Näin  $(g \times g)^{-1}(V) \in U'$ , ja  $g$  on tasaisesti jatkuva.  $\square$

**Lause 6.22.** *Olkoon  $f : X \rightarrow Y$  surjektio. Joukkoon  $Y$  koindusoitu uniformiteetti  $U'$  on joukko  $\{(f \times f)(V) \mid V \in U\}$ .*

*Todistus.* Olkoon  $V \in U$ . Tällöin  $(f \times f)^{-1}(f \times f)(V) \supset V$ , ja aksiooman f 3 nojalla  $(f \times f)^{-1}(f \times f)(V) \in U$ . Näin  $(f \times f)(V) \in U'$ .

Kääntäen olkoon  $V \in U'$ , jolloin

$$(f \times f)^{-1}(V) \in U.$$

Näin  $V = (f \times f)(f \times f)^{-1}(V)$ , ja väite seuraa.  $\square$

**Lause 6.23.** *Olkoon  $X$  joukko sekä  $(Y, U)$  uniforminen avaruus. Olkoon lisäksi  $f : X \rightarrow Y$  surjektiivinen kuvaus. Kuvaus  $f$  induoi uniformiteetin  $U'$  joukkoon  $X$ . Tällöin  $U = \{(f \times f)(V) \mid V \in U'\}$ , ja siis  $U$  on sama kuin surjektion  $f$  koindusoima uniformiteetti, jos lähtöjoukossa on induoitu uniformiteetti.*

*Todistus.* Olkoon  $V \in U'$ . On olemassa sellainen  $V' \in U$ , että  $(f \times f)^{-1}(V') \subset V$ , jolloin  $(f \times f)(V) \supset (f \times f)[(f \times f)^{-1}(V')] = V'$ , joten  $(f \times f)(V) \in U$ . Kääntäen olkoon  $V' \in U$ , jolloin  $(f \times f)^{-1}(V') \in U'$ . Toisaalta

$$(f \times f)[(f \times f)^{-1}(V')] = V'.$$

$\square$

**Lause 6.24.** *Olko  $(X, U)$  ja  $(X', U')$  sellaisia uniformisia avaruuksia, että avaruuden  $X$  virittää pseudometriikkojen kokoelma  $P$  sekä avaruuden  $X'$  virittää pseudometriikkojen kokoelma  $P'$ . Olkoon lisäksi  $f : X \rightarrow X'$  surjektiivinen kuvaus ja  $g : P \rightarrow P'$  bijektio. Jos  $f$  on isometria pseudometriikkojen  $d$  ja  $g(d)$  suhteen aina, kun  $d \in P$ , niin uniformiteetti  $U'$  on kuvauksen  $f$  koindusoima uniformiteetti, sekä  $U$  on kuvauksen  $f$  induoitu uniformiteetti.*

*Todistus.* Todetaan ensin, että isometrisyyden nojalla ehdot  $(x, y) \in V_{d,\epsilon}$  ja  $(f(x), f(y)) \in V_{g(d),\epsilon}$  ovat yhtäpitäviä. Näin ollen

$$(f \times f)(\cap_{d \in K} V_{d,\epsilon_d}) = \cap_{g^{-1}(d') \in K} V_{d',\epsilon_{g^{-1}(d')}},$$

sekä

$$\cap_{d \in K} V_{d,\epsilon_d} = (f \times f)^{-1}(\cap_{g^{-1}(d') \in K} V_{d',\epsilon_{g^{-1}(d')}})$$

aina, kun  $K \subset P$  on äärellinen ja jokainen  $\epsilon_d > 0$ . Olkoon  $V \in U$ . On olemassa sellainen äärellinen  $K \subset P$  sekä jokaista  $d \in K$  kohti luku  $\epsilon_d > 0$ , että  $\cap_{d \in K} V_{d,\epsilon_d} \subset V$ . Tällöin  $(f \times f)(V) \supset (f \times f)(\cap_{d \in K} V_{d,\epsilon_d}) = \cap_{g^{-1}(d') \in K} V_{d',\epsilon_{g^{-1}(d')}} \in U'$ , joten  $(f \times f)(V) \in U'$ . Toisaalta, jos  $V' \in U'$ , niin on olemassa sellainen äärellinen  $K \subset P$ , että  $\cap_{g^{-1}(d') \in K} V_{d',\epsilon_{g^{-1}(d')}} \subset V'$ . Tällöin

$$(f \times f)^{-1}(V') \supset (f \times f)^{-1}(\cap_{g^{-1}(d') \in K} V_{d',\epsilon_{g^{-1}(d')}}) = \cap_{d \in K} V_{d,\epsilon_d} \in U$$

jollekin äärelliselle  $K \subset P$ . Seuraa, että  $(f \times f)^{-1}(V') \in U$ . Koska lisäksi

$$(f \times f)(f \times f)^{-1}(V') = V',$$

niin on todettu, että  $U' = \{(f \times f)(V) \mid V \in U\}$ , ja ensimmäinen väite on voimassa lauseen 6.22 perusteella.

Olkoon  $U''$  kuvauksen  $f$  indusoima uniformiteetti. Jos  $V'' \in U''$ , niin on olemassa sellainen  $V' \in U'$ , että  $(f \times f)^{-1}(V') \subset V''$ . Toisaalta on olemassa sellainen äärellinen  $K \subset P$  ja luvut  $\epsilon_d > 0$ , että  $\cap_{g^{-1}(d') \in K} V_{d',\epsilon_{g^{-1}(d')}} \subset V'$ . Tällöin

$$\cap_{d \in K} V_{d,\epsilon_d} = (f \times f)^{-1}(\cap_{g^{-1}(d') \in K} V_{d',\epsilon_{g^{-1}(d')}}) \subset (f \times f)^{-1}(V') \subset V''.$$

Näin  $V'' \in U$ . Olkoon sitten  $V \in U$ . On jälleen olemassa jokin  $\cap_{d \in K} V_{d,\epsilon_d} \subset V$ . Toistaalta  $W = (f \times f)(\cap_{d \in K} V_{d,\epsilon_d}) \in U'$ . Näin  $(f \times f)^{-1}(W) \in U''$ , mutta

$$\cap_{d \in K} V_{d,\epsilon_d} = (f \times f)^{-1}(f \times f)(\cap_{d \in K} V_{d,\epsilon_d}) = (f \times f)^{-1}(W).$$

Aksioomasta f 3 seuraa, että  $V \in U''$ . □

**Lause 6.25.** *Olkoot  $(X, U)$  ja  $(X', U')$  sellaisia uniformisia avaruuksia, että avaruuden  $X$  virittää pseudometriikkojen kokoelma  $P$  sekä avaruuden  $X'$  virittää pseudometriikkojen kokoelma  $P'$ . Olkoon lisäksi  $f : X \rightarrow X'$  kuvaus ja  $g : P \rightarrow P'$  bijektio. Jos  $f$  on isometria pseudometriikkojen  $d$  ja  $g(d)$  suhteen aina, kun  $d \in P$ , niin  $U$  on kuvauksen  $f$  indusoima uniformiteetti.*

*Todistus.* Lauseesta 6.24 seuraa, että  $f$  määrittelee sellaisen surjektiivisen kuvauksen  $f' : X \rightarrow f(X)$ , joka indusoi joukkoon  $X$  uniformiteetin  $U$ , kun joukossa  $f(X)$  on relatiiviuniformiteetti  $U'_{X'|f(X)}$ . Toisaalta relatiiviuniformiteetti on inklusiokuvauksen  $i : f(X) \rightarrow X'$  indusoima, sekä  $f = i \circ f'$ . Tällöin indusoinnin transitiivisuutta koskevasta lauseesta 2.45 seuraa, että kuvaus  $f$  indusoi joukkoon  $X$  saman uniformiteetin kuin kuvaus  $f'$ . □

## 6.7 Uniformisen avaruuden täydellistymä

Viimein voidaan konstruoida yleisesti uniformisen avaruuden täydellistymät filttiereiden muodostamina avaruuksina.

**Määritelmä 6.26.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Määritellään joukko  $\tilde{X}$  kaikkien avaruuden  $X$  Cauchyn filttiereiden kokoelmana sekä edelleen joukon  $\tilde{X}$  osajoukko  $\hat{X}$  kaikkien avaruuden  $X$  minimaalisten Cauchyn filttiereiden kokoelmana.

**Huomautus 6.27.** Seuraavissa todistuksissa pidetään reaalilukujen täydellisyttä tunnettuna. Tämä ei olisi välttämätöntä, vaan duaaliavaruuden  $\hat{X}$  uniformiteetti voitaisiin määritellä muutenkin ja siten saada erityistapauksena reaaliluvut rationaalilukujen avaruuden täydellistymänä.

**Lemma 6.28.** *Olkoot  $F$  ja  $F'$  Cauchyn filttiereitä uniformisessa avaruudessa  $(X, U)$ , sekä olkoon  $P$  jokin pseudometriikkojen kokoelma, joka virittää avaruuden. Tällöin on olemassa jokaista  $d \in P$  kohti sellainen positiivinen reaaliluku  $\epsilon$  ja sellainen joukko  $M$ , että  $M \in F \cap F'$  sekä joukko  $M$  on  $V_{d, \epsilon}$ -pieni.*

*Todistus.* Valitaan ensin jokin positiivinen reaaliluku  $\epsilon'$ . Koska  $F$  ja  $F'$  ovat Cauchyn filttiereitä, voidaan valita sellainen joukko  $A \in F$  sekä sellainen joukko  $B \in F'$ , että  $A$  ja  $B$  ovat  $V_{d, \epsilon'}$ -pieniä. Olkoon

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

sekä  $M = A \cup B$ . Jos  $(x, y) \in M \times M$ , niin pisteet  $x$  ja  $y$  joko molemmat kuuluvat jompaan kumpaan joukkoon  $A$  tai  $B$ , tai sitten toinen pisteistä kuuluu joukkoon  $A$  ja toinen joukkoon  $B$ . Ensimmäisessä tapauksessa on suoraan voimassa  $d(x, y) < \epsilon'$ . Jälkimmäisessä tapauksessa voidaan valita jokaista positiivista reaalilukua  $\epsilon''$  kohti sellaiset  $x' \in A$  ja  $y' \in B$ , että  $d(x', y') < d(A, B) + \epsilon''$ . Tällöin on kolmioepäyhtälön nojalla voimassa  $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) < \epsilon' + d(A, B) + \epsilon'' + \epsilon'$ . Voidaan siis valita  $\epsilon = d(A, B) + 2\epsilon' + \epsilon''$ , jolloin  $M \times M \subset V_{d, \epsilon}$ .  $\square$

**Lause 6.29.** *Olkoon  $(X, U)$  pseudometriikkojen kokoelman  $P$  virittämä uniforminen avaruus ja  $d \in P$ . Voidaan määritellä kuvaus  $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow [0, \infty)$  seuraavasti:*

$$\tilde{d}(F, F') = \inf\{\epsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists M \in F \cap F')(M \times M \subset V_{d, \epsilon})\}.$$

Tällöin  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  on pseudometrinen avaruus, jolla on aliavaruus  $(\hat{X}, \hat{d})$ , missä merkitään  $\hat{d}$ :llä kuvauksen  $\tilde{d}$  rajoittumaa joukkoon  $\hat{X} \times \hat{X}$ .

*Todistus.* Kuvaus  $\tilde{d}$  on voidaan määritellä, koska lemmän 6.28 nojalla joukko  $S_{F,F'} = \{\epsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists M \in F \cap F')(M \times M \subset V_{d,\epsilon})\}$  on epätyhjä. Joukko on myös alhaalta rajoitettu, joten suurin alaraja on täydellisyysaksiooman perusteella yksikäsitteisenä olemassa.

Ehto  $\tilde{d}(F, F) = 0$  on voimassa, koska Cauchyn filteriin  $F$  kuuluu  $V_{d,\epsilon}$ -pieni joukko aina, kun  $\epsilon > 0$ . Kuvauksen  $\tilde{d}$  symmetrisyys on ilmeistä.

Kolmioepäyhtälö seuraa siitä, että jokaista positiivista reaalilukua  $\epsilon$  kohti voidaan valita  $V_{d,\tilde{d}(F,F')+\epsilon}$ -pieni joukko  $M$  joukosta  $F \cap F'$  sekä  $V_{d,\tilde{d}(F',F'')+\epsilon}$ -pieni joukko  $M'$  joukosta  $F' \cap F''$  aina, kun  $F, F', F'' \in \tilde{X}$ . Tällöin joukko  $M \cup M'$  kuuluu sekä filteriin  $F$  että filteriin  $F''$  aksiooman f 3 perusteella. Lisäksi  $M, M' \in F'$ , joten  $M \cap M' \neq \emptyset$ . On siis olemassa  $z \in M \cap M'$ . Jos esimerkiksi  $x, y \in M$ , niin on suoraan voimassa  $d(x, y) \leq \tilde{d}(F, F') + \epsilon$ . Oletetaan yleisyyttä rajoittamatta, että  $x \in M$  sekä  $y \in M'$ . Näin voidaan todeta, että

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \tilde{d}(F, F') + \epsilon + \tilde{d}(F', F'') + \epsilon$$

aina, kun  $x, y \in M \cup M'$ . Saadaan epäyhtälö

$$\tilde{d}(F, F'') < \tilde{d}(F, F') + \tilde{d}(F', F'') + 2\epsilon,$$

missä  $\epsilon$  voidaan valita mielivaltaisen pieneksi. □

**Lemma 6.30.** *Olkoon  $x$  uniformisen avaruuden  $(X, U)$  piste. Merkitään  $F$ :llä pisteen  $x$  ympäristöfiltteriä topologiassa  $\tau$ , joka on hienompi kuin  $\tau_U$ . Tällöin  $F$  on Cauchyn filteri, joka on hienompi kuin pisteen  $x$  ympäristöfiltteri  $B(x)$  uniformiteetin indusoimassa topologiassa  $\tau_U$ .*

*Todistus.* Koska topologia on hienompi kuin  $\tau_U$ , niin  $B(x) \subset F$ . Tällöin  $F$  on Cauchyn filteri, koska  $B(x)$  on Cauchyn filteri. □

**Määritelmä 6.31.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus ja  $x \in X$ . Olkoon edelleen  $\tau$  jokin topologian  $\tau_U$  hienonnuks, toisin sanoen  $\tau_U \subset \tau$ . Merkitään  $B(x)$ :llä pisteen  $x$  ympäristöfiltteriä topologiassa  $\tau$ . Filteri  $B(x)$  on lauseen 6.30 perusteella Cauchyn filteri. Tällöin voidaan määritellä kuvaukset  $i_\tau : X \rightarrow \tilde{X}$  asettamalla  $i_\tau(x) = B(x)$ . Erityisesti kuvaus  $i_{\tau_U}$  määrittelee *kanonisen kuvauksen*  $i : X \rightarrow \hat{X}$ . Olkoon sitten  $\tau_0$  joukon  $X$  diskreetti topologia. Käytetään merkintää  $i_0$  kuvaukselle  $i_{\tau_0}$ .

**Määritelmä 6.32.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $\tau$  jokin topologian  $\tau_U$  hienonnuks. Joukko  $i_\tau(X)$  on pseudometrisen avaruuden  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  aliavaruus, kun määritellään pseudometriikka  $d_\tau$  pseudometriikan  $\tilde{d}$  rajoittumana.

**Lemma 6.33.** *Olkoon  $(X, U)$  pseudometriikkojen  $P$  virittämä uniforminen avaruus ja  $d \in P$ . Kanoninen kuvaus  $i$  on isometria.*

*Todistus.* Olkoot  $x, y \in X$ . Olkoon  $\epsilon > 0$  ja

$$U = \{z \in X \mid d(x, z) < \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{z \in X \mid d(y, z) < \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Selvästi  $U$  on pisteiden  $x$  ja  $y$  yhteinen ympäristö topologiassa  $\tau_U$ . Olkoon  $(u, v) \in U \times U$ . Tällöin

$$d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, y) + d(y, v) \leq \frac{\epsilon}{2} + d(x, y) + \frac{\epsilon}{2} = d(x, y) + \epsilon.$$

Näin ollen joukko  $U$  on  $V_{d, d(x+y)+\epsilon}$ -pieni, ja on oltava voimassa  $\tilde{d}(i(x), i(y)) \leq d(x, y)$ .

Olkoon taas  $\epsilon > 0$ . Tehdään vastaoletus, että on olemassa jokin  $V_{d, d(x,y)-\epsilon}$ -pieni topologian  $\tau_U$  pisteiden  $x$  ja  $y$  yhteinen ympäristö  $A$ . Tällöin olisi voimassa  $(x, y) \in A \times A \subset V_{d, d(x,y)-\epsilon}$ , ja näin ollen pätsi  $d(x, y) < d(x, y) - \epsilon$ . Siispä  $\tilde{d}(i(x), i(y)) \geq d(x, y)$ .  $\square$

**Lemma 6.34.** *Olkoon  $(X, U)$  pseudometriikkojen  $P$  virittämä uniforminen avaruus ja  $d \in P$ . Kuvaus  $i_0$  on isometria.*

*Todistus.* Jos  $d(x, y) = 0$ , niin  $(x, y) \in V_{d, \epsilon}$  aina, kun  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ . Tällöin esimerkiksi joukko  $\{x, y\}$  on pisteiden  $x$  ja  $y$  yhteinen  $V_{d, \epsilon}$ -pieni ympäristö diskreetissä topologiassa. Näin ollen  $\tilde{d}(i_0(x), i_0(y)) = 0$ .

Olkoon nyt  $d(x, y) > 0$ . Tehdään vastaoletus, että on olemassa jokin  $V_{d, d(x,y)-\epsilon}$ -pieni joukko  $A$ , jolle pätee  $x, y \in A$ . Tällöin olisi voimassa  $(x, y) \in A \times A \subset V_{d, d(x,y)-\epsilon}$ , ja näin ollen pätsi  $d(x, y) < d(x, y) - \epsilon$ . Siispä  $\tilde{d}(i_0(x), i_0(y)) \geq d(x, y)$ . Toisaalta joukko  $\{x, y\}$  on pisteiden  $V_{d, d(x,y)}$ -pieni yhteinen ympäristö diskreetissä topologiassa, ja siis  $\tilde{d}(i_0(x), i_0(y)) \leq d(x, y)$ .  $\square$

**Lemma 6.35.** *Olkoon  $(X, U)$  pseudometriikkojen  $P$  virittämä uniforminen avaruus ja  $d \in P$ . Olkoon lisäksi  $\tau$  topologia, jolle  $\tau_U \subset \tau$ . Tällöin on voimassa*

$$\tilde{d}(i_0(x), i_0(y)) \leq d_\tau(i_\tau(x), i_\tau(y)) \leq \hat{d}(i(x), i(y))$$

*aina, kun  $x, y \in X$ .*

*Todistus.* Olkoon  $x \in X$ . Koska  $\tau_U \subset \tau \subset \tau_0$ , missä  $\tau_0$  on joukon  $X$  diskreetti topologia, niin  $i(x) \subset i_\tau(x) \subset i_0(x)$ . Näin ollen

$$\begin{aligned} & \{\epsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists M \in i(x) \cap i(y))(M \times M \subset V_{d, \epsilon})\} \subset \\ & \subset \{\epsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists M \in i_\tau(x) \cap i_\tau(y))(M \times M \subset V_{d, \epsilon})\} \subset \\ & \subset \{\epsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists M \in i_0(x) \cap i_0(y))(M \times M \subset V_{d, \epsilon})\} \end{aligned}$$

aina, kun  $x, y \in X$ , mistä infimumeja koskeva väite heti seuraa.  $\square$

**Lause 6.36.** *Olkoon  $(X, U)$  pseudometriikkojen  $P$  virittämä uniforminen avaruus ja  $d \in P$ . Olkoon lisäksi  $\tau$  topologia, jolle  $\tau_U \subset \tau$ . Kuvaus  $i_\tau$  on isometria, toisin sanoen on aina voimassa  $d(x, y) = d_\tau(i_\tau(x), i_\tau(y))$ , kun  $x, y \in X$ .*

*Todistus.* Soveltamalla lemmoja 6.33, 6.34 ja 6.35 saadaan yhtälö

$$d(x, y) = \tilde{d}(i_0(x), i_0(y)) \leq d_\tau(i_\tau(x), i_\tau(y)) \leq \hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y).$$

On siis oltava voimassa yhtäsuuruus, mistä väite seuraa.  $\square$

**Määritelmä 6.37.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $P$  jokin kokoelma pseudometriikkoja, joka virittää uniformiteetin  $U$ . Käytetään merkintää  $\tilde{P} = \{\tilde{d} \mid d \in P\}$ . Pseudometriikat  $\tilde{P}$  virittävät joukkoon  $\tilde{X}$  uniformiteetin, jota merkitään  $\tilde{U}$ :lla. Vastaavasti merkitään  $\hat{U}$ :lla pseudometriikkojen  $\hat{P} = \{\hat{d} \mid d \in P\}$  joukkoon  $\hat{X}$  virittämää uniformiteettia.*

**Huomautus 6.38.** *Isometrisyyttä koskevat tulokset implikoivat, että määräytyy kuvaus  $P \rightarrow \tilde{P}$ , joka on bijektio. Jos avaruuden  $X$  virittäjäjistiköön kuuluvat eri pseudometriikat  $d_1$  ja  $d_2$  kuvautuisivat samaksi avaruuden  $\tilde{X}$  pseudometriikaksi  $\tilde{d}$ , niin olisi ristiriitaisesti voimassa  $d_1(x, y) = \tilde{d}(x, y) = d_2(x, y)$  aina, kun  $x, y \in X$ .*

**Lause 6.39.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Olkoon lisäksi  $\tau$  jokin topologiaa  $\tau_U$  hienompi topologia. Jos joukossa  $\tilde{X}$  on uniformiteetti  $\tilde{U}$ , niin kuvaus  $i_\tau$  indusoi joukkoon  $X$  sen alkuperäisen uniformiteetin  $U$ .*

*Todistus.* Seuraa välittömästi huomautuksesta 6.38 sekä lauseesta 6.25.  $\square$

**Lause 6.40.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Olkoon lisäksi  $\tau$  topologia, jolle  $\tau_U \subset \tau$ . Tällöin kuvaus  $i_\tau$  on tasaisesti jatkuva, kun joukossa  $\tilde{X}$  on uniformiteetti  $\tilde{U}$ . Jos  $i_\tau$  on injektio, niin kuvajoukossa määritelty käänteiskuvaus  $i_\tau^{-1} : i_\tau(X) \rightarrow X$  on myös tasaisesti jatkuva.*

*Todistus.* Kuvauksen  $i_\tau$  tasainen jatkuvuus seuraa välittömästi lauseesta 6.39. Toisaalta, jos  $i_\tau$  on injektio, niin myös kuvaus  $i_\tau^{-1}$  on vastaavalla tavalla isometrinen, ja voidaan täysin samoin kuin lauseen 6.39 todistuksessa todeta, että  $i_\tau^{-1}$  indusoi joukkoon  $i_\tau(X)$  avaruudelta  $(\tilde{X}, \tilde{U})$  perityn relatiiviuniformiteetin, mistä väite heti seuraa.  $\square$

**Lemma 6.41.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus, jonka virittää pseudometriikkojen kokoelma  $P$ . Olkoon  $S \subset U$  symmetristen lähistöjen joukko. Muotoa*

$$\tilde{V} = \{(F, F') \in \tilde{X} \times \tilde{X} \mid (\exists M \in F \cap F')(M \times M \subset V)\},$$

*missä  $V \in S$ , olevat joukot  $\tilde{S}$  muodostavat uniformisen avaruuden  $(\tilde{X}, \tilde{U})$  kannan. Vastaavasti muotoa*

$$\hat{V} = \{(F, F') \in \hat{X} \times \hat{X} \mid (\exists M \in F \cap F')(M \times M \subset V)\},$$

missä  $V \in S$ , ovat joukot  $\widehat{S}$  muodostavat uniformisen avaruuden  $(\widehat{X}, \widehat{U})$  kannan.

*Todistus.* Olkoon  $V \in S$  ja vastaavasti  $\widetilde{V} \in \widetilde{S}$ . On olemassa äärellinen  $K \subset P$  ja luvut  $\epsilon_d > 0$ , joille  $\bigcap_{d \in K} V_{d, \epsilon_d} \subset V$ . Tällöin selvästi  $\bigcap_{\widetilde{d} \in \widetilde{K}} V_{\widetilde{d}, \epsilon_d} \subset \widetilde{V}$ , kun käytetään merkintää  $\widetilde{K} = \{\widetilde{d} \mid d \in K\}$ . Näin aksioomasta f 3 seuraa, että  $\widetilde{V} \in \widetilde{U}$ . Toisaalta jokainen  $\widetilde{W} \in \widetilde{U}$  sisältää jonkin muotoa  $\bigcap_{\widetilde{d} \in \widetilde{K}} V_{\widetilde{d}, \epsilon_d}$  olevan äärellisen leikkauksen. Tällöin  $\bigcap_{\widetilde{d} \in \widetilde{K}} V_{\widetilde{d}, \epsilon_d} = \bigcap_{d \in K} \widetilde{V}_{d, \epsilon_d} \subset \widetilde{W}$ , ja  $\bigcap_{d \in K} V_{d, \epsilon_d}$  on symmetristen joukkojen äärellisenä leikkauksena symmetrinen. Jälkimmäinen väite todistetaan täysin samalla tavalla.  $\square$

**Lause 6.42.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Avaruus  $(\widehat{X}, \widehat{U})$  on Hausdorff.*

*Todistus.* Olkoon  $P$  avaruuden  $(X, U)$  virittävien pseudometriikkojen joukko. Olkoot  $F, F' \in \widehat{X}$  sellaisia, että  $(F, F') \in \widehat{W}$  aina, kun  $\widehat{W} \in \widehat{U}$ . Lemman 6.41 nojalla jokaista  $\widehat{W} \in \widehat{U}$  kohti on olemassa symmetrinen lähistö  $S \in U$ , jolle  $\widehat{S} \subset \widehat{W}$ . Täten erityisesti  $(F, F') \in \widehat{S}$  aina, kun  $S \in U$  on symmetrinen lähistö ja  $\widehat{S}$  kuten lemmassa 6.41.

Merkitään  $B$ :llä joukkoa

$$\{M \cup N \mid M \in F \wedge N \in F'\}.$$

Olkoot  $N \cup M, N' \cup M' \in B$ , missä  $N, N' \in F$  sekä  $M, M' \in F'$ . De Morganin lakien nojalla

$$(N \cup M) \cap (N' \cup M') = ((N \cup M) \cap N') \cup ((N \cup M) \cap M') \in B.$$

Näin  $B$  on filtterikanta, jonka generoima filtteri  $F''$  on karkeampi kuin kumpikin filtttereistä  $F$  ja  $F'$ . Lisäksi  $F''$  on Cauchyn filtteri, koska on olemassa jokaisen symmetrisen lähistön suhteen pieniä joukkoja, jotka kuuluvat kumpaankin filtttereistä  $F$  sekä  $F'$  ja näin myös filtteriin  $F''$ . Tällöin on minimaalisuuden nojalla oltava voimassa  $F = F' = F''$ , ja siten  $\bigcap_{V \in \widehat{U}} V = \Delta_{\widehat{X}}$ , jolloin väite seuraa lauseesta 2.31.  $\square$

**Huomautus 6.43.** Koska jokaista Cauchyn filtteriä  $F$  kohti on olemassa sitä karkeampi yksikäsitteinen minimaalinen Cauchyn filtteri  $F_0$ , voidaan määritellä joukon  $\widetilde{X}$  ekvivalenssirelaatio  $\sim$  ehdolla:  $F \sim F^*$ , jos ja vain jos  $F_0 = F_0^*$ . Näin avaruus  $\widehat{X}$  on isomorfinen avaruuden  $(\widetilde{X} / \sim, U_\sim)$  kanssa, missä  $U_\sim$  on luhistavan projektion koindusoima uniformiteetti. Erityisesti, jos  $X$  on pseudometrisen avaruus, niin  $\widehat{X}$  on pseudometrisen avaruuden  $\widetilde{X}$  metrisen aliavaruus lauseen 3.8 perustella, sillä tällöin ehto  $\hat{d}(F, F') = 0$  tarkoittaa, että filtterit ovat identtiset.

**Lause 6.44.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus, jonka uniformiteetti ei ole diskreetti. Avaruus  $(\widetilde{X}, \widetilde{U})$  ei ole Hausdorff.*

*Todistus.* Koska  $\tau_U$  ei ole diskreetti topologia, niin voidaan valita sellainen  $x \in X$ , että  $i(x)$  on minimaalinen Cauchyn filtteri, joka sisältyy aidosti Cauchyn filtteriin  $i_0(x)$ . Edelleen jokaista  $d \in P$  ja  $\epsilon > 0$  kohti on olemassa  $V_{d,\epsilon}$ -pieni joukko  $M \in i(x) \subset i_0(x)$ , joten  $\tilde{d}(i(x), i_0(x)) = 0$ . Näin  $(i(x), i_0(x))$  kuuluu kaikkien lähistöjen leikkaukseen, jolloin väite seuraa lauseesta 2.31.  $\square$

**Lause 6.45.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $\tau$  jokin topologiaa  $\tau_U$  hienompi topologia. Joukko  $i_\tau(X)$  on avaruuden  $(\tilde{X}, \tilde{U})$  tiheä osajoukko, ja avaruus  $(\tilde{X}, \tilde{U})$  on täydellinen. Lisäksi samoin  $i(X)$  on avaruuden  $(\hat{X}, \hat{U})$  tiheä aliavaruus, ja  $(\hat{X}, \hat{U})$  täydellinen.*

*Todistus.* Olkoon  $\tilde{V} \in \tilde{U}$ . Lemman 6.41 nojalla on olemassa symmetrinen  $W \in U$ , jolle  $\tilde{W} \subset \tilde{V}$ . Olkoon  $F \in \tilde{X}$ . Tällöin joukko  $\tilde{W}(F)$  on Cauchyn filtlerin  $F$  ympäristö joukon  $\tilde{X}$  topologiassa  $\tau_{\tilde{U}}$ . Leikkaus  $i_\tau(X) \cap \tilde{W}(F)$  on joukko

$$\{i_\tau(x) \mid x \in X \wedge (F, i_\tau(x)) \in \tilde{W}\}.$$

Ehto  $(F, i_\tau(x)) \in \tilde{W}$  tarkoittaa, että on olemassa pisteen  $x \in X$   $W$ -pieni  $\tau$ -ympäristö, joka kuuluu filtteriin  $F$ . Tämä tarkoittaa edelleen, että  $x$  on jonkin  $W$ -pienen joukon  $N \in F$  sisäpiste.

Olkoon  $M$  yhdiste kaikista filtteriin  $F$  kuuluvien  $W$ -pienien joukkojen sisäosista. Lauseesta 5.12 seuraa, että on olemassa yksikäsitteinen filtteriä  $F$  karkeampi minimaalinen Cauchyn filtteri  $F_m$ , jolla on avoimista joukoista muodostuva kanta. Näin on siis olemassa avoin  $W$ -pieni joukko  $N \in F_m \subset F$ , ja  $M \in F$  aksiooman f 3 perusteella, koska  $\emptyset \neq N \subset M$ . Tällöin siis  $\tilde{W}(F) \cap i_\tau(X) = i_\tau(M)$ . Tästä seuraa välittömästi joukon  $i_\tau(X)$  tiheys, sillä jokainen filtlerin  $F$  ympäristö sisältää muotoa  $\tilde{W}(F)$  olevan joukon lauseiden 2.17 sekä 2.23 perusteella ja  $i_\tau(M) \neq \emptyset$ .

Olkoon jälleen  $F \in \tilde{X}$  mielivaltainen. Joukko

$$B = \{i_\tau(N) \mid N \in F\}$$

on filtterikanta avaruudessa  $(\tilde{X}, \tilde{U})$  lauseen 4.18 nojalla. Lisäksi jokaista  $V' \in \tilde{U}$  kohti on olemassa sellainen symmetrinen  $W \in U$ , että

$$V'(F) \supset \tilde{W}(F) \supset \tilde{W}(F) \cap i_\tau(X) = i_\tau(A) \in B,$$

missä  $A$  on jälleen yhdiste filtlerin  $F$  kuuluvien joukkojen sisäosista. Näin ollen määritelmän nojalla filtterikanta  $B$  suppenee kohti filtteriä  $F$ .

Lauseen 6.11 nojalla riittää osoittaa, että jokainen tiheän aliavaruuden  $i_\tau(X)$  Cauchyn filtteri suppenee kohti jotakin avaruuden  $(\tilde{X}, \tilde{U})$  pistettä. Olkoon  $F'$  Cauchyn filtteri avaruudessa  $i_\tau(X)$ . Koska uniformeetti  $U$  on kuvauksen  $i_\tau$  indusoima lauseen 6.39 perusteella, niin lauseen 5.8 perusteella  $i_\tau^{-1}(F')$  on

Cauchyn filtterikanta avaruudessa  $X$  ja se generoi Cauchyn filtteriä  $F''$ . Olkoon  $F_m$  yksikäsitteinen filtteriä  $F''$  karkeampi minimaalinen Cauchyn filtteri. Joukko  $B = \{i_\tau(N) \mid N \in F_m\}$  on lauseen 5.7 perusteella Cauchyn filtterikanta, sillä lauseen 6.40 nojalla  $i_\tau$  on tasaisesti jatkuva. Filttteri  $F' = i_\tau(i_\tau^{-1}(F'))$  on hienompi kuin filtterikannan  $B$  generoima filtteri. Näin ollen, koska on todettu, että filtterikannan  $B$  generoima filtteri suppenee, niin myös  $F'$  suppenee. Toinen väite todistetaan täysin samoin.  $\square$

**Lause 6.46.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Tällöin  $i_0(X)$  on täydellisen avaruuden  $(\tilde{X}, \tilde{U})$  tiheä aliavaruus. Samoin  $i(X)$  on täydellisen Hausdorffin avaruuden  $(\hat{X}, \hat{d})$  tiheä aliavaruus.*

*Todistus.* Sovelletaan lausetta 6.45 valitsemalla topologiaksi  $\tau$  joukon  $X$  diskreetti topologia, jolloin saadaan aliavaruutta  $i_0(X)$  koskeva väite. Lauseen 5.13 perusteella  $i(X) \subset \hat{X}$ . Sovelletaan edelleen lausetta 6.45 topologiaan  $\tau_U$ .  $\square$

**Lause 6.47.** *Kanoninen kuvaus  $i$  täyttää seuraavan ehdon.*

*Jos  $f$  on tasaisesti jatkuva kuvaus  $X \rightarrow Y$ , missä  $Y$  on täydellinen Hausdorffin uniforminen avaruus, niin on olemassa yksikäsitteisesti määrätty tasaisesti jatkuva kuvaus  $g : \hat{X} \rightarrow Y$ , joka täyttää ehdon  $f = g \circ i$ .*

*Edelleen, jos täydellinen Hausdorffin uniforminen avaruus  $(X', U')$  sekä kuvaus  $i' : X \rightarrow X'$  myös toteuttavat ehdon, niin on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi  $\phi : \hat{X} \rightarrow X'$ , jolle pätee lisäksi  $i' = \phi \circ i$ .*

*Todistus.* Olkoon  $f$  tasaisesti jatkuva kuvaus joukolta  $X$  täydelliseen Hausdorffin uniformiseen avaruuteen  $Y$  sekä  $B(x)$  pisteen  $x$  ympäristöfiltteri topologiassa  $\tau_U$ . Koska  $f$  on tasaisesti jatkuvana myös jatkuva, niin  $f(x) = \lim f[B(x)]$ . Määritellään kuvaus  $g : i(X) \rightarrow Y$  siten, että  $g(F) = \lim f[F]$ . Tällöin lauseen 4.35 nojalla  $f(x) = \lim f[B(x)] = \lim f[i(x)] = g(i(x))$ , eli  $f = g \circ i$ . Kääntäen, jos  $f = g' \circ i$ , niin  $g'(i(x)) = f(x) = \lim f[B(x)] = \lim f[i(x)]$ , eli  $g' = g$ .

Olkoon  $W$  avaruuden  $Y$  lähistö sekä  $V$  sellainen avaruuden  $X$  lähistö, jolle  $(f(x), f(x')) \in W$  aina, kun  $(x, x') \in V$ . Lauseesta 2.17 seuraa, että on olemassa symmetrinen lähistö  $S \subset V$ . Olkoon  $\hat{S}$  lemmän 6.41 mukainen, jolloin ehto  $(i(x), i(x')) \in \hat{S}$  implikoi ehdon  $(x, x') \in S$  ja siis edelleen ehdon  $(g(i(x)), g(i(x')))) \in W$ . Täten  $g$  on tasaisesti jatkuva.

Kuvauksen  $g$  laajennus  $\bar{g}$  tasaisesti jatkuvaksi kuvaukseksi joukolle  $\hat{X}$  täyttää ehdon  $\bar{f} = g \circ i$ , koska  $\bar{g} \mid i(X) = g$ . Edelleen, koska joukko  $i(X)$  on tiheä avaruudessa  $\hat{X}$ , niin kuvaus  $\bar{g}$  on lemmän 6.15 perusteella ainut jatkuva kuvaus, joka täyttää ehdon. Toisaalta jokainen tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva lauseen 2.34 perusteella, ja yksikäsitteisyys seuraa.

Jos myös täydellinen Hausdorffin uniforminen avaruus  $X'$  sekä kuvaus  $i'$  täyttävät ehdon, niin sovelletaan ehtoa kuvauksiin  $i'$  ja  $i$  jolloin on olemassa sellaiset kuvaukset  $g$  ja  $g'$ , että on voimassa  $i = g' \circ i'$  sekä  $i' = g \circ i$ . Tällöin  $g' \circ g \circ i = g' \circ i' = i$ , eli  $g' \circ g$  on identtinen kuvaus  $X' \rightarrow X'$ . Vastaavalla tavalla voidaan todeta, että kuvaus  $g \circ g'$  on identtinen kuvaus  $\widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$ . Kuvaukset  $g$  ja  $g'$  ovat siis tasaisesti jatkuvia bijektioita sekä toistensa käänteiskuvauksia, ja näin ollen isomorfismiksi voidaan valita  $\phi = g$ .  $\square$

**Huomautus 6.48.** Lauseen 6.47 nojalla nähdään myös, ettei uniformiteetti  $\widetilde{U}$  tai  $\widehat{U}$  riipu avaruuden  $X$  virittäjäistön valinnasta konstruktiossa, sillä vaikka virittäjäistöt eivät olisi samat niin avaruudet olisivat isomorfiset.

**Lause 6.49.** *Avaruuden  $\widehat{X}$  tiheän alivaruuden  $i(X)$  lähistöt ovat joukot*

$$\{(i \times i)(V) \mid V \in U\}.$$

*Edelleen sulkeumat  $\overline{(i \times i)(V)}$ , missä siis  $V \in U$ , avaruudessa  $\widehat{X} \times \widehat{X}$  muodostavat avaruuden  $\widehat{X}$  uniformiteetin kannan.*

*Todistus.* Ensimmäinen väite seuraa heti lauseista 6.24 ja 6.22 sekä huomautuksesta 6.38. Toinen väite seuraa lauseesta 2.28.  $\square$

**Lause 6.50.** *Joukko  $\{(x, y) \in X \times X \mid i(x) = i(y)\}$  on uniformisen avaruuden  $X$  lähistöjen leikkaus.*

*Todistus.* Jos on voimassa  $i(x) = i(y)$ , niin pisteiden  $x$  ja  $y$  ympäristöt muodostavat saman filterin. Toisaalta tämä tarkoittaa indusoidun topologian määritelmän nojalla sitä, että  $(x, y) \in V$  aina, kun  $V$  on uniformisen avaruuden  $X$  lähistö. Päätelyn voi suorittaa myös käänteisesti.  $\square$

**Määritelmä 6.51.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Paria  $(f, Y)$ , missä  $Y$  on täydellinen uniforminen avaruus sekä kuvaus  $f$  on isomorfismi avaruuden  $Y$  tiheälle aliavaruudelle, kutsutaan avaruuden  $X$  *täydellistymäksi*. Jos  $Y$  on Hausdorff, niin  $(f, Y)$  on *Hausdorffin täydellistymä*.

**Huomautus 6.52.** Seuraava esimerkki osoittaa, että jos uniformisen avaruuden täydellistymä ei ole Hausdorff, niin raja-arvojen monikäsitteisyyden takia tiheys ei takaa avaruuden minimaalisuutta. Näin täydellistymä, joka ei täytä Hausdorffin ehtoa, ei ole isomorfaa vaille yksikäsitteinen.

**Esimerkki 3.** Olkoon  $X$  joukko, jonka alkioina ovat kaikki rationaalilukujen Cauchyn jonot. Käytetään merkitä  $\sim$  Cantorin reaalilukujen konstruktion mukaiselle joukon  $X$  ekvivalenssirelaatiolle, jolloin jokaista ekvivalenssiluokkaa voidaan pitää reaalilukuna. Määritellään kuvaus  $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  asettamalla:

$d(x, y) = |\bar{x} - \bar{y}|$ , missä  $\bar{x}$  tarkoittaa sitä reaalilukua, joka on pisteen  $x$  ekvivalenssiluokka. Selvästi kuvaus  $d$  on joukon  $X$  pseudometriikka. Avaruus ei ole Hausdorff, sillä  $d(x, y) = 0$  aina, kun  $x \sim y$ . Jos  $(x_n)$  on Cauchyn jono avaruudessa  $(X, d)$ , niin jono  $(\bar{x}_n)$  on Cauchyn jono reaalilukuja, joka siis suppenee kohti jotakin reaalilukua  $\bar{y}$ . Tällöin jono  $(x_n)$  suppenee pseudometriikan  $d$  suhteen kohti jokaista sellaista  $z \in X$ , jolle  $z \sim y$ . Näin  $X$  on täydellinen. Jos  $f : \mathbf{Q} \rightarrow X$  on kuvaus, jolle  $f(x)$  on sellainen vakiojono  $(q_n)$ , että  $q_n = x$  aina, kun  $n \in \mathbf{N}$ , niin  $f(\mathbf{Q})$  on tiheä avaruudessa  $X$ . Pari  $(f, X)$  on Hausdorffin avaruuden  $\mathbf{Q}$  täydellistymä, joka ei ole Hausdorff.

**Lause 6.53.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $\tilde{i}_0$  kuvauksen  $i_0$  määrittelemä kuvaus  $X \rightarrow i_0(X)$ . Pari  $(\tilde{i}_0, \tilde{X})$  on avaruuden  $X$  täydellistymä, joka ei ole Hausdorff.*

*Todistus.* On jo todettu, että  $i_0(X)$  on tiheä, sekä myös avaruuden  $\tilde{X}$  täydellisyys. Kuvauksen  $i_0$  injektiiivisyys seuraa siitä, että jos  $x \neq y$ , niin joukot  $\{y\}$  ja  $\{x\}$  ovat pisteiden  $x$  ja  $y$  erilliset ympäristöt diskreetissä topologiassa, joten pisteiden ympäristöfilterit eivät voi olla identtiset. Kuvaus  $\tilde{i}_0$  sekä käänteiskuvaus  $\tilde{i}_0^{-1}$  ovat tasaisesti jatkuvia lauseen 6.40 nojalla. Lauseen 6.44 perusteella täydellistymä ei ole Hausdorff.  $\square$

**Lause 6.54.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $\hat{i}$  kanonisen kuvauksen määrittelemä kuvaus  $X \rightarrow i(X)$ . Jos uniforminen avaruus on Hausdorff, niin pari  $(\hat{i}, \hat{X})$  on Hausdorffin täydellistymä.*

*Todistus.* Kuvaus  $\hat{i}$  sekä käänteiskuvaus  $\hat{i}^{-1}$  ovat tasaisesti jatkuvia lauseen 6.40 perusteella. Lauseiden 2.31 sekä 6.50 nojalla kuvaus on myös injektio.  $\square$

**Lause 6.55.** *Uniformisen avaruuden Hausdorffin täydellistymä on isomorfaa vaille yksikäsitteinen.*

*Todistus.* Avaruuden  $X$  Hausdorffin täydellistymä on aina isomorfinen avaruuden  $\hat{X}$  kanssa lauseen 6.47 perusteella.  $\square$

**Huomautus 6.56.** Avaruus  $\hat{X}$  on isomorfinen myös sellaisen tuloavaruuden kanssa, jonka komponentit ovat rajoitettujen kuvausten Banachin avaruuksia  $\text{raj}(Y, \mathbf{R})$ , missä  $Y$  on jokin avaruuden  $X$  tekijäavaruus. Tämä nähtäisiin helposti Kuratowskin upotuslauseen sekä lauseen 3.16 avulla ottaen huomioon täydellisyyden säilyminen tuloissa.

**Lause 6.57.** *Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus, joka ei täytä Hausdorffin ehtoa. On olemassa sellainen joukon  $X$  ekvivalenssirelaatio  $\sim$  ja tekijäjoukon  $X/\sim$  uniformiteetti  $U_\sim$ , että uniforminen avaruus  $(X/\sim, U_\sim)$  on isomorfinen Hausdorffin avaruuden  $i(X)$  kanssa.*

*Todistus.* Määritellään ekvivalenssirelaatio  $\sim$  siten, että  $x \sim y$ , jos ja vain jos  $i(x) = i(y)$  aina, kun  $x, y \in X$ . Kanonisen kuvauksen määrittelemän kuvauksen  $\hat{i}$  kanoninen hajotelma antaa kuvauksen  $p : X \rightarrow X/\sim$  sekä kuvauksen  $i^* : X/\sim \rightarrow i(X)$ , missä  $p$  on surjektio ja  $i^*$  injektio. Kuvaus  $p$  koindusoi tekijäavaruuteen uniformiteetin  $U_\sim$ . Kuvaus  $i^*$  on tasaisesti jatkuva lauseen 6.21 perusteella, sillä  $i^* \circ p = \hat{i}$  on tasaisesti jatkuva. Koska  $\hat{i}$  on surjektio, on kuvaus  $i^*$  bijektio. Olkoon sitten  $V \in U_\sim$ , jolloin

$$\begin{aligned} (\hat{i} \times \hat{i})^{-1}[(i^* \times i^*)(V)] &= ((i^* \times i^*) \circ (p \times p))^{-1}[(i^* \times i^*)(V)] = \\ &= (p \times p)^{-1}[(i^* \times i^*)^{-1}[(i^* \times i^*)(V)]] = (p \times p)^{-1}(V) \in U, \end{aligned}$$

sillä  $i^*$  on bijektio. Avaruuden  $i(X)$  uniformiteetti on lauseiden 6.49 ja 6.22 nojalla toisaalta sama kuin kuvauksen  $\hat{i}$  koindusoima uniformiteetti, joka on edelleen sama kuin relatiiviuniformiteetti  $\widehat{U}_{\widehat{X}|i(X)}$ , joten  $(i^* \times i^*)(V) \in \widehat{U}_{\widehat{X}|i(X)}$ . Edelleen kuvauksen  $i^*$  bijektiivisyyden nojalla

$$((i^* \times i^*)^{-1})^{-1}(V) = (i^* \times i^*)(V) \in \widehat{U}_{\widehat{X}|i(X)}$$

aina, kun  $V \in U_\sim$ . Näin sekä  $i^*$  kuin myös sen käänteiskuvaus ovat tasaisesti jatkuvia, ja  $i^*$  on isomorfismi.  $\square$

**Lause 6.58.** *Olkoon  $(X, U)$  sellainen Hausdorffin uniforminen avaruus, jonka uniformiteetti ei ole diskreetti. Pari  $(\tilde{i}_0, \tilde{X})$  on avaruuden  $(X, U)$  sellainen täydellistymä, joka ei ole Hausdorff. Edelleen on olemassa projektio, joka luhistaa avaruuden  $\tilde{X}$  avaruudeksi  $\widehat{X}$ .*

*Todistus.* Ensimmäinen väite seuraa heti lauseista 6.44 ja 6.53. Jälkimmäinen väite seuraa puolestaan huomauksesta 6.43.  $\square$

**Lause 6.59.** *Jos  $Y$  on täydellinen Hausdorffin uniforminen avaruus sekä  $X$  avaruuden  $Y$  tiheä aliavaruus, niin inklusiokuvaus  $j : X \rightarrow Y$  voidaan laajentaa isomorfismiksi  $\widehat{X} \rightarrow Y$ , kun  $i(X)$  ja  $X$  on ensin samastettu.*

*Todistus.* Välitön seurauksena lauseesta 6.47.  $\square$

**Lause 6.60.** *Olkoon  $(X, U)$  täydellinen Hausdorffin uniforminen avaruus sekä  $Z$  joukon  $X$  tiheä osajoukko. Jos  $U'$  on joukon  $X$  uniformiteetti, joka on karkeampi kuin  $U$  ja jonka relatiiviuniformiteetti joukossa  $Z$  on sama kuin uniformiteetin  $U$  relatiiviuniformiteetti joukossa  $Z$ , niin on voimassa  $U = U'$ .*

*Todistus.* Käytetään merkintää  $X = X'$ . Olkoon  $i$  avaruuden  $(X', U')$  kanoninen kuvaus sekä  $i'$  identtinen kuvaus  $X \rightarrow X'$ . Yhdiste  $j = i \circ i'$  on tasaisesti jatkuva kuvaus  $X \rightarrow \widehat{X}'$ . Koska aliavaruuden  $Z$  indusoima topologia on Hausdorff, niin kuvauksen  $j$  rajoittuma joukkoon  $Z$  määrittelee isomorfismin  $Z \rightarrow j(Z)$  tiheälle avaruuden  $\widehat{X}'$  aliavaruudelle  $j(Z)$ . Lauseesta 6.17 seuraa nyt, että kuvaus  $j$  on isomorfismi.  $\square$

**Lause 6.61.** Olkoot  $X$  ja  $X'$  uniformisia avaruuksia, sekä olkoon kuvaus  $f : X \rightarrow X'$  tasaisesti jatkuva. On olemassa yksikäsitteinen kuvaus  $\hat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X'}$ , jolle pätee ehto  $i' \circ f = \hat{f} \circ i$ , kun  $i$  ja  $i'$  ovat kanoniset kuvaukset.

*Todistus.* Sovelletaan lausetta 6.47 kuvaukseen  $i' \circ f : X \rightarrow \widehat{X'}$ . □

**Määritelmä 6.62.** Merkintä  $\hat{f}$  tarkoittaa aina lauseen 6.61 nojalla olemassa olevaa yksikäsitteistä kuvausta, kun  $f$  on tasaisesti jatkuva kuvaus.

**Lause 6.63.** Olkoot  $f : X \rightarrow Y$  ja  $g : Y \rightarrow Z$  tasaisesti jatkuvia kuvauksia. On voimassa  $\hat{h} = \hat{g} \circ \hat{f}$ , kun  $h = g \circ f$ .

*Todistus.* Olkoot  $i_X, i_Y$  ja  $i_Z$  avaruuksien kanoniset kuvaukset. Väite seuraa välittömästi yksikäsitteisyydestä lauseessa 6.61, sillä

$$i_Z \circ h = i_Z \circ g \circ f = \hat{g} \circ i_Y \circ f = \hat{g} \circ \hat{f} \circ i_X = \hat{h} \circ i_X.$$

□

## 6.8 Uniformiseen avaruuteen liitetty Hausdorffin uniforminen avaruus

Tutkitaan myös duaaliavaruuden tiheän aliavaruuden  $i(X)$  ominaisuuksia.

**Määritelmä 6.64.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Hausdorffin uniforminen avaruus  $i(X)$  on *uniformiseen avaruuteen  $X$  liitetty Hausdorffin uniforminen avaruus*.

**Lause 6.65.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Jokaista tasaisesti jatkuvaa kuvausta  $f : X \rightarrow Y$ , missä  $Y$  on Hausdorffin uniforminen avaruus, kohti on olemassa yksikäsitteinen tasaisesti jatkuva kuvaus  $h : i(X) \rightarrow Y$ , jolle pätee  $f = h \circ i$ .

*Todistus.* Olkoon  $j$  avaruuden  $Y$  kanoninen kuvaus, jolloin  $\hat{j}$  on isomorfismi  $Y \rightarrow j(Y)$ . Määritellään  $f' = j \circ f$ . Tällöin  $f'$  on tasaisesti jatkuva kuvaus  $X \rightarrow \widehat{Y}$ . Lauseen 6.47 nojalla on olemassa sellainen tasaisesti jatkuva kuvaus  $g : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$ , että  $f' = g \circ i$ , missä  $i$  on avaruuden  $X$  kanoninen kuvaus. Olkoon sitten  $h' = g \mid i(X)$ , jolloin selvästi edelleen  $f' = h' \circ i$ . Näin  $f = \hat{j}^{-1} \circ f' = \hat{j}^{-1} \circ h' \circ i$ . Tällöin kuvaus  $h = \hat{j}^{-1} \circ h'$  täyttää ehdon, ja yksikäsitteisyys on ilmeistä. □

**Lause 6.66.** Olkoon  $X'$  uniformiseen avaruuteen  $X$  liitetty Hausdorffin uniforminen avaruus sekä vastaavasti  $Y'$  uniformiseen avaruuteen  $Y$  liitetty Hausdorffin uniforminen avaruus. Jokaista tasaisesti jatkuvaa kuvausta  $f : X \rightarrow Y$  kohti on olemassa yksikäsitteinen tasaisesti jatkuva kuvaus  $f' : X' \rightarrow Y'$ , jolle on voimassa  $i_Y \circ f = f' \circ i_X$ , kun  $i_X$  ja  $i_Y$  ovat kanoniset kuvaukset.

*Todistus.* Sovelletaan lausetta 6.65 kuvaukseen  $i_Y \circ f : X \rightarrow Y'$ .  $\square$

**Lause 6.67.** *Olkkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus sekä  $i(X)$  siihen liitetty Hausdorffin uniforminen avaruus. Olkkoon  $f : X \rightarrow X'$  surjektiivinen kuvaus, missä  $(X', U')$  on sellainen Hausdorffin uniforminen avaruus, että kuvaus  $f$  indusoi joukkoon  $X$  uniformiteetin  $U$ . Määritellään kuvaus  $g : i(X) \rightarrow X'$  siten, että  $f = g \circ i$ . Tällöin  $g$  on isomorfismi.*

*Todistus.* Lauseen 6.65 nojalla  $g$  on tasaisesti jatkuva ja hyvin määritelty, sillä  $f$  on tasaisesti jatkuva. Kuvauksen  $g$  surjektiivisuus on ilmeistä. Jos on voimassa  $f(x) = f(y)$ , niin  $(f(x), f(y)) \in \Delta_{X'} \subset W$  aina, kun  $W \in U'$ . Olkkoon sitten  $V \in U$ . On olemassa sellainen  $W \in U'$ , että  $(f \times f)^{-1}(W) \subset V$ . Täten piste  $(x, y) \in (f \times f)^{-1}(W)$  kuuluu kaikkiin uniformiteetin  $U$  lähistöihin, jolloin lauseen 6.50 nojalla on voimassa  $i(x) = i(y)$ . Näin ollen siis  $g$  on injektiivinen. Kuten lauseen 6.39 todistuksessa nähdään, että koska  $f$  on surjektio, niin avaruuden  $X'$  lähistöt ovat avaruuden  $X$  lähistöjen kuvat kuvauksessa  $f \times f$ , jolloin ne ovat samat kuin avaruuden  $i(X)$  lähistöjen kuvat kuvauksessa  $g \times g$  lauseiden 6.39 ja 6.49 perusteella.  $\square$

## 6.9 Indusoitujen uniformiteettien täydellistymät

Tarkastellaan millaisia ovat kuvausten indusoimien uniformiteettien duaaliavaruudet. Erityisesti sovelletaan tulosta ali- ja tuloavaruuksiin.

**Lause 6.68.** *Olkkoon  $X$  joukko sekä  $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$  perhe uniformisia avaruuksia. Olkkoon edelleen  $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$  kuvaus aina, kun  $\lambda \in L$ . Olkkoon  $U$  kuvausten  $f_\lambda$  indusoima uniformiteetti. Tällöin kuvaukset  $\hat{f}_\lambda : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}_\lambda$  indusoivat joukkoon  $\hat{X}$  uniformiteetin  $\hat{U}$ . Lisäksi, kun merkitään aina  $i_\lambda$ :lla avaruuden  $Y_\lambda$  kanonista kuvausta sekä käytetään merkitää  $g_\lambda = i_\lambda \circ f_\lambda$ , niin avaruus  $\hat{X}$  voidaan samastaa avaruuden  $X$  kuvan sulkeumaan avaruudessa  $\prod_{\lambda \in L} \hat{Y}_\lambda$  kuvauksessa  $x \rightarrow (g_\lambda(x))$ .*

*Todistus.* Olkkoon  $(X', U')$  avaruuteen  $X$  liitetty Hausdorffin uniforminen avaruus, sekä vastaavasti olkkoon aina  $(Y'_\lambda, U'_\lambda)$  avaruuteen  $Y_\lambda$  liitetty Hausdorffin uniforminen avaruus. Tällöin siis  $X' = i(X)$ , sekä aina  $Y'_\lambda = i_\lambda(Y)$ . Lauseen 6.66 perusteella on olemassa sellainen perhe kuvauksia  $f'_\lambda : X' \rightarrow Y'_\lambda$ , että  $i_\lambda \circ f_\lambda = f'_\lambda \circ i$ . Lauseesta 2.45 seuraa, että kuvaukset  $i_\lambda \circ f_\lambda : X \rightarrow Y'_\lambda$  indusoivat joukkoon  $X$  saman uniformiteetin  $U$  kuin kuvaukset  $f_\lambda$ . Olkkoon  $U''$  kuvausten  $f'_\lambda$  joukkoon  $X'$  indusoima uniformiteetti. Toisaalta tällöin lauseesta 2.45 seuraa myös se, että kanoninen kuvaus  $i$  indusoi joukkoon  $X$  uniformiteetin  $U$ , kun joukossa  $X'$  on uniformiteetti  $U''$ .

Olkkoot  $x', y' \in X' = i(X)$  sellaisia, että  $x', y' \in V$  aina, kun  $V \in U''$ . On olemassa  $x, y \in X$ , joille  $i(x) = x'$  sekä  $i(y) = y'$ . Erityisesti  $x', y' \in (f'_\lambda \times f'_\lambda)^{-1}(W)$

aina, kun  $W \in U'_\lambda$ . Tällöin  $(i_\lambda(f_\lambda(x)), i_\lambda(f_\lambda(y))) = (f'_\lambda(i(x)), f'_\lambda(i(y))) \in W$ . Näin siis voidaan vastaavasti todeta, että  $(x, y)$  kuuluu jokaiseen uniformiteetin  $U$  lähistöön. Lauseen 6.50 nojalla  $x' = i(x) = i(y) = y'$ , joten  $\cap_{V \in U''} V = \Delta_{X'}$ . Näin ollen  $(X', U'')$  on Hausdorff.

Voidaan soveltaa lausetta lausetta 6.67 kanonisen kuvauksen määrittelemään kuvaukseen  $\hat{i} : X \rightarrow X'$ . Näin  $\hat{i} = g \circ i$ , missä  $g$  on isomorfismi  $X' \rightarrow X'$ . Kuvauksen  $g$  on selvästi oltava identtinen kuvaus, mistä seuraa, että  $U' = U''$ .

Kuvaus  $x' \rightarrow (f'_\lambda(x'))$  on injektio, joka määrittelee siten bijektion  $h$  tiheään aliavaruuden  $\prod_{\lambda \in L} Y'_\lambda \subset \prod_{\lambda \in L} \widehat{Y}_\lambda$  aliavaruudelle. Kuvaus  $h$  on edellä todetun nojalla isomorfismi. Avaruus  $\prod_{\lambda \in L} \widehat{Y}_\lambda$  on Hausdorff ja täydellinen. Näin  $\overline{h(X')}$  on täydellinen lauseen 6.10 perusteella ja isomorfinen täydellistymän  $\widehat{X}$  kanssa, sillä myös pari  $(h \circ i, \overline{h(X')})$  on avaruuden  $X$  täydellistymä. Merkitään  $g$ :llä isomorfismia  $h(X) \rightarrow \widehat{X}$ . Tällöin kuvaus  $\hat{f}_\lambda \circ g$  on projektion rajoittuma joukkoon  $h(X)$ . Indusoinnin transitiivisuudesta seuraa jälleen, että kuvaukset  $(\hat{f}_\lambda)_{\lambda \in L}$  indusoivat uniformiteetin  $\widehat{U}$ , sillä  $U' = \widehat{U}|_{X'}$ .  $\square$

**Lause 6.69.** *Olkoon  $A$  uniformisen avaruuden  $X$  osajoukko sekä kuvaus  $j : A \rightarrow X$  inklusiokuvaus. Kuvaus  $\hat{j} : \widehat{A} \rightarrow \widehat{X}$  määrittelee isomorfismin joukon  $i(A)$  sulkeumalle avaruudessa  $\widehat{X}$ .*

*Todistus.* Välitön lauseen 6.68 sovellus.  $\square$

**Lause 6.70.** *Olkoon  $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$  perhe uniformisia avaruuksia. Tällöin tulokuvaus  $x \rightarrow (i_\lambda(x))$  määrittelee isomorfismin avaruudelta  $\prod_{\lambda \in L} \widehat{Y}_\lambda$  tuloavaruudelle  $\prod_{\lambda \in L} \widehat{Y}_\lambda$ .*

*Todistus.* Tämäkin väite saadaan välittömästi lauseen 6.68 sovelluksena.  $\square$

## 7 Uniformisoituvuus ja kompaktius

### 7.1 Yleistä

Käsitellään Bourbakin kirjan mukaisesti sovelluksia.

### 7.2 Uniformisoituvuus

On olemassa topologisia avaruuksia joiden topologia ei ole minkään uniformiteetin indusoima. Todetaan seuraavaksi, että kompaktin Hausdorffin avaruuden topologia on aina uniformiteetin indusoima.

**Määritelmä 7.1.** *Olkoon  $(X, \tau)$  topologinen avaruus. Topologia  $\tau$  ja avaruus  $(X, \tau)$  ovat *uniformisoituvia*, jos jokin joukon  $X$  uniformiteetti  $U$  indusoi joukkoon  $X$  topologian  $\tau$  eli toisin sanoen on voimassa  $\tau = \tau_U$ .*

**Huomautus 7.2.** Voidaan osoittaa, että joukon  $X$  topologia on uniformisoituva, jos ja vain jos erotteluaksiooma  $T_3$  on voimassa sekä jokaista suljettua joukkoa  $A$  kohti on olemassa jatkuva kuvaus  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , jolle  $f(a) = 0$  aina, kun  $a \in A$ , sekä  $f(a) = 1$  aina, kun  $a \in A^c$ . Erityisesti, jos avaruus on Hausdorff on uniformisoituvuus yhtäpitävää täysin säännöllisyyden kanssa. Tyydytään kuitenkin tarkastelemaan kompaktia Hausdorffin avaruutta.

**Lemma 7.3.** *Topologinen avaruus  $(X, \tau)$  on kompakti, jos ja vain jos jokaisella filtterillä  $F$  joukossa  $X$  on olemassa klusteripiste.*

*Todistus.* Tehdään vastaoletus. Olkoon siis  $F \subset P(P(X))$  sellainen filtteri, jolla ei ole klusteripistettä, sekä  $X$  kompakti. Olkoon lisäksi  $B = \{\overline{M} \mid M \in F\}$  koelmaa suljettuja joukkoja. Tällöin klusteripisteen määritelmän nojalla  $\cap B = \emptyset$ . Toisaalta, jos  $K \subset B$  on äärellinen, niin aksiooman f 2 perusteella  $\cap K \neq \emptyset$ , eli joukolla  $B$  on äärellisten leikkausten ominaisuus, ja on saatu ristiriita.

Kääntäen olkoon jokaisella filtterillä klusteripiste. Olkoon sitten  $A$  sellainen epätyhjä kokoelma suljettuja joukkoja, että jokaisella äärellisellä  $K \subset A$  leikkaus  $\cap K \neq \emptyset$ . Tällöin  $A$  on suoraan määritelmän nojalla jonkin filtlerin  $F \supset A$  esikanta. Äärelliset leikkaukset joukon  $A$  joukoista muodostavat lauseen 4.8 nojalla filtterikannan  $B$ , joka generoi filtlerin  $F$ . Jokainen  $M \in B$  on suljettujen joukkojen äärellisenä leikkauksena suljettu. On olemassa filtlerin  $F$  klusteripiste  $a$ , joten  $\emptyset \neq \{a\} \subset \cap B \subset \cap A$ . Näin avaruus on kompakti.  $\square$

**Lause 7.4.** *Jos  $(X, \tau)$  on kompakti topologinen Hausdorffin avaruus, niin  $X$  on uniformisoituva. Edelleen uniformiteetti  $U$ , jolle pätee  $\tau = \tau_U$ , on yksikäsitteinen. Joukkoon  $U$  kuuluvat lähistöt ovat diagonaalin  $\Delta_X$  ympäristöt tulotopologiassa  $X \times X$ . Lisäksi uniforminen avaruus  $(X, U)$  on täydellinen.*

*Todistus.* Olkoon  $U$  joukko, jonka alkioina ovat diagonaalin ympäristöt tulotopologiassa  $X \times X$ . Todistetaan, että  $U$  on joukon  $X$  Hausdorffin uniformiteetti. Selvästi ympäristöjen muodostama joukko täyttää filtterinä aksioomat f 2 ja f 3. Edelleen aksiooma u 1 on selvästi voimassa, koska diagonaali sisältyy ympäristöihinsä määritelmällisesti.

Kuvaus  $(x, y) \rightarrow (y, x)$  on homeomorfismi avaruudelta  $X \times X$  itselleen, jolloin siis ehto  $V \in U$  implikoi ehdon  $\overline{V} \in U$  ja aksiooma u 2 on voimassa. Tehdään nyt vastaoletus, että aksiooma u 3 ei päde. Tällöin on siis olemassa sellainen joukko  $V \in U$ , että leikkaus  $\overline{V} \cap V^c$  on epätyhjä aina, kun  $W \in U$ . Olkoon  $B = \{\overline{W} \cap V^c \mid W \in U\}$ . Jos  $M, N \in B$ , niin on olemassa sellaiset  $W, W' \in U$ , että  $M = \overline{W} \cap V^c$  sekä  $N = \overline{W'} \cap V^c$ . Tällöin  $N \cap M = (\overline{W} \cap \overline{W'}) \cap V^c$ . On olemassa  $W'' \in U$ , jolle  $\overline{W''} \subset (\overline{W} \cap \overline{W'})$ . Näin ollen  $N \cap M \supset \overline{W''} \cap V^c \in B$ , ja  $B$  on filtterikanta kompaktissa tuloavaruudessa  $X \times X$ . Edelleen on lemmän

7.3 perusteella olemassa kannan  $B$  klusteripiste  $(x, y)$ . Koska jokaisella diagonaalin pisteellä on ympäristö  $A \subset V$  ja jokaiselle  $S \in B$  pätee  $S \subset V^c$ , niin  $(x, y) \notin \Delta_X$ . Kompakti Hausdorffin avaruus  $X$  on säännöllinen, joten on olemassa sellaiset pisteiden  $x$  ja  $y$  erilliset ympäristöt  $U_1$  ja  $U_2$ , joita kohti on olemassa suljetut joukot  $V_1$  sekä  $V_2$ , joille  $x \in V_1 \subset U_1$  sekä  $y \in V_2 \subset U_2$ . Käytetään merkintöjä  $U_3 = (V_1 \cup V_2)^c$  ja  $W = \cup_{i=1,2,3}(U_i \times U_i)$ . Selvästi  $W$  on joukon  $\Delta_X$  ympäristö tulotopologiassa. Olkoon  $(u, v) \in \overset{2}{W}$ . On olemassa sellainen  $z \in X$ , että  $(u, z), (z, v) \in W$ . Jos  $(u, z) \in W$  sekä  $u \in V_1$ , niin  $z \in U_1$ . Vastaavasti, jos  $(z, v) \in W$  sekä  $z \in U_1$ , niin  $v \in U_1 \cup U_3 = V_2^c$ . Tällöin siis  $V_1 \times V_2$ , joka on pisteen  $(x, y)$  ympäristö tulotopologiassa, ei kohtaa joukkoa  $\overset{2}{W}$ , ja saadaan ristiriita vastaoletuksen kanssa. Siispä myös u 3 on voimassa.

Koska avaruus on Hausdorff, niin jokainen muotoa  $\{(x, y)\}$  oleva joukko on suljettu tulotopologiassa. Näin ollen, jos  $x \neq y$ , niin joukko  $\{(x, y)\}^c$  on diagonaalin ympäristö avoimena joukkona. Tällöin leikkaus  $\cap_{V \in U} V$  on diagonaali  $\Delta_X$ . Siispä  $(X, U)$  indusoi Hausdorffin topologian lauseen 2.31 nojalla. Jos  $V \in U$  ja  $x \in X$ , niin jokainen sektio  $V(x)$  on pisteen  $x$  ympäristö myös topologian  $\tau$  suhteen, sillä on olemassa jokin  $\tau$ -avoin joukko  $A$ , jolle  $(x, x) \in A \times A \subset V$  ja siis  $x \in A \subset V(x)$ . Näin ollen  $\tau_U \subset \tau$ . Jos lähtöjoukossa on topologia  $\tau$  sekä maalijoukossa topologia  $\tau_U$ , niin identtinen kuvaus  $X \rightarrow X$  on jatkuva bijektio kompaktilta avaruudelta Hausdorffin avaruudelle ja näin homeomorfismi. On siis oltava voimassa  $\tau = \tau_U$ .

Jos on voimassa  $\tau = \tau_U$ , missä  $(X, U)$  on Hausdorffin uniforminen avaruus, niin uniformiteetin  $U$  lähistöt ovat diagonaalin ympäristöjä tulotopologiassa lauseiden 2.17 sekä 2.26 perusteella. Kääntäen, tehdään vasta oletus, että on olemassa sellainen joukon  $\Delta_X$  ympäristö  $V$  tulotopologiassa, että  $V$  ei ole uniformiteetin  $U$  lähistö. Joukko  $\{V' \cap V^c \mid V' \in U\}$  on jonkin filterin  $F$  kanta kompaktissa tuloavaruudessa  $X \times X$ . Näin ollen nähdään kuten edellä, että on olemassa filterin  $F$  klusteripiste  $(a, b) \notin \Delta_X$ . Koska myös  $U$  on epätyhjä, nä filteri joukossa  $X \times X$  ja se on aksiooman f 3 nojalla karkeampi kuin  $F$ , niin piste  $(a, b)$  on myös filterin  $U$  klusteripiste ja siis kuuluu jokaiseen suljettuun lähistöön, jotka muodostavat uniformiteetin kannan. Toisaalta, koska  $U$  indusoi Hausdorffin topologian, on lähistöjen leikkaus joukko  $\Delta_X$  lauseen 2.31 perusteella. Tällöin saadaan ristiriita, koska olisi voimassa  $(a, b) \in \Delta_X$ . Täten uniformittettiin yksikäsitteinen.

Uniformisen avaruuden  $(X, U)$  täydellisyys seuraa helposti siitä, että koska  $(X, \tau_U)$  on kompakti topologinen avaruus, niin jokaisella filterillä on lemmän 7.3 nojalla olemassa klusteripiste. Erityisesti siis myös Cauchyn filtereillä, jolloin väite seuraa lauseesta 5.14.  $\square$

**Lause 7.5.** *Jokainen kompaktin topologisen Hausdorffin avaruuden aliavaruus*

on uniformisoituva.

*Todistus.* Kompaktin avaruuden topologia saadaan uniformiteetin indusoimana, jolloin osajoukon relatiiviuniformiteetti indusoi relatiivitopologian lauseen 2.47 perusteella.  $\square$

**Huomautus 7.6.** Jokainen lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus on uniformisoituva, sillä Alexandroffin lauseen nojalla lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus on homeomorfinen kompaktin Hausdorffin avaruuden aliavaruuden kanssa.

**Lause 7.7.** Jokainen jatkuva kuvaus  $f$  kompaktilta topologiselta Hausdorffin avaruudelta  $X$  uniformiseen avaruuteen  $(X', U')$  on tasaisesti jatkuva, kun  $X$  on varustettu topologian indusoivalla uniformiteetillä.

*Todistus.* Olkoon  $W' \in U'$ . Lauseesta 2.28 seuraa, että on olemassa avoin  $V' \in U'$ , jolle  $V' \subset W'$ . Kuvaus  $g = f \times f$  on jatkuva tulotopologian suhteen. Näin ollen avoimen lähistön  $V'$  alkukuva kuvauksessa  $g$  on avoin. Lisäksi  $g^{-1}(V')$  sisältää diagonaalin, koska aksiooman u 1 nojalla  $\Delta_{X'} \subset V'$  ja selvästi  $g^{-1}(\Delta_{X'}) \supset \Delta_X$ . Väite seuraa nyt lauseesta 7.4, sillä kaikille  $x, y \in X$  pätee  $(f(x), f(y)) \in V' \subset W'$ , jos  $(x, y) \in g^{-1}(V')$ .  $\square$

**Lause 7.8.** Olkoon  $A$  kompaktin topologisen Hausdorffin avaruuden  $X$  tiheä aliavaruus sekä  $f$  jatkuva kuvaus joukolta  $A$  täydelliseen Hausdorffin uniformiseen avaruuteen  $X'$ . Tällöin  $f$  voidaan laajentaa jatkuvaksi kuvaukseksi  $X \rightarrow X'$ , jos ja vain jos  $f$  on tasaisesti jatkuva topologian indusoivan uniformiteetin suhteen.

*Todistus.* Jos laajennus on olemassa, niin lauseen 7.7 perusteella se on tasaisesti jatkuva. Toisaalta, jos  $f'$  on tasaisesti jatkuva kuvauksen laajennus  $X \rightarrow X'$ , niin lauseen 2.48 nojalla rajoittuma  $f' \upharpoonright A = f$  on tasaisesti jatkuva. Kääntäen lauseen 2.34 nojalla tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva indusoidun topologian suhteen, jolloin laajennus on olemassa.  $\square$

### 7.3 Uniformisen avaruuden kompaktius

Määritellään seuraavissa tarkasteluissa prekompaktiuden käsite. Edelleen soveltuksena karakterisoidaan Hausdorffin avaruuden kompaktiutta prekompaktiuden ja täydellisyyden avulla.

**Määritelmä 7.9.** Uniforminen avaruus  $(X, U)$  on *prekompakti*, jos jokaista lähistöä  $V \in U$  kohti on olemassa äärellinen joukon  $X$  peite, johon kuuluvat joukot ovat  $V$ -pieniä. Joukon  $X$  osajoukon  $A$  sanotaan olevan *prekompakti*, jos se on uniformisena aliavaruutena prekompakti.

**Lause 7.10.** *Uniforminen avaruus  $(X, U)$  on prekompakti, jos ja vain jos avaruus  $(\widehat{X}, \widehat{U})$  on kompakti.*

*Todistus.* Oletetaan ensin, että  $\widehat{X}$  on kompakti. Olkoon  $V' \in U$ . Uniformiteetti  $U$  on kanonisen kuvauksen  $i$  indusoima lauseen 6.39 nojalla, jolloin lauseen 2.42 perusteella on olemassa sellainen  $\widehat{V} \in \widehat{U}$ , että  $V = (i \times i)^{-1}(\widehat{V}) \subset V'$  ja  $V \in U$ .

On olemassa symmetrinen ja tulotopologiassa avoin  $\widehat{W} \in \widehat{U}$ , jolle  $\widehat{W} \subset \widehat{V}$ . Joukko  $\{\widehat{W}(F) \mid F \in \widehat{X}\}$  on avaruuden  $\widehat{X}$  avoin peite, sillä kukin  $\widehat{W}(F)$  on lauseen 2.22 nojalla avoin. On siis olemassa sellainen äärellinen indeksijoukko  $K$  ja sellaiset avaruuden  $\widehat{X}$  pisteet  $(F_k)_{k \in K}$ , että  $\cup_{k \in K} \widehat{W}(F_k) = \widehat{X}$ . Lemman 5.3 perusteella kukin joukko  $\widehat{W}(F_k)$  on  $\widehat{W}$ -pieni ja siis edelleen  $\widehat{V}$ -pieni. Tällöin

$$i(B_k) \times i(B_k) = (i \times i)(B_k \times B_k) \subset (i \times i)(V) = (i \times i)[(i \times i)^{-1}(\widehat{V})] \subset \widehat{V}.$$

Näin ollen joukot  $i^{-1}(W(F_k))$  ovat  $V$ -pieniä, ja  $\cup_{k \in K} i^{-1}(W(F_k)) = i^{-1}(\cup_{k \in K} W(F_k)) = i^{-1}(\widehat{X}) = X$ . Todetun nojalla on olemassa äärellinen kokoelma  $V$ -pieniä joukkoja, jotka peittävät avaruuden  $X$ . Koska  $V \subset V'$ , niin joukot ovat myös  $V'$ -pieniä, ja  $X$  on prekompakti.

Olkoon sitten käänteisesti  $\widehat{V}$  avaruuden  $\widehat{X}$  suljettu lähistö sekä  $V = (i \times i)^{-1}(\widehat{V}) \in U$ . Olkoon edelleen  $(B_k)_{k \in K}$  joukon  $X$  äärellinen peite, joka koostuu  $V$ -pienistä joukoista. Olkoon  $(F_x, F_y) \in i(B_k) \times i(B_k)$ . Jos  $(x, y) \in i^{-1}(\{F_x\}) \times i^{-1}(\{F_y\}) \subset B_k \times B_k \subset V$ , niin  $(F_x, F_y) = (i \times i)[(x, y)] \in \widehat{V}$ . Tällöin joukot  $i(B_k)$  ovat  $\widehat{V}$ -pieniä ja peittävät joukon  $i(X)$ , jolloin joukot  $\overline{i(B_k)}$  peittävät joukon  $\widehat{X}$ , koska  $i(X)$  on tiheä. Koska  $\widehat{V}$  on suljettu lähistö, niin

$$\overline{i(B_k)} \times \overline{i(B_k)} = \overline{i(B_k) \times i(B_k)} \subset \widehat{V},$$

ja siis myös joukot  $\overline{i(B_k)}$  ovat  $\widehat{V}$ -pieniä. Olkoon  $F$  ultrafilteri avaruudessa  $\widehat{X}$ . Tällöin jokin joukoista  $\overline{i(B_k)}$  kuuluu joukkoon  $F$  lauseen 4.7 perusteella, koska  $\widehat{X} \in F$ . Näin jokainen ultrafilteri sisältää  $\widehat{V}$ -pienen joukon. Toisaalta jokainen  $\widehat{W} \in \widehat{U}$  sisältää suljetun lähistön lauseen 2.28 perusteella. Ultrafilteri  $F$  siis suppenee Cauchyn filterinä täydellisessä avaruudessa kohti pistettä  $a$ . Toisaalta jokaisella filterillä avaruudessa  $\widehat{X}$  on hiennonnus, joka on ultrafilteri, jolloin lauseesta 4.32 seuraa, että raja-arvo  $a$  on karkeamman filterin klusteripiste. Lemman 7.3 perusteella avaruus  $(\widehat{X}, \widehat{U})$  on siten kompakti.  $\square$

**Lause 7.11.** *Hausdorffin uniforminen avaruus  $(X, U)$  on kompakti, jos ja vain jos se on täydellinen ja prekompakti.*

*Todistus.* Jos avaruus  $(X, U)$  on täydellinen ja Hausdorff, niin se on isomorfinen ja siis myös homeomorfinen avaruuden  $(\widehat{X}, \widehat{U})$  kanssa, jonka kompaktius on lauseen 7.10 perusteella yhtäpitävää avaruuden  $(X, U)$  prekompaktiuden kanssa. Kääntäen kompakti Hausdorffin avaruus on lauseen 7.4 nojalla täydellinen. Väite siis seuraa lauseista 7.4 sekä 7.10.  $\square$

**Lause 7.12.** *Uniformisen avaruuden  $(X, U)$  prekompaktin aliavaruuden jokainen osajoukko, jokainen prekompaktien aliavaruuksien äärellinen unioni sekä jokainen prekompaktin aliavaruuden sulkeuma on prekompakti.*

*Todistus.* Olkoon  $A \subset X$  prekompakti sekä  $V \in U$ . On olemassa äärellinen indeksijoukko  $K$ , jolle  $\cup_{k \in K} W_k = A$  ja jokainen  $W_k \in P(A)$  on  $(A \cap V)$ -pieni. Olkoon sitten  $B \subset A$ . On voimassa  $\cup_{k \in K} (W_k \cap B) = A \cap B = B$ , sekä joukot  $W_k \cap B$  ovat  $(B \cap V)$ -pieniä. Toinen väite seuraa vastaavalla tarkastelulla, koska äärellinen kokoelma äärellisiä joukkoja on äärellinen.

Olkoon  $X$  uniforminen avaruus sekä  $A$  sen prekompakti aliavaruus. Joukon  $A$  sulkeuman kuva  $i(\overline{A})$  kanonisessa kuvauksessa sisältyy joukon  $i(A)$  sulkeumaan avaruudessa  $\widehat{X}$ , sillä  $i$  on tasaisesti jatkuvana jatkuva. Näin ollen joukon  $i(\overline{A})$  sulkeuma on kompaktin joukon suljettuna osajoukkona kompakti. Toisaalta lauseen 6.69 nojalla  $\overline{i(\overline{A})}$  on isomorfinen avaruuden  $\widehat{A}$  kanssa, ja väite seuraa lauseesta 7.10.  $\square$

**Lause 7.13.** *Olkoon  $f : X \rightarrow Y$  tasaisesti jatkuva kuvaus. Jos  $A$  on avaruuden  $X$  prekompakti aliavaruus, niin  $f(A)$  on avaruuden  $Y$  prekompakti aliavaruus.*

*Todistus.* Olkoot  $i : X \rightarrow \widehat{X}$  sekä  $j : Y \rightarrow \widehat{Y}$  kanoniset kuvakset. Avaruus  $\widehat{A}$  on isomorfinen avaruuden  $\overline{i(\overline{A})}$  kanssa, joka on siis oletuksen nojalla kompakti. Lauseen 6.61 perusteella ensinnäkin kuvaus  $\hat{f}$  on tasaisesti jatkuvana jatkuva. Tällöin kompaktin joukon kuva  $\hat{f}(\overline{i(\overline{A})})$  on kompakti. Lisäksi  $\overline{j(f(A))} = \overline{\hat{f}(i(A))} \subset \hat{f}(\overline{i(\overline{A})})$ , sillä koska  $\widehat{X}$  on Hausdorff, niin kompakti joukko on suljettu. Näin  $\overline{j(f(A))}$  on kompaktin joukon suljettuna osajoukkona kompakti avaruudessa  $\widehat{Y}$ . Väite seuraa lauseen 6.69 nojalla avaruuksien  $\overline{j(f(A))}$  ja  $\widehat{f(A)}$  isomorfiasta.  $\square$

**Lause 7.14.** *Olkoon  $X$  uniforminen avaruus, jonka uniformiteetti on kuvausten  $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$  indusoima. Joukon  $X$  osajoukko  $A$  on prekompakti, jos ja vain jos jokainen joukko  $f_\lambda(A)$  on avaruuden  $Y_\lambda$  prekompakti osajoukko.*

*Todistus.* Jos  $A$  on prekompakti, niin ehto pätee lauseen 7.13 ja kuvausten  $f_\lambda$  tasaisen jatkuvuuden perusteella. Toisaalta kääntäen, jos ehto on voimassa, niin jokainen  $\overline{i_\lambda(f_\lambda(A))}$  on kompakti avaruudessa  $\widehat{Y}_\lambda$ . Tällöin avaruuden  $\widehat{X}$  kanssa isomorfinen tulo  $\prod_{\lambda \in L} \overline{i_\lambda(f_\lambda(A))}$  on kompakti tuloavaruudessa  $\prod_{\lambda \in L} \widehat{Y}_\lambda$  Tihonovin lauseen perusteella.  $\square$

## 7.4 Uniformisen avaruuden kompaktit osajoukot

Seuraavaksi pohjustetaan tulevia tarkasteluja tutkimalla lyhyesti joitakin uniformisen avaruuden kompaktien osajoukkojen ominaisuuksia.

**Lause 7.15.** *Olkoot  $A$  ja  $B$  uniformisen avaruuden  $X$  osajoukkoja. Jos  $A$  on kompakti induoidun topologian suhteen sekä  $B$  suljettu induoidun topologian suhteen ja lisäksi  $A \cap B = \emptyset$ , niin on olemassa sellainen symmetrinen lähistö  $V$ , että  $V(A) \cap V(B) = \emptyset$ .*

*Todistus.* Tehdään vastaoletus, että on olemassa  $y \in V(A) \cap V(B)$  aina, kun  $V$  on symmetrinen lähistö. Tällöin on olemassa sellaiset  $z_1 \in A$  sekä  $z_2 \in B$ , että  $(z_1, y) \in V$  sekä  $(z_2, y) \in V$ . Symmetrisyyden nojalla  $(z_1, z_2), (z_2, z_1) \in \overset{2}{V}$ , jolloin  $z_1 \in A \cap \overset{2}{V}(B)$ . Näin ollen myös joukot  $A \cap \overset{2}{V}(B)$  ovat epätyhjiä aina, kun  $V$  on symmetrinen lähistö. Olkoot  $V, V' \in U$  symmetrisiä, sekä olkoon

$$x \in (V \overset{2}{\cap} V')(B).$$

On olemassa  $z \in B$ , jolle

$$(z, x) \in V \overset{2}{\cap} V',$$

mistä seuraa

$$x \in \overset{2}{V}(B) \cap \overset{2}{V'}(B).$$

Näin siis, koska

$$(A \cap (V \overset{2}{\cap} V')(B)) \subset (A \cap \overset{2}{V}(B)) \cap (A \cap \overset{2}{V'}(B)),$$

niin joukot  $A \cap \overset{2}{V}(B)$  muodostavat filttarikannan joukossa  $A$ . Kannalla on klusteripiste  $x_0$  kompaktissa avaruudessa  $A$ . Joukot  $V_1(x_0)$  muodostavat pisteen  $x_0$  ympäristökannan, ja näin lauseen 4.31 nojalla kohtaavat aina joukon  $A \cap \overset{2}{V}_2(B)$ , kun  $V_1, V_2 \in S$ . Erityisesti, jos  $V_1 = V_2 = V$ , niin on olemassa  $z \in \overset{2}{V}(B) \cap V(x_0)$ . Tällöin on olemassa sellainen  $z' \in B$ , että  $(z', z) \in \overset{2}{V}$ . Edelleen on olemassa sellainen  $z'' \in X$ , että  $(z', z''), (z'', z) \in V$ . Lisäksi  $(z, x_0) \in V$ , joten  $(x_0, z') \in \overset{3}{V}$ . Edelleen  $z' \in \overset{3}{V}(x_0)$ . Muotoa  $\overset{3}{V}(x_0)$  olevat joukot muodostavat pisteen  $x_0$  ympäristökannan ja siis kohtaavat joukon  $B$  aina, kun  $V$  on symmetrinen lähistö. Koska  $B$  on suljettu, niin  $x_0 \in B$ . On siis saatu ristiriita  $x_0 \in A \cap B = \emptyset$ .  $\square$

**Lause 7.16.** *Olkoon  $A$  uniformisen avaruuden  $(X, U)$  kompakti osajoukko. Joukko  $\{V(A) \mid V \in U\}$  on joukon  $A$  ympäristökanta.*

*Todistus.* Olkoon  $W$  joukon  $A$  avoin ympäristö. Tällöin joukko  $W^c$  on suljettu eikä kohtaa joukkoa  $A$ . Lauseen 7.15 perusteella on siis olemassa sellainen symmetrinen lähistö  $V$ , että  $V(A) \cap V(W^c) = \emptyset$ . Lauseen 2.27 perusteella  $V(A)$  ja  $V(W^c)$  ovat siis joukkojen  $A$  ja  $W^c$  erilliset ympäristöt. Näin ollen  $V(A) \subset W$ .  $\square$

## 7.5 Yhdistetyt joukot kompaktissa avaruudessa

Sovelletaan nyt aiempia tuloksia tutkimalla kompaktien ja lokaalisti kompaktien Hausdorffin avaruuksien komponentteja ja kvasikomponentteja.

**Määritelmä 7.17.** Olkoon  $V$  uniformisen avaruuden  $X$  symmetrinen lähistö. Äärellinen joukko avaruuden  $X$  pisteitä  $(x_k)_{k \in K}$ , missä  $K = \{1, \dots, n\}$  on  $V$ -ketju, jos  $(x_k, x_{k+1}) \in V$  aina, kun  $0 \leq k < n$ . Pisteet  $x_0$  ja  $x_k$  ovat ketjun päät, jotka ovat ketjun liittämät. Jos on olemassa  $V$ -ketju, jonka päinä ovat pisteet  $x$  ja  $y$ , niin käytetään merkintää  $x \sim_V y$ . On siis määritelty relaatio.

**Lause 7.18.** Joukko  $A_{x,V} = \{y \in X \mid x \sim_V y\}$  on sekä avoin että suljettu topologiassa  $\tau_U$ .

*Todistus.* Relaatio  $\sim_V$  on refleksiivinen sillä voidaan valita kahden pisteen  $V$ -ketju, jossa  $x_0 = x_1 = x$  ja jonka päinä jokainen piste  $x$  siis on. Jos  $x \sim_V y$ , niin  $V$ -ketjun järjestys voidaan kääntää jolloin  $y \sim_V x$ . Edelleen, jos  $x \sim_V y$  sekä  $y \sim_V z$ , niin  $V$ -ketjut voidaan yhdistää yhdeksi ketjuksi, koska  $(y, y) \in V$ . Näin  $x \sim_V z$ . Relaatio  $\sim_V$  on siis ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokkia joukot  $A_{x,V}$  ovat. Jos  $y \in A_{x,V}$  sekä  $z \in V(y)$ , niin  $(y, z) \in V$ , ja kahden pisteen ketju  $x_0 = y$  sekä  $x_1 = z$  liittää pisteet  $y$  ja  $z$ . Ehto  $y \in A_{x,V}$  siis implikoi ehdon  $V(y) \subset A_{x,V}$ , ja näin  $A_{x,V}$  on avoin joukko. Toisaalta myös komplementti  $(A_{x,V})^c$  on avoimien ekvivalenssiluokkien yhdisteenä avoin.  $\square$

**Lemma 7.19.** Olkoon  $(X, U)$  uniforminen avaruus. Olkoot lisäksi  $A, B \subset X$  sekä  $V \in U$ . Olkoon edelleen voimassa  $\overset{2}{V}(A) \cap \overset{2}{V}(B) = \emptyset$ . Jos  $a \in V'(A)$  sekä  $b \in V'(B)$ , missä  $V' \subset V$  on lähistö, niin  $(a, b) \notin V'$ .

*Todistus.* Tehdään vastaoletus  $(a, b) \in V' \subset V$ . Koska  $a \in V'(A) \subset V(A)$ , niin on olemassa  $z' \in A$ , jolle  $(z', a) \in V$ . Näin ollen  $(z', b) \in \overset{2}{V}$ , eli  $b \in \overset{2}{V}(A)$ . Toisaalta  $b \in V'(B) \subset V(B)$ . On siis olemassa  $z \in B$ , jolle  $(z, b) \in V$ . Koska myös  $(b, b) \in V$ , niin  $(z, b) \in \overset{2}{V}$ , eli  $b \in \overset{2}{V}(B)$ . On todettu ristiriita

$$b \in \overset{2}{V}(A) \cap \overset{2}{V}(B) = \emptyset.$$

$\square$

**Lause 7.20.** Olkoon  $(X, U)$  Hausdorffin uniforminen avaruus, jonka indusoima topologia on kompakti. Olkoon lisäksi  $S \subset U$  symmetristen lähistöjen kokoelma. Joukko  $A_x = \bigcap_{V \in S} A_{x,V}$  on sama kuin komponentti  $C(x)$  sekä edelleen sama kuin kvasikomponentti  $Q(x)$ .

*Todistus.* Tehdään vastaoletus, että joukko  $A_x$  ei ole yhtenäinen. Tällöin on olemassa sellaiset erilliset suljetut joukot  $B$  ja  $C$ , että  $B \cup C = A_x$ . Joukko  $B$

on kompaktin Hausdorffin avaruuden suljettuna osajoukkona kompakti. Lauseen 7.15 nojalla on olemassa sellainen symmetrinen lähistö  $V$ , että  $V(B) \cap V(C) = \emptyset$ . Lauseiden 2.28 sekä 2.15 perusteella voidaan valita avoin lähistö  $W$ , jolle  $\frac{2}{W} \subset V$ . Joukon  $W(B) \cup W(C)$  komplementti  $H$  on suljettu ja siis näin myös kompakti joukko. Olkoon  $W'$  sellainen symmetrinen lähistö, että  $W' \subset W$ . Oletetaan yleisyyttä rajoittamatta, että  $x \in B \subset W'(B)$ . Olkoon sitten  $y \in C \subset W'(C)$ . Olkoon  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$   $W'$ -ketju, joka liittää pisteet  $x$  ja  $y$ . Olkoon  $x_k \in W(B)$  sekä  $x_{k+1} \in W(C)$ . Olisi lisäksi voimassa  $(x_k, x_{k+1}) \in W'$ . Lemman 7.19 mukaan tämä on mahdotonta, koska  $W(B) \cap W(C) \subset V(B) \cap V(C) = \emptyset$ . Induktiolla nähdään siis helposti, että jokainen  $W'$ -ketju, joka yhdistää pisteet  $x$  ja  $y$  sisältää ainakin yhden pisteen joukossa  $H$ . Toisaalta, koska  $y \in C \subset A_x$ , niin on olemassa pisteet liittävä  $W'$ -ketju jokaista symmetristä lähistöä  $W'$ -kohti. Joukko  $H \cap A_{x,W'}$  on näin epätyhjä, jos  $W' \subset W$ . Edelleen, jos  $W'' \subset W'$ , niin  $A_{x,W''} \subset A_{x,W'}$ . Olkoot  $W_1, W_2 \in U$  symmetrisiä sekä  $W_1, W_2 \subset W$ . Tällöin  $W_1 \cap W_2$  on symmetrinen lähistö. Lisäksi  $W_1 \cap W_2 \subset W_1$ , sekä  $W_1 \cap W_2 \subset W_2$ . Näin siis  $A_{x,W_1 \cap W_2} \subset A_{x,W_1} \cap A_{x,W_2}$ . Suljetut joukot  $\{H \cap A_{x,W'} \mid W' \in S\}$  muodostavat tällöin filterikannan kompaktissa aliavaruudessa  $H$ , jolloin kaikilla kannan joukoilla on jokin yhteinen piste klusteripisteen määritelmän nojalla. Tällöin joukko  $H$  kohtaa joukon  $A_x$ , mikä on vastoin oletusta. Joukko  $A_x$  on siis yhtenäinen.

Toisaalta komponentti  $C(x)$  sisältyy kvasikomponenttiin  $Q(x)$ . Lisäksi  $C(x) \subset Q(x) \subset A_x$  lauseen 7.18 perusteella. Väite seuraa siis joukon  $A_x$  yhtenäisyydestä, koska näin  $A_x \subset C(X)$ .  $\square$

**Lemma 7.21.** *Olkoon  $(X, \tau)$  lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus sekä  $K \subset X$  kompakti. Jokaista joukon  $K$  ympäristöä  $U$  kohti on olemassa avoin ympäristö  $V$ , jonka sulkeuma  $\overline{V} \subset U$  on kompakti.*

*Todistus.* On olemassa jokaista  $a \in K$  kohti sellainen pisteen  $a$  avoin ympäristö  $U_a$ , että  $\overline{U_a} \subset U$  ja  $\overline{U_a}$  on kompakti. Yhdiste  $\cup_{a \in K} (U_a \cap K) = K$  on joukon  $K$  avoin peite. On siis olemassa äärellinen  $K' \subset K$ , jolle  $\cup_{a \in K'} (U_a \cap K) = K$ . Joukko  $\cup_{a \in K'} U_a$  on joukon  $K$  avoin ympäristö. Lisäksi joukko  $\cup_{a \in K'} \overline{U_a}$  on kompaktien joukkojen äärellisenä yhdisteenä kompakti ja myös suljettu. Näin  $\overline{\cup_{a \in K'} U_a} \subset \cup_{a \in K'} \overline{U_a}$ , jolloin  $\overline{\cup_{a \in K'} U_a}$  on kompaktin Hausdorffin avaruuden suljettuna osajoukkona kompakti.  $\square$

**Lause 7.22.** *Olkoon  $(X, \tau)$  lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus sekä  $K$  avaruuden  $X$  kompakti komponentti. Ne joukon  $K$  ympäristöt, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja muodostavat joukon  $K$  ympäristökannan.*

*Todistus.* Lemmasta 7.21 seuraa, että jokaista joukon  $K$  ympäristöä  $W$  kohti on olemassa joukon  $K$  avoin ympäristö  $V$ , jonka sulkeuma  $\overline{V} \subset W$  on kompakti.

Tehdään vasta oletus, että ei ole olemassa sellaista joukkoa  $U \subset \bar{V}$ , että  $U \cap \partial V = \emptyset$  sekä  $U$  on avoin ja suljettu. Olkoon

$$F = \{N \cap \partial V \mid K \subset N \subset \bar{V}, N \text{ on avoin ja suljettu topologiassa } \tau_{\bar{V}}\}.$$

Selvästi  $F$  on suljettu äärellisiin leikkauksiin nähden. Lisäksi  $F$  on epätyhjä, koska  $\bar{V} \cap \partial V \in F$ . Vastaoletuksen nojalla  $\emptyset \notin F$ . Näin ollen  $F$  on suljettujen joukkojen muodostama filttarikanta joukossa  $\partial V$ . Reuna  $\partial V$  on kompaktin Hausdorffin avaruuden  $\bar{V}$  suljettuna osajoukkona kompakti. On siis olemassa  $a \in \cap F$ .

Joukko  $K$  on myös avaruuden  $\bar{V}$  komponentti. Lauseen 7.20 nojalla leikkaus niistä joukoista, jotka sisältävät joukon  $K$  ja ovat sekä avoimia että suljettuja on  $K$ . Näin saadaan ristiriita, sillä  $a \notin K \supset \cap F$ .

On näin olemassa ehdot täyttävä joukko  $U$ . Joukko  $U$  on suljettu avaruudessa  $X$  ja, koska  $\partial V \cap U = \emptyset$ , niin  $U$  on myös avoin.  $\square$

**Lause 7.23.** *Olkoon  $X$  kompakti Hausdorffin avaruus sekä  $R$  joukon  $X$  sellainen ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokkia ovat avaruuden  $X$  komponentit. Tällöin tekijäavaruus  $X/R$  on kompakti Hausdorffin avaruus sekä täysin epäyhtenäinen.*

*Todistus.* Merkitään  $p$ :llä luhistavaa projektiota  $X \rightarrow X/R$ . Olkoon  $a \in X/R$ . Yksiö  $\{a\}$  nähdään selvästi yhtenäiseksi joukoksi tekijätopologian suhteen. Olkoon sitten  $V \subset X/R$  joukko, joka ei ole yksiö.  $p^{-1}(V) = \cup V$  on yhdiste useasta avaruuden  $X$  komponentista, joten sillä on separaatio  $p^{-1}(V) = E \cup F$ . Tällöin  $V = p(E) \cup p(F)$  on joukon  $V$  separaatio tekijäavaruudessa, ja  $V$  ei voi olla komponentti. Tekijäavaruus on näin todettu täysin epäyhtenäiseksi.

Olkoon  $\cup_{i \in I} U_i$  tekijäavaruuden avoin peite, jolloin  $\cup_{i \in I} p^{-1}(U_i)$  on komponenteista muodostuva avaruuden  $X$  avoin peite, sillä koska kukin  $U_i$  on avoin, niin alkukuva on avoin yhdiste komponenteista. Näin on olemassa äärellinen  $K \subset I$  ja osapeite  $\cup_{i \in K} p^{-1}(U_i) = X$ . Tällöin  $\cup_{i \in K} U_i$  on tekijäavaruuden äärellinen osapeite.

Olkoot  $a, b \in X/R$ . Joukot  $A = p^{-1}(a)$  ja  $B = p^{-1}(b)$  ovat avaruuden  $X$  erillisiä komponentteja. Lauseen 7.20 nojalla on olemassa sellainen symmetrinen lähistö  $V$ , että mitään joukon  $A$  pistettä ei voi yhdistää joukkoon  $B$   $V$ -ketjulla. Olkoon  $x \in A$  sekä  $y \in B$ . Joukot  $A_{x,V}$  ja  $A_{y,V}$  ovat sekä suljettuja että avoimia. Edelleen lauseen 7.20 perusteella  $A \subset A_{x,V}$ , ja  $B \subset A_{y,V}$ . Joukkojen  $A_{x,V}$  ja  $A_{y,V}$  kuvat luhistuksessa ovat siis pisteiden  $a$  ja  $b$  avoimet ja erilliset ympäristöt.  $\square$

## 8 Topologisten vektoriavaruuksien uniformiteetti

### 8.1 Yleistä

Viimeisessä kappaleessa käsitellään lokaalisti konveksien topologisten vektoriavaruuksien alkeet esimerkkinä uniformisen avaruuden rakenteesta. Näin saadaan siis myös esimerkki, johon täydellistämistä voidaan soveltaa. Tulokset ovat topologisten vektoriavaruuksien luentomonisteesta lukuun ottamatta muutamia aiempien kappaleiden tulosten sovelluksia.

### 8.2 Topologiset vektoriavaruuudet

Määritellään topologiset vektoriavaruuudet rakenteina, joissa algebrallinen vektoriavaruuden rakenne sopii yhteen topologisen rakenteen kanssa tiettyjen kuvausten jatkuvuuden mielessä.

**Määritelmä 8.1.** Olkoon  $E$  vektoriavaruus yli kunnan  $\mathbf{K}$ , missä  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  tai  $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ . Olkoot lisäksi  $(E, \tau)$  ja  $(\mathbf{K}, \tau')$  topologisia avaruuksia. Jos kuvaukset  $(x, y) \rightarrow x + y$  ja  $x \rightarrow \alpha x$  ovat jatkuvia tulotopologioiden suhteen, niin  $E$  on *topologinen vektoriavaruus*.

**Määritelmä 8.2.** Olkoon  $(E, \tau)$  topologinen vektoriavaruus. Jos  $x + A$  on pisteen  $x$  ympäristö aina, kun  $A$  on origon ympäristö, niin  $\tau$  on *siirtoinvariantti* topologia.

**Lause 8.3.** *Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus sekä  $y \in E$  ja  $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$ . Kuvaukset  $x \rightarrow x + y$  ja  $x \rightarrow \alpha x$  ovat homeomorfismeja. Erityisesti, jos  $F$  on origon ympäristökanta sekä  $x \in E$  ja  $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$ , niin joukot*

$$x + F = \{x + f \mid f \in F\}$$

ja

$$\alpha F = \{\alpha f \mid f \in F\}$$

*ovat pisteen  $x$  ympäristökantoja. Avaruuden topologia on siis aina siirtoinvariantti.*

*Todistus.* Kuvaus  $x \rightarrow (x, y)$  on selvästi jatkuva. Koska  $E$  on topologinen vektoriavaruus, on myös kuvaus  $(x, z) \rightarrow x + z$  jatkuva. Tällöin kuvaus  $x \rightarrow x + y$  sekä vastaavasti käänteiskuvaus  $x \rightarrow x - y$  ovat jatkuvien kuvausten yhdisteinä jatkuvia. Kiinteällä  $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$  kuvaus  $x \rightarrow \alpha x$  on selvästi jatkuva ja samoin myös käänteiskuvaus  $x \rightarrow \alpha^{-1}x$ , koska  $\alpha \neq 0$ . Viimeinen väite seuraa heti ensimmäisestä.  $\square$

**Lause 8.4.** *Olkoon  $E$  vektoriavaruus sekä  $(E_i)_{i \in I}$  perhe topologisia vektoriavaruuksia. Lisäksi olkoon  $T_i : E \rightarrow E_i$  lineaarikuvaus aina, kun  $i \in I$ . Olkoon  $\tau$*

kuvausten  $(T_i)_{i \in I}$  indusoima topologia. Tällöin  $(E, \tau)$  on topologinen vektoriavaruus.

*Todistus.* Olkoon  $s : E \times E \rightarrow E$  kuvaus, jolle  $s(x, y) = x + y$ . Koska

$$(T_i \circ s)(x, y) = T_i(x + y) = T_i(x) + T_i(y)$$

aina, kun  $i \in I$ , niin kuvaus  $T_i \circ s$  on sama kuin kuvaus  $(x, y) \rightarrow T_i(x) + T_i(y)$ , joka on yhdiste jatkuvista kuvauksista  $(T_i(x), T_i(y)) \rightarrow T_i(x) + T_i(y)$ ,  $(x, y) \rightarrow (T_i(x), y)$  ja  $(x, y) \rightarrow (x, T_i(y))$ . Ensimmäinen on jatkuva, koska  $E_i$  on topologinen vektoriavaruus. Jälkimmäiset kuvaukset ovat jatkuvia, koska kyseessä on kuvausten  $(T_i)$  indusoima topologia.

Vastaavasti, jos  $s : \mathbf{K} \times E \rightarrow E$  on kuvaus, jolle  $s(\alpha, x) = \alpha x$ , niin

$$(T_i \circ s)(\alpha, x) = T_i(\alpha x) = \alpha T_i(x).$$

Tällöin  $(T_i \circ s)$  on yhdiste kuvauksista  $T_i$  sekä  $T_i(x) \rightarrow \alpha T_i(x)$ . □

### 8.3 Seminormi

Seminormin määritelmä saadaan normin määritelmästä poistamalla vaatimus, jonka mukaan  $\|x\| = 0$ , jos ja vain jos  $x = 0$ . Ilmeisellä tavalla seminormi määrittää edelleen pseudometriikan ja uniformiteetin.

**Määritelmä 8.5.** Olkoon  $E$  vektoriavaruus. Kuvaus  $p : E \rightarrow [0, \infty)$  on *seminormi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa.

(1) Pätee  $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$  aina, kun  $\alpha \in \mathbf{K}$  sekä  $x \in E$ .

(2) Pätee  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  aina, kun  $x, y \in E$ .

**Lause 8.6.** Jos  $p$  on seminormi, niin kuvaus  $d_p(x, y) = p(x - y)$  on pseudometriikka.

*Todistus.* Olkoon  $p$  seminormi. Pätee

$$d_p(x, y) = p(x - y) = p((-1)(y - x)) = |-1|p(y - x) = d_p(y, x).$$

Olkoot  $x, y, z \in E$ . Tällöin

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= p(x - y) = p(x + z - z - y) = p((x + z) - (z + y)) \leq \\ &\leq p(x + z) - p(z + y) = d_p(x, z) + d_p(z, y). \end{aligned}$$

□

**Määritelmä 8.7.** Olkoon  $p$  seminormi. Lauseen 8.6 nojalla olemassa olevaa pseudometriikkaa  $d_p$  kutsutaan *seminormin  $p$  indusoimaksi pseudometriikaksi*.

**Lause 8.8.** Olkoon  $p$  seminormi vektoriavaruudessa  $E$  ja  $d_p$  sen indusoima pseudometriikka, joka indusoi edelleen uniformiteetin  $U_{d_p}$ . Varustettuna topologialla  $\tau_{U_{d_p}}$  vektoriavaruus  $E$  on topologinen vektoriavaruus.

*Todistus.* Olkoot  $x_0, y_0 \in E$ . On voimassa

$$\begin{aligned} d(x_0 + y_0, x + y) &= p(x_0 + y_0 - x - y) = p(x_0 - x + y_0 - y) \leq p(x_0 - x) + p(y_0 - y) = \\ &= d(x_0, x) + d(y_0, y) < \epsilon, \end{aligned}$$

kun  $d(x_0, x) < \frac{\epsilon}{2}$  ja  $d(y_0, y) < \frac{\epsilon}{2}$ . Väite seuraa tästä, koska joukot  $\{y \mid d(x, y) < \epsilon\}$  muodostavat pisteen  $x$  ympäristökannan.

Olkoon  $\alpha_0 \in \mathbf{K}$  sekä  $x_0 \in E$ . On voimassa  $\alpha x - \alpha_0 x_0 = \alpha(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)x_0$  aina, kun  $\alpha \in \mathbf{K}$  sekä  $x \in E$ . Näin

$$d_p(\alpha x, \alpha_0 x_0) \leq |\alpha|p(x - x_0) + |\alpha - \alpha_0|p(x_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

aina, kun  $|\alpha - \alpha_0| < \delta$  sekä  $p(x, x_0) < \delta$ , missä  $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2(|\alpha| + p(x_0) + 1)}\}$ .  $\square$

## 8.4 Absorboivat, balansoidut ja konveksit joukot

Tutkitaan seuraavaksi tietyn tyyppisiä topologisten vektoriavaruuksien osajoukkoja, joiden avulla voidaan määritellä tärkeäksi osoittautuva origon ympäristökanta.

**Määritelmä 8.9.** Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus. Joukko  $A \subset E$  on *absorboiva*, jos jokaista  $x \in E$  kohti on olemassa jokin  $\alpha > 0$ , jolle  $\alpha^{-1}x \in A$ .

**Lemma 8.10.** Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus sekä  $A \subset E$  origon ympäristö. Joukko  $A$  on absorboiva.

*Todistus.* Olkoon  $x \in E$ . Kuvaus  $f(\lambda) = \lambda x$  on jatkuva, sekä  $f(0) = 0$ . Tällöin on siis olemassa sellainen  $\delta > 0$ , että  $\frac{1}{\lambda}^{-1}x = \lambda x = f(\lambda) \in A$ , kun  $|0 - \lambda| < \delta$ .  $\square$

**Lemma 8.11.** Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus sekä  $A \subset E$  absorboiva. Tällöin  $0 \in A$ .

*Todistus.* On olemassa  $\alpha > 0$ , jolle  $0 = \alpha^{-1}0 \in A$ .  $\square$

**Määritelmä 8.12.** Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus sekä  $A \subset E$  absorboiva. Kuvaus  $p_A : E \rightarrow [0, \infty)$ , jolle  $p_A(x) = \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in A\}$  on *Minkowskin funktionaali*.

**Määritelmä 8.13.** Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus. Joukko  $A \subset E$  on *balansoitu*, jos  $\alpha x \in A$  aina, kun  $\alpha \in \mathbf{K}$  sekä  $|\alpha| \leq 1$ .

**Määritelmä 8.14.** Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus sekä  $A \subset E$ . Joukon  $A$  balansoitu verho on kaikkien niiden balansoitujen joukkojen leikkaus, jotka sisältävät joukon  $A$ .

**Lemma 8.15.** *Joukon  $A \subset E$  balansoitu verho on joukko*

$$B = \{\lambda x \mid |\lambda| \leq 1, x \in A\}.$$

*Todistus.* Olkoon  $x \in B$  sekä lisäksi  $\alpha \in \mathbf{K}$ , jolle  $|\alpha| \leq 1$ . Tällöin  $x = \lambda y$ , missä  $|\lambda| \leq 1$  sekä  $y \in A$ . Pätee  $\alpha x = \alpha \lambda y$  sekä  $|\alpha \lambda| = |\alpha| |\lambda| \leq 1$ , ja näin  $\alpha x \in B$ , eli  $B$  on balansoitu.

Kääntäen olkoon  $C \supset A$  balansoitu joukko ja  $x \in B$ . Tällöin jälleen  $x = \lambda y$ , missä  $|\lambda| \leq 1$  sekä  $y \in A \subset C$ , joten  $x \in C$ . Näin siis  $B \subset C$ .  $\square$

**Lemma 8.16.** *Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus sekä  $A \in E$  sen balansoitu osajoukko. Tällöin myös sulkeuma  $\bar{A}$  on balansoitu.*

*Todistus.* Olkoon  $\alpha \in \mathbf{K}$  sekä  $|\alpha| \leq 1$ . Olkoon lisäksi  $x \in \bar{A}$ . Kuvaus  $f(x) = \alpha x$  on jatkuva. Koska lisäksi  $A$  on balansoitu, niin  $f(A) \subset A$ . Tällöin

$$\alpha x \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{A}.$$

$\square$

**Lemma 8.17.** *Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus sekä  $x \in E$  ja  $U \subset E$  pisteen  $x$  ympäristö. On olemassa pisteen  $x$  ympäristö  $V$ , jolle  $V + V \subset U$ .*

*Todistus.* Koska  $E$  on topologinen vektoriavaruus, niin kuvaus  $(x, y) \rightarrow x + y$  on jatkuva erityisesti pisteessä  $(x, x)$ , ja on olemassa pisteen  $x$  ympäristöt  $V_1$  ja  $V_2$ , joille  $V_1 + V_2 \subset U$ . Tällöin voidaan valita  $V = V_1 \cap V_2$ .  $\square$

**Lemma 8.18.** *Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus sekä  $x \in E$ . Ne origon ympäristöt, jotka ovat suljettuja ja balansoituja muodostavat origon ympäristökannan.*

*Todistus.* Olkoon  $U \subset E$  pisteen  $x$  ympäristö. Lemman 8.17 perusteella on olemassa origon ympäristö  $V$ , jolle  $V + V \subset U$ . Kuvaus  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$  on jatkuva, joten on olemassa  $\delta > 0$  ja origon ympäristö  $V_1$ , jolle  $\alpha V_1 \subset V$ , kun  $|\alpha| \leq \delta$ . Joukko  $\delta V_1$  on lauseen 8.3 nojalla origon ympäristö, jonka balansoitu verho  $W_1 = \cup_{|\lambda| \leq 1} \lambda \delta V_1$  on origon balansoitu ympäristö, jolle  $W_1 + W_1 \subset V + V \subset U$ . Olkoon sitten  $W = \overline{W_1}$ . Lemman 8.16 perusteella  $W$  on balansoitu, ja riittää siis osoittaa, että  $W \subset U$ . Olkoon  $y \in W$ . Joukko  $y + W_1$  on pisteen  $y$  ympäristö, ja on siis olemassa  $z \in (y + W_1) \cap W_1$ , sillä  $y \in \overline{W_1}$  ja näin sen ympäristö kohtaa joukon  $W_1$ . Lisäksi  $z = y + w$ , missä  $w \in W_1$ . Koska  $W_1$  on balansoitu, niin  $-w \in W_1$ , ja siis  $y = z - w \in W_1 + W_1 \subset U$ .  $\square$

**Määritelmä 8.19.** Olkoon  $E$  vektoriavaruus. Joukko  $A \subset E$  on konvekksi, jos  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in A$  aina, kun  $x, y \in A$  ja  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Määritelmä 8.20.** Olkoon  $E$  vektoriavaruus sekä  $A \subset E$ . Kaikkien niiden konveksien joukkojen leikkaus, jotka sisältävät joukon  $A$  on joukon  $A$  *konvekssi verho*.

**Lemma 8.21.** *Olkoon  $E$  vektoriavaruus ja  $A \subset E$ . Joukon  $A$  konvekssi verho on joukko  $C = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$ .*

*Todistus.* Selvästi  $A \subset C$ . Olkoon  $\alpha \in [0, 1]$  sekä  $x, y \in C$ . Tällöin  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ , sekä  $y = \sum_{i=n+1}^{n'} \alpha_i x_i$ , missä  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=n+1}^{n'} \alpha_i = 1$  sekä  $x_i \in A$  aina, kun  $1 \leq i \leq n'$ . Tällöin

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = \sum_{i=1}^{n'} \beta_i x_i,$$

missä  $\beta_i = \alpha \alpha_i$ , kun  $1 \leq i \leq n$ , sekä  $\beta_i = (1 - \alpha)\alpha_i$ , kun  $n + 1 \leq i \leq n'$ . Näin

$$\sum_{i=1}^{n'} \beta_i = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i + (1 - \alpha) \sum_{i=n+1}^{n'} \alpha_i = \alpha + (1 - \alpha) = 1,$$

ja joukko  $C$  on konvekksi.

Olkoon sitten  $C'$  jokin konvekssi joukko, jolle  $A \subset C'$ . Olkoon lisäksi  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in C$ . Jos  $m = 1$ , niin  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = x_i \in A \subset C'$ . Oletetaan, että jos  $m = n - 1$ , niin jokainen  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in C'$ . Tällöin  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_n x_n + (\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i} x_i \in C'$ , sillä  $C'$  on konvekssi. Näin siis  $C \subset C'$ .  $\square$

**Lause 8.22.** *Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus ja  $A \subset E$  konvekssi. Tällöin myös sulkeuma  $\bar{A}$  on konvekssi.*

*Todistus.* Olkoot  $x, y \in \bar{A}$  sekä  $\alpha \in [0, 1]$ . Kuvaukset  $x \rightarrow \alpha x$  ja  $y \rightarrow (1 - \alpha)y$  ovat jatkuvia. Olkoon  $U$  jokin pisteen  $\alpha x + (1 - \alpha)y$  ympäristö. Voidaan valita pisteen  $x$  ympäristö  $V_1$  ja pisteen  $y$  ympäristö  $V_2$ , joille  $\alpha V_1 + (1 - \alpha)V_2 \subset U$ . Valitaan edelleen  $u \in V_1 \cap A$  sekä  $v \in V_2 \cap A$ , jolloin  $\alpha u + (1 - \alpha)v \in A \cap U$ . Tällöin siis  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \bar{A}$ .  $\square$

**Määritelmä 8.23.** Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus ja  $A \subset E$ . Jos  $A$  on konvekssi, balansoitu, absorboiva ja suljettu, niin  $A$  on *tynnyri*.

**Lemma 8.24.** *Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus sekä  $A \subset E$  konvekssi, absorboiva sekä balansoitu. Minkowskin funktionaali  $p_A$  on seminormi. Lisäksi  $\{x \in E \mid p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E \mid p_A(x) \leq 1\}$ .*

*Todistus.* Olkoon  $H_A(x) = \{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in A\}$ , jolloin siis Minkowskin funktio-  
naali  $p_A(x) = \inf H_A(x)$ . Olkoon  $\beta \in H_A(x)$  sekä  $\beta' > \beta$ . Lemman 8.11 nojalla  
 $0 \in A$ , joten joukon  $A$  konveksisuudesta seuraa, että  $\beta'^{-1}x = \frac{\beta'^{-1}}{\beta^{-1}}\beta^{-1}x + (1 - \frac{\beta'^{-1}}{\beta^{-1}})0 \in A$ ,  
eli  $\beta' \in H_A(x)$ . On siis voimassa  $H_A(x) = \{\alpha > 0 \mid \alpha > p_A(x)\}$ .  
Olkoon  $\epsilon > 0$ . Olkoon sitten lisäksi  $\alpha = p_A(x) + \frac{\epsilon}{2}$  sekä  $\beta = p_A(y) + \frac{\epsilon}{2}$ , jolloin  
 $\alpha^{-1}x, \beta^{-1}y \in A$ . Käytetään lisäksi merkintää  $\gamma = \alpha + \beta$ . Koska  $A$  on konvek-  
si saadaan tulos

$$\gamma^{-1}(x+y) = \frac{\alpha}{\gamma}\alpha^{-1}x + \frac{\beta}{\gamma}\beta^{-1}y \in A,$$

sillä  $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} = 1$ . Näin  $p_A(x+y) \leq \gamma = \alpha + \beta = p_A(x) + p_A(y) + \epsilon$ , joten  
kolmioepäyhtälö toteutuu.

On voimassa

$$H_A(\alpha x) = \{\beta > 0 \mid \beta^{-1}\alpha x \in A\} = \{\beta > 0 \mid \beta^{-1}|\alpha|x \in A\} = |\alpha|H_A(x),$$

sillä  $A$  on balansoitu ja näin ehdot  $\alpha x \in A$  ja  $|\alpha|x \in A$  ovat yhtäpitäviä. On  
näin todettu myös ehto  $p_A(\alpha x) = |\alpha|p_A(x)$ .

Jos  $x \in \{x \in E \mid p_A(x) < 1\}$ , niin  $1 \in H_A$ , ja siis  $x \in A$ . Samoin, jos  $x \in A$ ,  
niin  $1 \in H_A$ , eli  $x \in \{x \in E \mid p_A(x) \leq 1\}$ .  $\square$

## 8.5 Lokaalisti konvek- si topologinen vektoriavauus

Määritellään sitten topologisten vektoriavaruuksien luokka, joiden topologiat  
osoittautuvat seminormien määräämiksi ja siten uniformisoituviksi.

**Määritelmä 8.25.** Topologinen vektoriavauus  $E$  on *lokaalisti konvek-  
si*, jos on olemassa jokin origon ympäristökanta, johon kuuluvat joukot ovat konvekseja.

**Lemma 8.26.** *Olko-  
ot  $E$  ja  $F$  vektoriavaruuksia sekä  $T : E \rightarrow F$  lineaarikuvaus.  
Jos joukko  $A \subset F$  on konvek-  
si, niin alkukuva  $T^{-1}(A)$  on avaruuden  $E$  konvek-  
si osajoukko.*

*Todistus.* Olko-  
ot  $x, y \in T^{-1}(A)$  sekä  $\alpha \in [0, 1]$ . Tällöin  $T(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha T(x) + (1 - \alpha)T(y) \in A$ ,  
sillä  $A$  on konvek-  
si.  $\square$

**Lemma 8.27.** *Olko-  
on  $E$  vektoriavauus sekä  $C$  perhe konvekseja osajoukkoja.  
Leikkaus  $\cap C$  on konvek-  
si.*

*Todistus.* Olko-  
ot  $x, y \in \cap C$  sekä  $\alpha \in [0, 1]$ . Olkoon  $A \in C$  mielivaltainen. Tällöin  
 $x, y \in A$ , joten  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in A$ . Näin ollen  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \cap C$ .  $\square$

**Lause 8.28.** *Olko-  
on  $E$  vektoriavauus sekä  $(E_i)_{i \in I}$  perhe lokaalisti konvekseja  
topologisia vektoriavaruuksia. Lisäksi olko-  
on  $T_i : E \rightarrow E_i$  lineaarikuvaus aina,  
kun  $i \in I$ , sekä  $\tau$  kuvausten  $(T_i)_{i \in I}$  indusoima topologia. Tällöin  $(E, \tau)$  on  
lokaalisti konvek-  
si topologinen vektoriavauus.*

*Todistus.* Lauseen 8.4 perusteella  $E$  on topologinen vektoriavaruus. Jokaista origon ympäristöä  $U$  kohti on olemassa äärellinen indeksijoukko  $K \subset I$  sekä konveksit origon ympäristöt  $U_k \subset U$  aina, kun  $k \in K$ . Leikkaus  $\bigcap_{k \in K} T_k^{-1}(U_k) \subset U$  on origon konvekssi ympäristö indusoidun topologian suhteen, sillä lemmän 8.26 nojalla jokainen leikkauksessa esiintyvä joukko on konvekssi ja lemmän 8.27 perusteella konveksien joukkojen leikkaus on konvekssi.  $\square$

**Määritelmä 8.29.** Olkoon  $E$  vektoriavaruus sekä  $P$  kokoelma seminormeja. Kukin seminormi indusoi pseudometriikan, joka indusoi topologian  $\tau_p$  aina, kun  $p \in P$ . Tällöin  $(E, \tau_p)$  on selvästi lokaalisti konvekssi topologinen vektoriavaruus. Olkoon sitten  $T_p : E \rightarrow E$  identtinen kuvaus, kun maalijoukossa on topologia  $\tau_p$ . Tällöin kuvaukset  $(T_p)$  indusoivat topologian  $\tau$ , ja lauseen 8.28 nojalla  $(E, \tau)$  on *seminormiperheen  $P$  virittämä lokaalisti konvekssi topologinen vektoriavaruus*.

**Lemma 8.30.** *Olkoon  $E$  topologinen vektoriavaruus sekä  $A \subset E$  balansoitu. Joukon  $A$  konvekssi verho on myös balansoitu.*

*Todistus.* Merkitään konveksia verhoa  $C$ :llä. Olkoon  $x \in C$  sekä  $\alpha \in \mathbf{K}$  sellainen, että  $|\alpha| \leq 1$ . Lemman 8.21 perusteella  $\alpha x = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ , missä jokainen  $x_i \in A$  sekä  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Saadaan siis edelleen  $\alpha x = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \alpha x_i$ , missä kukin  $\alpha x_i \in A$ . Jälleen lemmän 8.21 nojalla  $\alpha x \in C$ .  $\square$

**Lause 8.31.** *Jos  $E$  on lokaalisti konvekssi topologinen vektoriavaruus, niin on olemassa origon ympäristökanta, johon kuuluvat joukot ovat tynnyreitä.*

*Todistus.* Olkoon  $U$  origon ympäristö. Lemman 8.18 nojalla on olemassa origon suljettu ympäristö  $V_1 \subset U$ . Tällöin on siis olemassa origon konvekssi ympäristö  $V_2 \subset V_1$ . Edelleen lemmän 8.18 nojalla on olemassa origon balansoitu ympäristö  $V_3 \subset V_2$ . Olkoon  $V_4$  joukon  $V_3$  konvekssi verho sekä  $V = \overline{V_4}$ . Tällöin, koska  $V_4 \subset V_2$ , niin  $V = \overline{V_4} \subset \overline{V_2}$ . Näin ollen

$$V \subset \overline{V_2} \subset V_1 \subset U.$$

Lemman 8.30 ja lauseen 8.16 perusteella  $V$  on balansoitu. Lisäksi lemmän 8.10 nojalla  $V$  on absorboiva.  $\square$

**Lause 8.32.** *Olkoon  $(E, \tau)$  lokaalisti konvekssi topologinen vektoriavaruus. On olemassa seminormiperhe, joka virittää uniformisoituvan topologian  $\tau$ .*

*Todistus.* Lauseesta 8.31 seuraa, että on olemassa origon ympäristökanta  $F$ , joka koostuu tynnyreistä. Edelleen lauseesta 8.24 seuraa, että Minkowskin funktionaali  $p_A$  on seminormi aina, kun  $A \in F$ . Kuvaukset  $p_A$  virittävät pseudometriikat  $d_{p_A}$  sekä edelleen jonkin uniformisoituvan topologian  $\tau'$ . Olkoon  $U$  origon  $\tau$ -ympäristö. On olemassa  $A \in F$ , jolle  $A \subset U$ . Lauseesta 8.24 seuraa

myös, että on olemassa origon  $\tau'$ -ympäristö  $\{x \in E \mid d_{p_A}(0, x) < 1\} \subset A$ . Kummatkin topologiat  $\tau'$  ja  $\tau$  ovat siirtoinvariantteja, joten  $\tau \subset \tau'$ . Toisaalta  $A \subset \{x \in E \mid d_{p_A}(0, x) \leq 1\}$ , joten  $U = \{x \in E \mid d_{p_A}(0, x) \leq 1\}$  on origon ympäristö topologiassa  $\tau$ . Näin  $p_A(x) = d_{p_A}(0, x)$  on jatkuva origossa, sillä origon ympäristö  $\frac{\epsilon}{2}U$  kuvautuu väliin  $(-\epsilon, \epsilon)$ . Olkoon  $x \in E$  sekä  $y \in x + \frac{\epsilon}{2}U$ . Identtiselle kuvaukselle  $id : E \rightarrow E$  on voimassa  $d_{p_A}(id(y), x) = p_A(y - x) \in (-\epsilon, \epsilon)$ , joten  $id$  on jatkuva, jos lähtöjoukossa on topologia  $\tau$  sekä maalijoukossa topologia  $\tau_{d_{p_A}}$ . Lauseista 3.10 ja 2.44 seuraa, että  $\tau' \subset \tau$ , koska  $A$  on mielivaltaisen. Topologia  $\tau = \tau'$  on siis pseudometriikoiden virittämänä uniformisoituva lauseen 3.10 perusteella.  $\square$

**Lause 8.33.** *Olkoon  $E$  lokaalisti konvekssi topologinen vektoriavaruus ja  $F$  jokin sen tynnyreistä koostuva origon ympäristökanta. Olkoon lisäksi  $U$  Minkowskin funktionaalien virittämä uniformiteetti. On olemassa sellainen kokoelma  $P$  pseudometriikkoja, joka virittää avaruuden  $(E, U)$ , että kuvaukset  $\hat{p}_d(x) = \hat{d}(i(0), i(x))$ , missä  $d \in P$ , ovat avaruuden  $(E, \tau)$  virittävä seminormiperhe.*

*Todistus.* Lauseen 8.32 nojalla on olemassa perhe seminormeja, jotka virittävät avaruuden  $(E, \tau)$ . Olkoon  $P$  näiden seminormien virittämien pseudometriikkojen kokoelma. Tällöin jokainen  $d \in P$  täyttää ehdot  $d(x, y) = d(x + z, y + z)$  sekä  $d(0, \alpha x) = |\alpha|d(0, x)$ . Koska  $i$  on isometrinen, niin saadaan yhtälöt:

$$\begin{aligned}\hat{p}_d(x + y) &= d(0, x + y) = d(-x, y) \leq d(-x, 0) + d(0, y) = \\ &= d(0, -x) + d(0, y) = d(0, x) + d(0, y) = \hat{p}_d(x) + \hat{p}_d(y).\end{aligned}$$

Edelleen on myös voimassa:

$$\hat{p}_d(\alpha x) = d(0, \alpha x) = |\alpha|d(0, x) = |\alpha|\hat{p}_d(x).$$

$\square$



## Kirjallisuutta

- [1] Bourbaki N. : *Elements of Mathematics, General Topology, Part I*, Hermann, 1966.
- [2] Kelley J. : *General Topology*, D. Van Nostrand co., 1955.
- [3] Nagata J. : *Modern General Topology*, North-Holland publishing Co. ja Wolters-Noordhoff publishing, 1968.
- [4] Tuominen H. : *Uniformiset avaruudet, Kolmas aine matematiikassa*, Turun Yliopisto, 2006.
- [5] Väisälä J. : *Topologia II*, Limes ry, 2005.
- [6] Ylinen K. : *Topologisten vektoriavaruuksien luentomoniste*, Turun Yliopisto, 2005.