TURUN YLIOPISTO

Täydellisyysaksiooma

Maarit Koskinen

LuK-tutkielma
Elokuu 2025

Tarkastaja:
Apulaisprofessori Ville Salo

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Maarit Koskinen: Täydellisyysaksiooma
LuK-tutkielma, 15 s.
Matematiikka
Elokuu 2025

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ koostuu irrationaali-ja rationaaliluvuista. Siinä missä rationaaliluvut jättävät lukusuoralle tyhjiä kohtia, reaaliluvut täyttävät koko lukusuoran niin, että sen pisteet vastaavat yhtä reaalilukua ja päinvastoin. Tätä reaalilukujen ominaisuutta kuvaa täydellisyysaksiooma.

Täydellisyysaksiooman mukaan ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujen osajoukolla on aina pienin yläraja eli supremum, joka on reaaliluku. Joukkoa $A \subseteq \mathbb{R}$ sanotaan ylhäältä rajoitetuksi, jos on olemassa sellainen reaaliluku b, että $a \leq b$ kaikilla $a \in A$.

Tässä työssä tutkitaan reaalilukujen täydellisyysominaisuutta. Ensin käydään läpi lyhyesti reaalilukujen historiaa. Sen jälkeen tutustutaan täydellisyysaksiooman määritelmään ja sen seurauksiin. Lopuksi tutkitaan vielä reaalilukujen olemassaoloa.

Työn pääasiallinen lähde on Stephen Abbottin kirja *Understanding Analysis*. Työ on tarkoitettu erityisesti reaaliluvuista kiinnostuneille ja vaatii perusanalyysin tuntemusta.

Asiasanat: reaaliluvut, täydellisyysaksiooma, yläraja

Sisällys

1 Johdanto

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ koostuu irrationaali- ja rationaaliluvuista. Siinä missä rationaaliluvut jättävät lukusuoralle tyhjiä kohtia, reaaliluvut täyttävät koko lukusuoran niin, että sen pisteet vastaavat yhtä reaalilukua ja päinvastoin. Tätä reaalilukujen ominaisuutta kuvaa täydellisyysaksiooma, ja se erottaa reaaliluvut rationaaliluvuista. Aikanaan antiikin Kreikassa olikin suuri yllätys, että kaikki lukusuoran pisteet eivät vastaa jotain rationaalilukua.

Tutkielman toinen luku kertoo lyhyesti reaalilukujen historiasta. Koska aihe on kokonaisuutena todella laaja, luvussa keskitytään vain seikkoihin, joita käsitellään tässä tutkielmassa tai jotka tukevat näiden käsittelyä.

Kolmannessa kuvataan täydellisyysaksiooman määritelmä. Luku seuraa lähdeteoksen eli Stephen Abbottin *Understanding analysis* [1] lukua *1.3* reaalilukujen alustavasta määritelmästä alkaen. Lukuun on lisätty osio suppenevista sarjoista ja tähän liittyen rajoitetun lukujonon määritelmä (lähdeteoksen luvuista *2.3* ja *2.4*).

Tutkielman neljäs ja viides luku mukailevat lähdeteoksen lukuja *1.4-1.5* ja ne esittelevät täydellisyysaksiooman seurauksia. Neljännessä luvussa esitetään tärkeitä tuloksia suljetuista väleistä, neliöjuurista ja irrationaalilukujen sijainnista.

Viides luku sisältää täydellisyysaksiooman erikoisemman seurauksen. Luvussa esitetään kardinaliteetin ja numeroituvuuden käsitteet. Jopa äärettömien joukkojen vertailu on mahdollista kardinaaliteetin avulla.

Viimeisessä eli kuudennessa luvussa ei tarkastella täydellisyysaksiooman seurauksia, vaan mistä täydellisyysaksiooma seuraa. Kirjan luku sisältää reaalilukujen konstruktion rungon (lähdeteoksen luku *8.6*). Reaaliluvut voidaan konstruoida rationaalilukujen joukosta Dedekind-leikkauksin. $\mathbb{R}$ on algebrallisilta ominaisuuksiltaan kunta, jolle kunta- ja järjestysominaisuudet pätevät. Lopuksi ylärajaominaisuuden perusteella todistetaan reaalilukujen täydellisyys.

2 Reaalilukujen historiaa

Reaalilukujen olemassaolosta saatiin ensimmäinen viite jo ennen ajanlaskun alkua. Antiikin Kreikassa oli ollut hyvin vahvasti vallalla ajatus, että jokainen lukusuoran piste on ilmaistavissa joidenkin kokonaislukujen avulla. Luvut olivat siis rationaalisia ja puhuttiin yhteismitallisuuden käsitteestä. Irrationaalilukujen löytyminen noin 400–500 eaa. olikin suuri järkytys Pythagoraan veljeskunnan keskuudessa [2]. Geometria oli tuolloin erityisen tärkeä työväline ja tarkalleen ottaen huomattiin, että mikään lukusuoran piste (ilmaistuna kahden kokonaisluvun avulla) ei vastaa yksikkösivuisen neliön halkaisijaa ($\sqrt{2}$). Tämän jälkeen ilmeisesti Theodorus Kyreneläinen (325 eaa.) todisti juurien $\sqrt{3}$ ja $\sqrt{17}$ (ja niiden välisten irrationaalisten juurien) irrationalisuuden [2].

Analyysin varsinainen kehitys alkoi vasta 1700-luvulla Isaac Newtonin (1642–1726) ja Gottfried Leibnizin (1646–1716) töiden ansiosta. Tätä oli edeltänyt esimerkiksi funktion käsite, jonka sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler (1707–1783) myöhemmin formalisoi.

Moderni reaalilukujen analyysi alkoi eriytyä omana alanaan 1800-luvulla [3]. Tsekkiläinen Bernard Bolzano (1781–1848) mainitsi jatkuvuuden käsitteestä jo ensimmäisessä, binomikertoimiin liittyneessä työssään. Varsinaisen jatkuvuuden määritelmän hän julkaisi vuonna 1817 väliarvolausetyössään [4] ja hän teki myös havaintoja alarajaominaisuuksien suhteen. Valitettavasti nämä työt tulivat tunnetuiksi vasta myöhemmin.

Myös monet muut matemaatikot vaikuttivat 1800-luvulla kehittyvään reaalianalyysiin. Näihin kuuluivat ainakin ranskalaiset Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) ja Charles Méray (1835–1911) sekä saksalaiset Karl Weierstrass (1815–1897), Richard Dedekind (1831–1916) ja Georg Cantor (1845–1918).

Cauchy julkaisi vuonna 1821 merkittävän *Cours d'Analyse* -teoksensa, joka painotti analyysissa täsmällisyyttä *(rigor)* ja jonka sisältöön kuului esimerkisi ϵ–δ -merkinnän formalisointi. Cauchy vaikutti myös kompleksianalyysin puolella ja *konstruoi reaaliluvut lukujonojen avulla.* Kun lukujono lähestyy tiettyä kiinteää arvoa, niin arvoa kusutaan raja-arvoksi, jos lukujonon ja arvon erotuksesta tulee mielivaltaisen pieni. Dedekind konstruoi myöhemmin reaaliluvut *Dedekind-leikkausten* avulla.

Weierstrassin koetaan vaikuttaneen erityisesti reaalianalyysin syntyyn, ja hän teki sen myös luentojensa ja oppilaidensa välityksellä. Weierstrass julkaisi vuonna 1861 jatkuvuuden määritelmän käyttämällä ϵ–δ merkintöjä. Yksi Weierstrassin oppilaista oli Georg Cantor, jonka myöhemmin kehittämä joukko-oppi oli läpimurto monien sen aikaisten ja tulevienkin matemaattisten ongelmien selvittämisessä. Täydellisyysaksioomaan liittyvät erityisesti *Cantorin lause* ja *Cantorin diagonaaliargumentti* ([1], s.32–35).

3 Täydellisyysaksiooman määritelmä

Tässä luvussa määritelmät ja esimerkit mukailevat Abbottin kirjan [1] luvun *1.3* esitystapaa $\mathbb{R}$:n alustavasta määritelmästä alkaen, ellei toisin mainita.

3.1 Reaalilukujen alustavaa määritelmää

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ sisältää rationaaliluvut $\mathbb{Q}$. Joukossa $\mathbb{R}$ myös yhteen- ja kertolasku pätevät. Kaikilla alkioilla on additiivinen käänteisalkio ja kaikilla nollasta poikkeavilla alkioilla on multiplikatiivinen käänteisalkio. Todetaan myös, että $\mathbb{R}$ on *kunta*, eli kommutatiivisuus-, assosiatiivisuus- ja distributiivisuusominaisuudet pätevät. Tästä seuraa, että perusalgebralliset laskutoimitukset ovat käytettävissä. Myös järjestysominaisuudet pätevät kunnassa $\mathbb{R}$, eli kyseessä on *järjestetty kunta.* Reaalilukujen yksityiskohtaisempaan määritelmään palataan luvussa 6.

3.2 Pienin yläraja ja suurin alaraja

Määritelmä 1. Joukkoa $A \subseteq \mathbb{R}$ sanotaan *ylhäältä rajoitetuksi*, jos on olemassa sellainen $b \in \mathbb{R}$, että $a \leq b$ kaikilla $a \in A$. Samoin joukkoa $A \subseteq \mathbb{R}$ sanotaan *alhaalta rajoitetuksi*, jos on olemassa sellainen reaaliluku c, että $a \geq c$ kaikilla $a \in A$.

Määritelmä 2. Reaaliluku a on joukon A *pienin yläraja*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

(i) a on joukon A yläraja,

(ii) jos on olemassa b, joka on jokin joukon A yläraja, niin $a \leq b$.

Joukon pienin yläraja tunnetaan nimellä *supremum.* Tätä merkitään $a = \sup A$ (a on joukon A supremum). Joukon *suurin alaraja* eli *infinum* (merk. $b = \inf B$) määritetään vastaavalla tavalla: reaaliluku b on joukon B suurin alaraja, mikäli se on joukon B alaraja, ja jos on olemassa jokin joukon B alaraja c, niin $b \geq c$.

Jos s_1 ja s_2 ovat molemmat joukon A pienimpiä ylärajoja, niin ehdon (ii) mukaan voidaan merkitä $s_1 \leq s_2$ ja $s_2 \leq s_1$. Tästä seuraa, että $s_1 = s_2$ eli pienimpiä ylärajoja on vain yksi.

Ennen esimerkkeihin siirtymistä tutkitaan ylärajaominaisuutta vielä suppenevien sarjojen yhteydessä ([1], s. 56-57) ja esitetään tähän liittyvä rajoitetun lukujonon määritelmä ([1], s.49).

Määritelmä 3. Lukujono (x_n) on *rajoitettu*, mikäli on olemassa sellainen luku $M > 0$, että $|x_n| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Geometrisesti tämä tarkoittaa, että on olemassa väli $[-M, M]$, joka sisältää lukujonon (x_n) kaikki termit.

Määritelmä 4. Lukujono (a_n) on *kasvava*, jos $a_n \leq a_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja *vähenevä*, jos $a_n \geq a_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lukujono on *monotoninen*, jos se on kasvava tai vähenevä.

Lause 1. ***Monotonisten lukujonojen peruslause****. Jos lukujono on monotoninen ja rajoitettu, se on suppeneva.*

Todistus. Olkoon (a_n) monotoninen ja rajoitettu. Jotta voidaan todistaa, että (a_n) suppenee suppenemisen määritelmän perusteella, tarvitaan jokin ehdotus raja-arvoksi. Oletetaan, että lukujono on kasvava (vähenevä lukujono käsitellään vastaavasti) ja tutkitaan *joukkoa* pisteitä $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Oletuksen mukaan kysessä on rajoitettu joukko, joten merkitään

$$s = \sup\ \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Väitetään nyt että $\lim a_n = s$.

Todistetaan tämä olettamalla ensin $\epsilon > 0$. Koska s on joukon $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ pienin yläraja, $s - \epsilon$ ei ole yläraja. Tällöin on olemassa sellainen lukujonon piste että $s - \epsilon < a_N$. Koska (a_n) on kasvava, tästä seuraa, että jos $n \geq N$, niin $a_N \leq a_n$. Näin ollen

$$s - \epsilon < a_N \leq a_n \leq s < s + \epsilon,$$

josta $|a_n - s| < \epsilon$.

□

Esimerkki 1. Merkitään luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ joukkoa

$$\mathbb{N}\ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Olkoon joukko

$$A=\{\frac{1}{n}\ : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}.$$

Joukko A on rajoitettu ylhäältä ja alhaalta. Ylärajaksi sopivia ehdokkaita olisivat esimerkiksi 3, 2 ja 3/2. Väitetään, että $\sup A = 1$. Tämän todistamiseksi aiemmin mainittujen ehtojen (i) ja (ii) tulee olla voimassa. Ehdon (i) suhteen todetaan, että $1 \leq 1/n$ kaikille $n \in N$. Ehdon (ii) suhteen oletaan, että on olemassa jokin toinen yläraja b. Koska $1 \in A$ ja b on A:n yläraja, seuraa, että $1 \leq b$ eli ehto (ii) pätee. Joukon A infinum on 0. Todetaan, että 0 ei kuulu joukkoon A.

On tärkeä huomata, että toisin kuin joukon maksimi- ja minimiarvot, supremum ja infinum eivät välttämättä ole joukon alkioita.

Esimerkki 2. Tutkitaan avointa väliä (0,2) ja suljettua väliä [0,2]. Molemmat joukot ovat rajoitettuja ylhäältä ja alhaalta sekä molemmilla joukoilla on sama supremum (eli 2). Kuitenkin vain jälkimmäisellä joukolla on maksimiarvo. Joukolla voi olla siis supremum, joka ei kuitenkaan ole joukon maksimi. *Mikäli joukolla kuitenkin on maksimi, se on myös joukon supremum.*

Jokaisella epätyhjällä joukolla ei siis välttämättä ole maksimiarvoa, mutta täydellisyysaksioman mukaan kaikilla joukoilla on kuitenkin pienin yläraja eli supremum. Matematiikassa aksioomalla tarkoitetaan hyväksyttyä oletusta, jota ei tarvitse erikseen todistaa. Parhaimmillaan aksiooma on niin perustavanlaatuinen lause siihen liittyvästä asiasta, ettei sitä edes tarvitse perustella. Täydellisyysaksiooma saattaa sopia tällaiseen kuvaukseen, mutta tutkitaan ensin, miksi täydellisyysaksiooma ei päde joukossa $\mathbb{Q}$.

Esimerkki 3. Olkoon joukko

$$S = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}.$$

Joukko S on ylhäältä rajoitettu, mutta joukolla ei ole pienintä ylärajaa. Reaalilukujen joukossa joukolla olisi pienin yläraja. Täydellisyysaksiooman mukaisesti voidaan asettaa $\alpha = \sup S$ ja tällainen luku on siis olemassa. Tiedetään jo, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Tähän esimerkkiin palataan luvussa 4.2.

Esimerkki 4. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$ epätyhjä ylhäältä rajoitettu joukko, ja $c \in \mathbb{R}$. Määritellään joukko

$$c + A = \{c + a : a \in A\}.$$

Tällöin joukon $c + A$ supremum on $c + \sup A$. Todistetaan tämä erikseen ehtojen (i) ja (ii) avulla.

Todistus. Merkitään $s = \sup A$. Tällöin $a \leq s$ kaikilla $a \in A$. Tästä seuraa, että $c + a \leq c + s$ kaikilla joukon A alkioilla $a \in A$. Täten $c + s$ on joukon $c + A$ yläraja ja ehto (i) on näin todistettu.
Todistetaan (ii). Olkoon b joukon $c + A$ jokin yläraja, eli $c + a \leq b$ kaikilla $a \in A$. Tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että $a \leq b - c$ kaikilla $a \in A$. Tästä voidaan päätellä, että $b-c$ on joukon A yläraja. Koska s on joukon A pienin yläraja, $s \leq b-c$. Tämä voidaan kirjoittaa toisin $c + s \leq b$. Näin (ii) on todistettu ja voidaan päätellä $sup(c + A) = c + supA$. $\square$

On olemassa hyödyllinen ekvivalentti tapa kuvata pienimmät ylärajat. Kuten edellisessä esimerkissä huomattiin, määritelmä 2 on kaksiosainen. Ehdon (i) mukaan $\sup A$:n pitää olla yläraja; ehdon (ii) mukaan tämän ylärajan pitää olla pienin mahdollinen. Seuraava lemma 1 on vaihtoehtoinen tapa lausua ehto (ii).

Lemma 1. *Oletetaan, että $s \in \mathbb{R}$ on joukon $A \subseteq \mathbb{R}$ yläraja. s on joukon A supremum, jos ja vain kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa joukon alkio $a \in A$ niin, että $s - \epsilon < a$.*

Todistus. Lemma toisin lausuttuna: olkoon s jokin yläraja. Jos ja vain jos ei ole olemassa ylärajaa joka on pienempi kuin s, s on pienin yläraja.
($\Rightarrow$)
Oletetaan, että että $s = \sup A$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $s - \epsilon < s$, ehdon (ii) perusteella tämä ei ole joukon A yläraja. Näin ollen on olemassa jokin $a \in A$ niin että $s - \epsilon < a$ (koska muuten $s - \epsilon$ olisi yläraja).
($\Leftarrow$)
Oletetaan, että on valittu s niin, että $s - \epsilon$ ei enää ole A:n yläraja kaikilla $\epsilon > 0$. Jos on olemassa jokin $b < s$, b ei ole yläraja ($\epsilon = s - b$). (ii) mukaan ylärajan pitää olla pienin mahdollinen. Jotta $s = \sup A$, b on jokin muu joukon A yläraja, joten $s \leq b$. □

4 Täydellisyysaksiooman seurauksia

Täydellisyysaksiooman avulla voidaan ilmaista matemaattisesti se ajatus, ettei reaaliluvuista koostuvalla lukusuoralla ole tyhjiä kohtia.

Lause 2. ***Sisäkkäisten välien periaate.*** *Kaikille $n \in \mathbb{N}$ oletetaan suljettu väli $I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$. Oletetaan, että jokainen I_n sisältää I_{n+1}. Seurauksena sisäkkäisten suljettujen välien sarjalla*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \dots$$

on epätyhjä leikkaus eli $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

Todistus. Käytetään täydellisyysaksioomaa todistamaan että $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ei ole tyhjä. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa reaaliluku $x \in I_n$. Täydellisyysaksiooman mukaan suljetulla joukolla on ylä- ja alaraja. Tutkitaan joukon

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

välien vasemmanpuoleisten päätepisteiden joukkoa. Koska välit ovat sisäkkäisiä, kaikki pisteet b_n ovat joukon A ylärajoja. Merkitään

$$x = \sup A$$

Tutkitaan väliä $I_n = [a_n, b_n]$. Koska x on joukon A yläraja, $a_n \leq x$. Samoin koska jokainen b_n on joukon A yläraja ja x on pienin yläraja, tästä seuraa, että $x \leq b_n$. Yhteenvetona voidaan todeta, että koska $a_n \leq x \leq b_n$, niin $x \in I_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tästä seuraa, että $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ja leikkaus on epätyhjä.

□

4.1 Rationaalilukujen tiheys reaalilukujen joukossa

Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ laajennus. Tässä alaluvussa selvitetään, miten rationaaliluvut ja luonnolliset luvut sijaitsevat lukusuoralla suhteessa reaalilukuihin.

Lause 3. ***Arkhimedeen ominaisuus.***

(i) *Olkoon $x \in \mathbb{R}$. On olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, jolle $n > x$.*

(ii) *Olkoon y>0, $y \in \mathbb{R}$. On olemassa $n \in \mathbb{N}$ jolla 1/n $< y$.*

Lauseen osan (i) mukaan $\mathbb{N}$ ei ole ylhäältä rajattu. Periaatteessa tämä ei vaatisi edes todistusta, varsinkin kun mukaan on otettu luonnollisten lukujen, kokonaislukujen ja rationaalilukujen tutut ominaisuudet. Toisaalta tässä kohtaa ei ole varmuutta siitä, mitä reaaliluvut *todella* ovat. Reaaliluvut on kuvattu rationaalilukujen laajennuksena, jolla on algebralliset ja järjestysominaisuudet kuten rationaaliluvuilla sekä myös pienin yläraja eli täydellisyysaksioomana tunnettu ominaisuus. Muun tiedon puuttuessa on harkittava sitä mahdollisuutta, että rationaalilukujen laajennus toisi mukanaan joitain uusia numeroita, jotka toimisivat luonnollisten lukujen ylärajana (on olemassa kuntalaajennuksia jossa näin käy). Lauseen 3 mukaan näin ei ole reaaliluvuilla. Täydellisyysaksiooma, jota käytettiin täyttämään reiät lukujonossa, tuo mukanaan sen ominaisuuden, että $\mathbb{N}$ on reaalilukujen rajoittamaton osajoukko.

Todistus. Todistetaan (i).Tehdään vastaoletus, eli oletetaan, että $\mathbb{N}$ on ylhäältä rajoitettu. Täydellisyysaksiooman mukaisesti joukolla $\mathbb{N}$ on tällöin pienin yläraja. Merkitään $\alpha = \sup N$. Tällöin $\alpha - 1$ ei ole enää yläraja (lemma 1). Tämä on kuitenkin ekvivalentti sen kanssa, että $\alpha < n + 1$. Koska $n + 1 \in \mathbb{N}$, seuraa ristiriita.
Ehto (ii) seuraa ehdosta (i) asettamalla $x = 1/y$.

□

Arkhimedeen ominaisuus vaikuttaa vahvasti siihen, miten rationaaliluvut sijaitsevat reaalilukujen joukossa.

Lause 4. ***Rationaalilukujen tiheys reaalilukujen joukossa.*** *Millä tahansa kahdella reaaliluvulla a ja b, $a < b$ on olemassa rationaaliluku r, joka toteuttaa ehdon a $< r < b$.*

Todistus. Rationaaliluku on kokonaislukujen osamäärä, joten esitetään $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin että

$$a < \frac{m}{n} < b. \tag{1}$$

Valitaan ensin tarpeeksi iso nimittäjä, jotta peräkkäiset $\frac{1}{n}$ suuruiset lisäykset ovat niin lähellä toisiaan, etteivät ne ylitä väliä (a, b). Käyttämällä Arkimedeen ominaisuutta 3 valitaan tarpeeksi suuri $n \in \mathbb{N}$ jolla

$$\frac{1}{n} < b - a. \tag{2}$$

Epäyhtälö 1 on ekvivalentti $na < m < nb$ kanssa. Koska n on jo valittu, valitaan nyt m joka on pienin kokonaisluku joka on suurempi kuin na. Toisin sanoen, valitaan $m \in \mathbb{Z}$ niin, että

$$m-1 \overset{(3)}{\leq} na \overset{(4)}{<} m.$$

Nyt epäyhtälö (4) tuottaa $a < \frac{m}{n}$. Epäyhtälö 2 on ekvivalentti $a < b - \frac{1}{n}$ kanssa, joten käyttämällä (3) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} m &\leq na + 1 \\ &< n(b - \frac{1}{n}) + 1 \\ &= nb. \end{aligned}$$

Koska $m < nb$, niin $\frac{m}{n} < b$, josta seuraa vaadittu $a < \frac{m}{n} < b$.

□

Lause 4 voidaan muotoilla toisin sanomalla, että rationaaliluvut ovat tiheitä reaalilukujen joukossa. Tätä tulosta voidaan käyttää todistamaan, että myös irrationaaliluvut ovat tiheitä reaalilukujen joukossa.

Seuraus 1. *Millä tahansa kahdella reaaliluvulla $a < b$, on olemassa irrationaaliluku t, joka toteuttaa ehdon $a < t < b$.*

4.2 Neliöjuurien olemassaolo

Lause 5. *On olemassa reaaliluku α, joka toteuttaa $\alpha^2 = 2$.*

Todistus. Vrt. esimerkki 3. Olkoon joukko

$$T = \{t \in \mathbb{Q} : t^2 < 2\}$$

ja merkitään $\alpha = \sup T$. Todistetaan, että $\alpha^2 = 2$ poissulkemalla vaihtoehdot $\alpha^2 < 2$ ja $\alpha^2 > 2$. Muistetaan, että alimman ylärajan (tässä $\sup T$) määritelmä on kaksiosainen. Osoitetaan, että $\alpha^2 < 2$ rikkoo määritelmän ensimmäistä osaa (i) ja $\alpha^2 > 2$ rikkoo määritelmän jälkimmäistä osaa (ii).

Oletetaan ensin, että $\alpha^2 < 2$. Etsittäessä joukon T alkiota, joka on suurempi kuin α, arvioidaan

$$(\alpha + \frac{1}{n})^2 = \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} < \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n} = \alpha^2 + \frac{2\alpha + 1}{n}.$$

Nyt oletus $\alpha^2 < 2$ saa aikaan sen, että termin $\frac{2\alpha+1}{n}$ arvo on hyvin pieni jos kokonaisuuden summa on alle 2. Valitaan tarpeeksi suuri $n_0 \in \mathbb{N}$, jotta

$$\frac{1}{n_0} < \frac{2 - \alpha^2}{2\alpha + 1}.$$

Tästä seuraa $(2\alpha + 1)/n_0 < 2 - \alpha^2$, ja edelleen

$$(\alpha + \frac{1}{n_0})^2 < \alpha^2 + (2 - \alpha^2) = 2.$$

Joten $\alpha + 1/n_0 \in T$, joka on ristiriidassa sen kanssa, että α on joukon T yläraja. $\alpha^2 < 2$ ei siis ole mahdollinen.

Tutkitaan vielä tapaus $\alpha^2 > 2$. Arvioidaan nyt

$$(\alpha - \frac{1}{n})^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} > \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n}.$$

Jatketaan harjoitustehtävällä 1.4.7 [1] valitsemalla tarpeeksi suuri n_0 jotta

$$\frac{2\alpha}{n_0} < \alpha^2 - 2.$$

Valitsemalla näin n_0, saadaan $(\alpha - 1/n_0)^2 > \alpha^2 - 2\alpha/n_0 = \alpha^2 - (\alpha^2 - 2) = 2$. Tästä seuraa, että $\alpha - 1/n_0$ on joukon T yläraja. Kaikkien ylärajojen pitäisi kuitenkin olla yhtäsuuria tai suurempia kuin pienin yläraja (ii) mukaan. Eli $\alpha^2 > 2$ ei ole mahdollinen.

Tutkitaan vielä joukon $T = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ alarajaa. Merkitään $\beta = \inf T$. Voidaan todistaa, että $\beta^2 = 2$ poissulkemalla vaihtoehdot $\beta^2 < 2$ ja $\beta^2 > 2$.

Oletetaan ensin, että $\beta^2 < 2$. Etsitään joukon T alkiota joka olisi pienempi kuin β arvioimalla

$$(\beta - \frac{1}{n})^2 = \beta^2 - \frac{2\beta}{n} + \frac{1}{n^2} > \beta^2 - \frac{2\beta}{n}.$$

Valitaan tarpeeksi suuri $n_0 \in \mathbb{N}$, jotta

$$\frac{2\beta}{n_0} < 2 - \beta^2.$$

Saadaan $(\beta - 1/n_0)^2 > \beta^2 - 2\beta/n_0 = \beta^2 - (2 - \beta^2)$. Tästä seuraa. että $(\beta - 1/n_0)^2 < 2$ ja $\beta - 1/n_0 \in T$, joka on ristiriidassa sen kanssa, että β on joukon T alaraja.
Jos $\beta^2 > 2$, arvioidaan

$$(\beta + \frac{1}{n})^2 = \beta^2 + \frac{2\beta}{n} + \frac{1}{n^2} < \beta^2 + \frac{2\beta + 1}{n}.$$

Valitaan tarpeeksi suuri $n_0 \in \mathbb{N}$, jotta $(2\beta + 1)/n_0 < 2 - \beta^2$. Tästä seuraa $\beta^2 + (2\beta + 1)/n_0 > 2$, joka on ristiriidassa sen kanssa, että β on joukon T suurin alaraja.

$\square$

Tätä yhtälöä voidaan muokata osoittamaan, että $\sqrt{x}$ on olemassa mille tajansa $x \geq 0$. Yhtälö, joka laajentaa $(\alpha + 1/n)^m$ on nimeltään binomikaava ja sillä voidaan osoittaa, että on olemassa $\sqrt[m]{x}$ kaikille $m \in N$.

5 Joukon mahtavuus

Tämä luku esittää pääkohdat kirjan [1] luvusta *1.5*. Aiemmat täydellisyysaksiooman seuraukset vastasivat kutakuinkin sitä, mitä reaaliluvuista tiedettiin jo etukäteen. Viimeinen seuraus on luonteeltaan erilainen.

5.1 Vastaavuus

Kardinaliteetilla eli joukon mahtavuudella kuvataan joukon kokoa. Äärellisten joukkojen kardinaliteetteja voidaan vertailla liittämällä joukkoon luonnollinen luku. Vastaavuuden avulla voidaan vertailla joukkojen kokoa ilman että viitataan mihinkään tiettyyn lukuun. Etuna on se, että tämä toimii myös äärettömien joukkojen kanssa.

Määritelmä 5. Funktio $f : A \to B$ on *injektio (one-to-one)*, jos $a_1 \neq a_2$ joukossa A tarkoittaa, että $f(a_1) \neq f(a_2)$ joukossa B. Funktio f on *surjektio (onto)*, jos kaikilla $b \in B$ on mahdollista löytää alkio $a \in A$ jolle $f(a) = b$.

Kun puhutaan vastaavuudesta kahden joukon välillä, tarkoitetaan nimenomaan funktiota $f : A \to B$, joka on sekä injektio että surjektio (eli bijektio). Injektiolla tarkoitetaan että mitkään kaksi joukon A alkiota eivät vastaa samaa alkiota joukossa B, ja surjektiolla tarkoitetaan, että jokainen joukon B alkio vastaa jotakin joukon A alkiota.

Määritelmä 6. Joukolla A on *sama kardinaliteetti* kuin joukolla B, jos on olemassa $f : A \to B$, joka on sekä injektio (1-1) että surjektio (onto). Tällöin merkitään $A \sim B$.

5.2 Numeroituvat joukot

Määritelmä 7. Joukko A on *numeroituva*, jos $\mathbb{N} \sim A$. Ääretöntä joukkoa, joka ei ole numeroituva, sanotaan *ylinumeroituvaksi.*

Lause 6. ***Joukkojen $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ numeroituvuus***

(i) Joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituva.

(ii) Joukko $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva.

Todistus. (i) Olkoon joukko $A_1 = \{0\}$ ja kun $n \geq 2$, olkoon A_n joukko

$$A_n = \{\pm\tfrac{p}{q} : \text{jossa } p, q \in \mathbb{N} \text{ pienimmät tekijät, niin että } p + q = n\}.$$

Ensimmäiset joukot ovat

$$A_1 = \{0\},\ A_2 = \{\tfrac{1}{1}, \tfrac{-1}{1}\},\ A_3 = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{-2}{1}\},$$

$$A_4 = \{\tfrac{1}{3}, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{3}{1}, \tfrac{-3}{1}\} \text{ ja } A_5 = \{\tfrac{1}{4}, \tfrac{-1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{-2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{-3}{2}, \tfrac{4}{1}, \tfrac{-4}{1}\}.$$

Kaikki A_n ovat äärellisiä ja jokainen rationaaliluku esiintyy yhdessä joukossa. Yksiyhteen vastaavuus luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ kanssa saadaan aikaiseksi esittämällä jokaisen A_n:n alkiot peräkkäin.

Jokainen rationaaliluku esiintyy vastaavuudessa yhden kerran. Esimerkiksi, $22/7 \in A_{29}$. Koska joukot $A_1 \ldots A_{28}$ ovat äärellisiä, on varmaa, että 22/7 tulee mukaan sarjaan jossain vaiheessa. Koska tämä perustelu toimii kaikille rationaaliluvuille p/q, se toimii todistuksena siitä, että vastaavuus on surjektio. Jotta voidaan varmistaa, että kysessä on injektio, todetaan, että joukot A_n ovat *erillisiä* (disjoint), joten mikään rationaaliluku ei esiinny kahta kertaa.

(ii) Lauseen 6 toisen osan todistus tehdään vastaoletuksella. Oletetaan, että on olemassa yksi yhteen -funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Tämä tarkoittaisi, että joukon $\mathbb{R}$ alkiot on mahdollista numeroida. Jos $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$ ja niin edelleen, surjektio-oletus tarkoittaa, että voidaan kirjoittaa

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \dots\} \tag{3}$$

ja voidaan varmuudella sanoa, että jokainen reaaliluku on mukana. Nyt käyttämällä sisäkkäisten välien periaatetta (lause 2) voidaan tuottaa luku, joka ei ole listassa mukana.

Olkoon I_1 suljettu väli, joka *ei* sisällä x_1. Olkoon I_2 suljettu väli, joka sisältyy väliin I_1 ja ei sisällä x_2. On helppo todeta I_2 olemassaolo. Väli I_1 sisältää varmasti kaksi *erillistä* suljettua väliä ja x_2 voi olla vain toisessa näistä. Yleisesti, välille I_n voidaan kontruoida $I_n + 1$, niin että

(i) $I_{n+1} \subseteq I_n$ ja

(ii) $x_{n+1} \notin I_{n+1}$.

Tutkitaan nyt leikkausta $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Jos x_{n_0} on jokin reaaliluku listasta (3), tällöin $x_{n_0} \notin I_{n_0}$, ja tästä seuraa, että

$$x_{n_0} \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Nyt oletetaan, että lista (3) sisältää kaikki reaaliluvut, ja tästä seuraa

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset.$$

Kuitenkin sisäkkäisten välien periaatteen mukaan $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Periaatteen mukaan on vähintään yksi $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, joka ei voi olla listalla (3). Ristriita tarkoittaa, että joukon $\mathbb{R}$ numerointi ei ole mahdollista. $\mathbb{R}$ on siis ylinumeroituva joukko. $\square$

Mikä tahansa numeroituvan joukon osajoukko on joko numeroituva tai äärellinen. Jos jokin joukko voidaan järjestää listan muotoon, joidenkin alkioiden poisto johtaa lyhyempään (ja mahdollisesti päättyvään) listaan. Tämä tarkoittaa, että numeroituvat joukot ovat pienimmät ääretöntä tyyppiä olevat joukot, vielä pienemmät ovat edelleen numeroituvia tai äärellisiä.

Epävtarkasti sanottuna joukon $\mathbb{R}$ kardinaliteetti on suurempaa tyyppiä oleva äärettömyys. Reaalilukuja on niin paljon enemmän kuin luonnollisia lukuja, ettei ole mitään mahdollisuutta kuvata reaalilukujen joukkoja luonnollisten lukujen avulla. Rationaalilukujen joukko sen sijaan on numeroituva. Tämä on pienintä tyyppiä oleva ääretön joukko. Mitä se kertoo irrationaalikujen joukosta $\mathbb{I}$? Koska $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, voidaan todistaa, että kahden numeroituvan joukon unioni on numeroituva. Koska $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, $\mathbb{I}$ ei voi olla numeroituva, koska muuten $\mathbb{R}$ olisi. Johtopäätös on, että irrationaalilukujen joukko muodostaa huomattavasti suuremman $\mathbb{R}$:n osajoukon kuin $\mathbb{Q}$.

Lause 7. *Jos $A \subseteq B$ ja B on numeroituva, niin A on joko numeroituva tai äärellinen.*

Lause 8. *(i) Jos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ovat kaikki numeroituvia joukkoja, silloin unioni $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ on numeroituva.*

(ii) Jos A_n on numeroituva joukko kaikilla $n \in \mathbb{N}$, silloin $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ on numeroituva.

6 Reaalilukujen olemassaolo

Tämä luku seuraa kirjan [1] lukua *8.6*, jossa tarkoituksena on todistaa lause 9 reaalilukujen olemassaolosta. Luku alkaa reaalilukujen konstruoinnilla Dedekind-leikkauksin, jonka jälkeen varmistetaan, että niissä pätevät kunta- ja järjestysominaisuudet. Lopuksi todetaan, että täydellisyysominaisuus on voimassa. Täydellisyysaksioomaa ei enää tarvitse pitää pelkkänä aksioomana, vaan lauseena.

Tässä kappaleessa esitetään määritelmät ja pääpiirteet liittyen todistuksen eri vaiheisiin. Varsinainen todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [5].

Lause 9. ***Reaalilukujen olemassaolo***. *On olemassa järjestetty kunta, jonka kaikilla ylhäältä rajoitetuilla epätyhjillä osajoukoilla on pienin yläraja. Lisäksi tämä kunta sisältää rationaalilukujen joukon $\mathbb{Q}$ alikuntana.*

6.1 Reaalilukujen konstruointi rationaalilukujen joukosta

Oletetaan, että rationaalilukujen joukko on olemassa ja additiivisuus-, multiplikatiivisuus- ja järjestysominaisuudet pätevät. Tässä kohtaa ei oleteta, että reaalilukuja on olemassa.

Määritelmä 8. Dedekind-leikkaukset. Rationaalilukujen osajoukkoa A kutsutaan leikkaukseksi, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

(c1) $A \neq \emptyset$ ja $A \neq \mathbb{Q}$

(c2) Jos $r \in A$, niin A sisältää myös kaikki rationaaliluvut $q < r$

(c3) Joukolla A ei ole maksimia; jos $r \in A$, on olemassa $s \in A$ niin että r<s

Esimerkki 5. Harjoitustehtävä 8.6.1b-d [1]. Olkoon joukko

$$S = \{t \in \mathbb{Q} : t \leq 2\}.$$

Joukko S ei ole leikkaus, koska joukolla S on maksimiarvo 2 (ehto (c3) ei ole voimassa).
Olkoon joukko

$$T = \{t \in \mathbb{Q} : t^2 < 2 \text{ tai } t < 0\}.$$

Joukko T on leikkaus, koska $T \neq \emptyset$ ja $T \neq \mathbb{Q}$ (ehto (c1)). Jos $r \in A$ ja $r \geq 0$, niin A sisältää myös kaikki rationaaliluvut $q < r$, koska $q^2 < r^2 < 2$ ja kaikki q<0 sisältyvät joukkoon. Jos r<0, niin kaikki q<0 sisältyvät. (ehto (c2)). Joukolla T ei ole maksimia: jos $r \in T$, on olemassa $s \in T$ niin että $r < s$ (ehto (c3)).

Myös joukko

$$U = \{t \in \mathbb{Q} : t^2 \leq 2 \text{ tai } t < 0\}$$

on leikkaus, sillä $\sqrt{2}$ on irrationaalinen, ja rationaalilukujen joukko ei saavuta koskaan lukua $\sqrt{2}$ eli joukolla ei ole maksimia (ehto (c3)) (vrt 5 todistus).

Määritelmä 9. Määritetään reaaliluvut rationaalilukujen kaikkien leikkauksien joukoksi.

6.2 Kunta- ja järjestysominaisuudet

Olkoon joukko F ja $x, y \in F$. F:n operaatiolla tarkoitetaan funktiota, joka kuvaa järjestetyn parin $(x,\, y)$ kolmanneksi alkioksi $z \in F$.

Määritelmä 10. Joukko F on kunta, jos yhteenlasku $(x + y)$ ja kertolasku (xy) ovat voimassa seuraavin ehdoin:

(f1) Kaikille $x, y \in F$ on voimassa

$$x + y = y + x \text{ ja } xy = yx \text{ (yhteen- ja kertolaskun kommutatiivisuus).}$$

(f2) Kaikille $x, y, z \in F$ on voimassa

$$x+(y+z) = (x+y)+z \text{ ja } x(yz) = (xy)z \text{ (yhteen-ja kertolaskun assosiatiivisuus).}$$

(f3) Kaikille $x \in F$ on voimassa neutraalialkioiden 0 ja 1 $(0 \neq 1)$ olemassaolo, niin että

$$0 + x = x \text{ ja } x1 = x.$$

(f4) Kun $x \in F$, on olemassa -$x \in F$ niin, että $x + (-x) = 0$ ja kun $x \neq 0$, on olemassa x^{-1}, niin, että $xx^{-1} = 1$ (yhteen- ja kertolaskun vasta-alkioiden olemassaolo).

(f5) Kaikille $x, y, z \in F$ on voimassa

$$x(y + z) = xy + xz \text{ (distributiivisuusominaisuus).}$$

Nämä ominaisuudet pätevät joukossa $\mathbb{Q}$.

Määritelmä 11. Joukon F järjestys on relaatio (merk. $\leq$), jolla on seuraavat ominaisuudet:

(o1) Mille tahansa $x, y \in F$ pätee, että joko $x \leq y$ tai $y \geq x$ (tai molemmat) on totta.

(o2) Jos $x \leq y$ ja $y \geq x$, niin $x = y$.

(o3) Jos $x \leq y$ ja $y \geq z$, niin $x \leq z$.

Joskus kirjoitetaan $y \geq x$ sen sijaan että kirjoitettaisiin $x \leq y$. Merkintä $x < y$ tarkoittaa $x \leq y$ mutta $x \neq y$.
Kuntaa sanotaan järjestetyksi kunnaksi, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

(o4) Jos y $\leq z$, niin $x + y \leq x + z$.

(o5) Jos $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, niin $xy \geq 0$.

Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on järjestetty kunta. Reaaliluvut on nyt siis määritelty rationaalilukujen leikkauksien kokoelmaksi. Yhteen-ja kertolaskun sekä järjestysrelaatioiden tulee päteä myös tässä joukossa.

Määritelmä 12. Olkoon A ja B satunnaisia $\mathbb{R}$:n alkioita.

$$A \leq B \text{ tarkoittaa samaa kuin } A \subseteq B.$$

Todetaan, että järjestyrelaatio pätee tässä joukossa ja tutkitaan vielä additiivisuutta ja multiplikatiivisuutta.

6.3 Reaalilukujen algebraa

Olkoon A ja B $\mathbb{R}$:n osajoukkoja. Määritellään

$$A + B = \{a + b : a \in A \textbf{ ja } b \in B\}$$

Ennen kuntaominaisuuksien tutkimista, selvitetään, onko määritelmä operaatio. Onko $A + B$ leikkaus? Todistetaan, että ehto (c2) on voimassa joukolle $A + B$.

Todistus. Oletetaan, että $a + b \in A + B$. Olkoon $s \in \mathbb{Q}$, niin että $s < a + b$. Koska $s - b < a$, tästä seuraa, että $s - b \in A$, koska A on leikkaus. Tällöin

$$s = (s - b) + b \in A + B,$$

eli (c2) pätee joukolle $A + B$. □

Tyydytään tässä toteamaan, että myös (c1) ja (c3) pätevät joukolle $A + B$. $A + B$ on siis leikkaus.

Yhteenlaskun identiteetti- ja käänteisalkiot ovat $O = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$ ja $-A = \{r \in \mathbb{Q}$: on olemassa t $\notin A$ jolle pätee $t < -r\}$.

Olkoon $A \geq O$ ja $B \geq O$ $\mathbb{R}$:n osajoukkoja ($O = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$). Määritetään tulo AB

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B \mid a, b \geq 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$$

Mille tahansa A ja B määritellään

$$AB = \begin{cases} \text{kuten määritetty, jos } A \geq O \text{ ja } B \geq O \\ -[A(-B)], \text{ jos } A \geq O \text{ ja } B < O \\ -[(-A)B], \text{ jos } A < O \text{ ja } B \geq O \\ (-A)(-B), \text{ jos } A < O \text{ ja } B < O. \end{cases}$$

Kunta- ja järjestysominaisuudet pätevät näin määritellyissä reaalilukujen joukossa. Todistus sivuuteteaan tässä.

6.4 Alimmat ylärajat

$\mathbb{R}$ on siis järjestetty kunta. Lopuksi todetaan, että myös täydellisyysominaisuus pätee. Kerrataan täydellisyysaksiooma luvusta 3 nyt hieman eri merkinnöin.

Joukkoa $A \subseteq \mathbb{R}$ sanotaan ylhäältä rajoitetuksi, jos on olemassa sellainen $B \in \mathbb{R}$, että $A \leq B$ kaikilla $a \in \mathcal{A}$. (Joukko $\mathcal{A}$ on rationaalilukujen leikkauksien kokoelma joka edustaa nyt siis reaalilukuja.)

Määritelmä 13. Reaaliluku $S \in \mathbb{R}$ on joukon $\mathcal{A} \in \mathbb{R}$ pienin yläraja, jos se täyttää seuraavat ehdot:

(i) S on joukon $\mathcal{A}$ yläraja

(ii) jos on olemassa B, joka on jokin joukon $\mathcal{A}$ yläraja, niin $S \leq B$.

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$ epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu joukko. Olkoon S kaikkien $A \in \mathcal{A}$ unioni. Täydellisyysominaisuuden todistuksessa todetaan ensin, että koska S on leikkaus, $S \in \mathbb{R}$. Sen jälkeen osoitetaan, että S on joukon $\mathcal{A}$ alin yläraja.
Tarkempi todistus löytyy kirjasta [5].

Viitteet

[1] Abbott, S. *Understanding analysis.* Second edition. 2015. Springer.

[2] Eves, H. *Great moments in mathematics (before 1650).* 1983. Mathematical Association of America.

[3] Boyer, C. *Tieteiden kuningatar: matematiikan historia.* Osa 2. 1994. Art House.

[4] Russ, SB. *A translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem.* Historia Mathematica, Vol. 7 Issue 2, p.156-185. 1980. https://doi.org/10.1016/0315-0860(80)90036-1.

[5] Fikhtengol'ts, G. M. *The fundamentals of mathematical analysis. Vol. 1.* 1965. Pergamon.