TURUN YLIOPISTO

Darboux'n lause

Elviira Uotila

LuK-tutkielma
Huhtikuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Tarkastaja:
Prof. Ville Salo

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LuK-tutkielma
Pääaine: Matematiikka
Tekijä: Elviira Uotila
Otsikko: Darboux'n lause
Ohjaaja: Prof. Ville Salo
Sivumäärä: 10 sivua
Aika: Huhtikuu 2026

Tässä tutkielmassa esitetään ja todistetaan Darboux'n lause, jonka mukaan derivoituvan funktion derivaattafunktio toteuttaa väliarvolauseen.

Toisessa luvussa määritellään jatkuva ja derivoituva funktio sekä todistetaan jatkuvien funktioiden väliarvolause. Nämä ovat merkittäviä Darboux'n lauseen ymmärtämisen ja käsittelemisen kannalta.

Kolmannessa luvussa käsitellään aluksi funktion suurimpia ja pienimpiä arvoja. Luvussa esitetään kaksi lausetta, joita hyödynnetään Darboux'n lauseen todistuksessa. Darboux'n lauseelle esitetään todistus sekä kaksi esimerkkiä.

Asiasanat: Darboux'n lause, Jatkuva funktio, Väliarvolause, Derivoituva funktio, Matematiikka.

Sisällys

1 Johdanto

Reaalianalyysin yksi tärkeä tulos on jatkuvien funktioiden väliarvolause, jota matemaatikot ovat käyttäneet jo 1700-luvulta lähtien. Myöhemmin matemaatikko Gaston Darboux huomasi, että derivoituvien funktioiden derivaattafunktiot toteuttavat tämän lauseen, vaikka eivät olisikaan jatkuvia. Tämä mahdollisti väliarvolauseen käyttämisen myös derivaattafunktioita käsiteltäessä.

Tässä tutkielmassa esitetään ja todistetaan tämä Darboux'n tekemä havainto derivaattafunktioista eli Darboux'n lause. Toisessa luvussa määritellään jatkuvat funktiot sekä esitetään todistus jatkuvien funktioiden väliarvolauseelle. Luvussa määritetään myös, mitä ovat derivoituvat funktiot ja funktioiden derivaatat. Kolmannessa luvussa käsitellään Darboux'n lausetta. Luvun alussa esitetään ja todistetaan kaksi apulausetta Darboux'n lauseen todistamista varten. Darboux'n lauseelle esitetään todistus, joka hyödyntää rajatun funktion suurimpia ja pienimpiä arvoja. Lauseen hyödyntämisestä annetaan kaksi erilaista esimerkkiä.

Tämän tutkielman päälähteet ovat Stephen Abbotin kirja *Understanding Analysis* ja Walter Rudinin kirja *Principles of Mathematical Analysis.* Muita lähteitä, joita on käytetty yksittäisten lauseiden muotoiluun ja todistamiseen, ovat Robert G. Bartlen ja Donald R. Sherbertin *Introduction to Real Analysis* sekä Hannu Laakson ja Vesa Halavan luentomoniste *Analyysi I.*

Tämän tutkielman kirjoituksessa on hyödynnetty ChatGPT-tekoälytyökalua kielenhuoltoon sekä tekstin muotoiluun.

2 Funktion ominaisuudet

Tässä luvussa määritetään jatkuvat ja derivoituvat funktiot sekä todistetaan jatkuvien funktioiden väliarvolause. Luvussa osoitetaan myös, että kaikki derivoituvat funktiot ovat myös jatkuvia, jolloin voidaan todeta, että väliarvolause pätee derivoituville funktioille. Väliarvolauseen ja derivoituvuuden ymmärtäminen on keskeistä Darboux'n lauseen käsittelyn kannalta, koska kyseisen lauseen ehtona on funktion derivoituvuus suljetulla välillä ja se on myös väliarvolause derivaattafunktioilla.

2.1 Jatkuva funktio

Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen käsittelemiseksi on määriteltävä, mitä ovat jatkuvat funktiot. Geometrisesti jatkuvuus tarkoittaa sitä, että funktion ollessa jatkuva jossakin pisteessä a funktion kuvaaja ei katkea kohdassa $x = a$. Samoin, jos funktio on jatkuva koko sen määrittelyjoukossa, sen kuvaaja ei katkea missään kohtaa. Jatkuvan funktion määrittelemiseen on käytetty Abbotin [1] esittämää määritelmää.

Määritelmä 1. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *jatkuva* pisteessä $a \in A$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolla $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ aina, kun $|x - a| < \delta$ ja $x \in A$.

Funktio f on jatkuva koko määrittelyjoukossa A, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukon pisteessä.

Jatkuvuus pisteessä a voidaan esittää myös raja-arvojen avulla. Jotta funktio f olisi jatkuva kyseisessä pisteessä, pitää funktion olla määritelty pisteessä a ja funktiolla tulisi olla äärellinen raja-arvo, kun $x \to a$. Näiden lisäksi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Jos jokin näistä ehdoista ei pidä paikkaansa, a on funktion f epäjatkuvuuskohta eli funktio ei ole jatkuva pisteessä a.

Esimerkki 1. Olkoon funktio $f(x) = \sqrt{x}$ määritetty joukossa $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Osoitetaan, että funktio f on jatkuva joukossa A.

Olkoon $\epsilon \geq 0$. Jatkuvuuden osoittamiseksi tulee näyttää, että $|f(x) - f(a)|$ voidaan tehdä pienemmäksi kuin ϵ kaikilla x:n arvoilla jossakin pisteen $a \in A$ δ-ympäristössä. Tulee siis osoittaa, että itseisarvo $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$. Saadaan

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right) = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}},$$

kun $\sqrt{a} \neq 0$ eli $a \neq 0$. Valitaan $\delta = \epsilon\sqrt{a}$. Koska $|x-a| < \delta$, niin $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{\epsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \epsilon$, kuten on haluttu.

Koska myös $0 \in A$, pitää tutkia tilannetta $a = 0$. Tällöin tulee osoittaa, että

$$|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} < \epsilon,$$

joka pätee, kun $x < \epsilon^2$. Valitaan siis $\delta = \epsilon^2$. Tällöin $|x - 0| < \delta$, jolloin $|f(x) - 0| < \epsilon$. Funktio f on siis jatkuva myös pisteessä $x = 0$.

Esimerkki 1 perustuu Abbotin kirjaan [1].

Jatkuvista funktioista ja reaaliluvuista pystytään laskemalla muodostamaan uusia jossain pisteessä tai jollain välillä jatkuvia funktioita.

Lause 1. *Olkoot funktiot f ja g jatkuvia pisteessä a, ja olkoon $c \in \mathbb{R}$ jokin luku. Tällöin myös $f \pm g$, cf ja fg ovat jatkuvia pisteessä a. Jos lisäksi $g(x) \neq 0$ pisteessä a, niin myös $\frac{f}{g}$ on jatkuva. Sama pätee, jos pisteen a tilalla on väli I.*

Lause on Laakson ja Halavan luentomonisteesta [3] ja se on todistettavissa raja-arvon laskusääntöjen avulla. Lause otetaan annettuna ja todistus sivuutetaan.

2.2 Jatkuvan funktion väliarvolause

Jatkuvan funktion väliarvolause sanoo, että suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio f saa kaikki arvot, jotka ovat sen päätepisteissä saamien arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä. Tämä on intuitiivisesti hahmotettavissa, koska jatkuvassa funktiossa ei tule hyppyjä eikä se katkea, joten sen on saatava välin kaikki arvot päästäkseen arvosta $f(a)$ arvoon $f(b)$.

Tätä lausetta on pidetty niin selvänä, että sille esitettiin ensimmäinen analyyttinen todistus vasta vuonna 1817, vaikka sitä oli hyödynnetty jo 1700-luvulla. Todistuksen esitti matemaatikko Bernard Bolzano, ja lausetta kutsutaankin joissain lähteissä Bolzanon korollaariksi. Tässä esitetty jatkuvan funktion väliarvolauseen todistus pohjautuu kuitenkin Rudinin [4] esittämään todistukseen.

Lause 2 (Jatkuvan funktion väliarvolause)**.** *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Jos c on jokin reaaliluku, joka toteuttaa $f(a) < c < f(b)$, niin on olemassa piste $x \in (a, b)$, jolla $f(x) = c$.*

Sama tulos tietysti pätee, kun $f(a) > f(b)$.

Todistus. Tarkastellaan joukkoa $A = \{t \in [a, b] \mid f(t) < c\}$. Selvästi $a \in A$, joten A ei ole tyhjä joukko. Joukko A on myös selkeästi ylhäältä rajoitettu. Näin ollen $\sup A \in \mathbb{R}$. Olkoon $x = \sup A$, jolloin $x \in [a, b]$.

Oletetaan, että $f(x) < c$. Koska f on jatkuva pisteessä x, on olemassa $y \in (x, b)$, jolle $f(y) < c$, joten $y \in A$. Tämä on ristiriita sen kanssa, että $x = \sup A$. Ei siis voi päteä, että $f(x) < c$.

Oletetaan, että $f(x) > c$. Vastaavasti, koska f on jatkuva pisteessä x, on olemassa $y \in (a, x)$, jolle $f(t) > c$, jos $y \le t \le x$. Koska $x = \sup A$, pätee myös, että $f(t) \ge c$, jos $x \le t \le b$. Siis $f(t) \ge c$, jos $y \le t \le b$, joten y on joukon A yläraja. Tämä on ristiriita sen kanssa, että $x = \sup A$, joten ei voi päteä, että $f(x) > c$.

Nyt on todettu, että oletukset $f(x) < c$ tai $f(x) > c$ eivät päde, joten on oltava $f(x) = c$. $\square$

Kaikki jatkuvat funktiot siis toteuttavat väliarvolauseen. Nimetään tämä jatkuvien funktioiden omaisuus väliarvo-ominaisuudeksi (engl. *the indermediate value property*).

Voisi luulla, että väliarvolause toimii myös toiseen suuntaan. Näin ei kuitenkaan ole, eli vaikka funktiolla olisi väliarvo-ominaisuus, se ei välttämättä kuitenkaan ole jatkuva. Tämä tulee hyvin esille esimerkiksi juuri Darboux'n lausetta käsiteltäessä.

2.3 Derivoituva funktio

Darboux'n lauseen ehdoissa sanotaan, että funktion f tulee olla derivoituva tietyllä suljetulla välillä. Määritetään, mitä tarkoittaa, että jokin funktio on derivoituva. Määritelmä on Bartlen ja Sherbertin kirjasta [2].

Määritelmä 2. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *derivoituva* pisteessä $c \in A$, jos on olemassa sellainen luku $L \in \mathbb{R}$, jolla kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolla $\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L\right| < \epsilon$, kun $0 < |x - c| < \delta$. Funktion f derivaatta pisteessä c on L eli $f'(c) = L$.

Funktio f on derivoituva koko määrittelyjoukossa A, jos se on derivoituva jokaisessa määrittelyjoukon pisteessä.

Funktion derivoituvuus voidaan määritellä myös raja-arvojen avulla. Jos raja-arvo $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ on äärellisenä olemassa, funktio f on derivoituva pisteessä c ja saatu raja-arvo on funktion derivaatta tässä pisteessä.

Esimerkki 2. Osoitetaan, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ on derivoituva koko reaalilukujen joukossa.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $c \in \mathbb{R}$ jokin piste. Valitaan $\delta = \epsilon$ ja $L = 2c$, jolloin

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L\right| = \left|\frac{x^2-c^2}{x-c} - 2c\right| = \left|\frac{(x-c)(x+c)}{x-c} - 2c\right|$$

$$= |x+c-2c| = |x-c| < \epsilon,$$

kun $0 < |x-c| < \delta$. Funktio f on siis derivoituva kaikilla reaaliluvuilla, ja $f'(c) = 2c$.

Jos funktio on derivoituva jossain pisteessä, sen tulee olla siinä myös jatkuva. Seuraava lause ja todistus on Laakson ja Halavan luentomonisteesta [3].

Lause 3. *Jos $f : A \to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $c \in A$, niin f on myös jatkuva pisteessä c.*

Todistus. Halutaan osoittaa, että $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Kun $x \neq c$, voidaan kirjoittaa, että

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c).$$

Voidaan siirtyä raja-arvoihin, ja koska tiedetään, että $f'(c) = \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)$, saadaan

$$\lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) = \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\lim_{x\to c}(x-c) = f'(c)\cdot 0 = 0.$$

Siis $\lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) = \lim_{x\to c} f(x) - f(c) = 0$ eli $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Funktio f on siis jatkuva pisteessä c.

□

Lause pätee myös tilanteessa, jossa derivoituvuus on määritetty jollain avoimella tai suljetulla välillä. Funktio on myös siis silloin sillä välillä jatkuva, ja derivoituvalle funktiolle pätee jatkuvan funktion väliarvolause. Lause ei kuitenkaan ole käännettävissä. Jatkuvat funktiot eivät siis aina ole myös derivoituvia.

3 Darboux'n lause

Tässä luvussa päästään itse Darboux'n lauseeseen ja sen todistamiseen. Alussa käsitellään kahta Darboux'n lauseen todistukseen vaadittavaa lausetta ja lopussa esitetään esimerkit kahdesta erilaisesta funktiosta.

3.1 Suurimmat ja pienimmät arvot

Darboux'n lauseen todistuksessa käytetään Weierstrassin min–max-lausetta, joka tunnetaan myös ääriarvolauseena. Lause sanoo, että suljettu väli I kuvautuu jatkuvalla funktiolla f suljetuksi väliksi. Suljetun välin kuvaksi tulee siis $[p, s]$, jossa $p, s \in \mathbb{R}$ ja $p = \inf f(I)$ ja $s = \sup f(I)$. Tämä lause todistuksineen on esitetty Laakson ja Halavan luentomonisteessa [3].

Weierstrassin lauseen todistamiseksi on tiedettävä, että jatkuva funktio on suljetulla välillä rajoitettu. Tämä on geometrisesti helposti hahmotettavissa, koska funktion ollessa jatkuva suljetulla välillä se ei voi välin sisäpisteissä tai päätepisteissä kasvaa rajatta. Seuraava lemma on Laakson ja Halavan luentomonisteesta [3], ja sen todistus sivuutetaan.

Lemma 1. *Suljetulla välillä jatkuva funktio on rajoitettu tällä välillä.*

Lause 4 (Weierstrassin min–max-lause)**.** *Jatkuva funktio kuvaa suljetun välin suljetuksi väliksi. Jatkuvalla funktiolla on siis suljetulla välillä suurin ja pienin arvo.*

Todistus. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Lemman 1 mukaan f on välillä rajoitettu, joten $p = \inf f([a, b])$ ja $s = \sup f([a, b])$ ovat reaalilukuja.

Osoitetaan, että $s \in f([a, b])$ eli on olemassa $c \in [a, b]$, jolle $f(c) = s$. Tehdään vastaoletus, että tällaista lukua c ei ole olemassa. Koska s on joukon $f([a, b])$ yläraja, tällöin $f(x) < s$ kaikilla $x \in [a, b]$. Muodostetaan apufunktio

$$g(x) = \frac{1}{s - f(x)}.$$

Funktio g on jatkuva ja määritelty joukossa $[a, b]$, koska $s - f[x] > 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Lisäksi $g(x) > 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tiedetään, että g on siis myös rajoitettu välillä $[a, b]$, joten on olemassa $m > 0$, jolle

$$g(x) = \frac{1}{s - f(x)} < m$$

kaikilla $x \in [a, b]$. Siis

$$f(x) < s - \frac{1}{m}$$

kaikilla $x \in [a,b]$. Luku $s - \frac{1}{m}$ on siis joukon $f([a,b])$ yläraja. Tämä on ristiriita, koska $s - \frac{1}{m} < s$ ja $s = \sup f([a,b])$. On siis olemassa $c \in [a,b]$, jolle $f(c) = s$ eli funktiolla f on suljetulla välillä suurin arvo.

Väite $p \in f([a,b])$ seuraa edellisestä. Tarkastellaan jatkuvaa funktiota $-f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Edellisen perusteella on olemassa $c' \in [a,b]$, jolle

$$-f(c') = \sup\{-f(x) \mid x \in [a,b]\} = -\inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Siis $f(c') = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = \inf f([a,b])$.

Nyt siis $\inf f([a,b]) = \min f([a,b])$ ja $\sup f([a,b]) = \max f([a,b])$, joten funktion suurin ja pienin arvo ovat olemassa. □

Seuraavaksi halutaan tutkia derivaattaa funktion suurimmissa ja pienimmissä arvoissa. Seuraava lause ja sen todistus pohjautuu Abbotin kirjaan [1].

Lause 5 (Fermat'n lause)**.** *Olkoon funktio f derivoituva avoimella välillä (a,b). Jos f saa suurimman arvonsa pisteessä $c \in (a,b)$, niin $f'(c) = 0$. Sama pätee, jos funktio f saa pienimmän arvonsa pisteessä c.*

Todistus. Koska c on avoimella välillä (a,b), voidaan muodostaa kaksi lukujonoa (x_n) ja (y_n), jotka suppenevat kohti c:tä ja joille $x_n < c < y_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $f(c)$ on funktion suurin arvo, niin $f(y_n) - f(c) \leq 0$ kaikilla n. Tällöin

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(c)}{y_n - c} \leq 0.$$

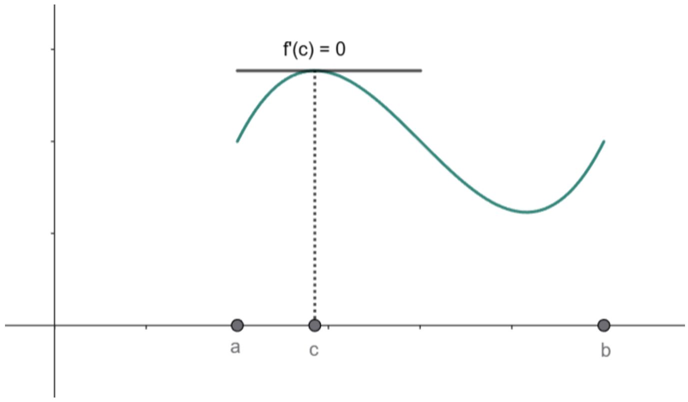
Samalla tavalla

$$\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \geq 0,$$

koska sekä osoittaja että nimittäjä ovat negatiivisia. Siis

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \geq 0,$$

jolloin $f'(c) = 0$, kuten haluttu. □



Kuva 1: Fermat'n lause

3.2 Lause ja todistus

Vaikka ehtona funktion derivoituvuudella onkin funktion jatkuvuus, ei funktion derivaattafunktio kuitenkaan välttämättä aina ole jatkuva. Ranskalainen matemaatikko Gaston Darboux (1842-1917) kuitenkin havaitsi, että derivaattafunktioilla on jatkuvien funktioiden tavoin väliarvo-ominaisuus. Hän johti tämän Pierre de Fermat'n esittämästä lauseesta 5, jolla pystyttiin etsimään funktioiden pienimpiä ja suurimpia arvoja. Darboux esitti lauseen, jonka mukaan, jos funktio f on derivoituva ja sen derivaattafunktio saa jotkin arvot $f'(a)$ ja $f'(b)$, derivaattafunktion f' on saatava kaikki arvot näiden arvojen väliltä. Tämä lause tunnetaan Darboux'n lauseena.

Darboux'n lause ja sen todistus, joka hyödyntää juuri Fermatin lausetta 5 ja Weierstrassin lausetta 4, myötäilee Rudinin kirjaa [4].

Lause 6 (Darboux'n lause)**.** *Jos f on derivoituva välillä $[a, b]$, ja jos c:llä pätee $f'(a) < c < f'(b)$, niin on olemassa $x \in (a, b)$, jolla $f'(x) = c$.*

Sama tulos pätee, jos $f'(a) > f'(b)$.

Todistus. Muodostetaan apufunktio $g(t) = f(t) - ct$, jossa $a \leq t \leq b$. Tällöin

$$g'(a) = f'(a) - c < 0,$$
$$g'(b) = f'(b) - c > 0.$$

Koska funktio f on derivoituva, myös muodostettu funktio g on derivoituva ja siis jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Silloin lauseen 4 mukaan funktio g saa suljetulla välillä $[a, b]$ pienimmän arvonsa. Olkoon $x \in [a, b]$ kohta, jossa g saa pienimmän arvonsa. Halutaan osoittaa, että $a < x < b$.

Koska $g'(a) < 0$, on olemassa $\delta > 0$, jolle

$$\frac{g(t) - g(a)}{t - a} < 0,$$

kun $a < t < a + \delta$. Tällöin siis $g(t) < g(a)$, ja g ei saa pienintä arvoaan pisteessä a.

Koska $g'(b) > 0$, on olemassa $\delta > 0$, jolle

$$\frac{g(b) - g(t)}{b - t} > 0,$$

kun $b - \delta < t < b$. Siis $g(t) < g(b)$, ja g ei saa pienintä arvoaan pisteessä b.

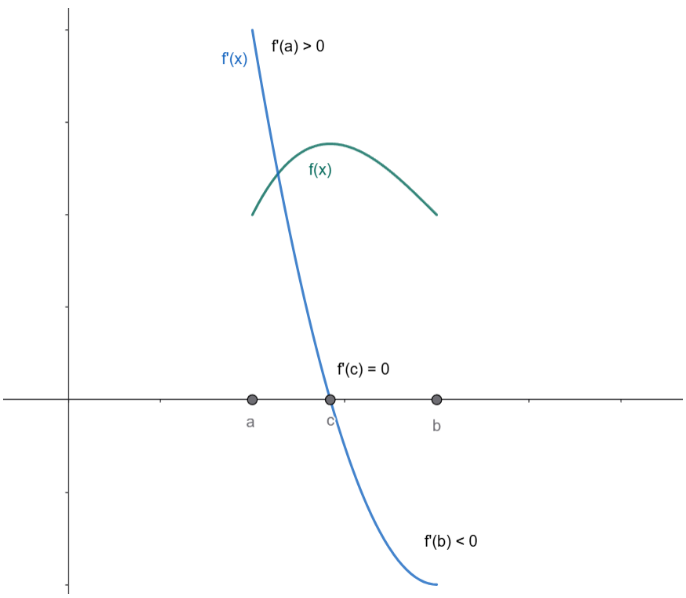
Kuten haluttiin näyttää, $a < x < b$. Lauseen 5 mukaan $g'(x) = 0$, koska funktio sai pienimmän arvonsa pisteessä x. Tällöin

$$g'(x) = f'(x) - c = 0,$$

joten $f'(x) = c$. □

Seuraus 1. *Jos funktio f on derivoituva suljetulla välillä $[a, b]$, funktion derivaattafunktiolla f' ei voi olla epäolennaisia epäjatkuvuuksia (engl. simple discontinuities).*

Derivaattafunktio f' ei kuitenkaan välttämättä ole jatkuva. Vaikka derivaattafunktiolla ei olisikaan "hyppyjatkuvuuksia"(engl. *jump discontinuities*), voi sillä olla erilaisia epäoleellisia epäjatkuvuuksia.



Kuva 2: Darboux'n lause: Kun $f'(a) > 0$ ja $f'(b) < 0$, niin on olemassa c, jolle $f'(c) = 0$ ja $a < c < b$.

3.3 Esimerkki

Monet funktiot ovat joko sellaisia, että niiden derivaattafunktiotkin ovat jatkuvia, tai sellaisia, että ne eivät ole kaikkialla derivoituvia. Jos derivaattafunktio on jatkuva, sillä on myös tietysti väliarvo-ominaisuus. Jos derivaattaa ei ole kaikkialla olemassa, mutta derivaattafunktio voidaan jossain kohdissa määritellä, näiden osien derivaattojen välille tulee hyppyjä (ks. Esimerkki 3). Kuitenkin esimerkiksi erilaisilla sinifunktiosta johdetuilla funktioilla voi olla epäjatkuvuuskohtia mutta kuitenkin myös väliarvo-ominaisuus (ks. Esimerkki 4).

Esimerkki 3. Tutkitaan itseisarvofunktiota $f(x) = |x|$ reaalilukujen joukossa. Funktio f on derivoituva joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin

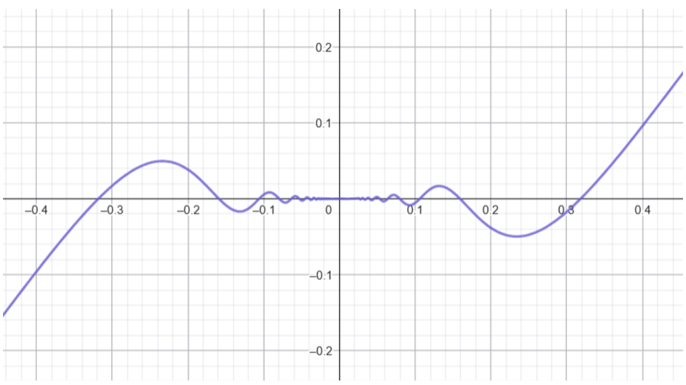
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x > 0 \\ -1 & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Funktio f siis lähes toteuttaa Darboux'n lauseen ehdot, koska se on jatkuva ja derivoituva kaikkialla muualla paitsi yhdessä pisteessä. Darboux'n lause ei kuitenkaan päde, koska derivaattafunktiolla on hyppyjatkuvuus luvusta -1 lukuun 1. Derivaattafunktiolla ei siis ole väliarvo-ominaisuutta.

Esimerkki 4. Olkoon funktio

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

määritelty reaalilukujen joukossa. Funktio suppenee kohti nollaa molemmilta puolilta nollaa lähestyttäessä. Nollan ympärillä funktio värähtelee saaden sekä positiivisia että negatiivisia lukuja. Funktio g kuvaaja on esitetty kuvassa 3.

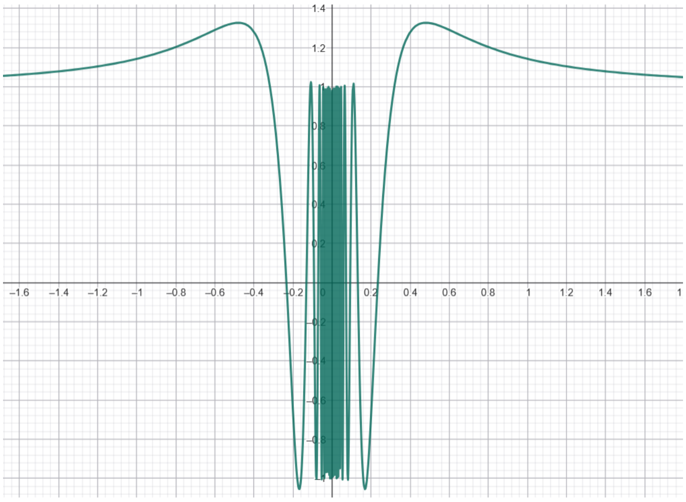


Kuva 3: Funktion g kuvaaja

Funktio g on derivoituva, ja sen derivaattafunktio on

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Derivaattafunktio g' ei ole kuitenkaan jatkuva kohdassa $x = 0$. Darboux'n lauseen mukaan derivaattafunktiolla on kuitenkin väliarvo-ominaisuus. Funktion g tavoin derivaattafunktio g' värähtelee nollan ympäristössä. Värähtely on todella tiheää, ja g':n suurimman ja pienimmän arvon väliset arvot saavutetaan tässä värähtelyssä. Derivaattafunktion g' kuvaaja on esitetty kuvassa 4.



Kuva 4: Derivaattafunktion g' kuvaaja

Esimerkki sinifunktiosta on Abbotin kirjasta [1].

Viitteet

[1] S. Abbot. *Understanding Analysis.* 2. painos. New York: Springer, 2015.

[2] R. Bartle, D. Sherbert. *Introduction to Real Analysis.* 4. painos. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

[3] H. Laakso, V. Halava. *Analyysi I.* Turku: Turun yliopisto, 2023.

[4] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* 1. painos. New York: McGraw-Hill, 1953.