TURUN YLIOPISTO

Muistittomasti muuttuva stokastinen impulssikontrolliongelma

Wiljami Sillanpää

Pro gradu -tutkielma
Lokakuu 2020

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

SILLANPÄÄ WILJAMI: Muistittomasti muuttuva stokastinen impulssikontrollion-gelma
Pro gradu -tutkielma, 48 s.
Sovellettu matematiikka
Lokakuu 2020

Stokastinen impulssikontrolliongelma on stokastiseen kontrolliteoriaan kuuluva ongelma, jossa tavoitteena on maksimoida yksi tai useampia tunnetun lineaarisen diffuusion tilasta riippuvia palkkioita. Muistittomalla muutoksella tarkoitetaan tässä yhteydessä tilannetta, jossa joko diffuusion dynamiikka, palkkiofunktio tai molemmat kokevat tietyn muutoksen satunnaisella, eksponenttijakaumaa noudattavalla ajanhetkellä.

Stokastinen impulssikontrolliongelma, jossa muutoksia ei tapahdu, on ratkaistu analyyttisesti aiemmin. Muuttuvan ongelman ratkaiseminen analyyttisesti on monin tavoin haastavampaa, sillä muutoksen jälkeinen ratkaisu vaikuttaa myös muutosta edeltävään ratkaisuun. Ongelmaa tarkastellaan klassisen diffuusioteorian näkökulmasta. Teorian ja aiempien tulosten esittelyn lisäksi tutkielmassa määritetään luokka ratkeavia, muistittomasti muuttuvia impulssikontrolliongelmia. Lisäksi tuloksia havainnollistetaan esimerkkien avulla.

Asiasanat: diffuusio, impulssikontrolliongelma, stokastinen kontrolliteoria

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Käytetyt merkinnät **3**

3 Diffuusioteoriaa **4**
3.1 Markov-ajat ja -prosessit 4
3.2 Yksiulotteiset diffuusiot 6
3.3 Resolventit ja generaattorit 7
3.4 Eksessiiviset funktiot 13
3.5 Geometrinen Brownin liike 20

4 Stokastinen impulssikontrolliongelma **21**
4.1 Ongelman matemaattinen muotoilu 21
4.2 Ongelman ratkaisu 22

5 Muistittomasti muuttuva ongelma **30**
5.1 Pysäytysongelma 31
5.2 Kontrolliongelma 34

6 Esimerkkejä **39**
6.1 Muuttuva palkkio ja geometrinen Brownin liike 40
6.2 Muuttuva geometrinen Brownin liike 42
6.3 Muuttuva palkkio 42
6.4 Tyhjät muutokset 43

7 Muistilliset muutosajat **44**
7.1 Muistillisesti muuttuva pysäystysongelma 44
7.2 Osumisaikojen laskennalliset haasteet 45

8 Lopuksi **46**

9 Viitteet **47**

1 Johdanto

Stokastiset impulssikontrolliongelmat ovat luokka stokastisia optimointiongelmia, joissa ohjattavaa stokastista systeemiä säädetään yksittäisinä ajanhetkinä. Ongelmia on tutkittu jo vuosikymmenien ajan [17], sillä niillä on lukuisia sovelluskohteita erityisesti finanssimatematiikassa (esim. [10], [13], [17]) ja uusiutuvien luonnonvarojen käyttöön liittyvissä kysymyksissä ([3], [8], [16], [25]). Stokastisten impulssikontrolliongelmien avulla voidaan mallintaa muun muassa osinkojen maksuun, portfolion valintaan tai valuutanvaihtokursseihin liittyviä optimointiongelmia [17]. Metsänhoidossa impulssikontrolliongelmiin liittyvää päättelyä sovellettiin ensimmäisen kerran jo 1800-luvulla, kauan ennen stokastisen kontrolliteorian syntyä. Kyseessä oli saksalaisen Martin Faustmannin laatima malli metsän arvon laskemiselle. Mallia on myöhemmin laajennettu ja paranneltu ([3], [25]), jotta se ottaisi paremmin huomioon metsän kasvuun liittyvään satunnaisuuden. Lyhyt kuvaus Faustmannin mallin synnystä ja historiasta löytyy esimerkiksi Brazeen johdantokappaleesta [8].

Suuri osa stokastisten impulssikontrolliongelmien tutkimuksesta nojaa Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) -yhtälöihin ja kvasivariationaalisiin epäyhtälöihin (QVI) perustuvaan lähestymistapaan. Menetelmän teknisiä yhksityiskohtia esitellään muun muassa artikkeleissa [6] ja [9] ja Øksendalin stokastista kontrolliteoriaa käsittelevässä kirjassa [26]. HJB-menetelmä on hyödyllinen matemaattinen työkalu, sillä se ei riipu tutkittavan systeemin dimensiosta. Sen avulla voidaankin useimmiten selvittää, millaisille kontrolliongelmille (yksikäsitteinen) ratkaisu on olemassa. Yleensä ratkaisut kuitenkin riippuvan tutkittavan systeemin dimensiosta, joten HJB-menetelmä jättää ratkaisujen eksplisiittisen rakenteen valitettavan usein mysteeriksi. Tämän vuoksi on kehitetty diffuusioteoriaan perustuva lähestymistapa ([1], [4]), joka on riippuvainen ongelman dimensiosta, mutta jonka avulla ratkaisut voidaan esittää ainakin semieksplisiittisessä muodossa. Yksinkertaisimmissa yksiulotteisissa tapauksissa ratkaisujen rakenne voidaan ratkaista kokonaan ([1], kappale 6). Muita vaihtoehtoisia, analyyttisiä tuloksia tuottavia lähestymistapoja ovat kehittäneet muun muassa Egami [14] ja Perninge [19].

Erään erityisesti finanssimatematiikan sovellusten kannalta tärkeiden matemaattisten mallien luokan muodostavat niin sanotut regiiminvaihtomallit (eng. "regime switching"), joissa jonkin tunnetun mallin parametrien annetaan vaihdella satunnaisesti ([20], [23], [24]). Satunnaisuutta ja parametrien vaihtoehtoisia arvoja kuvataan yleensä joko diskreetin tai jatkuvan ajan suhteen määriteltynä Markov-prosessina, jonka tila-avaruus on äärellinen. Regiiminvaihtomallien avulla voidaan kuvailla esimerkiksi markkinoiden käytökseen vaikuttavia makroekonomisia trendejä.

Regiiminvaihtoja sisältävillä stokastisilla impulssikontrolliongelmilla voitaisiin periaatteessa mallintaa hyvin suurta luokkaa käytännönläheisiä, satunnaisuutta sisältäviä optimointiongelmia. Ongelmat ovat kuitenkin matemaattisesti melko mutkikkaita, ratkaisuista puhumattakaan. Tilanne ei kuitenkaan ole aivan toivoton, sillä esimerkiksi Sotomayor ja Cadenillas ovat pystyneet ratkaisemaan regiiminvaihtoja sisältävän stokastisen osingonmaksuongelman lineaarisen, muuttumattoman palkkiofunktion tapauksessa [23]. Epälineaarisia ja muuttuvia palkkiofunktioita sisältävien onglmien ratkaisuja voisi puolestaan analysoida laajentamalla Alvarezin diffuusioteoreettisen lähestymistavan [1] koskemaan myös tällaisia stokastisia "regiiminvaihto-ongelmia".

Tässä tutkielmassa keskitytään ongelmaan, jossa tavoitteena on maksimoida jono lineaarisen diffuusion tilasta riippuvia palkkioita kun tiedetään, että palkkiofunktio ja diffuusion dynamiikka tulevat muuttumaan tulevaisuudessa satunnaisella, eksponentiaalisesti jakautuneella ajanhetkellä. Kyseessä on siis yksiulotteinen stokastinen impulssikontrolliongelma yksittäisellä (muistittomalla) regiiminvaihdolla. Tilanne eroaa muusta tutkimuskirjallisuudesta siinä, että regiiminvaihto ei ole kontrolloitavissa ja myös palkkiofunktion annetaan muuttua regiimin mukana. Ongelma saadaan ratkaistua samankaltaisella menetelmällä kuin tavallinen impulssikontrolliongelma. Lisäksi ratkaisujen olemassaolon riittävät ehdot ovat kohtalaisen vaivattomia tarkistaa kun palkkiofunktiot ovat differentoituvia.

Tutkielman rakenne on seuraavanlainen. Luvussa 3 esitellään lyhyesti mutta kattavasti tärkeimmät stokastisten impulssikontrolliongelmien yhteydessä tarvittavat diffuusioteorian ominaisuudet. Ongelmia lähestytään pelkästään klassisen diffuusioteorian näkökulmasta, joten Ito-integraaleihin pohjautuvaa stokastista analyysia ei tutkielmassa tarvita. Näin ollen muun muassa Ito-diffuusioita kuvaavat stokastiset differentiaaliyhtälöt jätetään kokonaan käsittelemättä. Tämä ei kuitenkaan heikennä tehdyn analyysin laatua, vaan tekee sitä vain helpommin lähestyttävän, koska lukijan ei tarvitse kerrata diffuusioteorian lisäksi stokastisen integraalilaskennan teknisiä yksityiskohtia.

Luvussa 4 siirrytään stokastisten impulssikontrolliongelmien pariin. Luvussa esitellään pelkästään diffuusioteoriaan perustuva ratkaisumenetelmä, jonka avulla ongelmalle on ainakin yksinkertaisimmissa esimerkkitapauksissa mahdollista löytää analyyttisiä, suljetussa muodossa olevia ratkaisuja. Metodia käytetään myös impulssikontrolliongelman erityistapauksena saatavalle optimaalisen pysäytyksen ongelmalle. Muistittomasti muuttuvaa impulssikontrolliongelmaa käsitellään puolestaan luvussa 5. Ongelma ratkaistaan luvun 4 analyysiin pohjautuvalla menetelmällä.

Luvussa 6 muuttuvaan impulssikontrolliongelmaan liittyviä teoreettisia tuloksia havainnollistetaan esimerkkien avulla ja lopuksi luvussa 7 käsitellään muistillista muutosajoista aiheutuvia haasteita.

2 Käytetyt merkinnät

Teoriaosan perusteellisuudesta huolimatta aivan kaikkia tutkielmassa esiintyviä käsitteitä ja merkintätapoja ei ole erikseen selvennetty määritelmien avulla, vaan lukijalta odotetaan jonkinlaisia esitietoja reaalianalyysista, stokastiikasta ja mittateoriasta. Tämän sivun luetteloon on kerätty eräitä merkintätapoja, joita ei ole muualla erikseen määritelty. Luettelossa A on joukko ja $\mathcal{A}$ kuvaus.
$\bar{A}$ joukon A sulkeuma
$\mathbf{R}$ reaaliluvut
$\mathbf{R}_+$ positiiviset reaaliluvut
$\mathbf{P}_x$ $(\mathbf{E}_x)$ tilasta x käynnistyvään Markov-prosessiin (määritelmä 3) liittyvä todennäköisyysmitta (odotusarvo) ehdolla $X_0 = x$
$\mathcal{B}(A)$ joukon A Borelin σ-algebra
$C^n(A)$ n kertaa jatkuvasti differentoituvien funktioiden $f: A \to A$ joukko
$C_0(A)$ äärettömyydessä katoavien funktioiden $f: A \to A$ joukko
$C_b(A)$ sup-normin suhteen rajoitettujen funktioiden $f: A \to A$ joukko
$D(\mathcal{A})$ kuvauksen $\mathcal{A}$ määrittelyjoukko
$D_f^{\pm}$ differentiaalioperaattori, oikea $(+)$ tai vasen $(-)$ derivaatta funktion f suhteen
$\mathcal{L}^1(A)$ niiden funktioiden $f: A \to \mathbf{R}$ joukko, jotka toteuttavat integroituvuusehdon

$$\mathbf{E}_x\left[\int_0^{\zeta_X} e^{-rs}|f(X_s)|ds\right] < \infty$$

missä X on diffuusio (määritelmä 7), ζ_X on kyseisen diffuusion elinaika (määritelmä 2) ja $r > 0$ on erikseen määrätty vakio.

Merkinnällä $f(x)$ tarkoitetaan yleensä funktion f kuvaa pisteessä x, mutta merkinnällä voidaan tarkoittaa myös itse funktiota f kun vaaraa epäselvyydestä ei ole. Funktiota f merkitään myös eräissä kohdissa selkeyden vuoksi $f(\cdot)$.

3 Diffuusioteoriaa

Tutkielmassa käsiteltävä stokastisen impulssikontrolliongelman ratkaisu perustuu diffuusioteoriaan. Tämän vuoksi diffuusioteorian perusmääritelmien ja -tulosten esittely on tarpeen ennen impulssikontrolliongelman käsittelyä. Ellei toisin mainita, luvun määritelmät ja lauseet ovat lainattu Borodinin ja Salmisen erittäin kattavasta diffuusioteorian käsikirjasta [7], Iton ja McKeanin klassikkoteoksesta [15] tai Mandlin diffuusioteoriaa käsittelevästä kirjasta [18]. Kirjat lähestyvät diffuusioteoriaa hieman eri näkökulmista ja niiden määritelmissä saattaa olla pieniä teknisiä eroja. Käytännössä ne kuitenkin antavat lukijalle yhtenäisen ja selkeän kuvan niistä diffuusioiden ominaisuuksista, joita myöhemmissä luvuissa tarvitaan.

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ todennäköisyysavaruus, $(E, \mathcal{E})$ mitta-avaruus ja J joukko. Stokastista prosessia voidaan yleisesti käsitellä $\mathcal{F}$-mitallisten satunnaismuuttujien $X : \Omega \to E$ joukkona $\{X_j : j \in J\}$. Tämä lähestymistapa on kuitenkin aivan liian yleinen impulssikontrolliongelmien diffuusioteoriaan perustuvaa tarkastelua varten. Tässä luvussa esitellään yksiulotteisten diffuusioiden perusominaisuuksia, joita myöhemmissä luvuissa tullaan tarvitsemaan. Ellei toisin mainita, $(E, \mathcal{E})$ tarkoittaa jatkossa mitta-avaruutta ja $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ on oikealta jatkuvalla filtraatiolla $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ varustettu $\mathbf{P}$-täydellinen todennäköisyysavaruus, jossa $\mathcal{F}_0$ sisältää kaikki sigma-algebran $\mathcal{F}$ sisältämät mitan $\mathbf{P}$ suhteen 0-mitalliset joukot. Joukko J oletetaan jatkossa puoliavoimeksi reaalilukuväliksi $[0, \zeta_X)$, missä ζ_X on määritelmän 2 mukainen prosessin X elinaika.

3.1 Markov-ajat ja -prosessit

Markov-prosessit ovat eräitä tutkituimmista ja tunnetuimmista satunnaisprosesseista. Kaikki Markov-prosessit eivät ole diffuusioita, mutta diffuusiot muodostavat hyviä laskennallisia ominaisuuksia omaavan Markov-prosessien alaluokan. Käydään aluksi läpi yleisen (aikahomogeenisen) Markov-prosessin määritelmä sekä muutama näihin prosesseihin liittyvä peruskäsite, jotka ovat hyvin oleellisia myös diffuusioiden kannalta.

Määritelmä 1. Satunnaismuuttuja $T : \Omega \to [0, \infty]$ on Markov-aika oikealta jatkuvan filtraation $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ suhteen, jos $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ kaikilla $t \geq 0$. Kun epäselvyyttä filtraatiosta ei ole, sanotaan satunnaismuuttujaa T pelkästään Markov-ajaksi.

Määritelmän 1 mukaisista satunnaismuuttujista voidaan jatkossa käyttää myös nimiä pysäytysaika, odotusaika, osumisaika tai poistumisaika. Nimityksiä käytetään antamaan lukijalle entistä selkeämpi intuitiivinen kuva käsiteltävästä tilanteesta tai ongelmasta. Prosessin elinaika on Markov-aika, joka ansaitsee oman määritelmänsä. Kyseessä on prosessin poistumisaika omasta tila-avaruudestaan.

Määritelmä 2. E-arvoisen stokastisen prosessin X elinaika on satunnaismuuttuja $\zeta_X = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin E\}$.

Määritelmä 3. Avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ määritelty $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-sopeutunut stokastinen $(E, \mathcal{E})$-arvoinen prosessi X on aikahomogeeninen Markov-prosessi, jos

$$\mathbf{P}(X_{t+s} \in A|\mathcal{F}_t) = \mathbf{P}(X_s \in A)$$

melkein varmasti kaikilla $A \in \mathcal{E}$ ja $t, s \geq 0$.

Määritelmän perusteella aikahomogeenisen Markov-prosessin voidaan sanoa olevan stokastinen prosessi, jonka kehitys tulevaisuudessa riippuu ainoastaan sen nykyisestä tilasta. Vertaamalla tätä Markov-ajan määritelmään voidaan Markov-prosessia pitää myös stokastisena prosessina, joka käynnistyy uudelleen jokaisena deterministisenä Markov-aikana.

Eräs keskeisimmistä Markov-prosesseihin liittyvistä käsitteistä on transitiofunktio, joka kuvaa tunnetusta tilasta käynnistyvän prosessin tilojen todennäköisyysjakaumaa tietyllä hetkellä tulevaisuudessa. Erityisen tärkeitä transitiofunktiot ovat diffuusioteoriassa, sillä ne ovat avain diffuusioiden tutkimiseen reaalianalyysin keinoin.

Määritelmä 4. Olkoon X aikahomogeeninen Markov-prosessi, $t \geq 0$, $x \in E$ ja $A \in \mathcal{E}$. Prosessin X transitiofunktio on kuvaus $P_t(x, A) = \mathbf{P}_x(X_t \in A)$.

Transitiofunktion avulla voidaan myös luokitella Markov-prosessin tila-avaruuden pisteitä perustuen prosessin lokaaliin käytökseen pisteiden läheisyydessä. Niin sanottuja singulaarisia pisteitä ovat tila-avaruuden E pisteet, joiden ympäristössä prosessin liike on jollain tapaa rajoitettua. Pisteitä, jotka eivät ole singulaarisia, sanotaan säännöllisiksi. Rajoitetaan tarkastelu jo tässä vaiheessa yksiulotteisiin Markov-prosesseihin.

Määritelmä 5. Olkoon $\bar{E} = [r_0, r_1] \subset (\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\})$ ja olkoon $\tau_y = \inf\{t \geq 0 : X_t = y\}$ prosessin X osumisaika pisteeseen $y \in \mathbf{R}$. Piste $x \in E$ on

(i) oikealta suljettu, jos $\lim_{y\downarrow x} \mathbf{P}_x(\tau_y = 0) = 0$, $\lim_{y\uparrow x} \mathbf{P}_x(\tau_y = 0) = 1$.

(ii) vasemmalta suljettu, jos $\lim_{y\downarrow x} \mathbf{P}_x(\tau_y = 0) = 1$, $\lim_{y\uparrow x} \mathbf{P}_x(\tau_y = 0) = 0$.

(iii) ansa, jos se on suljettu sekä vasemmalta että oikealta.

(iv) säännöllinen, jos se ei ole suljettu vasemmalta eikä oikealta.

Markov-prosessien transitiofunktiot ja tila-avaruuden pisteiden luokittelu liittyvät olennaisesti myös prosessin yksittäisten polkurealisaatioiden ominaisuuksiin. Itse asiassa suuren osan diffuusioteorian kysymyksistä voitaisiin sanoa liittyvän joko suorasti tai epäsuorasti prosessin mahdollisiin ja todennäköisiin polkuihin. Päätetään tämä kappale Markov-prosessin polun määritelmällä, vaikka polkuavaruuksia (samaistettavissa tapahtuma-avaruuden Ω kanssa) tai yksittäisiä polkuja käsitellään kin kirjallisuudessa hyvin harvoin sellaisenaan.

Määritelmä 6. Olkoon $\omega \in \Omega$. Markov-prosessin X polkurealisaatio tai lyhyemmin polku on kuvaus $X_\cdot(\omega) : J \to E$.

3.2 Yksiulotteiset diffuusiot

Yksiulotteiset diffuusiot ovat eräs yksiulotteisten Markov-prosessien alalaji. Hyvien ominaisuuksiensa ansiosta niiden avulla voidaan käsitellä muun muassa impulssikontrolliongelman kaltaisia reaalimaailmassa vastaan tulevia stokastisia optimointitehtäviä. Tässä kohtaa Borodinin ja Salmisen antama määritelmä on hieman liian abstrakti tutkielman käsittelemiä sovelluksia ajatellen, joten annetaan seuraavaksi käytännönläheisempi versio diffuusion määritelmästä. Määritelmä on kuitenkin ekvivalentti Borodinin ja Salmisen kanssa kaikilla tutkielmassa käsitellyillä aihealueilla.

Määritelmä 7. Olkoon I väli jatketulla reaalisuoralla eli $\bar{I} = [r_0, r_1] \subset (\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\})$ ja olkoon X aikahomogeeninen I-arvoinen Markov-prosessi. X on yksiulotteinen tai lineaarinen diffuusio, jos

(i) $t \mapsto X_t(\omega)$ on $\mathbf{P}_x -$ melkein varmasti jatkuva välillä $[0, \zeta_X)$.

(ii) $\mathbf{E}_x[X_{T+t}|\mathcal{F}_T] = \mathbf{E}_{X_T}[X_t]$ $\mathbf{P}_x -$ melkein varmasti kaikilla Markov $-$ ajoilla T.

Ellei toisin mainita, symbolilla I tarkoitetaan jatkossa määritelmän 7 mukaista diffuusion tila-avaruutta. Ehtoa (ii) sanotaan vahvaksi Markov-ominaisuudeksi. Sen merkitys on samankaltainen kuin Markov-ominaisuudella, mutta Markov-aikojen ei enää tarvitse olla deterministisiä. Diffuusion voidaankin sanoa olevan jatkuvilla polkurealisaatioilla varustettu aikahomogeeninen Markov-prosessi, joka joka käynnistyy uudelleen jokaisena Markov-aikana.

Diffuusion ominaisuuksia voidaan kuvailla transitiofunktion lisäksi komella erilaisella kuvauksella, joita kutsutaan nopeusmitaksi, tappomitaksi ja skaalafunktioksi. Nopeusmitta ja tappomitta ovat diffuusion tila-avaruuden I σ-algebralla $\mathcal{B}(I)$ määriteltyjä mittoja kun taas skaalafunktio on nimensä mukaisesti tila-avaruudella I määritelty funktio. Nopeusmitta liittyy tietystä tilasta käynnistyvän diffuusion kykyyn saavuttaa mielivaltainen tila-avaruuden osajoukko. Tappomitta liittyy puolestaan todennäköisyyteen, jolla diffuusio kuolee eli joutuu tila-avaruuden ulkopuolelle tietyllä aikavälillä ja tietystä tila-avaruuden osajoukosta. Skaalafunktio on funktio, joka liittyy diffuusion ajautuman eli ajasta riippuvan odotusarvon ominaisuuksiin.

Tässä alaluvussa annetut nopeus- ja tappomittojen sekä skaalafunktion määritelmät ovat hyvin yleisiä. Kaikissa tutkielman kannalta olennaisissa tilanteissa mainitut mitat ja funktio voidaan olettaa absoluuttisesti jatkuviksi tila-avaruuden Lebesguen mitan suhteen ja vastaavat mittaderivaatat voidaan olettaa jatkuviksi. Tällaisissa tilanteissa nopeusmitalla, tappomitalla ja skaalafunktiolla on hyvin läheinen yhteys diffuusion infinitesimaalisten parametrien ja generaattorin kanssa. Vastaavuutta havainnollistetaan lisää luvussa 3.3.

Määritelmä 8. Diffuusion X nopeusmitta on joukolla $\mathcal{B}(I)$ määritelty mitta m, jolla $m((a,b)) \in \mathbf{R}_+$ kun $r_0 < a < b < r_1$ ja jonka suhteen diffuusion transitiofunktio $P_t(x,\cdot)$ on absoluuttisesti jatkuva kaikilla $t > 0$ ja $x \in I$:

$$P_t(x,A) = \int_A p(t;x,y)m(dy)$$

Funktio p voidaan olettaa positiiviseksi ja jatkuvaksi kaikkien sekä symmetriseksi kahden viimeisen argumenttinsa suhteen ([7], s. 13).

Määritelmä 9. Diffuusion X tappomitta on joukolla $\mathcal{B}(I)$ määritelty mitta k, jolla $k((a,b)) < \infty$ kun $r_0 < a < b < r_1$ ja jonka avulla voidaan määrittää diffuusion tilan todennäköisyysjakauma elinajan $\zeta_X = \inf\{t > 0 : \ X_t \notin I\}$ lopussa:

$$\mathbf{P}_x(X_{\zeta_X -} \in A | \, \zeta_X < t) = \int_0^t \int_A p(s;x,y)k(dy)ds, \ A \in \mathcal{B}(I)$$

Määritelmä 10. Diffuusion X skaalafunktio on jatkuva ja kasvava funktio $s : \ I \to \mathbf{R}$. Tilanteessa, jossa $k((a,b)) = 0$ välille $(a,b) \subset I$, skaalafunktion ja välin päätepisteiden osumisaikojen välillä on yhteys

$$\mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b) = \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - (a)}, \ x \in (a,b)$$

Borodinin ja Salmisen mukainen muoto diffuusion määritelmästä, tapahtuma- tai polkuavaruuden Ω ja yksittäisten polkujen tarkempi rakenne sekä Markov-prosessien ja diffuusioiden välimuodot (niin sanotut Feller- ja Feller-Dynkin -prosessit) sekä näiden kytkökset Banachin avaruuksilla määriteltyjen puoliryhmien teoriaan on jätetty tässä käsittelemättä, sillä tärkeydestään huolimatta ne eivät auta lukijaa ymmärtämään paremmin impulssikontrolliongelmien luonnetta tai ratkaisuja. Kattava selonteko näistäkin aiheista löytyy esimerkiksi Mandlin [18] tai Iton ja McKeanin [15] kirjasta.

3.3 Resolventit ja generaattorit

Diffuusion transitiofunktion avulla voidaan aina konstruoida tietyllä Banachin avaruudella määritelty lineaarioperaattorien muodostama vahvasti jatkuva puoliryhmä [18]. Kyseisen puoliryhmän infinitesimaalista generaattoria sanotaan myös diffuusion tai transitiofunktion generaattoriksi. Transitiofunktion käytöstä johtuen informaatio diffuusion dynamiikasta voidaan päätellä generaattorin ominaisuuksista. Myös generaattorin ominaisvektorit ovat hyödyllisiä työkaluja tässä suhteessa.

Transitiofunktioihin perustuvalla lähestymistavalla diffuusioiden generaattoreihin ja sisäiseen dynamiikkaan on merkittävää teoreettista painoarvoa, mutta generaattorien laskennallisia ominaisuuksia ja impulssikontrolliongelmien kaltaisia sovelluksia ajatellen on hyödyllisempää lähteä liikkeelle resolventeiksi kutsutuista operaattoreista. Generaattorit voidaan puolestaan määritellä hieman resolventin käänteisoperaattoria muistuttavina differentiaalioperaattoreina.

Määritelmä 11. Olkoon $f \in C_{0,b}(I)$. Diffuusion X resolventti tai Greenin operaattori on operaattori $(R_\alpha f)(\cdot) = \mathbf{E}_{(\cdot)}[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)dt]$.

Lause 1. *Olkoon R diffuusion X resolventti. Tällöin R toteuttaa kaikilla $\alpha, \beta > 0$ resolventtiyhtälön*

$$R_\alpha - R_\beta = (\beta - \alpha) R_\alpha R_\beta$$

Todistus.

$$\begin{aligned}
(R_\alpha R_\beta f)(\cdot) &= \mathbf{E}_{(\cdot)}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} \int_0^\infty e^{-\beta t}(X_{s+t}) dt ds\right] \\
&= \mathbf{E}_{(\cdot)}\left[\int_0^\infty e^{-\beta\tau} f(X_\tau) d\tau \int_0^\tau e^{-(\alpha-\beta)s} ds\right] \\
&= \mathbf{E}_{(\cdot)}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\tau} - e^{-\beta\tau}}{\beta - \alpha} f(X_\tau) d\tau\right] \\
&= (\beta - \alpha)^{-1}(R_\alpha - R_\beta)
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 12. Olkoon $u \in R_\alpha C_{0,b}(I)$. Diffuusion X (infinitesimaalinen) generaattori on kuvaus

$$(\mathcal{A}u)(\cdot) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E}_{(\cdot)}[u(X_t)] - u(\cdot)}{t} \tag{1}$$

Määritelmä 13. Diffuusion X generaattorin $\mathcal{A}$ reunat ovat tila-avaruuden I reunat. Reuna r_i on

(i) saavuttamaton, jos $\mathbf{P}(\tau_{r_i} < \infty) = 0$

(ii) saavutettavissa, jos se ei ole saavuttamaton.

(iii) saapumistila, jos transitiofunktio $P_t(r_i, \cdot)$ on hyvin määritelty kaikilla $t > 0$

(iv) poistumistila, jos $\mathbf{P}(\tau_{r_i} < \infty) > 0$

Määritelmään 13 perustuen voidaan mainita vielä eräitä hyödyllisiä reunatyyppejä. Generaattorin reunaa, joka on sekä saapumis- että poistumistila, sanotaan säännölliseksi. Säännöllinen reuna on saavutettavissa ja kuuluu diffuusion tila-avaruuteen. Saavuttamatonta reunaa, joka ei ole saapumistila kutsutaan luonnolliseksi reunaksi. Diffuusio ei voi lähteä liikkeelle luonnolliselta reunalta eikä osua siihen. Reunaa, joka on saapumistila mutta ei poistumistila sanotaan aloitustilaksi ja reunaa, joka on poistumis- muttei saapumistila lopetustilaksi. Diffuusio voi käynnistyä aloitustilasta muttei päätyä sinne ja päätyä lopetustilaan, muttei enää palata sieltä takaisin.

Lause 2. *Olkoon R_α ja $\mathcal{A}$ kuten edellä. Tällöin*

$$R_\alpha^{-1} = \alpha - \mathcal{A} \tag{2}$$

Todistus. Merkitään $1 - R_1^{-1} = A$. Resolventtiyhtälön perusteella

$$R_\alpha^{-1} = \alpha - A$$

kaikille $\alpha > 0$. Olkoon τ Markov-aika, $u \in R_\alpha C_{0,b}(I)$ ja $f = (\alpha - A)u$. Tällöin

$$\begin{aligned} u(\cdot) &= (R_\alpha f)(\cdot) \\ &= \mathbf{E}_{(\cdot)}\left[\int_0^\tau e^{-\alpha t} f(X_t)dt\right] + \mathbf{E}_{(\cdot)}\left[e^{-\alpha\tau} R_\alpha f(X_\tau)\right] \\ &= \mathbf{E}_{(\cdot)}\left[\int_0^\tau e^{-\alpha t}(\alpha - A)u(X_t)dt\right] + \mathbf{E}_{(\cdot)}\left[e^{-\alpha\tau} u(X_\tau)\right] \end{aligned}$$

Kun $\mathbf{E}_{(\cdot)}[\tau] < \infty$, yhtälö saadaan rajalla $\alpha \downarrow 0$ muotoon

$$\mathbf{E}_{(\cdot)}[u(X_\tau)] - u(\cdot) = \mathbf{E}_{(\cdot)}\left[\int_0^\tau (Au)(X_t)dt\right] \tag{3}$$

joka tunnetaan myös Dynkinin kaavana.

Olkoon $a \in I$ ansa. Tällöin $P_a(\zeta_X > t) = e^{-\chi t}$, missä $\chi \in [0, \infty)$. Jos $\chi = 0$, niin $P_a(\zeta_X = \infty) = 1$ ja

$$\begin{aligned} (R_\alpha)f(a) &= \mathbf{E}_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)dt\right] \\ &= \mathbf{E}_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(a)dt\right] \\ &= \alpha^{-1} f(a) \end{aligned}$$

joten $(Au)(a) = 0$. Jos $\chi > 0$, niin $\mathbf{E}_a[\zeta_X] = \chi^{-1} < \infty$ ja

$$\begin{aligned} (Au)(a)\mathbf{E}_a[\zeta_X] &= \lim_{n\uparrow\infty} \mathbf{E}_a\left[\int_0^{\zeta_X \wedge n} (Au)(X_t)dt\right] \\ &= \lim_{n\uparrow\infty} \left(\mathbf{E}_a[u(X_{\zeta_X \wedge n})] - u(a)\right) \\ &= \lim_{n\uparrow\infty} u(a)(P_a(n \leq \zeta_X) - 1) \\ &= -u(a) \end{aligned}$$

Toisaalta, jos $\alpha > 0$, $a \in I$ ja $(Au)(a) = 0$ kaikilla $u \in D(A)$, niin

$$\mathbf{E}_a \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right] = (R_\alpha f)(a)$$

$$= \alpha^{-1} f(a)$$
$$= f(a) \mathbf{E}_a \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \right]$$

joten $X_t = a$ melkein varmasti kaikilla $t \geq 0$ eli a on ansa.

Edellisen perusteella kaikille $a \in I$, jotka eivät ole ansoja, on olemassa $u \in D(A)$, jolle $(Au)(a) > 1$. Tällöin on myös olemassa tilan a ympäristö B, jolle $(Au)(x) > 1$ kun $x \in B$. Ympäristön B valinta riippuu osittain diffuusion X dynamiikasta pisteessä a. Jos a on vasemmalta (oikealta) suljettu, niin $B = [a, b)$ jollain $b > a$ ($B = (b, a]$ jollain $b < a$). Jos taas a on säännöllinen tila, niin $B = (c, b)$ joillain $c < a < b$.

Soveltamalla Dynkinin kaavaa (3) poistumisaikaan $\tau = \inf\{t : X_t \notin B\}$ saadaan

$$\mathbf{E}_a[\tau] \leq \lim_{n \uparrow \infty} \mathbf{E}_a \left[\int_0^{\tau \wedge n} (Au)(X_t) dt \right]$$

$$= \lim_{n \uparrow \infty} (\mathbf{E}_a[u(X_{\tau \wedge n})] - u(a))$$

$$\leq 2||u||$$

$$< \infty$$

jonka perusteella

$$\lim_{B \downarrow a} (\mathbf{E}_a[u(X_\tau)] - u(a)) = \lim_{B \downarrow a} \mathbf{E}_a \left[\int_0^\tau (Au)(X_t) dt \right] = (Au)(a) \lim_{B \downarrow a} \mathbf{E}_a[\tau]$$

eli

$$(Au)(a) = \lim_{B \downarrow a} \frac{\mathbf{E}_a[u(X_\tau)] - u(a)}{\mathbf{E}_a[\tau]}$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E}_a[u(X_t)] - u(a)}{t}$$

$$= (\mathcal{A}u)(a)$$

avaruudessa $D(A) \subseteq D(\mathcal{A})$. Toisaalta kaikilla $u \in D(\mathcal{A})$ on voimassa

$$(R_\alpha(\alpha - \mathcal{A}))u(x) = (\alpha R_\alpha u)(x) - \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}(u(X_{s+t}) - u(x_s))ds\right]}{t}$$

$$= (\alpha R_\alpha u)(x) - \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E}_x \left[(e^{\alpha t} - 1)\int_t^\infty e^{-\alpha s}u(X_s)ds - \int_0^t e^{\alpha s}u(x_s))ds\right]}{t}$$

$$= u(x)$$

joten $D(\mathcal{A}) \subseteq D(A)$, mistä väite seuraa. □

Määritelmä 12 antaa selkeän kuvan diffuusion generaattorin toiminnasta. Raja-arvomuotoisia generaattoreja on kuitenkin haasteellista käsitellä laskennallisesti lauseen 2 kuvailemasta resolventtien ja generaattorien vastaavuudesta huolimatta. Yleensä generaattoreita käsitelläänkin tietynlaisina toisen asteen differentiaalioperaattoreina, joiden ominaisuudet määräytyvät vastaavan diffuusion ominaisuuksista. Vastaavasti generaattori sisältää kaiken informaation diffuusion dynamiikasta.

Lause 3. *Olkoon P diffuusion X transitiofunktio ja olkoon kaikilla $x \in I$, $\delta > 0$ voimassa*

$$(i)\ \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \left(1 - \int_{|x-y|<\delta} P_t(x, dy)\right) = 0$$

$$(ii)\ \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{|x-y|<\delta} (y - x)P_t(x, dy) = \mu(x) \in \mathbf{R}$$

$$(iii)\ \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{|x-y|<\delta} (y - x)^2 P_t(x, dy) = \sigma(x)^2 < \infty$$

Tällöin diffuusion generaattori on muotoa

$$\mathcal{A} = \frac{\sigma(x)^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \mu(x)\frac{d}{dx}$$

Todistus. Olkoon $f \in C_b^2(I)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}f(x) =& \lim_{t\downarrow 0} t^{-1} \left(\mathbf{E}_x[f(X_t)] - f(x)\right) \\
=& \lim_{t\downarrow 0} t^{-1} \left(\int f(y)P_t(x,dy) - f(x)\right) \\
=& \lim_{t\downarrow 0} t^{-1} \left(\int_{|x-y|<\delta} f(y)P_t(x,dy) + \int_{|x-y|<\delta} f(x)P_t(x,dy)\right) \\
& - \lim_{t\downarrow 0} t^{-1} \left(\int_{|x-y|<\delta} f(x)P_t(x,dy) - f(x)\right) \\
=& \lim_{t\downarrow 0} t^{-1} \int_{|x-y|<\delta} (f(y)-f(x))P_t(x,dy) \\
=& \lim_{t\downarrow 0} t^{-1} \int_{|x-y|<\delta} \left(f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2\right) P_t(x,dy) \\
=& \frac{\sigma(x)^2}{2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \mu(x)\frac{df(x)}{dx}
\end{aligned}
$$

kaikilla $x \in I$. □

Lauseen 3 ehdoissa (ii) ja (iii) esiintyviä kuvauksia sanotaan myös diffuusion infinitesimaalisiksi parametreiksi. Nimitys selkenee, kun kuvaukset kirjoitetaan muodossa

$$\mu(x) = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\mathbf{E}_x[X_t - x],$$

$$\sigma(x) = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\mathbf{E}_x[(X_t - x)^2]$$

Mainitaan vielä yksi tapa, jolla generaattori $\mathcal{A}$ voidaan kirjoittaa. Jos diffuusion nopeusmitta, tappomitta ja skaalafunktio ovat absoluuttisesti jatkuvia tila-avaruuden I Lebesguen mitan suhteen ja vastaavat mittaderivaatat ovat sileitä, voidaan kirjoittaa $m(dx) = m(x)dx$, $k(dx) = k(x)dx$ ja $S(x) = \int^x S'(y)dy$. Tällöin diffuusion generaattori voidaan esittää toisen asteen differentiaalioperaattorina, joka derivoi argumenttifunktionsa ensin skaalafunktion S ja sitten nopeusmitan m suhteen. Erityisesti Mandl käsittelee generaattoreita tässä muodossa [18].

Lause 4. *Oletetaan, että lauseen 3 ehdot ovat voimassa ja määritellään*

$$B(x) = \int^x \frac{2\mu(z)}{\sigma(z)^2} dz,$$

$$m'(x) = \frac{2}{\sigma(x)^2} e^{B(x)},$$

$$S'(x) = e^{-B(x)}$$

Tällöin

$$\mathcal{A} = D_m D_S = \frac{d}{dm(x)} \frac{d}{dS(x)}$$

Todistus.

$$D_m D_S = m'(x)^{-1} \frac{d}{dx} \left(S'(x)^{-1} \frac{d}{dx} \right)$$

$$= \frac{\sigma(x)^2}{2} e^{-B(x)} \frac{d}{dx} \left(e^{B(x)} \frac{d}{dx} \right)$$

$$= \frac{\sigma(x)^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \mu(x) \frac{d}{dx}$$

□

3.4 Eksessiiviset funktiot

Impulssikontrolliongelmien ratkaisut perustuvat pitkälti niin sanottujen eksessiivisten funktioiden ominaisuuksille. Eksessiiviset funktiot ovat hyödyllisiä, sillä ne ovat eräänlainen stokastinen vastine harmonisille funktioille. Eksessiivisyyden määritelmän ehdot tulevat myös esille luonnollisella tavalla impulssikontrolliongelmien arvofunktioiden ominaisuuksia tutkittaessa.

Määritelmä 14. Olkoon $\alpha \geq 0$. Funktio $h : I \to [0, \infty]$ on α-eksessiivinen diffuusion X suhteen, jos

$$(i)\ \mathbf{E}_x[e^{-\alpha t} h(X_t)] \leq h(x) \text{ kaikilla } x \in I,\ t \geq 0.$$

$$(ii)\ \mathbf{E}_x[e^{-\alpha t} h(X_t)] \to h(x) \text{ kaikilla } x \in I \text{ kun } t \downarrow 0.$$

Jos diffuusiosta ei ole epäselvyyttä, sanotaan funktiota h pelkästään α-eksessiiviseksi.

Lause 5. *Olkoon $\mathcal{A}$ diffuusion X generaattori ja $\alpha > 0$. Yhtälöllä $\mathcal{A}u = \alpha u$ on olemassa kasvava ja vähenevä α-eksessiivinen ratkaisu.*

Todistus. Olkoon $c \in I$. Määritellään funktio $\psi_\alpha : I \to [0, \infty]$ kaavalla

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} \mathbf{E}_x[e^{-\alpha\tau_c}] & \text{kun } r_0 \leq x \leq c \\ \mathbf{E}_c[e^{-\alpha\tau_x}]^{-1} & \text{kun } c < x \leq r_1 \end{cases}$$

Osumisaikojen eksponenttikuvausten odotusarvot toteuttavat kaikilla $a < b < c$ tulosäännön

$$\mathbf{E}_a[e^{-\alpha\tau_c}] = \mathbf{E}_a[e^{-\alpha\tau_b}]\mathbf{E}_b[e^{-\alpha\tau_c}],$$

joten ψ_α on kasvava funktio ja

$$\mathbf{E}_x[e^{-\alpha\tau_y}] = \frac{\psi_\alpha(x)}{\psi_\alpha(y)}$$

kun $x < y$. Olkoon nyt $r_0 < y < r_1$ ja $f \in C_{0,b}(I)$ funktio, jolle $f(x) = 0$ kun $x \leq y$ ja $f(x) > 0$ kun $x > y$. Tällöin $u = R_\alpha f \in D(\mathcal{A})$ ja

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbf{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)dt\right] \\ &= \mathbf{E}_x\left[\int_{\tau_y}^\infty e^{-\alpha t} f(X_{t-\tau_y})dt\right] \\ &= \mathbf{E}_x[e^{-\alpha\tau_y}]\mathbf{E}_y\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)dt\right] \\ &= \mathbf{E}_x[e^{-\alpha\tau_y}]u(y) \end{aligned}$$

kun $x \leq y$. Toisaalta tällöin $(\alpha - \mathcal{A})u(x) = 0$ ja $u(y) > 0$, joten ψ_α on yhtälön $\mathcal{A}u = \alpha u$ ratkaisu reunaehdolla $\mathcal{A}\psi_\alpha(r_0) = \alpha\psi_\alpha(r_0)$. Jos r_0 ei ole saapumistila, reunaehto muuntuu lauseen 2 todistuksen mukaisesti yksinkertaiseen muotoon $\psi_\alpha(r_0) = \psi_\alpha(r_0+) = 0$.

Samalla tavoin voidaan todistaa kaavalla

$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} \mathbf{E}_c[e^{-\alpha\tau_x}]^{-1} & \text{kun } r_0 \leq x \leq c \\ \mathbf{E}_x[e^{-\alpha\tau_c}] & \text{kun } c < x \leq r_1 \end{cases}$$

määritellyn funktion $I \to [0, \infty]$ olevan yhtälön $\mathcal{A}u = \alpha u$ vähenevä ratkaisu reunaehdolla $\mathcal{A}\phi_\alpha(r_1) = \alpha\phi_\alpha(r_1)$, joka muuntuu muotoon $\psi_\alpha(r_1) = \psi_\alpha(r_1-) = 0$, jos r_1 ei ole saapumistila. □

Lause 6. *Jokainen α-eksessiivinen funktio voidaan esittää lauseen 5 funktioiden ψ_α ja ϕ_α avulla. Kyseisiä funktioita kutsutaan myös generaattorin $\mathcal{A}$ minimaalisiksi α-eksessiivisiksi funktioiksi.*

Todistus. Olkoon $r_0 < a < b < r_1$ ja $\mathcal{A}u = \alpha u$. ψ_α on kasvava ja ϕ_α vähenevä funktio, joten

$$\frac{\psi_\alpha(a)}{\psi_\alpha(b)} < \frac{\phi_\alpha(a)}{\phi_\alpha(b)}$$

eli $\psi_\alpha(a)\phi_\alpha(b) - \phi_\alpha(a)\psi_\alpha(b) < 0$. Tämän seurauksena yhtälöllä

$$\begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\alpha(a) & \phi_\alpha(a) \\ \psi_\alpha(b) & \phi_\alpha(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ab} \\ c_{ba} \end{pmatrix}$$

on olemassa ratkaisu $(c_{ab}, c_{ba}) \in \mathbf{R}^2$. Tarkastellaan nyt funktiota $u^* = u - c_{ab}\psi_\alpha - c_{ba}\phi_\alpha$ välillä (a, b). $\mathcal{A}u^* = \alpha u^*$ joten kaikille funktion u^* ei-negatiivisille lokaaleille maksimeille (ei-positiivisille lokaaleille minimeille) $x \in (a, b)$ pätee $\alpha u^*(x) = (\mathcal{A}u^*)(x) \leq 0$ $(\alpha u^*(x) = (\mathcal{A}u^*)(x) \geq 0)$ ([15], s. 124), joten $u(x) = c_{ab}\psi_\alpha(x) + c_{ba}\phi_\alpha(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$. Lisäksi jos $x \in [a, b] \cap [a', b']$, niin $c_{ab}\psi_\alpha(x) + c_{ba}\phi_\alpha(x) = u^*(x) = c_{a'b'}\psi_\alpha(x) + c_{b'a'}\phi_\alpha(x)$ eli reaaliluvut c_{ab}, c_{ba} eivät riipu luvuista a, b. □

Määritelmä 15. Olkoot u_1 ja u_2 yhtälön $\mathcal{A}u = \alpha u$ ratkaisuja. Funktioiden u_1, u_2 Wronskin determinantti on kuvaus

$$W(u_1(x), u_2(x)) = (D_S^+ u_1(x))u_2(x) - (D_S^+ u_2(x))u_1(x) \tag{4}$$

Lause 7. *Olkoon u_1, u_2 kuten määritelmässä 15. Tällöin Wronskin determinantti ei riipu argumentista x eli $W(u_1(x), u_2(x)) = W(u_1, u_2)$. Jos epäselvyyttä funktiosta u_1, u_2 ei ole, merkitään lyhyesti $W(u_1, u_2) = W$.*

Todistus. Olkoon x, $y \in I$. Tavallisia integraalilaskennan laskusääntöjä käyttäen saadaan

$$W(u_1(x), u_2(x)) - W(u_1(y), u_2(y)) = \int_y^x dW(u_1(z), u_2(z))$$

$$\begin{aligned} &= \int_y^x u_2(z) dD_S^+ u_1(z) + \int_y^x D_S^+ u_1(z) du_2(z) \\ &\quad - \int_y^x u_1(z) dD_S^+ u_2(z) - \int_y^x D_S^+ u_2(z) du_1(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_y^x u_2(z)\alpha u_1(z) dm(z) + \int_y^x D_S^+ u_1(z) D_S^+ u_2(z) dS(z) \\ &\quad - \int_y^x u_1(z)\alpha u_2(z) dm(z) - \int_y^x D_S^+ u_2(z) D_S^+ u_1(z) dS(z) \end{aligned}$$

$$= W(u_1(y), u_2(y))$$

joten Wronskin determinantti ei riipu funktioiden u_1, u_2 argumenteista. □

Resolventtioperaattori voidaan esittää eksessiivisten funktioiden, nopeusmitan ja skaalafunktion avulla muodossa, joka ei sisällä odotusarvoja tai diffuusion polkuja. Tässä muodossa resolventtia on yleensä helpompi käsitellä analyyttisin keinoin.

Lause 8. *Olkoon $W = W(\psi_\alpha, \phi_\alpha)$, missä funktiot ψ_α, ϕ_α ovat lauseen 6 mukaiset generaattorin $\mathcal{A}$ minimaaliset α-eksessiiviset funktiot. Diffuusion resolventti on tällöin muotoa*

$$(R_\alpha f)(x) = W^{-1}\left(\phi_\alpha(x)\int_{r_0}^{x}\psi_\alpha(y)f(y)dm(y) + \psi_\alpha(x)\int_{x}^{r_1}\phi_\alpha(y)f(y)dm(y)\right) \quad (5)$$

Todistus. Käytetään yhtälön (5) oikeasta puolesta merkintää $F(x)$. Funktioiden ψ_α, ϕ_α ominaisuuksista seuraa $W > 0$. Lisäksi

$$\int_{r_0}^{x}\psi_\alpha(y)f(y)dm(y) = \alpha^{-1}\int_{r_0}^{x}f(y)dD_S^+\psi_\alpha(y),$$

$$\int_{x}^{r_1}\phi_\alpha(y)f(y)dm(y) = \alpha^{-1}\int_{x}^{r_1}f(y)dD_S^+\phi_\alpha(y)$$

ja

$$0 < \int_{r_0}^{x}dD_S^+\psi_\alpha(y),\ \int_{x}^{r_1}dD_S^+\phi_\alpha(y) < \infty$$

([18], s. 28), joten $F(x)$ on hyvin määritelty funktio. Nyt

$$\begin{aligned}
WD_S^+F(x) &= WD_S^+\int_{x_0}^{x}dF(x)\\
&= D_S^+\left(\int_{x_0}^{x}\int_{r_0}^{z}\psi_\alpha(y)f(y)dm(y)d\phi_\alpha(z) + \int_{x_0}^{x}\phi_\alpha(z)\psi_\alpha(z)f(z)dm(z)\right)\\
&+ D_S^+\left(\int_{x_0}^{x}\int_{z}^{r_1}\phi_\alpha(y)f(y)dm(y)d\psi_\alpha(z) - \int_{x_0}^{x}\phi_\alpha(z)\psi_\alpha(z)f(z)dm(z)\right)\\
&= D_S^+\int_{x_0}^{x}\int_{r_0}^{z}\psi_\alpha(y)f(y)dm(y)D_S^+\phi_\alpha(z)dS(z)\\
&+ D_S^+\int_{x_0}^{x}\int_{z}^{r_1}\phi_\alpha(y)f(y)dm(y)D_S^+\psi_\alpha(z)dS(z)\\
&= D_S^+\phi_\alpha(x)\int_{r_0}^{x}\psi_\alpha(y)f(y)dm(y) + D_S^+\psi_\alpha(x)\int_{x}^{r_1}\phi_\alpha(y)f(y)dm(y)
\end{aligned}$$

joten

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}F(x) &= WD_mD_SF(x) \\
&= \mathcal{A}\phi_\alpha(x)\int_{r_0}^{x}\psi_\alpha(y)f(y)dm(y) + \mathcal{A}\psi_\alpha(x)\int_{x}^{r_1}\phi_\alpha(y)f(y)dm(y) \\
&+ f(x)(D_S^+\phi_\alpha(x)\psi_\alpha(x) - D_S^+\psi_\alpha(x)\phi_\alpha(y)) \\
&= \lambda WF(x) - WF(x)
\end{aligned}
$$

ja lauseen 2 perusteella $F(x) = (R_\alpha f)(x)$. □

Kuten lauseiden 5 ja 8 perusteella voidaan päätellä, eksessiiviset funktiot liittyvät läheisesti diffuusion dynamiikkaan ja siten myös stokastisten impulssikontrolliongelmien ominaisuuksiin. Yhteyksiä käsitellään tarkemmin muun muassa Alvarezin [2] ja Christensenin [11] artikkeleissa. Vaikka kaikki eksessiiviset funktiot voidaankin esittää minimaalisten eksessiivisten funktioiden avulla, voi oikean lineaarikombinaation löytäminen olla työlästä. Lisäksi ominaisvektoriehdon manuaalinen tarkastaminen voi olla hyvin hankalaa funktioille, jotka sisältävät diffuusion tai diffuusioon liittyvien Markov-aikojen odotusarvoja. Tämän vuoksi lauseissa 9 ja 10 esitelläänkin vaihtoehtoinen tapa tutkia mielivaltaisen funktion eksessiivisyyttä. Lauseet ovat peräisin Salmiselta [22].

Lause 9. *Olkoon $\mathcal{A}$ diffuusion X generaattori. Funktio h on α-eksessiivinen diffuusion X suhteen ja $h(x_0) = 1$ jollain $x_0 \in I$ jos ja vain jos tila-avaruudella I voidaan määritellä todennäköisyysmitta (niin sanottu esitysmitta) σ^h, joka toteuttaa kaikilla $x \in I$ ehdon*

$$h(x) = \int_I \frac{k_y(x)}{k_y(x_0)}\sigma^h(dy)$$

missä

$$k_y(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi_\alpha(x)}{\psi_\alpha(y)} & \text{kun } x \leq y \\ \dfrac{\phi_\alpha(x)}{\phi_\alpha(y)} & \text{kun } x \geq y \end{cases}$$

Todistus. Olkoon σ^h tila-avaruudella I määritelty todennäköisyysmitta ja olkoon

$$h(x) = \int_I \frac{k_y(x)}{k_y(x_0)}\sigma^h(dy)$$

Tällöin

$$\mathbf{E}_x[e^{-\alpha t}h(X_t)] = \mathbf{E}_x[e^{-\alpha t}\psi_\alpha(X_t)]\int_{r_0}^{y}\frac{\sigma^h(dy)}{\psi_\alpha(y)k_y(x_0)} + \mathbf{E}_x[e^{-\alpha t}\phi_\alpha(X_t)]\int_{y}^{r_1}\frac{\sigma^h(dy)}{\phi_\alpha(y)k_y(x_0)}$$

joten funktion h eksessiivisyys seuraa funktioiden ψ_α, ϕ_α eksessiivisyydestä.

Todistuksen toinen puoli on peräisin Dynkiniltä ([12], lause 10.1) ja se jätetään tässä käsittelemättä. Syynä on Dynkinin käyttämä teoreettinen lähestymistapa, joka eroaa tämän tutkielman näkökulmasta ja määritelmistä. Todistuksen täsmällinen käsittely vaatisi useita teknisiä aputuloksia ja määritelmiä, joista ei olisi juurikaan hyötyä muualla tutkielmassa. □

Lause 10. *Olkoon W funktioiden ψ_α ja ϕ_α Wronskin determinantti. Jos h on α-eksessiivinen funktio, niin yksipuoliset derivaatat skaalafunktion suhteen $d^{\pm}h/dS$ ovat äärellisinä olemassa ja funktion esitysmitta on muotoa*

$$\sigma^h([r_0, x)) = F_a(x), \text{ kun } x \le x_0,$$

$$\sigma^h((x, r_1]) = F_b(x), \text{ kun } x \ge x_0$$

missä $x_0 \in I$, $h(x_0) = 1$ ja

$$F_a(x) = \frac{\phi_\alpha(x_0)}{W}\left(h(x)\frac{d^-\psi_\alpha(x)}{dS} - \psi_\alpha(x)\frac{d^-h(x)}{dS}\right),$$

$$F_b(x) = \frac{\psi_\alpha(x_0)}{W}\left(\phi_\alpha(x)\frac{d^+h(x)}{dS} - h(x)\frac{d^+\phi_\alpha(x)}{dS}\right)$$

Todistus. Olkoon $x \ge x_0$ ja kirjoitetaan h lauseen 9 kuvailemassa integraalimuodossa

$$h(x) = \int_{r_0}^{x_0} \frac{\phi_\alpha(x)}{\phi_\alpha(x_0)}\sigma^h(dy) + \int_{x_0}^{x} \frac{\phi_\alpha(x)\psi_\alpha(y)}{\psi_\alpha(x_0)\phi_\alpha(y)}\sigma^h(dy) + \int_{x}^{r_1} \frac{\psi_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x_0)}\sigma^h(dy)$$

$$= \frac{\phi_\alpha(x)}{\phi_\alpha(x_0)}\sigma^h([r_0, x_0)) + \int_{x_0}^{x} \frac{\phi_\alpha(x)\psi_\alpha(y)}{\psi_\alpha(x_0)\phi_\alpha(y)}\sigma^h(dy) + \frac{\psi_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x_0)}\sigma^h((x, r_1])$$

Nyt

$$\frac{d^-h(x)}{dS} = \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{h(x) - h(x-\delta)}{S(x) - S(x-\delta)}$$

$$= \frac{\sigma^h([r_0, x_0))}{\phi_\alpha(x_0)}\frac{d^-\phi_\alpha(x)}{dS} + \frac{\sigma^h((x, r_1])}{\psi_\alpha(x_0)}\frac{d^-\psi_\alpha(x)}{dS} + \frac{d^-\phi_\alpha(x)}{dS}\int_{x_0}^{x}\frac{\psi_\alpha(y)}{\psi_\alpha(x_0)\phi_\alpha(y)}\sigma^h(dy)$$
$$+ \lim_{\delta\downarrow 0}(S(x) - S(x-\delta))^{-1}\left(-\frac{\psi_\alpha(x-\delta)}{\psi_\alpha(x_0)}\sigma^h((x-\delta, x]) + \frac{\phi_\alpha(x-\delta)}{\psi_\alpha(x_0)}\int_{x-\delta}^{x}\frac{\psi_\alpha(y)}{\phi_\alpha(y)}\sigma^h(dy)\right)$$

Merkitään viimeistä, raja-arvon jälkeistä termiä $I(x_0, x, \delta)$. Funktio $\psi_\alpha(y)/\phi_\alpha(y)$ on kasvava, joten

$$0 \le I(x_0, x, \delta) \le (S(x) - S(x-\delta))^{-1}\left(-\frac{\psi_\alpha(x-\delta)}{\psi_\alpha(x_0)} + \frac{\phi_\alpha(x-\delta)\psi_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x_0)\phi_\alpha(x)}\right)\sigma^h((x-\delta, x])$$

ja

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{-\dfrac{\psi_\alpha(x-\delta)}{\psi_\alpha(x_0)}+\dfrac{\phi_\alpha(x-\delta)\psi_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x_0)\phi_\alpha(x)}}{S(x)-S(x-\delta)}=\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{-\psi_\alpha(x-\delta)\phi_\alpha(x)+\phi_\alpha(x-\delta)\psi_\alpha(x)}{(S(x)-S(x-\delta))\psi_\alpha(x_0)\phi_\alpha(x)}$$

$$=\frac{W}{\psi_\alpha(x_0)\phi_\alpha(x)}$$

$$>0$$

Luonnollisesti $\lim_{\delta\downarrow 0}\sigma^h((x-\delta,x])=0$, joten $\lim_{\delta\downarrow 0}I(x_0,x,\delta)=0$ ja $d^-h(x)/dS$ on olemassa ja äärellinen.

Samankaltaisella laskulla nähdään, että

$$\frac{d^+h(x)}{dS}=\frac{d^+\phi_\alpha(x)}{dS}\left(\frac{\sigma^h([r_0,x_0))}{\phi_\alpha(x_0)}+\int_{x_0}^{x}\frac{\psi_\alpha(y)}{\psi_\alpha(x_0)\phi_\alpha(y)}\sigma^h(dy)\right)+\frac{\sigma^h((x,r_1])}{\psi_\alpha(x_0)}\frac{d^+\psi_\alpha(x)}{dS}$$

Kertomalla tämän yhtälön molemmat puolet funktiolla ϕ_α ja käyttämällä hyväksi funktion h integraaliesitystä saadaan

$$\phi_\alpha(x)\frac{d^+h(x)}{dS}=h(x)\frac{d^+\phi_\alpha(x)}{dS}+\frac{\sigma^h((x,r_1])}{\psi_\alpha(x_0)}\left(\phi_\alpha(x)\frac{d^+\psi_\alpha(x)}{dS}-\psi_\alpha(x)\frac{d^+\phi_\alpha(x)}{dS}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sigma^h((x,r_1])=\frac{\psi_\alpha(x_0)}{W}\left(\phi_\alpha(x)\frac{d^+h(x)}{dS}-h(x)\frac{d^+\phi_\alpha(x)}{dS}\right)$$

Tilanteen $x\le x_0$ ja siihen liittyen yhtälön $\sigma^h([r_0,x))=F_a(x)$ todistus etenee samalla tavoin ja on käsitelty yksityiskohtaisesti Salmisen paperissa [22]. □

Lauseiden 9 ja 10 seurauksena saadaan yksinkertainen mittateoreettinen karakterisointi eksessiivisille funktioille. Tulosta käytetään myöhemmin impulssikontrolliongelman ratkaisujen yhteydessä.

Seuraus 1. *Funktio h on α-eksessiivinen diffuusion X_t suhteen ja $h(x_0)=1$ jollain $x_0\in I$ jos ja vain jos tila-avaruudella I voidaan määritellä lauseen 10 ehdot täyttävä todennäköisyysmitta.*

Päätetään eksessiivisten funktioiden teorian esittely eräällä teknisellä mutta laskujen kannalta erittäin hyödyllisellä lemmalla. Todistus sivuutetaan, mutta se löytyy esimerkiksi Alvarezin impulssikontrolliongelmia käsittelevästä paperista [1].

Lemma 1. *Olkoon diffuusion X tila-avaruus $\mathbf{R}_+$, $f\in C^2(\mathbf{R}_+)$ ja $F=(\mathcal{A}-\alpha)f\in\mathcal{L}^1(\mathbf{R}_+)$. Jos $\lim_{x\downarrow 0}|f(x)|<\infty$, niin*

$$\frac{f'(x)}{S'(x)}\psi_\alpha(x)-\frac{\psi'_\alpha(x)}{S'(x)}f(x)=\int_0^x\psi_\alpha(z)F(z)m'(z)dz-\delta$$

missä $\delta=0$, jos tila-avaruuden alareuna 0 on saavuttamaton diffuusiolle X ja $\delta=Wf(0)/\psi_\alpha(0)$, jos 0 on saavutettavissa. Jos taas $\lim_{x\uparrow\infty}f(x)/\psi_\alpha(x)=0$, niin

$$\frac{f'(x)}{S'(x)}\phi_\alpha(x)-\frac{\phi'_\alpha(x)}{S'(x)}f(x)=-\int_x^\infty\phi_\alpha(z)F(z)m'(z)dz$$

3.5 Geometrinen Brownin liike

Geometrinen Brownin liike on eräs yksinkertaisimmista finanssimatematiikassa käytetyistä diffuusioista. Käydään seuraavaksi läpi tärkeimpiä geometrisen Brownin liikkeen ominaisuuksia. Geometrinen Brownin liike X on jokaisella ajanhetkellä $t > 0$ samoin jakautunut tavallisen Brownin liikkeen B eksponentiaalikuvauksen kanssa, joten $X_t \in (0, \infty)$ kaikilla $t < \infty$. Näin ollen tila-avaruuden I rajat $0, \infty$ ovat luonnollisia eli $I = (0, \infty)$ ja diffuusion tappomitta $k((a, b)) = 0$ kaikilla $(a, b) \in I$.

Määritelmä 16. Geometrinen Brownin liike on diffuusio, jonka tila-avaruus on $I = (0, \infty)$ ja jonka generaattori on muotoa

$$\mathcal{A} = \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \mu x \frac{d}{dx}$$

missä $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$.

Lause 11. *Geometrisen Brownin liikkeen minimaaliset α-eksessiiviset funktiot ovat x^{β_-} ja x^{β_+}, missä $\beta_\pm$ ovat yhtälön*

$$\frac{\sigma^2}{2}\beta^2 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\beta - \alpha = 0 \tag{6}$$

juuret, joista toinen on positiivinen ja toinen negatiivinen.

Todistus. Käyttämällä yhtälöön $\mathcal{A}u(x) = \alpha u(x)$ yritettä $u(x) = x^\beta$ päädytään karakteristiseen yhtälöön (6), jonka juuret ovat

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\alpha}{\sigma^2}}$$

$\alpha > 0$, joten toinen juurista on positiivinen ja toinen negatiivinen. Merkitään positiivista (negatiivista) juurta β_+ (β_-), jolloin minimaaliset eksessiiviset funktiot ovat x^{β_-} (vähenevä) ja x^{β_+} (kasvava). □

Geometrisen Brownin liikkeen skaalafunktio ja nopeusmitta saadaan lauseen 4 mukaisesti yhtälöistä

$$S'(x) = x^{-2\mu/\sigma^2}, \qquad m'(x) = \frac{2}{\sigma^2} x^{-2+2\mu/\sigma^2}$$

joten funktioiden $x^{\beta_\pm}$ Wronskin determinantti on

$$\begin{aligned} W(x^{\beta_+}, x^{\beta_-}) &= x^{\beta_-} S'(x)^{-1} \frac{d}{dx} x^{\beta_+} - x^{\beta_+} S'(x)^{-1} \frac{d}{dx} x^{\beta_-} \\ &= (\beta_+ - \beta_-) x^{\beta_- + \beta_+ - 1 + 2\mu/\sigma^2} \\ &= 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\alpha}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

ja resolventti on

$$(R_\alpha f)(x) = \frac{2\left(x^{\beta_-}\int_{r_0}^x f(y) y^{\beta_+ - 2 + 2\mu/\sigma^2} dy + x^{\beta_+}\int_x^{r_1} f(y) y^{\beta_- - 2 + 2\mu/\sigma^2} dy\right)}{W(x^{\beta_+}, x^{\beta_-})\sigma^2}$$

4 Stokastinen impulssikontrolliongelma

Stokastisella impulssikontrolliongelmalla tarkoitetaan tässä tutkielmassa tilannetta, jossa tavoitteena on maksimoida jono yksiulotteisen diffuusion tilasta riippuvia palkkioita. Ongelman ratkaisemiseksi on olemassa analyyttinen, klassiseen diffuusioteoriaan perustuva lähestymistapa, jonka avulla ratkaisut voidaan ainakin eräissä tilanteissa määrittää eksplisiittisesti [1]. Menetelmän etuja ovat sen käytännöllisyys ja ratkaisujen yksinkertaisuus. Eräissä esimerkkitilanteissa ratkaisut voidaan jopa löytää eksplisiittisesti, siinä missä esimerkiksi kvasivariationaalisiin epäyhtälöihin perustuvia menetelmiä käytettäessä joudutaan usein tyytymään pelkkiin olemassaolotodistuksiin.

Luvussa käydään läpi ongelman määritelmä ja Alvarezin diffuusioteoriaan perustuva ratkaisumenetelmä [1]. Samat asiat esitetään myös optimaalisen pysäytyksen ongelmalle, joka on merkittävä stokastisen impulssikontrolliongelman erityistapaus. Optimaalisen pysäytyksen ongelmaa voidaan nimittäin pitää impulssikontrolliongelmana, jossa kontrolli koostuu useiden impulssien sijaan ainoastaan yhdestä pysäytysajasta. Vastaavasti yleistä impulssikontrolliongelmaa voidaan ajatella jonona peräkkäisiä optimaalisen pysäytyksen ongelmia. Jatkossa yleisestä impulssikontrolliongelmasta käytetään myös lyhyempää termiä kontrolliongelma.

4.1 Ongelman matemaattinen muotoilu

Kerrataan ongelman diffuusioteoreettinen lähtötilanne. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ luvun 3 johdantokappaleen mukainen todennäköisyysavaruus ja X tällä avaruudella määritelty yksiulotteinen diffuusio tila-avaruudella $I = (0, \infty)$. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi diffuusiosta X käytetään jatkossa merkintää X_t, missä $t \in [0, \zeta_X)$. Periaatteessa merkintä X_t tarkoittaa diffuusion satunnaista tilaa hetkellä t eikä itse diffuusiota, mutta merkintätapojen samaistaminen ei aiheuta epäselvyyttä tässä eikä myöskään seuraavissa luvuissa. Tila-avaruuden yläreuna ∞ oletetaan luonnolliseksi, mutta alareunan 0 saavutettavuus riippuu käytetyn diffuusion ominaisuuksista. 0 ei kuitenkaan kuulu tila-avaruuteen, joten se voi olla joko luonnollinen reuna tai lopetustila. Oletetaan lisäksi, että lauseen 3 mukaiset diffuusion X_t infinitesimaaliset momentit $\mu : I \to \mathbf{R}$ ja $\sigma : I \to \mathbf{R}_+$ ovat riittävän sileitä (vähintään jatkuvia) ratkaisun olemassaolon kannalta ja että ongelman palkkiofunktio $g : I \to \mathbf{R}$ on jatkuva ja kasvava sekä toteuttaa reunaehdot

$$-\infty < \lim_{x\downarrow 0} g(x) \leq 0 < \lim_{x\uparrow\infty} g(x)$$

Diffuusion X_t impulssikontrolliksi sanotaan jonoa $\nu = (\tau_1, ..., \tau_N; \xi_1, ..., \xi_N)_{N\leq\infty}$, missä $\{\tau_i\}_{i\leq N}$ on nouseva jono filtraation $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ suhteen mitallisia Markov-aikoja ja $\{\xi_i\}_{i\leq N}$ on jono ei-negatiivisia impulsseja. Selvyyden vuoksi merkitään impulssikontrollilla ν kontrolloitua diffuusiota X_t symbolilla X_t^ν. Diffuusion kontrollointi tapahtuu kohdistamalla impulssi ξ_i diffuusioon hetkellä τ_i. Näin ollen diffuusio siirtyy hetkellä τ_i välittömästi tilasta $X^\nu_{\tau_i^-}$ tilaan $X^\nu_{\tau_i} = X^\nu_{\tau_i^-} - \xi_i$. Oletetaan vielä, että $X^\nu_{\tau_i} = x_0$ kaikilla $i \leq N$ eli jokainen impulssi siirtää diffuusion takaisin johonkin tunnettuun, ennalta määrättyyn tilaan $x_0 \in I$. Merkitään nämä ehdot toteuttavien, mahdollisten impulssikontrollien joukkoa symbolilla $\mathcal{V}$.

Nyt voidaan muodostaa tutkielmassa käsiteltävän stokastisen impulssikontrolliongelman matemaattinen määritelmä. Tavoitteena on määrittää se impulssikontrolli $\nu^* \in \mathcal{V}$, joka maksimoi tilasta $x \in I$ käynnistyvään diffuusioon X_t liittyvän kassavirran

$$J^\nu(x) = \mathbf{E}_x\left[\sum_{k=1}^{N} e^{-r\tau_k} g(X^\nu_{\tau_k^-})\right]$$

sekä määrittää tämän optimaalisen kassavirran suuruus eli ongelman arvofunktio

$$V(x) = J^{\nu*}(x) = \sup_{\nu \in \mathcal{V}} J^\nu(x) \tag{7}$$

Kontrolliongelmaan (7) liittyvä optimaalisen pysäytyksen ongelma voidaan määritellä samalla tavoin, kun kontrollin ν annetaan koostua ainoastaan yhdestä impulssista. Kassavirta on tällöin

$$\tilde{J}(x) = \mathbf{E}_x[e^{-r\tau} g(X_\tau)]$$

joten arvofunktio on

$$\tilde{V}(x) = \sup_{\tau < \zeta_X} \mathbf{E}_x[e^{-r\tau} g(X_\tau)] \tag{8}$$

missä ζ_X on diffuusion X_t elinaika, eli tässä tapauksessa poistumisaika $\zeta_X = \inf\{t \geq 0 : \ X_t \leq 0\}$.

4.2 Ongelman ratkaisu

Tarkastellaan ensin optimaalisen pysäytyksen ongelmaa (8), jonka ratkaisua voidaan myöhemmin käyttää pohjana kontrolliongelman (7) ratkaisulle. Optimaalisen pysäytyksen ongelman ratkaisu perustuu suurelta osin kahdelle faktalle. Ensiksi todetaan arvofunktion $\tilde{V}$ olevan palkkion g minimaalinen r-eksessiivinen majorantti. $\tilde{V}(x) \geq g(x)$, sillä $\mathbf{E}_x[e^{-r\tau} g(X_\tau)] = g(x)$ ainakin kun $\tau = 0$. Palkkiofunktion jatkuvuudesta johtuen eksessiivisyyden määritelmän (määritelmä 5) ehto (ii) on triviaali, joten arvofunktio todetaan eksessiiviseksi seuraavan laskun perusteella:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x[e^{-rt}\tilde{V}(X_t)] &= \mathbf{E}_x[e^{-rt} \sup_{\tau < \zeta_X} \mathbf{E}_{X_t}[e^{-r\tau} g(X_\tau)]] \\
&\leq \sup_{t < \tau < \zeta_X} \mathbf{E}_x[e^{-r\tau} g(X_\tau)] \\
&\leq \sup_{\tau < \zeta_X} \mathbf{E}_x[e^{-r\tau} g(X_\tau)] \\
&= \tilde{V}(x)
\end{aligned}$$

Olkoon nyt U jokin toinen funktion g r-eksessiivinen majorantti. Tällöin

$$\begin{aligned}\tilde{V}(x) &= \sup_{\tau<\zeta_X} \mathbf{E}_x[e^{-r\tau}g(X_\tau)] \\ &\leq \sup_{\tau<\zeta_X} \mathbf{E}_x[e^{-r\tau}U(X_\tau)] \\ &\leq U(x)\end{aligned}$$

joten $\tilde{V}$ on jokaisessa tila-avaruuden I pisteessä pienempi kuin yksikään toinen funktion g r-eksessiivinen majorantti. Toinen tärkeä fakta on seurauksen 1 kuvailema tulos, jonka avulla funktion eksessiivisyys voidaan todistaa ilman eksessiivisyyden määritelmää tai diffuusion generaattoria.

Siirrytään nyt optimaalisen pysäytyksen ongelman ratkaisuun. Aloitetaan määrittelemällä funktio

$$K_y(x) = \mathbf{E}_x[e^{-r\tau_y}g(X_{\tau_y})] = \begin{cases} g(x) & \text{kun } x \geq y \\ g(y)\dfrac{\psi_r(x)}{\psi_r(y)} & \text{kun } x < y \end{cases}$$

missä $\tau_y = \inf\{t \geq 0 : \ X_t \geq y\}$. Funktion K_y avulla optimaalisen pysäytysajan löytäminen voidaan muuntaa helpommin käsiteltävään ongelmaan, jossa pysäytysaikana on τ_y ja tavoitteena on löytää optimaalinen kontrollikynnys tai -tila $y \in I$. Sekä optimaalinen kynnys että ongelman arvofunktio ovat määritetty seuraavassa lauseessa. Lauseessa joudutaan olettamaan muutama palkkiofunktiota ja diffuusion dynamiikkaa koskeva ehto, jotka kuitenkin yleensä toteutuvat käytännön sovelluksissa.

Lause 12. *Olkoon funktiolla $g(x)/\psi_r(x)$ yksikäsitteinen globaali maksimi kohdassa $\tilde{y} = \operatorname{argmax}\{g(x)/\psi_r(x)\}$. Olkoon D korkeintaan numeroituva joukko positiivisia reaalilukuja, $g \in C^2(I \setminus D)$, $g'(x\pm), g''(x\pm) < \infty$ kaikilla $x \in I \cap D$ ja olkoon kuvaus*

$$\tilde{A}(x) = \frac{\psi_r'(x)}{S'(x)}g(x) - \frac{g'(x)}{S'(x)}\psi_r(x)$$

kasvava kun $x > \tilde{y}$. Tällöin pysäytysongelman (8) optimaalinen pysäytysaika on $\tilde{\tau} = \inf\{t \geq 0 : \ X_t \geq \tilde{y}\}$ ja ongelman arvofunktio on

$$\tilde{V}(x) = K_{\tilde{y}}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{kun } x \geq \tilde{y} \\ g(\tilde{y})\dfrac{\psi_r(x)}{\psi_r(\tilde{y})} & \text{kun } x < \tilde{y} \end{cases}$$

Todistus. Oletuksista seuraa $K_{\tilde{y}}(x) \geq g(x)$ kaikilla $x \in I$. Toisaalta $K_{\tilde{y}}(x) = \mathbf{E}_x[e^{-r\tilde{\tau}}g(X_{\tilde{\tau}})]$ ja $\tilde{\tau}$ on Markov-aika, joten $\tilde{V}(x) \geq K_{\tilde{y}}(x)$ kaikilla $x \in I$. $\tilde{V}$ on palkkion g minimaalinen r-eksessiivinen majorantti, joten lauseen todistamiseksi riittää osoittaa, että funktio $K_{\tilde{y}}$ on r-eksessiivinen.

Tarkastellaan kuvausten

$$\tilde{L}_{\phi_r}(x) = \frac{K_{\tilde{y}}'(x)}{S'(x)}\phi_r(x) - \frac{\phi_r'(x)}{S'(x)}K_{\tilde{y}}(x),$$

$$\tilde{L}_{\psi_r}(x) = \frac{\psi_r'(x)}{S'(x)}K_{\tilde{y}}'(x) - \frac{K_{\tilde{y}}'(x)}{S'(x)}\psi_r'(x)$$

ominaisuuksia kun $x \notin D \cap [\tilde{y}, \infty)$. Oletuksista seuraa $\tilde{L}_{\phi_r}(x\pm), \tilde{L}_{\psi_r}(x\pm) < \infty$ kaikilla $x \in D \cap [\tilde{y}, \infty)$. Toisaalta ϕ_r on vähenevä ja $K_{\tilde{y}}$ kasvava, joten $\tilde{L}_{\phi_r}(x) \geq 0$ kaikilla $x \in I$. Funktiolle $\tilde{L}_{\psi_r}$ on puolestaan voimassa $\tilde{L}_{\psi_r}(x) = 0$ joukossa $(0, \tilde{y})$ ja $\tilde{L}_{\psi_r}(x) = \tilde{A}(x)$ joukossa $(\tilde{y}, \infty) \setminus D$. Lisäksi $\lim_{x \downarrow \tilde{y}} \tilde{A}(x) = 0$ ja $\tilde{A}$ oletettiin kasvavaksi välillä $(\tilde{y}, \infty)$, joten $\tilde{L}_{\psi_r}(x) \geq 0$ kaikilla $x \in I$. Monotonisuuden ja lemman 1 perusteella funktion $\tilde{A}$ derivaatalle pätee $0 \leq \tilde{A}'(x) = (rK_{\tilde{y}}(x) - (\mathcal{A}K_{\tilde{y}})(x))\psi_r(x)m'(x)$ joukossa $x \in (\tilde{y}, \infty) \setminus D$. Toisaalta tässä joukossa $\tilde{L}_{\psi_r}'(x) = -\tilde{L}_{\phi_r}'(x)\psi_r(x)/\phi_r(x) = \tilde{A}'(x)$, joten $\tilde{L}_{\phi_r}$ on kasvava ja $\tilde{L}_{\psi_r}$ vähenevä joukossa $(\tilde{y}, \infty) \setminus D$. Näin ollen funktioiden $\tilde{L}_{\phi_r}, \tilde{L}_{\psi_r}$ avulla voidaan rakentaa lauseen 10 mukainen funktiota $K_{\tilde{y}}$ vastaava todennäköisyysmitta, joten seurauksen 1 perusteella $K_{\tilde{y}}$ on r-eksessiivinen. □

Samaan ratkaisuun voidaan päätyä myös toisenlaisilla, hieman vahvemmilla mutta yksinkertaisemmilla ehdoilla. Lauseen 13 ehdot ovat myös lauseen 12 ehtoja helpommat tarkistaa, sillä niissä ei vaadita skaalafunktion S käsittelyä. Toisaalta lausetta 13 voidaan käyttää vain kun $g \in C^2(I)$, mikä rajaa pois useat min- tai max-funktioita sisältävät palkkiot.

Lause 13. *Olkoon $g \in C^2(I)$, $F = (\mathcal{A}-r)g \in \mathcal{L}^1(I)$ ja $\check{x} \in I$ funktion F yksikäsitteinen nollakohta, jolle $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$) kun $x < \check{x}$ ($x > \check{x}$). Tällöin optimaalinen pysäytysaika on $\tau_{\tilde{y}}$, missä $\tilde{y}$ on yhtälön $g'(x)\psi_r(x) = g(x)\psi_r'(x)$ yksikäsitteinen juuri ja pysäytysongelman arvofunktio $\tilde{V}$ on kuten lauseessa 12.*

Todistus. Lemman 1 ehdot täyttyvät, joten

$$\frac{g'(x)}{S'(x)}\psi_r(x) - \frac{\psi_r'(x)}{S'(x)}g(x) = \int_0^x \psi_r(y)F(y)m'(y)dy - \delta$$

missä δ on kuten lemmassa 1. Merkitään yhtälön oikeaa puolta symbolilla $L(x)$. $g(0) \leq 0$ ja $F(x) > 0$ välillä $(0, \check{x})$, joten $L(x) > 0$ kun $x \leq \check{x}$. Jos $\check{x} < K < x$, niin väliarvolauseen perusteella

$$L(x) = L(K) + \psi_r(a)F(a)m'(a)(x - K)$$

jollain $a \in (K, x)$. $F(\xi) < 0$, joten $\lim_{x \uparrow \infty} L(x) = -\infty$. Toisaalta L on jatkuva positiivisilla reaaliluvuilla, positiivinen välillä $(0, \check{x})$ ja aidosti vähenevä välillä $(\check{x}, \infty)$, joten yhtälöllä $L(x) = 0$ on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $\tilde{y} \in I$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\tilde{y}$ on yhtälön $g'(x)\psi_r(x) = g(x)\psi_r'(x)$ yksikäsitteinen juuri. Tulos seuraa nyt lauseesta 12. □

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan yleisen impulssikontrolliongelman ratkaisua. Ratkaisu perustuu osittain optimaalisen pysäytyksen ongelman ratkaisulle ja seuraavalle aputulokselle.

Lemma 2. *Olkoon $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbf{R}_+$ r-eksessiivinen diffuusion X_t suhteen ja $f(x) \geq g(x) + f(x_0)$ kaikilla $x \in I$. Tällöin*

$$f(x) \geq \sup_{\nu \in \mathcal{V}} \mathbf{E}_x \left[\sum_{k=1}^{N} e^{-r\tau_k} g(X^{\nu}_{\tau_k^-}) \right]$$

kaikilla $x \in I$ eli funktio f dominoi kontrolliongelman arvofunktiota V koko tila-avaruudessa I.

Todistus. Olkoon $\nu = \{\tau_1, \ldots, \tau_N; \zeta_1, \ldots, \zeta_N\}$ sallittu impulssikontrolli ja olkoon $\tau_0 = 0$. Kontrolloitu prosessi X^{ν}_t käyttäytyy diffuusion X_t tavoin kahden peräkkäisen pysäytysajan τ_j ja τ_{j+1} välillä, joten funktion f r-eksessiivisyydestä seuraa

$$\mathbf{E}_x[e^{-r\tau_{j+1}} f(X^{\nu}_{\tau_{j+1}-})] \leq \mathbf{E}_x[e^{-r\tau_j} f(X^{\nu}_{\tau_j})]$$

kaikilla $x \in I$ ja $0 \leq j \leq N-1$. Tällöin

$$\sum_{j=0}^{k} \mathbf{E}_x[e^{-r\tau_{j+1}} f(X^{\nu}_{\tau_{j+1}-})] \leq \sum_{j=0}^{k} \mathbf{E}_x[e^{-r\tau_j} f(X^{\nu}_{\tau_j})]$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq \mathbf{E}_x[e^{-r\tau_{k+1}} f(X^{\nu}_{\tau_{k+1}-})] + \mathbf{E}_x \left[\sum_{j=0}^{k} e^{-r\tau_j} (f(X^{\nu}_{\tau_j-}) - f(X^{\nu}_{\tau_j})) \right]$$

ja koska $\tau_j = x_0$ kaikilla j, saadaan edellinen epäyhtälö ehdon $f(x) \geq g(x) + f(x_0)$ nojalla ja rajalla $k \to N$ muotoon

$$f(x) \geq \sup_{\nu \in \mathcal{V}} \mathbf{E}_x \left[\sum_{k=1}^{N} e^{-r\tau_k} g(X^{\nu}_{\tau_k^-}) \right]$$

kaikilla $x \in I$. □

Lemma 2 antaa riittävän ehdon sille, että positiivinen reaalifunktio dominoi kontrolliongelman arvofunktiota. Kontrolliongelma voidaan ratkaista rakentamalla lemman 2 ehdot täyttävä funktio, joka vastaa samalla ongelman kassavirtaa jollain kontrollilla $\nu \in \mathcal{V}$. Osoittautuu, että tämän kontrollin voidaan eräiden yleensä toteutuvien ehtojen vallitessa olettaa olevan muodoltaan kuin jono identtisiä optimaalisen pysäytyksen ongelman ratkaisuja ja näin ollen hyvin yksinkertainen. Tällaisia kontrolleja sanotaankin jatkossa yksinkertaisiksi ja yksinkertaisen kontrollin sisältäviä impulssikontrolliongelman ratkaisuja yksinkertaisiksi ratkaisuiksi.

Määritelmä 17. Oletetaan, että X_t käynnistyy tilasta $x \in I$. Yksinkertainen kontrolli on kontrolli $\nu \in \mathcal{V}$, jolla $\tau_i = \tau_{y_{x_0}} = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq y_{x_0}\}$ kaikilla $i \geq 1$, $\xi_i = y_{x_0} - x_0$ kaikilla $i > 1$, $\xi_1 = x - x_0$ kun $x \geq y_{x_0}$ ja $\xi_1 = \xi_2$ kun $x < y_{x_0}$. Yksinkertainen kontrolli on siis kontrolli, joka vie diffuusion X_t välittömästi tilaan x_0 aina, kun se osuu tilaan $y_{x_0} > x_0$. Toisin sanoen, on olemassa yksikäsitteinen tila $y_{x_0} \in I$, jossa kontrollointi tapahtuu.

Rakennetaan seuraavaksi kontrolliongelmalle yksinkertainen ratkaisu ja määritetään riittävät ehdot tällaisen ratkaisun olemassaololle. Määritellään tila-avaruudella I funktio

$$F_{y_{x_0}}(x) = \mathbf{E}_x[e^{-r\tau_{y_{x_0}}}(g(X^{\nu}_{\tau_{y_{x_0}}-}) + F_{y_{x_0}}(x_0))]$$

$$= \begin{cases} g(x) + F_{y_{x_0}}(x_0) & \text{kun } x \geq y_{x_0} \\ (g(x) + F_{y_{x_0}}(x_0))\dfrac{\psi_r(x)}{\psi_r(y)} & \text{kun } x < y_{x_0} \end{cases}$$

missä $0 < x_0 < y_{x_0}$ ja osumisaika $\tau_{y_{x_0}} = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq y_{x_0}\}$. Funktio $F_{y_{x_0}}$ vastaa impulssikontrolliongelman kassavirtaa mielivaltaisella yksinkertaisella kontrollilla. Esitetään $F_{y_{x_0}}$ seuraavaksi eksessiivisten funktioiden avulla kuten pysäytysongelman kohdalla tehtiin. Diffuusion käynnistyessä tilasta x_0 saadaan

$$F_{y_{x_0}}(x_0) = (g(x) + F_{y_{x_0}}(x_0))\frac{\psi_r(x_0)}{\psi_r(y_{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow F_{y_{x_0}}(x_0) = \frac{\psi_r(x_0)g(y_{x_0})}{\psi_r(y_{x_0}) - \psi_r(x_0)}$$

jolloin $F_{y_{x_0}}$ voidaan esittää muodossa

$$F_{y_{x_0}}(x) = \begin{cases} g(x) + \psi_r(x_0)u(y_{x_0}) & \text{kun } x \geq y_{x_0} \\ \psi_r(x)u(y_{x_0}) & \text{kun } x < y_{x_0} \end{cases}$$

missä

$$u(y_{x_0}) = \frac{g(y_{x_0})}{\psi_r(y_{x_0}) - \psi_r(x_0)}$$

Yksinkertaiset kontrollit kuuluvat joukkoon $\mathcal{V}$, joten selvästi $F_{y_{x_0}}(x) \leq V(x)$ kaikilla $y_{x_0}, x \in I$. Epäyhtälö voidaan kääntää, kun $F_{y_{x_0}}$ toteuttaa lemman 2 ehdot. Huomattakoon vielä, että epäyhtälö $F_{y_{x_0}}(x) \geq F_{y_{x_0}}(x_0) + g(x)$ toteutuu automaattisesti kaikilla $x \geq y_{x_0}$ ja välillä (x_0, y_{x_0}), jos $u(y_{x_0}) \geq u(x)$ kaikilla $x \in (x_0, y_{x_0})$.

Ongelman ratkaisu voidaan nyt jakaa kahteen osaan. Ensin esitetään riittävät ehdot funktion $F_{y_{x_0}}$ eksessiivisyydelle. Tämän jälkeen lemmassa 4 esitellään eräs yleensä toteutuva riittävä ehto, jolla epäyhtälö $F_{y_{x_0}}(x) \geq F_{y_{x_0}}(x_0) + g(x)$ on voimassa koko tila-avaruudella I. Jos ehdot toteutuvat, lemmasta 2 seuraa $V = F_{\hat{y}_{x_0}}$ eli $F_{\hat{y}_{x_0}}$ on kontrolliongelman arvofunktio ja ongelmalla on olemassa yksinkertainen ratkaisu, johon liittyvä yksikäsitteinen kontrollitila on $\hat{y}_{x_0} = \operatorname{argmax}_{x > x_0}\{u(x)\}$.

Lemma 3. *Olkoon $\hat{y}_{x_0}$ funktion u lokaali maksimi joukossa (x_0, ∞), $D \subset I$ korkeintaan numeroituva, $g \in C^2(I \setminus D)$, $g'(x\pm), g''(x\pm) < \infty$ kaikilla $x \in D$ ja olkoon funktio*

$$A_{\hat{y}_{x_0}}(x) = \frac{\psi_r'(x)}{S'(x)}(g(x) + u(\hat{y}_{x_0})\psi_r(x_0)) - \frac{g'(x)}{S'(x)}\psi_r(x)$$

kasvava välillä $(\hat{y}_{x_0}, \infty)$*. Tällöin funktio* $F_{\hat{y}_{x_0}}(x)$ *on* r*-eksessiivinen. Jos* $\hat{y}_{x_0} \notin D$*, niin*

$$g'(\hat{y}_{x_0})(\psi_r(\hat{y}_{x_0}) - \psi_r(x_0)) = \psi_r'(\hat{y}_{x_0})g(\hat{y}_{x_0})$$

ja $F_{\hat{y}_{x_0}}(x)$ *toteuttaa sileysehdon* $\lim_{x\uparrow\hat{y}_{x_0}} F'_{\hat{y}_{x_0}}(x) = g'(\hat{y}_{x_0})$*.*

Todistus. Eksessiivisyyden todistus on analoginen lauseen 12 todistuksen kanssa. Jos $\hat{y}_{x_0} \notin D$, niin

$$u'(\hat{y}_{x_0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(\hat{y}_{x_0})(\psi_r(\hat{y}_{x_0}) - \psi_r(x_0)) = \psi_r'(\hat{y}_{x_0})g(\hat{y}_{x_0})$$

ja $\lim_{x\uparrow\hat{y}_{x_0}} F'_{\hat{y}_{x_0}}(x) = \lim_{x\uparrow\hat{y}_{x_0}} \psi_r'(x)g'(\hat{y}_{x_0})/\psi_r'(\hat{y}_{x_0}) = g'(\hat{y}_{x_0})$. □

Lemma 4. *Olkoon* $\hat{y}_{x_0}$ *funktion* u *lokaali maksimi joukossa* (x_0, ∞) *ja* $g \in C^1(I \setminus D)$*, missä* D *on korkeintaan numeroituva tila-avaruuden osajoukko. Oletetaan myös, että* $g'(x\pm) < \infty$ *kaikilla* $x \in D$ *ja* $g'(x)/\psi_r'(x)$ *on vähenevä välillä* $(0, \hat{y}_{x_0})$*. Tällöin epäyhtälö* $F_{\hat{y}_{x_0}}(x) \geq F_{\hat{y}_{x_0}}(x_0) + g(x)$ *on voimassa kaikilla* $x \in I$*.*

Todistus. Määritellään $\Delta(x) = u(\hat{y}_{x_0})(\psi_r(x) - \psi_r(x_0)) - g(x)$ joukossa I. $u(\hat{y}_{x_0})' = 0$ joten $u(\hat{y}_{x_0}) = g'(\hat{y}_{x_0})/\psi_r'(\hat{y}_{x_0})$. Funktion ψ_r kasvavuudesta ja funktion $g'(\cdot)/\psi_r'(\cdot)$ vähenevyydestä seuraa nyt

$$\Delta'(x) = u(\hat{y}_{x_0})\psi_r'(x) - g'(x)$$

$$= \psi_r'(x)\left(\frac{g'(\hat{y}_{x_0})}{\psi_r'(\hat{y}_{x_0})} - \frac{g'(x)}{\psi_r'(x)}\right)$$

$$\leq 0$$

kaikilla $x \in (0, x_0) \setminus D$. $\Delta(x_0) \geq 0$, joten $\Delta(x) \geq 0$ eli $F_{\hat{y}_{x_0}}(x) \geq F_{\hat{y}_{x_0}}(x_0) + g(x)$ myös välillä $(0, x_0)$. □

Lause 14. *Oletetaan, että lemman 3 ja 4 ehdot ovat voimassa. Tällöin kontrolliongelmalla on olemassa yksinkertainen ratkaisu, jossa ratkaisuun liittyvä kontrollitila on* $\hat{y}_{x_0} = \operatorname{argmax}_{x>x_0}\{u(x)\}$*. Lisäksi ongelman arvofunktio on* $V = F_{\hat{y}_{x_0}}$*.*

Todistus. $F_{\hat{y}_{x_0}}$ vastaa yksinkertaisella kontrollilla saavutettavaa kontrolliongelman kassavirtaa, joten $V(x) \geq F_{\hat{y}_{x_0}}(x)$ kaikilla $x \in I$. Lemman 3 ehdot ovat voimassa, joten $F_{\hat{y}_{x_0}}$ on r-eksessiivinen. Lemmasta 4 seurauksena epäyhtälö $F_{\hat{y}_{x_0}}(x) \geq F_{\hat{y}_{x_0}}(x_0) + g(x)$ toteutuu kaikilla $x \in I$. Funktio $F_{\hat{y}_{x_0}}$ toteuttaa lemman 2 ehdot, joten $F_{\hat{y}_{x_0}}(x) \geq V(x)$ kaikilla $x \in I$, mistä tulos seuraa. □

Lause 14 on hyödyllinen kontrolliongelmia ratkaistaessa, sillä palkkiofunktion g ei tarvitse olla jatkuvasti differentoituva. Lemman 3 ehtojen tarkistaminen vaatii kuitenkin jälleen skaalafunktion käsittelyä sekä suhteellisen mutkikasta muotoa olevan funktion $A_{\hat{y}_{x_0}}$ monotonisuuden tutkimista, joka voi olla monimutkaisempien palkkioiden ja diffuusioiden kanssa hyvin hankalaa. Tilanne helpottuu huomattavasti kun $g \in C^2(I)$, aivan kuten pysäytysongelman parissa. Lause 15 onkin kontrolliongelman analogia lauseelle 13.

Lause 15. *Olkoon tila-avaruuden I alareuna 0 saavuttamaton diffuusiolle X_t, $g \in C^2(I)$ ja $F = (\mathcal{A}-r)g \in \mathcal{L}^1(I)$. Oletetaan lisäksi, että F on vähenevä ja $\lim_{x\downarrow 0} F(x) > 0 > \lim_{x\uparrow\infty} F(x)$. Tällöin impulssikontrolliongelmalla on olemassa yksikäsitteinen yksinkertainen ratkaisu, jossa diffuusion kontrollointi tapahtuu tilassa $\hat{y}_{x_0}$ ja ongelman arvofunktio on $V = F_{\hat{y}_{x_0}}$*

Todistus. Oletuksista seuraa lauseen 13 mukaisesti, että on olemassa yksikäsitteinen $\tilde{y} \in I$, jolla $g'(\tilde{y})\psi_r(\tilde{y}) = g(\tilde{y})\psi_r'(\tilde{y})$ ja $g'(x)\psi_r(x) < g(x)\psi_r'(x)$, kun $x > \tilde{y}$. Lemman 1 perusteella

$$\frac{g''(x)}{S'(x)}\psi_r'(x) - \frac{\psi_r''(x)}{S'(x)}g'(x) = \frac{2r}{\sigma^2(x)}\int_0^x \psi_r(y)(F(x) - F(y))m'(y)dy \le 0$$

kaikilla $x \in I$, joten $g'(x)/\psi_r'(x)$ on vähenevä. Näiden havaintojen perusteella funktiolle $v(x) = g'(x)(\psi_r(x) - \psi_r(x_0)) - \psi_r'(x)g(x)$ pätee $v(x) \ge 0$ välillä $[x_0, x_1)$, missä $x_1 = \sup\{x \in I : g(x) = 0\}$. Lisäksi $v(x_1) > 0$ ja $v(x) < 0$, kun $x > \tilde{y}$. Täten on olemassa ainakin yksi $\hat{y}_{x_0} \in I$, jolla $v(\hat{y}_{x_0}) = 0$. Ehto on yhtäpitävä ehtojen $\hat{y}_{x_0} = \text{argmax}_{x>x_0}\{u(x)\}$ ja $g'(\hat{y}_{x_0})/\psi_r'(\hat{y}_{x_0}) = u(\hat{y}_{x_0})$ kanssa. Toisaalta $g'(x)/\psi_r'(x)$ todettiin väheneväksi, joten $\hat{y}_{x_0}$ on yksikäsitteinen.

Lemman 4 mukaisesti funktion $g'(x)/\psi_r'(x)$ monotonisuudesta seuraa, että einegatiivinen funktio $F_{\hat{y}_{x_0}} \in C^2(I)$ toteuttaa epäyhtälön $F_{\hat{y}_{x_0}}(x) \ge F_{\hat{y}_{x_0}}(x_0) + g(x)$ kaikilla $x \in I$. Lisäksi $\mathcal{A}F_{\hat{y}_{x_0}}(x) = rF_{\hat{y}_{x_0}}(x)$ välillä $(0, \hat{y}_{x_0})$. Välillä $(\hat{y}_{x_0}, \infty)$ saadaan puolestaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}F_{\hat{y}_{x_0}}(x) - rF_{\hat{y}_{x_0}}(x) &= F(x) - ru(\hat{y}_{x_0})\psi_r(x_0) \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2(\hat{y}_{x_0})g''(y^*_{x_0}) + \mu(y^*_{x_0})g'(\hat{y}_{x_0}) - ru(\hat{y}_{x_0})\psi_r(\hat{y}_{x_0}) \\
&\le \left(\frac{1}{2}\sigma^2(\hat{y}_{x_0})\psi_r''(\hat{y}_{x_0}) + \mu(\hat{y}_{x_0})\psi_r'(\hat{y}_{x_0}) - r\psi_r(\hat{y}_{x_0})\right)u(\hat{y}_{x_0}) \\
&= (\mathcal{A}\psi_r(\hat{y}_{x_0}) - r\psi_r(\hat{y}_{x_0}))u(\hat{y}_{x_0}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

joten $F_{\hat{y}_{x_0}}$ on r-eksessiivinen. Tulos seuraa nyt lemmasta 2. $\square$

Lauseen 15 avulla kontrolliongelman yksinkertaisen ratkaisun olemassaolo voidaan todistaa melko yksinkertaisesti lauseeseen 14 verrattuna. Kuten todistuksen alussa kävi ilmi, lauseen 15 ehdot riittävät myös pysäytysongelman ratkaisemiseen, sillä jos F on vähenevä ja $\lim_{x\downarrow 0} F(x) > 0 > \lim_{x\uparrow\infty} F(x)$, niin funktiolla F on olemassa yksikäsitteinen nollakohta $\check{x} \in I$, jolla $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$) kun $x < \check{x}$ ($x > \check{x}$).

Tässä luvussa esitelty analyysi ei ole kaikenkattava kuvaus stokastisen impulssikontrolliongelman diffuusioteoreettisesta ratkaisusta. Kokonainen analyysi sekä sen sovelluksia löytyy Alvarezin paperista [1]. Luvussa on kuitenkin esitetty lähestymistavan pääpiirteet, joiden avulla muistittomasti muuttuva impulssikontrolliongelma voidaan ratkaista. Osoittautuu, että tavallisen impulssikontrolliongelman ratkaisua ei voida pelkästään käyttää apuna muuttuvaa ongelmaa ratkaistaessa, vaan lauseet 12 - 15 ja lemmat 2 - 4 voidaan kopioida muuttuvalle ongelmalle lähes sellaisinaan.

5 Muistittomasti muuttuva ongelma

Laajennetaan luvun 4 diffuusioteoreettinen lähestymistapa koskemaan tietynlaisia satunnaisen muutosajan regiiminvaihto-ongelmia. Tarkastellaan tilannetta, jossa diffuusion dynamiikka, palkkiofunktio tai molemmat kokevat muutoksen satunnaisella ajanhetkellä $T : \Omega' \to \mathbf{R}_+$. Oletetaan muutosta edeltävään ja muutoksen jälkeiseen maailmaan liittyvät palkkiofunktio ja diffuusion dynamiikka tunnetuiksi, jolloin ainoastaan itse muutosaika on tuntematon. Oletetaan vielä yksinkertaisuuden vuoksi, että muutosaika noudattaa eksponenttijakaumaa, toisin sanoen $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Merkitään jatkossa muutosta edeltävään maailmaan liittyviä asioita (esimerkiksi diffuusiota ja palkkiota) alaindeksillä 1 ja muutoksen jälkeiseen maailmaan liittyviä asioita alaindeksillä 2. Useamman alaindeksin tapauksessa muutokseen liittyvä indeksi on kirjoitettu aina ensimmäisenä. Esimerkiksi muutosta edeltävän maailman diffuusiota merkitään $X_{1,t}$ ja muutoksen jälkeisen maailman palkkiota merkitään g_2. Poikkeuksena merkitään diffuusion $X_{i,t}$ elinaikaa symbolilla ζ_i, yksinkertaiseen kontrolliin liittyvää tilaa $x_{i,0}$ lyhyemmin x_i ja kontrolliongelman yksinkertaiseen ratkaisuun liittyvää kontrollitilaa $\hat{y}_i$.

Muutoksen jälkeisessä maailmassa tilanne palautuu luvussa 4 käsiteltyyn tavalliseen impulssikontrolliongelmaan, joten lauseen 12 tai 13 ehdoilla pysäytysongelman arvofunktio on

$$\tilde{V}_2(x) = \begin{cases} g_2(x) & \text{kun } x \geq \tilde{y}_2 \\ g_2(\tilde{y}_2)\dfrac{\psi_{2,r}(x)}{\psi_{2,r}(\tilde{y}_2)} & \text{kun } x < \tilde{y}_2 \end{cases}$$

missä kontrollitilta $\tilde{y}_2 = \mathrm{argmax}\{g_2(x)/\psi_{2,r}(x)\}$ on yksikäsitteinen.

Vastaavasti impulssikontrolliongelman arvofunktio on lauseiden 14 tai 15 ehdoilla

$$V_2(x) = \begin{cases} g_2(x) + \psi_{2,r}(x_2)u_2(\hat{y}_2) & \text{kun } x \geq \hat{y}_2 \\ \psi_{2,r}(x)u_2(\hat{y}_2) & \text{kun } x < \hat{y}_2 \end{cases}$$

missä $\hat{y}_2 = \mathrm{argmax}_{x > x_2}\{u_2(x)\}$ on yksinkertaiseen ratkaisuun liittyvä yksikäsitteinen kontrollitila.

Muutosta edeltävässä maailmassa tilanne on monimutkaisempi, sillä sekä muutosaika että muutoksen jälkeinen maailma vaikuttavat optimaalisiin kontrollitiloihin ja arvofunktioihin. Noudatetaan samaa juonta kuin luvussa 4 ja käsitellään pysäytysongelma ensin.

5.1 Pysäytysongelma

Mikäli diffuusio $X_{1,t}$ käynnistyy tilasta x, on muutosta edeltävän pysäytysongelman arvofunktio diffuusioiden vahvan Markov-ominaisuuden perusteella

$$\tilde{V}_1(x) = \sup_{\tau<\zeta_1} \mathbf{E}_x \left[\int_\tau^\infty e^{-r\tau} g_1(X_{1,\tau}) \lambda e^{-\lambda s} ds + \int_t^\tau \lambda e^{-(r+\lambda)(s-t)} \tilde{V}_2(X_{1,T}) ds \right]$$

$$= \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x) + \sup_{\tau<\zeta_1} \mathbf{E}_x \left[e^{-(r+\lambda)\tau}(g_1(X_{1,\tau}) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(X_{1,\tau})) \right]$$

Rajalla $\lambda \downarrow 0$ muutosta edeltävä arvofunktio $\tilde{V}_1$ on samaa muotoa kuin muutoksen jälkeinen arvofunkio $\tilde{V}_2$. Toisaalta $\mathbf{E}[T] \uparrow \infty$ kun $\lambda \downarrow 0$, joten rajalla ongelman muutos ei tapahdu äärellisessä ajassa (melkein varmasti) ja ongelma palautuu tavalliseen, luvussa 4 käsiteltyyn ongelmaan.

Lause 16. *$\tilde{V}_1(x)$ on pienin palkkiofunktion $g_1(x)$ majorantti, jolle funktio $\tilde{V}_1(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x)$ on $r+\lambda$-eksessiivinen diffuusion $X_{1,t}$ suhteen.*

Todistus. Olkoon $t > 0$. Tällöin

$$\mathbf{E}_x \left[e^{-(r+\lambda)t}(\tilde{V}_1(X_{1,t}) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(X_{1,t})) \right]$$

$$= \mathbf{E}_x \left[e^{-(r+\lambda)t} \sup_{\tau<\zeta_1} \mathbf{E}_{X_t} \left[e^{-(r+\lambda)\tau}(g_1(X_{1,\tau}) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(X_{1,\tau})) \right] \right]$$

$$= \sup_{t\leq\tau<\zeta_1} \mathbf{E}_x \left[e^{-(r+\lambda)\tau}(g_1(X_{1,\tau}) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(X_{1,\tau})) \right]$$

$$\leq \tilde{V}_1(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x)$$

ja eksessiivisyyteen liittyvä raja-arvoehto on triviaali. Jos $U(x)$ on palkkiofunktion $g_1(x)$ majorantti, jolle $\tilde{V}_1(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x)$ on $r+\lambda$-eksessiivinen diffuusion $X_{1,t}$ suhteen, niin

$$\tilde{V}_1(x) = \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x) + \sup_{\tau<\zeta_1} \mathbf{E}_x \left[e^{-(r+\lambda)\tau}(g_1(X_{1,\tau}) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(X_{1,\tau})) \right]$$

$$\leq \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x) + \sup_{\tau<\zeta_1} \mathbf{E}_x \left[e^{-(r+\lambda)\tau}(U(X_{1,\tau}) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(X_{1,\tau})) \right]$$

$$\leq U(x)$$

□

Olkoon $y > 0$. Määritellään luvun 4 hengessä uusi funktio $\tilde{V}_{1,y}$ vaihtamalla arvofunktion $\tilde{V}_1$ supremum tuntemattomaan osumisaikaan τ_y. Selvästi

$$\tilde{V}_{1,y}(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{kun } x \geq y \\ \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x) + \psi_{1,r+\lambda}(x)B(y) & \text{kun } x < y \end{cases}$$

missä

$$B(y) = \frac{g_1(y) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(y)}{\psi_{1,r+\lambda}(y)} \tag{9}$$

Lause 17. *Olkoon funktiolla B olemassa yksikäsitteinen globaali maksimi kohdassa $\tilde{y}_1 = \operatorname{argmax}\{B(x)\}$, $D \subset I$ numeroituva, $\tilde{V}_{1,\tilde{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x) \in C^2(I \setminus D)$, $\tilde{V}'_{1,\tilde{y}_1}(x\pm) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)'(x\pm) < \infty$, $\tilde{V}''_{1,\tilde{y}_1}(x\pm) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)''(x\pm) < \infty$ kaikilla $x \in D$ ja olkoon funktiolle*

$$\tilde{A}(x) = \frac{g_1(x)\psi'_{1,r+\lambda}(x) - g'_1(x)\psi_{1,r+\lambda}(x)}{S'_1(x)}$$

voimassa $\tilde{A}'(x) \geq \lambda\psi_{1,r+\lambda}(x)\tilde{V}_2(x)m'_1(x)$ kaikilla $x \in (\tilde{y}_1, \infty) \setminus D$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in (\tilde{y}_1, \infty) \setminus D$ on voimassa

$$\int_x^\infty \phi_{1,r+\lambda}(z)\left((r+\lambda)g_1(z) - \mathcal{A}_1 g_1(z) - \lambda\tilde{V}_2(z)\right)m'_1(z)dz \geq 0,$$

$$\delta + \int_0^x \psi_{1,r+\lambda}(z)\left((r+\lambda)g_1(z) - \mathcal{A}_1 g_1(z) - \lambda\tilde{V}_2(z)\right)m'_1(z)dz \geq 0$$

missä δ on kuten lemmassa 1. Tällöin kaikilla $x \in I$

$$\tilde{V}_1(x) = \tilde{V}_{1,\tilde{y}_1}(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{kun } x \geq \tilde{y}_1 \\ \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x) + \psi_{1,r+\lambda}(x)B(\tilde{y}_1) & \text{kun } x < \tilde{y}_1 \end{cases}$$

Todistus. Selvästi $\tilde{V}_1(x) \geq \tilde{V}_{1,\tilde{y}_1}(x)$. Arvon $B(\tilde{y}_1)$ maksimaalisuuden perusteella $\tilde{V}_{1,\tilde{y}_1}(x)$ on funktion $g_1(x)$ majorantti. Lauseen 16 nojalla tarvitsee enää osoittaa funktion $\tilde{V}_{1,\tilde{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x)$ eksessiivisyys. Lauseen 12 todistusta mukaillen määritellään joukossa $(\tilde{y}_1, \infty) \setminus D$ kuvaukset

$$\mathcal{L}_\phi(x) = \frac{\tilde{V}'_{1,\tilde{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)'(x)}{S'_1(x)}\phi_{1,r+\lambda}(x) - \frac{\phi'_{1,r+\lambda}(x)}{S'_1(x)}(\tilde{V}_{1,\tilde{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x)),$$

$$\mathcal{L}_\psi(x) = \frac{\psi'_{1,r+\lambda}(x)}{S'_1(x)}(\tilde{V}_{1,\tilde{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x)) - \frac{\tilde{V}'_{1,\tilde{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)'(x)}{S'_1(x)}\psi_{1,r+\lambda}(x)$$

Oletuksista seuraa $\mathcal{L}_\phi(x), \mathcal{L}_\psi(x) < \infty$ kaikilla $x \in (\tilde{y}_1, \infty) \cap D$. Lemman 1 perusteella

$$\mathcal{L}_\phi(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{g_1'(x)\phi_{1,r+\lambda}(x) - g_1(x)\phi_{1,r+\lambda}'(x)}{S_1'(x)} - \lambda \int_x^\infty \phi_{1,r+\lambda}(z)\tilde{V}_2(z)m_1'(z)dz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_x^\infty \phi_{1,r+\lambda}(z)\left((r+\lambda)g_1(z) - \mathcal{A}_1 g_1(z) - \lambda\tilde{V}_2(z)\right)m_1'(z)dz \geq 0$$

ja

$$\mathcal{L}_\psi(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{g_1(x)\psi_{1,r+\lambda}'(x) - g_1'(x)\psi_{1,r+\lambda}(x)}{S_1'(x)} - \lambda \int_0^x \psi_{1,r+\lambda}(z)\tilde{V}_2(z)m_1'(z)dz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \delta + \int_0^x \psi_{1,r+\lambda}(z)\left((r+\lambda)g_1(z) - \mathcal{A}_1 g_1(z) - \lambda\tilde{V}_2(z)\right)m_1'(z)dz \geq 0$$

Joukossa $(\tilde{y}_1, \infty) \setminus D$ funktiota $\tilde{A}(x)$ koskevasta oletuksesta ja lemmasta 1 seuraa

$$L_\psi'(x) = \tilde{A}'(x) - \lambda\psi_{1,r+\lambda}(x)\tilde{V}_2(x)m_1'(x) \geq 0$$

ja

$$L_\phi'(x) = -\frac{\phi_{1,r+\lambda}(x)}{\psi_{1,r+\lambda}(x)}\left(\tilde{A}'(x) - \lambda\psi_{1,r+\lambda}(x)\tilde{V}_2(x)m_1'(x)\right) \leq 0$$

Funktiot $L_\phi(x), L_\psi(x)$ ovat ei-negatiivisia, $L_\phi(x)$ on vähenevä ja $L_\psi(x)$ kasvava välillä $(\tilde{y}_1, \infty)$, joten serauksen 1 perusteella funktio $\tilde{V}_{1,\tilde{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x)$ on $r+\lambda$-eksessiivinen diffuusion $X_{1,t}$ suhteen. □

Lause 17 on muistittomasti muuttuvan pysäytysongelman vastine lauseelle 12. Oletukset vaikuttavat monimutkaisilta ja hyvin hankalilta vahvistaa, mutta ratkaisun riittävät ehdot yksinkertaistuvat jälleen tilanteessa, jossa $D = \emptyset$.

Lause 18. *Olkoon $g_1 \in C^2(I)$ ja $\mathcal{A}_1 g_1(x) - (r+\lambda)g_1(x) + \lambda\tilde{V}_2(x) = F(x) \in \mathcal{L}_1^1(I)$ ja oletetaan, että on olemassa yksikäsitteinen funktion $F(x)$ nollakohta $\hat{x} > 0$ jolle $F(x) > 0$ kun $x < \hat{x}$ ja $F(x) < 0$ kun $x > \hat{x}$. Tällöin muutosta edeltävän pysäytysongelman optimaalinen pysäytysaika on $\tilde{\tau}_1 = \inf\{t \geq 0 : X_{1,t} \in (\tilde{y}_1, \infty)\}$, missä $\tilde{y}_1$ on yksikäsitteinen tila $\tilde{y}_1 = \operatorname{argmax}\{B(x)\}$.*

Todistus. Olkoon

$$L(x) = \int_0^x \psi_{1,r+\lambda}(z)F(z)m_1'(z)dz - \delta$$

Lemman 1 perusteella

$$\frac{(g_1'(x)-\lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x))\psi_{1,r+\lambda}(x)-(g_1(x)-\lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x))\psi_{1,r+\lambda}'(x)}{S_1'(x)}=L(x)$$

Koska $g(0)\leq 0$ ja oletuksen mukaan $F(x)>0$ välillä $(0,\hat{x})$, niin $L(x)>0$ välillä $(0,\hat{x}]$. Jos $\hat{x}<C<x$, niin väliarvolauseen perusteella

$$L(x)=L(C)+\psi_{1,r+\lambda}(a)F(a)m_1'(a)(x-C)$$

jollain $a\in(C,x)$. Toisaalta $F(x)<0$ kun $x>\hat{x}$, joten $\lim_{x\uparrow\infty}L(x)=-\infty$. Lisäksi $L(x)$ on jatkuva tila-avaruudessa I ja monotonisesti vähenevä välillä $(\hat{x},\infty)$, joten on olemassa yksikäsitteinen $\tilde{y}_1$, jolle $L(\tilde{y}_1)=0$ eli $\tilde{y}_1=\operatorname{argmax}\{B(x)\}$. Selvästi $\tilde{y}_1>\hat{x}$, joten funktion $L(x)$ monotonisuuden nojalla funktiolle

$$\tilde{A}(x)=\frac{g_1(x)\psi_{1,r+\lambda}'(x)-g_1'(x)\psi_{1,r+\lambda}(x)}{S_1'(x)}$$

pätee $\tilde{A}'(x)\geq\lambda\psi_{1,r+\lambda}(x)\tilde{V}_2(x)m_1'(x)$ kaikilla $x\in(\tilde{y}_1,\infty)$. Funktion $F(x)$ negatiivisuus välillä $(\hat{x},\infty)$ johtaa puolestaan epäyhtälöihin

$$\int_x^\infty\phi_{1,r+\lambda}(z)\left((r+\lambda)g_1(z)-\mathcal{A}_1g_1(z)-\lambda\tilde{V}_2(z)\right)m_1'(z)dz\geq 0,$$

$$\delta+\int_0^x\psi_{1,r+\lambda}(z)\left((r+\lambda)g_1(z)-\mathcal{A}_1g_1(z)-\lambda\tilde{V}_2(z)\right)m_1'(z)dz\geq 0$$

Väite seuraa nyt lauseesta 17. □

5.2 Kontrolliongelma

Ratkaistaan seuraavaksi kontrolliongelma muutosta edeltävässä maailmassa. Merkitään jälleen mahdollisten kontrollien joukkoa symbolilla $\mathcal{V}$. Kontrolliongelman arvofunktiota muodostettaessa täytyy ottaa huomioon, että muutos voi tapahtua tulevaisuudessa minkä kahden peräkkäisen kontrolliajan välissä tahansa tai kaikkien kontrolliaikojen jälkeen. Niinpä arvofunktio ennen muutosta on

$$V_1(x)=\sup_{\nu\in\mathcal{V}}\mathbf{E}_x\left[\sum_{i=1}^N\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\lambda e^{-(r+\lambda)s}\left(\sum_{j=1}^{i-1}g_1(X_{1,\tau_j-}^\nu)+V_2(X_{1,s}^\nu)\right)ds\right]$$

$$=\sup_{\nu\in\mathcal{V}}\mathbf{E}_x\left[\int_0^{\tau_N}\lambda e^{-(r+\lambda)s}V_2(X_{1,s}^\nu)ds+\sum_{i=1}^N e^{-(r+\lambda)\tau_i}g_1(X_{1,\tau_j-}^\nu)\right]$$

$$=\lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x)+\sup_{\nu\in\mathcal{V}}\mathbf{E}_x\left[\sum_{i=1}^N e^{-(r+\lambda)\tau_i}g_1(X_{1,\tau_j-}^\nu)-\lambda e^{-(r+\lambda)\tau_N}(R_{1,r+\lambda}V_2)(X_{1,\tau_N})\right]$$

Selvästi myös muuttuva kontrolliongelma palautuu luvun 4 ongelmaan rajalla $\lambda\downarrow 0$. Laaditaan nyt ratkaisu muutosta edeltävälle kontrolliongelmalle käyttäen samaa metodia kuin luvussa 4.

Lause 19. *Olkoon $f : I \to \mathbf{R}_+$ funktio, joka toteuttaa epäyhtälön $f(x) \geq g_1(x) + f(x_1)$ kaikilla $x \in I$ ja jolla $f(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x)$ on $r + \lambda$-eksessiivinen diffuusion $X_{1,t}$ suhteen. Tällöin $f(x) \geq V_1(x)$ kaikilla $x \in I$.*

Todistus. Olkoon ν sallittu impulssikontrolli kontrolliajoilla $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ ja olkoon $\tau_0 = 0$. Kontrolloitu diffuusio $X_{1,t}^\nu$ käyttäytyy lineaarisen diffuusion $X_{1,t}$ tavoin kontrolliaikojen välissä, joten oletuksesta seuraa

$$\begin{aligned}
0 \leq & \mathbf{E}_x\left[e^{-(r+\lambda)\tau_i} f(X_{1,\tau_i}^\nu) - e^{-(r+\lambda)\tau_{i+1}} f(X_{1,\tau_{i+1}-}^\nu)\right] \\
& - \lambda \mathbf{E}_x\left[e^{-(r+\lambda)\tau_i}(R_{1,r+\lambda}V_2)(X_{1,\tau_i}^\nu) - e^{-(r+\lambda)\tau_{i+1}}(R_{1,r+\lambda}V_2)(X_{1,\tau_{i+1}-}^\nu)\right] \\
= & \mathbf{E}_x\left[e^{-(r+\lambda)\tau_i} f(X_{1,\tau_i}^\nu) - e^{-(r+\lambda)\tau_{i+1}} f(X_{1,\tau_{i+1}-}^\nu)\right] \\
& + \mathbf{E}_x\left[\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-} \lambda e^{-(r+\lambda)s} V_2(X_{1,s})ds\right]
\end{aligned}$$

kaikilla i ja $x \in I$. Summaamalla indeksin i yli saadaan

$$\mathbf{E}_x\left[\int_0^{\tau_{k+1}} \lambda e^{-(r+\lambda)s} V_2(X_{1,s})ds + \sum_{i=0}^{k}\left(e^{-(r+\lambda)\tau_i} f(X_{1,\tau_i}^\nu) - e^{-(r+\lambda)\tau_{i+1}} f(X_{1,\tau_{i+1}-}^\nu)\right)\right] \geq 0$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & f(x) \geq \mathbf{E}_x\left[\int_0^{\tau_{k+1}} \lambda e^{-(r+\lambda)s} V_2(X_{1,s})ds\right] + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}_x\left[e^{-(r+\lambda)\tau_i}\left(f(X_{1,\tau_i-}^\nu) - f(X_{1,\tau_i}^\nu)\right)\right] \\
& + \mathbf{E}_x\left[e^{-(r+\lambda)\tau_{k+1}} f(X_{1,\tau_{k+1}-}^\nu)\right]
\end{aligned}$$

missä $k \leq N$. Nyt oletuksista $f(x) \geq g_1(x) + f(x_1)$ ja $X_{1,\tau_i} = x_1$ seuraa rajalla $k \to N$

$$f(x) \geq \mathbf{E}_x\left[\int_0^{\tau_N} \lambda e^{-(r+\lambda)s} V_2(X_{1,s}^\nu)ds + \sum_{i=1}^{N} e^{-(r+\lambda)\tau_i} g_1(X_{1,\tau_j-}^\nu)\right]$$

Koska impulssikontrolli ν oli mielivaltainen, on epäyhtälö voimassa kaikilla $\nu \in \mathcal{V}$, jonka seurauksena $f(x) \geq V_1(x)$ kaikilla $x \in I$. □

Tutkitaan seuraavaksi, millaisissa tilanteissa impulssikontrolliongelmalla on olemassa yksinkertainen ratkaisu muutosta edeltävässä maailmassa. Oletetaan $x_1 < y$ ja määritellään tila-avaruudella I kuvaus

$$F_{1,y}(x) = \mathbf{E}_x\left[e^{-(r+\lambda)\tau_y}(g_1(y) + F_{1,y}(x_{1,0})) + \int_0^{\tau_y} V_2(X_{1,s}^\nu)ds\right]$$

Oletuksesta $x_1 < y$ seuraa

$$F_{1,y}(x_1) = \frac{\psi_{1,r+\lambda}(x_1)}{\psi_{1,r+\lambda}(y)}(g_1(y) + F_{1,y}(x_1) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(y)) + \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x_1)$$

$$\Leftrightarrow F_{1,y}(x_1) = \frac{\psi_{1,r+\lambda}(x_1)(g_1(y) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(y)) + \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x_1)}{\psi_{1,r+\lambda}(y) - \psi_{1,r+\lambda}(x_1)}$$

ja määrittelemällä

$$u_1(y) = \frac{g_1(y) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(y) + \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x_1)}{\psi_{1,r+\lambda}(y) - \psi_{1,r+\lambda}(x_1)}$$

saadaan

$$F_{1,y}(x) = \begin{cases} \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x_1) + \psi_{1,r+\lambda}(x_1)u_1(y) + g_1(x) & \text{kun } x \geq y \\ \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x) + \psi_{1,r+\lambda}(x)u_1(y) & \text{kun } x < y \end{cases}$$

Lemma 5. *Olkoon $\hat{y}_1$ funktion $u_1(x)$ yksikäsitteinen lokaali maksimi joukossa (x_1, ∞). Olkoon $D \subset I$ numeroituva, $g_1(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x) \in C^2(I \setminus D)$, $g_1'(x\pm) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x\pm) < \infty$, $g_1''(x\pm) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)''(x\pm) < \infty$ ja olkoon funktiolle*

$$A_{\hat{y}_1}(x) = \frac{\psi_{1,r+\lambda}'(x)}{S_1'(x)}(\lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x_1) + \psi_{1,r+\lambda}(x_1)u_1(\hat{y}_1) + g_1(x)) - \frac{g_1'(x)}{S_1'(x)}\psi_{1,r+\lambda}(x)$$

voimassa $A_{\hat{y}_1}'(x) \geq \lambda\psi_{1,r+\lambda}(x)V_2(x)m_1'(x)$ kaikilla $x \in (\hat{y}_1, \infty) \setminus D$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in (\hat{y}_1, \infty) \setminus D$ on voimassa

$$\begin{aligned}
&\int_x^\infty \phi_{1,r+\lambda}(z)\left((r+\lambda)(\lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x_1) + \psi_{1,r+\lambda}(x_1)u_1(\hat{y}_1) + g_1(z))\right)m_1'(z)dz \\
&\geq \int_x^\infty \phi_{1,r+\lambda}(z)\left(\mathcal{A}_1 g_1(z) + \lambda V_2(z)\right)m_1'(z)dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta + \int_0^x \psi_{1,r+\lambda}(z)\left((r+\lambda)(\lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x_1) + \psi_{1,r+\lambda}(x_1)u_1(\hat{y}_1) + g_1(z))\right)m_1'(z)dz \\
&\geq \int_0^x \psi_{1,r+\lambda}(z)\left(\mathcal{A}_1 g_1(z) + \lambda V_2(z)\right)m_1'(z)dz
\end{aligned}$$

missä δ on kuten lemmassa 1. Tällöin $F_{1,\hat{y}_1}(x)$ on $r+\lambda$-eksessiivinen diffuusion $X_{1,t}$ suhteen. Jos lisäksi $\hat{y}_1 \notin D$, niin

$$u_1(\hat{y}_1) = \frac{g_1'(\hat{y}_1) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(\hat{y}_1)}{\psi_{1,r+\lambda}'(\hat{y}_1)} \tag{10}$$

ja funktio $F_{1,\hat{y}_1}(x)$ toteuttaa sileysehdon $\lim_{x\uparrow\hat{y}_1} F_{1,\hat{y}_1}'(x) = g_1'(\hat{y}_1)$.

Todistus. Eksessiivisyyden todistus on analoginen lauseen 17 kanssa. Jos $\hat{y}_1 \notin D$, niin

$$u_1'(\hat{y}_1) = 0 \Leftrightarrow g_1'(\hat{y}_1) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(\hat{y}_1) = u_1(\hat{y}_1)\psi_{1,r+\lambda}'(\hat{y}_1)$$

ja

$$\lim_{x\uparrow\hat{y}_1} F_{1,\hat{y}_1}'(x) = \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(\hat{y}_1) + \psi_{1,r+\lambda}'(\hat{y}_1)u_1(\hat{y}_1) = g_1'(\hat{y}_1)$$

□

Lemma 6. *Olkoon $\hat{y}_1$ funktion $u_1(x)$ yksikäsitteinen maksimi joukossa (x_1, ∞), $D \subset I$ numeroituva, $g_1(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x) \in C^1(I \setminus D)$, $g_1'(x\pm) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x\pm) < \infty$ kaikilla $x \in D$ ja olkoon $(g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x))/\psi_{1,r+\lambda}'(x)$ vähenevä välillä $(0, \hat{y}_1)$. Tällöin $F_{1,\hat{y}_1}(x) \geq F_{1,\hat{y}_1}(x_1) + g_1(x)$ kaikilla $x \in I$.*

Todistus. Olkoon $\Delta(x) = u_1(\hat{y}_1)(\psi_{1,r+\lambda}(x) - \psi_{1,r+\lambda}(x_1)) - g_1(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x_1) + \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x)$. Funktion $(g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x))/\psi_{1,r+\lambda}'(x)$ monotonisuuden perusteella kaikilla $x \in (0, x_1) \setminus D$

$$
\begin{aligned}
\Delta'(x) &= u_1(\hat{y}_1)\psi_{1,r+\lambda}'(x) - g_1'(x) + \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x) \\
&= \psi_{1,r+\lambda}'(x)\left(\frac{g_1'(\hat{y}_1) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(\hat{y}_1)}{\psi_{1,r+\lambda}'(\hat{y}_1)} - \frac{g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x)}{\psi_{1,r+\lambda}'(x)}\right) \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

Toisaalta $g_1(x_1) \leq 0$, joten $\Delta(x_1) \geq 0$ kaikilla $x \in (0, x_1) \setminus D$. Tämän seurauksena $F_{1,\hat{y}_1}(x) \geq F_{1,\hat{y}_1}(x_1) + g_1(x)$ kaikilla $x \in I$. □

Lause 20. *Olkoon tila-avaruuden alareuna 0 saavuttamaton tila diffuusiolle $X_{1,t}$ ja olkoon $g_1(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x) \in C^2(I)$, $\mathcal{A}_1 g_1(x) - (r+\lambda)g_1(x) + \lambda V_2(x) = F(x) \in \mathcal{L}_1^1(I)$. Oletetaan lisäksi, että $F(x)$ on vähenevä joukossa I ja $\lim_{x\downarrow 0} F(x) > 0 > \lim_{x\uparrow\infty} F(x)$. Tällöin $V_1(x) = F_{1,\hat{y}_1}(x)$ ja on olemassa yksikäsitteinen tila $\hat{y}_1 > x_1$, joka toteuttaa optimaalisuusehdon (10).*

Todistus. Lauseen 18 perusteella on olemassa yksikäsitteinen $\tilde{y} > 0$, jolle $(g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x))\psi_{1,r+\lambda}(x) \leq (g_1(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x))\psi_{1,r+\lambda}'(x)$ kaikilla $x \geq \tilde{y}$. Oletuksista seuraa myös

$$
\begin{aligned}
&\frac{(g_1''(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)''(x))\psi_{1,r+\lambda}'(x) - (g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x))\psi_{1,r+\lambda}''(x)}{S_1'(x)} \\
&= \frac{2(r+\lambda)}{\sigma_1^2(x)} \int_0^x \psi_{1,r+\lambda}(z)(F(x) - F(z))m_1'(z)dz \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

joten $(g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x))/\psi_{1,r+\lambda}'(x)$ on vähenevä joukossa I.

Olkoon nyt $\breve{x} = \sup\{x \in I : g_1(x) = 0\}$ ja

$$
\begin{aligned}
v(x) =& (g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x))(\psi_{1,r+\lambda}(x) - \psi_{1,r+\lambda}(x_1)) \\
&- (g_1(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x))\psi_{1,r+\lambda}'(x)
\end{aligned}
$$

$(R_{1,r+\lambda}V_2)(x) \geq 0$ kaikilla $x \in I$ ja ei-negatiivisten $\mathcal{L}^1(I)$-funktioiden resolventit ovat eksessiivisiä, joten $v(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [x_1, \breve{x})$ ja $v(\breve{x}) > 0$. Toisaalta $v(x) < 0$ kaikilla $x \geq \tilde{y}$, koska

$$
v(x) \leq (g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x))\psi_{1,r+\lambda}(x) - (g_1(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x))\psi_{1,r+\lambda}'(x)
$$

Lisäksi $v(x)$ on jatkuva, joten on olemassa vähintään yksi $\hat{y}_1 > 0$, jolla $v(\hat{y}_1) = 0$. $(g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x))/\psi_{1,r+\lambda}'(x)$ on vähenevä ja

$$\frac{v(x)}{\psi_{1,r+\lambda}'(x)} = \frac{g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x)}{\psi_{1,r+\lambda}'(x)}(\psi_{1,r+\lambda}(x) - \psi_{1,r+\lambda}(x_1)) - g_1(x) + \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x)$$

joten $\hat{y}_1 = \operatorname{argmax}_{x \geq x_1}\{u_1(x)\}$ on yksikäsitteinen.
Funktion $(g_1'(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(x))/\psi_{1,r+\lambda}'(x)$ monotonisuudesta seuraa myös lemman 6 mukaisesti $F_{1,\hat{y}_1}(x) \geq F_{1,\hat{y}_1}(x_1) + g_1(x)$ kaikilla $x \in I$.

Selvästi $F_{1,\hat{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x) \in C^2(I \setminus \{\hat{y}_1\})$ ja

$$\mathcal{A}_1(F_{1,\hat{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x)) = (r+\lambda)(F_{1,\hat{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x))$$

välillä $(0, \hat{y}_1)$. Välillä $(\hat{y}_1, \infty)$ määritelty funktio

$$H(x) = \mathcal{A}_1(F_{1,\hat{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x)) - (r+\lambda)(F_{1,\hat{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x))$$

on vähenevä funktion $F(x)$ monotonisuuden perusteella ja

$$\begin{aligned}
H(\hat{y}_1) &= \frac{\sigma_1^2(\hat{y}_1)}{2}(g_1''(\hat{y}_1) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)''(\hat{y}_1)) + \mu_1(\hat{y}_1)(g_1'(\hat{y}_1) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(\hat{y}_1)) \\
&- (r+\lambda)(g_1(\hat{y}_1) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(\hat{y}_1)) - (r+\lambda)(\lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x_1) + \psi_{1,r+\lambda}(x_1)u_1(\hat{y}_1)) \\
&\leq \frac{\sigma_1^2(\hat{y}_1)}{2}\psi_{1,r+\lambda}''(\hat{y}_1)u_1(\hat{y}_1) + \mu_1(\hat{y}_1)\psi_{1,r+\lambda}'(\hat{y}_1)u(\hat{y}_1) - (r+\lambda)\psi_{1,r+\lambda}(\hat{y}_1)u_1(\hat{y}_1) \\
&= (\mathcal{A}_1\psi_{1,r+\lambda}(\hat{y}_1) - (r+\lambda)\psi_{1,r+\lambda}(\hat{y}_1))u_1(\hat{y}_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

joten $H(x) \leq 0$ kaikilla $x \geq \hat{y}_1$. Näin ollen $F_{1,\hat{y}_1}(x) - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x)$ on $r+\lambda$-eksessiivinen diffuusion $X_{1,t}$ suhteen. Väite seuraa nyt lemmasta 19. □

Analyysin voidaan todeta, että muistittomasti muuttuvan impulssikontrollion-gelman ja luvun 4 tavallisen impulssikontrolliongelman yksinkertaisten ratkaisujen olemassaolo voidaan todistaa pääpiirteissään samankaltaisilla tavoilla. Kuitenkin lauseita 12 ja 17 sekä lemmoja 4 ja 5 vertaamalla nähdään, että jos muutosta edeltävä palkkiofunktio ei ole differentoituva, tulee yksinkertaisen ratkaisun riittävien ehtojen tarkistamisesta hyvin työlästä.

Differentoituvan palkkiofunktion tapauksessa ratkaisun riittävät ehdot voidaan tarkistaa huomattavasti helpommin, mutta ehdot ovat jokseenkin tiukempia kuin tavallisella impulssikontrolliongelmalla. Esimerkiksi tavallisen kontrolliongelmaan liittyvässä lauseessa 15 vaaditaan funktion $\mathcal{A}_1 g_1(x) - (r+\lambda)g_1(x)$ olevan vähenevä, kun taas muuttuvaan kontrolliongelmaan liittyvässä lauseessa 20 vähenevyyttä vaaditaan funktiolta $\mathcal{A}_1 g_1(x) - (r+\lambda)g_1(x) + \lambda V_2(x)$. Funktion $\mathcal{A}_1 g_1(x) - (r+\lambda)g_1(x)$ arvon täytyy siis pienentyä vähintään yhtä nopeasti kuin funktion $\lambda V_2(x)$ arvo kasvaa. Ehdot tietysti yhtyvät toisiinsa rajalla $\lambda \downarrow 0$. Itse asiassa kaikki tämän luvun tulokset palautuvat luvun 4 vastineisiinsa rajalla $\lambda \downarrow 0$, koska raja vastaa ongelmaa, jossa muutosta ei tapahdu.

6 Esimerkkejä

Havainnollistetaan lukujen 4 ja 5 tuloksia esimerkkitapausten avulla. Kaikki käsiteltävät esimerkit liittyvät geometrisen Brownin liikkeen ja sileän, yksinkertaista muotoa olevan palkkiofunktion parametrien muutoksiin. Palkkiofunktiot ovat

$$g_i(x) = x^{b_i} - c_i \qquad b_i > 0, c_i > x_i^{b_i},\ i = 1,2$$

ja diffuusioiden generaattorit ovat luvun 3.5 mukaisesti

$$\mathcal{A}_i = \mu_i x \frac{d}{dx} + \frac{\sigma_i^2}{2} x^2 \frac{d^2}{dx^2}, \qquad i = 1,2$$

Minimaaliset r_i-eksessiiviset funktiot ovat puolestaan $\psi_{i,r_i}(x) = x^{\alpha_{i,+}}$ ja $\phi_{i,r_i}(x) = x^{\alpha_{i,-}}$, missä $r_2 = r$, $r_1 = r + \lambda$ ja

$$\alpha_{i,\pm} = \frac{1}{2} - \frac{\mu_i}{\sigma_i^2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{\mu_i}{\sigma_i^2})^2 + \frac{2r_i}{\sigma_i^2}}$$

jolloin Wronskin determinantiksi saadaan

$$W_i = \alpha_{i,+} - \alpha_{i,-} = 2\sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{\mu_i}{\sigma_i^2})^2 + \frac{2r_i}{\sigma_i^2}}$$

Lisäksi $g_i(x) > -c_i$ kaikilla $x \in I$ ja geometrisen Brownin liikkeen polut ovat jatkuvia, joten $g_i \in \mathcal{L}_j^1(I)$ jos ja vain jos kaikilla $x \in I$ on voimassa

$$\begin{aligned}
&(R_{j,r_j} g_i)(x) < \infty \\
\Leftrightarrow\ &\frac{2}{W_j \sigma_j^2} x^{\alpha_{j,-}} \int_0^x z^{\alpha_{j,+}} (z^{b_i} - c_i) z^{-2+2\mu_j/\sigma_j^2} dz \\
&+ \frac{2}{W_j \sigma_j^2} x^{\alpha_{j,+}} \int_x^\infty z^{\alpha_{j,-}} (z^{b_i} - c_i) z^{-2+2\mu_j/\sigma_j^2} dz < \infty \\
\Leftrightarrow\ &\lim_{z \uparrow \infty} \left(\frac{z^{\alpha_{j,-}+b_i-1+2\mu_j/\sigma_j^2}}{\alpha_{j,-} + b_i - 1 + 2\mu_j/\sigma_j^2} - \frac{c_i z^{\alpha_{j,-}+b_i-2+2\mu_j/\sigma_j^2}}{\alpha_{j,-} + b_i - 2 + 2\mu_j/\sigma_j^2} \right) < \infty \\
\Leftrightarrow\ &\lim_{z \uparrow \infty} \left(\frac{z^{b_i-\alpha_{j,+}}}{b_i - \alpha_{j,+}} - \frac{c_i z^{b_i-\alpha_{j,+}-1}}{b_i - \alpha_{j,+} - 1} \right) < \infty \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_{j,+} > b_i
\end{aligned}$$

Määritellään vielä diffuusion tila-avaruudella $I = (0, \infty)$ funktiot

$$G(x) = \mathcal{A}_2 g_2(x) - r g_2(x), \tag{11}$$
$$P(x) = \mathcal{A}_1 g_1(x) - (r+\lambda) g_1(x) + \lambda \tilde{V}_2(x), \tag{12}$$
$$K(x) = \mathcal{A}_1 g_1(x) - (r+\lambda) g_1(x) + \lambda V_2(x) \tag{13}$$

joita voidaan käyttää apuna yksinkertaisten ratkaisujen olemassaoloa tutkittaessa.

6.1 Muuttuva palkkio ja geometrinen Brownin liike

Suoralla laskulla saadaan $G(x) = rc_2 - \sigma_2^2(\alpha_{2,+} - b_2)(b_2 - \alpha_{2,-})x^{b_2}/2$ ([1], luku 6.1). Geometrinen Brownin liike ei voi koskaan saavuttaa tila-avaruutensa alareunaa 0, joten jos $\alpha_{2,+} > b_2$ niin sekä pysäytysongelmalla että impulssikontrolliongelmalla on olemassa lauseiden 13 ja 15 perusteella muutoksen jälkeinen yksinkertainen ratkaisu.

Lähdetään liikkeelle muutoksen jälkeisestä pysäytysongelmasta. Määritetään optimaalinen kontrollitila $\tilde{y}_2$:

$$\frac{d}{dx}(x^{b_2-\alpha_{2,+}} - c_2 x^{-\alpha_{2,+}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_2 - \alpha_{2,+})x^{b_2-\alpha_{2,+}-1} + c_2\alpha_{2,+}x^{-\alpha_{2,+}-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{\alpha_{2,+}c_2}{\alpha_{2,+} - b_2}\right)^{1/b_2}$$

$\tilde{y}_2 = (\alpha_{2,+}c_2/(\alpha_{2,+} - b_2))^{1/b_2}$, joten lauseen 13 mukaisesti arvofunktio on

$$\tilde{V}_2(x) = \begin{cases} x^{b_2} - c_2 & x \geq \tilde{y}_2 \\ \dfrac{b_2\tilde{y}_2^{b_2-\alpha_{2,+}}}{\alpha_{2,+}}x^{\alpha_{2,+}} & x < \tilde{y}_2 \end{cases}$$

Tarkastellaan seuraavaksi pysäytysongelman yksinkertaisten ratkaisujen olemassaoloa ja ominaisuuksia muutosta edeltävässä maailmassa. Lauseen 18 mukaan ratkaisu on olemassa ainakin kun $P(x)$ on aidosti vähenevä ja $\lim_{x\downarrow 0} P(x) > 0 > \lim_{x\uparrow\infty} P(x)$.

$$P(x) = (r + \lambda)c_1 - \sigma_1^2(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})x^{b_1}/2 + \lambda\tilde{V}_2(x)$$

joten $\lim_{x\downarrow 0} P(x) = (r + \lambda)c_1 > 0$. Välillä $(0, \tilde{y}_2)$

$$P'(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda b_2\tilde{y}_2^{b_2-\alpha_{2,+}}x^{\alpha_{2,+}-b_1} < \frac{b_1\sigma_1^2}{2}(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{2,+} > b_1 \quad \text{ja} \quad \lambda b_2\tilde{y}_2^{b_2} < \frac{b_1\sigma_1^2}{2}(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})\tilde{y}_2^{b_1}$$

ja välillä $(\tilde{y}_2, \infty)$

$$P'(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda b_2 x^{b_2 - b_1} < \frac{b_1 \sigma_1^2}{2}(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow b_1 = b_2 \quad \text{ja} \quad \lambda &< \frac{\sigma_1^2}{2}(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-}) \\ \text{tai} \quad b_1 > b_2 \quad \text{ja} \quad \lambda b_2 \tilde{y}_2^{b_2} &< \frac{b_1 \sigma_1^2}{2}(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})\tilde{y}_2^{b_1} \end{aligned}$$

Lisäksi $\lim_{x \uparrow \infty} P(x) < 0$ jos ja vain jos $b_1 > b_2$ tai $b_1 = b_2$ ja $\lambda < \sigma_1^2(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})/2$. Ehtojen toteutuessa pysäytysongelmalla on muutosta edeltävä ratkaisu, jota vastaava yksikäsitteinen kontrollitila on $\tilde{y}_1 = \text{argmax}\{B(x)\}$. Arvofunktio on lauseen 18 mukaisesti

$$\tilde{V}_1(x) = \begin{cases} x^{b_1} - c_1 & \text{kun } x \geq \tilde{y}_1 \\ \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x) + x^{\alpha_{1,+} - \tilde{y}_1}(\tilde{y}_1^{b_1} - c_1 - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(\tilde{y}_1)) & \text{kun } x < \tilde{y}_1 \end{cases}$$

Siirrytään tarkastelemaan kontrolliongelmaa. Funktion $G(x)$ ominaisuuksien perusteella ongelmalla on olemassa muutoksen jälkeinen yksinkertainen ratkaisu, jos $\alpha_{2,+} > b_2$. Jos ratkaisuun liittyvä optimaalinen kontrollitila on $\hat{y}_2$, niin arvofunktio on lauseen 15 mukaisesti

$$V_2(x) = \begin{cases} x^{b_2} - c_2 + b_2 \dfrac{\hat{y}_2^{b_2 - \alpha_{2,+}}}{\alpha_{2,+}} x_2^{\alpha_{2,+}} & \text{, kun } x \geq \hat{y}_2 \\ b_2 \dfrac{\hat{y}_2^{b_2 - \alpha_{2,+}}}{\alpha_{2,+}} x^{\alpha_{2,+}} & \text{, kun } x < \hat{y}_2 \end{cases}$$

Tässä esimerkissä

$$K(x) = (r + \lambda)c_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})x^{b_1} + \lambda V_2(x)$$

joten $\lim_{x \downarrow 0} K(x) = (r + \lambda)c_1 > 0$ ja välillä $(0, \hat{y}_2)$ päädytään jälleen ehtoihin

$$K'(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{2,+} > b_1 \quad \text{ja} \quad \lambda b_2 \hat{y}_2^{b_2} < \frac{b_1 \sigma_1^2}{2}(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})\hat{y}_2^{b_1}$$

Vastaavasti välillä $(\hat{y}_2, \infty)$

$$K'(x) < 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow b_1 = b_2 \quad \text{ja} \quad \lambda &< \frac{\sigma_1^2}{2}(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-}) \\ \text{tai} \quad b_1 > b_2 \quad \text{ja} \quad \lambda b_2 \hat{y}_2^{b_2} &< \frac{b_1 \sigma_1^2}{2}(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})\hat{y}_2^{b_1} \end{aligned}$$

ja $\lim_{x\uparrow\infty} K(x) < 0$ jos ja vain jos $b_1 > b_2$ tai $b_1 = b_2$ ja $\lambda < \sigma_1^2(\alpha_{1,+}-b_1)(b_1-\alpha_{1,-})/2$. Ehtojen toteutuessa ongelmalla on olemassa muutosta edeltävä yksinkertainen ratkaisu kontrollitilalla $\hat{y}_1$ ja arvofunktio on lauseen 20 mukaisesti

$$V_1(x) = \begin{cases} \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x_1) + \dfrac{b_1\hat{y}_1^{b_1-1} - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(\hat{y}_1)}{\alpha_{1,+}\hat{y}_1^{\alpha_{1,+}-1}} x_1^{\alpha_{1,+}} + x^{b_1} - c_1 & \text{kun } x \geq \hat{y}_1 \\ \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)(x) + \dfrac{b_1\hat{y}_1^{b_1-1} - \lambda(R_{1,r+\lambda}V_2)'(\hat{y}_1)}{\alpha_{1,+}\hat{y}_1^{\alpha_{1,+}-1}} x^{\alpha_{1,+}} & \text{kun } x < \hat{y}_1 \end{cases}$$

Analyysin perusteella voidaan päätellä, että pysäytysongelmalla ja kontrolliongelmalla on olemassa yksinkertainen ratkaisu ennen muutosta ja muutoksen jälkeen, jos $\alpha_{2,+} > b_1$, $b_1 \geq b_2$ ja $\lambda < \dfrac{\sigma_1^2}{2}(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})$. Ehdoista $\alpha_{2,+} > b_1$, $b_1 \geq b_2$ seuraa myös $g_2 \in \mathcal{L}_1^1(I) \cap \mathcal{L}_2^1(I)$ ja $g_1 \in \mathcal{L}_1^1(I)$. Huomattakoon vielä, että palkkiofunktiossa esiintyvän vakiotermin c_i muutokset eivät vaikuta ratkaisujen olemassaoloon millään tavalla.

6.2 Muuttuva geometrinen Brownin liike

Tilanne, jossa palkkiofunktio pysyy muutoksessa ennallaan mutta diffuusion parametrit muuttuvat, saadaan edellisen esimerkin erikoistapauksena. $b_2 = b_1 = b$, joten sekä pysäytys- että kontrolliongelman yksinkertaiset ratkaisut ovat olemassa jos $\lambda < \sigma_1^2(\alpha_{1,+} - b)(b - \alpha_{1,-})/2$ ja $g \in \mathcal{L}_2^1(I)$. Ongelmien arvofunktiot saadaan sijoittamalla edellisen esimerkin arvofunktioihin $b_2 = b_1 = b$ ja $c_2 = c_1 = c$. Esimerkiksi pysäytysongelman arvofunktio muutoksen jälkeen on

$$\tilde{V}_2(x) = \begin{cases} x^b - c & x \geq \tilde{y}_2 \\ \dfrac{b\tilde{y}_2^{b-\alpha_{2,+}}}{\alpha_{2,+}} x^{\alpha_{2,+}} & x < \tilde{y}_2 \end{cases}$$

missä $\tilde{y}_2 = (\alpha_{2,+}c/(\alpha_{2,+} - b))^{1/b}$. Muutosta edeltävä arvofunktio on

$$\tilde{V}_1(x) = \begin{cases} x^b - c & \text{kun } x \geq \tilde{y}_1 \\ \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x) + x^{\alpha_{1,+}-\tilde{y}_1}(\tilde{y}_1^b - c - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(\tilde{y}_1)) & \text{kun } x < \tilde{y}_1 \end{cases}$$

missä $\tilde{y}_1 = \operatorname{argmax}\{B(x)\}$. Arvofunktioita vertailemalla nähdään, että $\tilde{V}_1(x) = \tilde{V}_2(x)$, kun $x \geq \max(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$.

6.3 Muuttuva palkkio

Tilanteessa, jossa palkkiofunktio muuttuu mutta geometrinen Brownin liike pysyy ennallaan, on voimassa $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ja $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Tästä huolimatta $|\alpha_{1,\pm}| > |\alpha_{2,\pm}|$, sillä $r_1 = r + \lambda > r = r_2$. Ehtojen $\alpha_{2,+} > b_1$, $b_1 \geq b_2$ ja $\lambda < \sigma^2(\alpha_{1,+} - b_1)(b_1 - \alpha_{1,-})/2$ täyttyessä pysäytysongelman arvofunktio muutoksen jälkeen on

$$\tilde{V}_2(x) = \begin{cases} x^{b_2} - c_2 & x \geq \tilde{y}_2 \\ \dfrac{b_2\tilde{y}_2^{b_2-\alpha_{2,+}}}{\alpha_{2,+}} x^{\alpha_{2,+}} & x < \tilde{y}_2 \end{cases}$$

missä $\tilde{y}_2 = (\alpha_{2,+}c_2/(\alpha_{2,+} - b_2))^{1/b_2}$ ja muutosta edeltävä arvofunktio on

$$\tilde{V}_1(x) = \begin{cases} x^{b_1} - c_1 & \text{kun } x \geq \tilde{y}_1 \\ \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(x) + x^{\alpha_{1,+} - \tilde{y}_1}(\tilde{y}_1^{b_1} - c_1 - \lambda(R_{1,r+\lambda}\tilde{V}_2)(\tilde{y}_1)) & \text{kun } x < \tilde{y}_1 \end{cases}$$

missä $\tilde{y}_1 = \text{argmax}\{B(x)\}$. Vastaavasti kontrolliongelman arvofunktiot saadaan sijoittamalla $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ja $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ensimmäisen esimerkin arvofunktioihin.

6.4 Tyhjät muutokset

Viimeisenä esimerkkinä tarkastellaan tilannetta, jossa sekä palkkio että diffuusio pysyvät ennallaan muutoksessa. Toisin sanoen $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $b_2 = b_1 = b$ ja $c_2 = c_1 = c$. Tällainen "tyhjän"muutoksen sisältävä ongelma saadaan myös tilanteessa, jossa muutosta ei tapahdu eli rajalla $\lambda \downarrow 0$ (jolloin $\mathbf{E}[T] \uparrow \infty$).

Jos $\lambda \downarrow 0$, niin sekä pysäytys- että kontrolliongelman arvofunktiot ovat kaikilla ajanhetkillä melkein varmasti muutosta edeltäviä arvofunktioita. Niinpä pysäytysongelmalle

$$\tilde{V}(x) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \tilde{V}_1(x) = \begin{cases} x^{b_1} - c_1 & \text{kun } x \geq \tilde{y}_1 \\ x^{\alpha_+ - \tilde{y}_1}(\tilde{y}_1^{b_1} - c_1) & \text{kun } x < \tilde{y}_1 \end{cases}$$

missä $\tilde{y}_1 = (\alpha_+ c_1/(\alpha_+ - b_1))^{1/b_1}$ ja

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2} - \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{\mu_1}{\sigma_1^2})^2 + \frac{2r}{\sigma_1^2}}$$

Vastaavasti kontrolliongelmalle

$$V(x) = \lim_{\lambda \downarrow 0} V_1(x) = \begin{cases} \dfrac{b_1 \hat{y}_1^{b_1 - 1}}{\alpha_+ \hat{y}_1^{\alpha_+ - 1}} x_1^{\alpha_+} + x^{b_1} - c_1 & \text{kun } x \geq \hat{y}_1 \\ \dfrac{b_1 \hat{y}_1^{b_1 - 1}}{\alpha_+ \hat{y}_1^{\alpha_+ - 1}} x^{\alpha_+} & \text{kun } x < \hat{y}_1 \end{cases}$$

Arvofunktiot $\tilde{V}(x)$ ja $V(x)$ sekä optimaaliset kontrollitilat $\tilde{y}_1$ ja $\hat{y}_1$ ovat täsmälleen samaa muotoa kuin muutoksen jälkeiset vastineensa (joita ei koskaan saavuteta), joten kyseessä on luvun 4 mukaisen tavallisen impulssikontrolliongelman ratkaisu.

7 Muistilliset muutosajat

Luvussa 5 nähtiin, että muuttuva stokastinen impulssikontrolliongelma voidaan ratkaista samalla tapaa kuin luvun 4 tavallinen impulssikontrolliongelma, mikäli ongelman muutosaika T noudattaa eksponenttijakaumaa $\text{Exp}(\lambda)$. Eksponenttijakauma helpottaa ongelman analysointia huomattavasti, sillä muutosta edeltävissä arvofunktioissa esiintyvät ehdolliset todennäköisyydet muuntuvat kaikilla $s, t \geq 0$ helposti käsiteltävään muotoon $\mathbf{P}[T > s + t | T > t] = \mathbf{P}[T > s] = e^{-\lambda s}$. Jos muistittomuudesta luovutaan ja muutosajan T sallitaan noudattaa mitä tahansa tarpeeksi säännöllistä, joukossa $\mathbf{R}_+$ määriteltyä todennäköisyysjakaumaa, tulee ongelmasta huomattavasti monimutkaisempi. Käytetään esimerkkinä muutosta edeltävää pysäytysongelmaa haasteiden havainnollistamiseksi.

7.1 Muistillisesti muuttuva pysäystysongelma

Olkoon muutosajan $T : \Omega' \to \mathbf{R}_+$ jakaumafunktio $F : \mathbf{R}_+ \to [0, 1]$ ja tiheysfunktio $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$. Tällöin ehdolliset todennäköisyydet ovat kaikilla $s, t \geq 0$ muotoa

$$\mathbf{P}\left[T > s + t \mid T > t\right] = \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(t)}$$

Vastaavasti ehdollinen tiheysfunktio on

$$\mathbf{P}\left[T \in ds \mid T > t\right] = \frac{f(s)\mathbf{1}_{(t,\infty)}(s)}{1 - F(t)} ds$$

Määritellään vielä funktio $h(s) = f(s)/(1 - F(s))$ ja oletetaan, että diffuusio $X_{1,s}$ käynnistyy hetkellä t tilasta $x \in I$. Muutosta edeltävän pysäytysongelman arvofunktio on luvun 5 merkintöjä käyttäen

$$\tilde{V}_1(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_t} \mathbf{E}_{(t,x)} \left[g_1(X_{1,\tau}) e^{-\int_t^\tau (r + h(s))ds} + \int_t^\tau e^{-\int_t^s (r+h(z))dz} \tilde{V}_2(X_{1,s-t}) h(s) ds \right]$$

missä $\mathcal{S}_t$ on $\mathcal{F}_t$-pysäytysaikojen joukko.

Muistittomassa erityistapauksessa $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ arvofunktio $\tilde{V}_1(t, x)$ palautuu muistittoman ongelman arvofunktioon, sillä $h(s) = \lambda$ kaikilla $s \in \mathbf{R}_+$. Muistillisten jakaumien salliminen johtaa merkittäviin vaikeuksiin optimaalista pysäytysaikaa etsittäessä. Käytettäessä lukujen 4 ja 5 kaltaista lähestymistapaa täytyy ottaa huomioon, että nyt optimaalinen kontrollitila $\tilde{y}_1$ saattaa vaihdella ajan kuluessa. Yksikäsitteisen kontrollitilan $\tilde{y}_1 \in I$ sijasta pitää siis etsiä optimaalinen kontrolliraja $\tilde{y}_1 : \mathbf{R}_+ \to I$.

Olkoon $y(t)$ jokin mitallinen kontrolliraja. Määritellään funktio $K(t,x)$ korvaamalla arvofunktiossa $\tilde{V}_1(t,x)$ esiintyvä supremum osumisajalla $\tau_{y(t)} = \inf\{\tau \geq t : X_{1,\tau} \geq y(t)\}$, jolloin diffuusioiden vahvan Markov-ominaisuuden perusteella

$$K(t,x) = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[g_1(y(t))e^{-\int_t^{\tau_{y(t)}}(r+h(s))ds} + \int_t^{\tau_{y(t)}} e^{-\int_t^s(r+h(z))dz}\tilde{V}_2(X_{1,s-t})h(s)ds\right]$$

$$\begin{aligned}=&\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_t^\infty e^{-\int_t^s(r+h(z))dz}\tilde{V}_2(X_{1,s-t})h(s)ds\right] + \mathbf{E}_{(t,x)}\left[e^{-\int_t^{\tau_{y(t)}}(r+h(s))ds}g_1(y(t))\right]\\ &- \mathbf{E}_{(t,x)}\left[e^{-\int_t^{\tau_{y(t)}}(r+h(s))ds}\mathbf{E}_{(\tau_{y(t)},y(t))}\left[\int_{\tau_{y(t)}}^\infty e^{-\int_{\tau_{y(t)}}^s(r+h(z))dz}\tilde{V}_2(X_{1,s-\tau_{y(t)}})h(s)ds\right]\right]\end{aligned}$$

Funktio $K(t,x)$ näyttää jokseenkin samalta kuin luvun 5 vastineensa (9) . Voitaisiin jopa määritellä

$$(\hat{R}_{1,r+h(\cdot)}\tilde{V}_2)(t,x) = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[\int_t^\infty e^{-\int_t^s(r+h(z))dz}\tilde{V}_2(X_{1,s-t})h(s)ds\right]$$

ja kutsua tätä vaikkapa funktion $\tilde{V}_2(t,x)$ yleistetyksi resolventiksi diffuusion $X_{1,t}$ suhteen. Lisäksi eksponentiaalisia osumisajan $\tau_{y(t)}$ odotusarvoja

$$\mathbf{E}_{(t,x)}\left[e^{-\int_t^{\tau_{y(t)}}(r+h(s))ds}\right] \tag{14}$$

voitaisiin yrittää laskea yleistämällä eksessiivisten funktioiden teoriaa sopivalla tavalla. Lähestymistavasta ei kuitenkaan vaikuta olevan hyötyä, sillä "yleistetyt resolventit"$(\hat{R}_{1,r+h(\cdot)}\tilde{V}_2)(t,x)$ riippuvat sekä aika- että paikkamuuttujasta. Näin ollen odotusarvon (14) laskeminen ei yleisesti ottaen riitä odotusarvon

$$\mathbf{E}_{(t,x)}\left[e^{-\int_t^{\tau_{y(t)}}(r+h(s))ds}(\hat{R}_{1,r+h(\cdot)}\tilde{V}_2)(\tau_{y(t)},y(t))\right] \tag{15}$$

määrittämiseen. Poikkeuksena on edelleen eksponentiaalinen muutosaika $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, jolle $(\hat{R}_{1,r+h(\cdot)}\tilde{V}_2)(t,x) = \lambda(R_{1,r+h(\cdot)}\tilde{V}_2)(x)$ kaikilla $t \in \mathbf{R}_+, x \in I$ ja tuloksena on luvun 5 mukainen muistittomasti muuttuva ongelma.

7.2 Osumisaikojen laskennalliset haasteet

Odotusarvoja (15) voisi tietysti yrittää laskea suoraviivaisesti määrittämällä osumisajan $\tau_{y(t)}$ jakauma- ja tiheysfunktio. Kyseessä on kuitenkin mielivaltaisen diffuusion osumisaika mielivaltaiseen mitalliseen funktioon tai toisin sanoen liikkuvaan reunaan, joten on huomattavasti helpompaa rajoittua käsittelemään jotain tiettyä diffuusio- ja funktioperhettä kuten Salminen [21] tai tarkastella jakaumien asymptoottisia ominaisuuksia kuten Bass ja Erickson [5]. Laskut ovat kuitenkin varsin työläitä, eikä eksplisiittisiä jakaumafunktioita tunneta kuin joillekin yksinkertaisille erityistapauksille. Esimerkiksi tiheysfunktio tilasta $x > 0$ käynnistyvän Brownin liikkeen osumisajalle reunaan $y(t) = at^2$ $(a < 0)$ voidaan määrittää analyyttisesti, mutta tuloksena on niin kutsuttuja Airyn funktioita

$$Ai(x) = \pi^{-1}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)dt$$

sekä näiden derivaattoja sisältävä sarjakehitelmä [21].

Vaikeudet eivät lopu tähän. Pelkkä osumisajan $\tau_{y(t)}$ jakaumafunktion tietäminen ei riitä, vaan sen avulla pitäisi vielä laskea muotoa (14) ja (15) olevia odotusarvoja. Odotusarvoista näyttäisi tulevan yksinkertaisemmissakin tapauksissa niin monimutkaisia, ettei ole ainakaan heti selvää voidaanko niitä kirjoittaa suljetussa muodossa. Suora lähestymistapa ei vaikuta parhaalta vaihtoehdolta muistillisesti muuttuvien stokastisten impulssikontrolliongelmien analyyttiseen tutkimiseen.

8 Lopuksi

Tutkielmassa käsiteltiin stokastista impulssikontrolliongelmaa diffuusioteorian näkökulmasta. Tunnetun kontrolliongelman sekä siihen liittyvän pysäytysongelman ratkaisun pohjalta laadittiin ratkaisu impulssikontrolliongelmalle, joka kokee muutoksen eksponentiaalisesti jakautuneella ajanhetkellä $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Tällaisia stokastisia regiiminvaihto-ongelmia on tutkittu aiemminkin, mutta analyyttisiä ratkaisuja ei ole määritetty tilanteessa, jossa regiiminvaihto ei ole kontrolloitavissa ja myös palkkiofunktio voi muuttua. Tutkielman tuloksia ja menetelmiä voidaan ainakin periaatteessa käyttää apuna myös monimutkaisempia stokastisia regiiminvaihto-ongelmia analysoitaessa.

Löydetyt riittävät ehdot muistittomasti muuttuvan ongelman ratkaisujen olemassaololle ovat tiukempia kuin tavallisella, muuttumattomalla ongelmalla, sillä ne riippuvat sekä muutosajan parametrista λ, että muutoksen jälkeisestä ratkaisusta. Lisäksi muuttuvan ongelman huomattiin palautuvan tavalliseen ongelmaan rajalla $\lambda \downarrow 0$ eli kun $\mathbf{E}[T] \uparrow \infty$. Tällä rajalla ongelman muutos ei tapahdu äärellisessä ajassa. Muistittomasti muuttuvan impulssikontrolliongelman ratkaisuja havainnollistettiin myös esimerkkien avulla. Esimerkeissä käytettiin yksinkertaisuuden vuoksi geometrista Brownin liikettä ja differentoituvaa palkkiofunktiota.

Muistittoman impulssikontrolliongelman lisäksi tutkielmassa pohdittiin lyhyesti muistillisista muutosajoista aiheutuvia haasteita. Muistillisesti muuttuvien ongelmien ratkaiseminen näyttäisi vähintäänkin vaativan eksessiivisten funktioiden teorian laajentamista siten, että r-eksessiivisyyden sijaan voitaisiin puhua $r(t,t')$-eksessiivisistä funktioista, missä $r(t,t')$ on ei-negatiivisen funktion integraali välin (t,t') yli. Lisäksi pitäisi olla jonkinlainen laskennallisesti tehokas keino käsitellä liikkuvaan rajaan saapuvien diffuusoiden osumisaikoja, sekä näiden osumisaikojen eksponentiaalisia odotusarvoja.

9 Viitteet

[1] Alvarez, L. H. R., *A class of solvable impulse control problems*, Appl Math Optim **49**, 265-295 (2004).

[2] Alvarez, L. H. R., *On the properties of r-excessive mappings for a class of diffusions*, The annals of applied probability **13** 4, 1517-1533 (2003).

[3] Alvarez, L. H. R., *Stochastic forest stand value and optimal timber harvesting*, SIAM J. Control Optim. **42** 6, 1972-1993 (2004).

[4] Alvarez, L. H. R., Lempa, J., *On the optimal stochastic impulse control of linear diffusions*, SIAM J. Control Optim. **47** 2, 703-732 (2008).

[5] Bass, R. F., Erickson, K. B., *Hitting time of a moving boundary for a diffusion*, Stochastic processes and their applications **14** 3, 315-325 (1983).

[6] Belak, C., Christensen, S., Seifried, F. T., *A general verification result for stochastic impulse control problems*, SIAM J. Control Optim. **55** 2, 627-649 (2017).

[7] Borodin, A. N., Salminen, P., *Handbook of Brownian motion - facts and formulae*, Birkhäuser, Basel (1996).

[8] Brazee, R. J., *The Faustmann formula: Fundamental to forest economics 150 years after publication*, Forest science **47** 4, 441-442 (2001).

[9] Brekke, K. A., Øksendal, B., *A verification theorem for combined stochastic control and impulse control*, Stochastic Analysis and Related Topics VI. Progress in Probability **42**, Birkhäuser, Boston, 211-220 (1998).

[10] Cadenillas, A., Zapatero, F., *Classical and impulse stochastic control of the exchange rate using interest rates and reserves*, Mathematical finance **10** 2, 141-156 (2000).

[11] Christensen, S., *On the solution of general impulse control problems using superharmonic functions*, Stochastic processes and their applications **124** 1, 709-729 (2014).

[12] Dynkin, E. B., *Prostranstvo vyhodov Markovskovo processa*, Uspehi matematicheskih nauk **24** 4 (148), 89-152 (1969).

[13] Eastham, J. F., Hastings, K. J., *Optimal impulse control of portfolios*, Mathematics of operations research **13** 4, 588-605 (1988).

[14] Egami, M., *A direct solution method for stochastic impulse control problems of one-dimensional diffusions*, SIAM J. Control Optim. **47** 3, 1191-1218 (2008).

[15] Ito, K., McKean, H. P., *Diffusion processes and their sample paths*, Springer, Berliini (1965).

[16] Kharroubi, I., Lim, T., Vath, V. L., *Optimal exploitation of a resource with stochastic population dynamics and delayed renewal*, J. Math. Anal. Appl. **477**, 627-656 (2019).

[17] Korn, R., *Some applications of impulse control in mathematical finance*, Math Meth Oper Res **50**, 493-518 (1999).

[18] Mandl, P., *Analytical treatment of one-dimensional Markov processes*, Springer, Praha (1968).

[19] Perninge, M., *Infitnite horizon impulse control of stochastic functional differential equations*, arXiv:2003.08833v3 **[Math-OC]**, (2020).

[20] Pham, H., Vath, V. L., Zhou, X. Y., *Optimal switching over multiple regimes*, SIAM J. Control Optim. **48** 4, 2217-2253 (2009).

[21] Salminen, P., *On the first hitting time and the last exit time for a Brownian motion to/from a moving boundary*, Advances in Applied Probability **20** 2, 411-426 (1988).

[22] Salminen, P., *Optimal stopping of one-dimensional diffusions*, Math. Nachr. **124**, 85-101 (1985).

[23] Sotomayor, L. R., Cadenillas, A., *Stochastic impulse control with regime switching for the optimal dividend policy when there are business cycles, taxes and fixed costs*, Stochastics: An international journal of probability and stochastic processes **85** 4, 707-722 (2013).

[24] Wei, J., Yang, H., Wang, R., *Classical and impulse control for the optimization of dividend and proportional reinsurance policies with regime switching*, J Optim Theory Appl **147**, 358-377 (2010).

[25] Willassen, Y., *The stochastic rotation problem: A generalization of Faustmann's formula to stochastic forest growth*, Journal of economic dynamics and control **22** 4, 573-596 (1998).

[26] Øksendal, B., Sulem, A., *Applied stochastic control of jump diffusions*, Springer, Berliini (2005).