



AVOIMET TEHTÄVÄT YLÄKOULUN MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

Helena Lähde

Pro gradu -tutkielma

Joulukuu 2021

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä.

TURUN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LÄHDE HELENA

Pro gradu -tutkielma, 32 sivua

Matematiikka

Joulukuu 2021

Tämä pro gradu -tutkielma on kirjallisuuskatsaus, joka käsittelee avoimien tehtävien käyttöä matematiikan opetuksessa. Tutkielmassa tarkastellaan, millaisia avoimia tehtäviä on olemassa, miten ne edistävät oppimista ja miten niitä voidaan käyttää matematiikan opetuksessa. Tehtävien valitsemisella oppitunnille on suuri vaikutus opetuksen ja oppimisen tehokkuuteen. Avoimet tehtävät ovat ongelmanratkaisutehtäviä, joissa joko alkutilanne tai lopputilanne tai molemmat ovat avoimia eli ne eivät ole tarkasti määriteltyjä. Tehtävien työstäminen edellyttää, että oppilas tekee tehtävää ratkaislessaan erilaisia valintoja sen suhteen, mihin haluaa ratkaisussaan edetä. Avoimet tehtävät vaativat ratkaisijalta asioiden pohtimista ja monipuolista käsittelyä, jolloin oppilaan luovuus ja matemaattinen ajattelutaito kehittyvät. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa ongelmanratkaisu on merkittävässä asemassa ja siitä syystä sitä on opetettava läpi peruskoulun. Avoimet tehtävät ovat hyvä keino opettaa opetussuunnitelman perusteiden vaatimaa ongelmanratkaisua. Tehtävien aihealueen voi valita oppilaita kiinnostavasta aiheesta arkielämästä, mikä voi saada oppilaat innostumaan tehtävästä ja motivoitumaan matematiikan opiskeluun. Avoimia tehtäviä voi ratkaista monella eri tavalla hyvin laajalla taitotasoskaalalla, mistä syystä ne ovat tehokkaita opetusvälineitä eritasoisista oppilaista koostuville ryhmille. Jotta avoimien tehtävien avulla opettaminen olisi tehokasta, opettajan tulee osata valita tehtävät hyvin ja hänellä tulee olla kokemusta avoimista tehtävistä sekä niiden avulla opettamisesta. Opettajan tulee osata valita tehtävä juuri tietylle ryhmälle sopivaksi, tuntea kaikki avoimiin tehtäviin liittyvät haasteet, sekä osata ottaa ne huomioon opetuksessa, jotta opetuksesta olisi mahdollisimman paljon hyötyä.

Avainsanat: avoin tehtävä, avoin lähestymistapa, ongelmanratkaisu, opettaminen

Sisällys

1. Johdanto	1
2. Ongelmanratkaisu	3
2.1 Matemaattinen ongelmanratkaisu.....	3
2.2 Ongelmanratkaisu perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa	4
2.3 Ongelmanratkaisun opettaminen	5
2.4 Pólyan ongelmanratkaisumalli	6
2.5 Ongelmanratkaisustrategiat	7
3. Avoimet tehtävät	9
3.1 Avoimien tehtävien esittely	9
3.2 Avoimien tehtävien luokittelu	11
3.3 Opetuksen hyödyt.....	13
3.4 Opetuksen haasteet	16
4. Avoimet tehtävät matematiikan opetuksessa	18
4.1 Tehtävän valinta	18
4.2 Valmistelu	20
4.3 Opetustilanne.....	21
4.4 Arviointi	25
4.5 Konkreettinen esimerkki oppitunnista.....	26
5. Pohdinta	28
Lähteet.....	31

1. Johdanto

Yksi matematiikan opetuksen tärkeimmistä tavoitteista on kehittää oppilaiden korkeamman tason ajattelua. Matematiikan oppitunneilla opetetaan kuitenkin helposti rutiineja ja laskutapoja enemmän kuin ajattelun taitoja (Munroe 2015). Kokeesta voi suoriutua hyvin, jos osaa kaavamaisesti laskea tehtävät oikein, vaikka ei oikeasti ymmärrä, miksi tekee mitä tekee. Opetuksessa tulisi korostaa käsitteiden ja menetelmien ymmärtämistä rutiininomaisen suorittamisen sijasta. Tässä tutkielmassa käsitellään avoimia tehtäviä eli tehtäviä, joiden alku- tai lopputilanne tai kumpikaan niistä ei ole tarkasti määritelty. Avoimien tehtävien parissa työskentely on ongelmanratkaisua, ja se vastaa edellä esitetyn perinteisen matematiikan opetuksen ongelmaan (Pehkonen 1997b). Avoimien tehtävien avulla opettaja pystyy opettamaan oppilaille ajattelun taitoja ja kannustamaan heitä asioiden syvällisempään pohtimiseen, joka lopulta saattaa johtaa parempaan ymmärrykseen.

Tässä tutkielmassa käsitellään avoimia tehtäviä ja tutustutaan siihen, millaisia erilaisia avoimia tehtäviä on olemassa. Erilaisten luokittelujen on tarkoitus havainnollistaa opettajalle, mikä kaikki on mahdollista avoimien tehtävien piirissä, jotta hän pystyy paremmin suunnittelemaan avoimien tehtävien liittämistä omaan opetukseensa ja valitsemaan tai luomaan itse ryhmälle sopivat avoimet tehtävät. On hyvin mielenkiintoista, mitä positiivisia vaikutuksia avoimien tehtävien opetuskäytöllä on. Näiden oppimista edistävien seikkojen ansiosta on helpompi ymmärtää, mitä hyötyä avoimista tehtävistä on ja miksi niitä olisi hyvä sisällyttää opetukseen. Tutkielman päätarkoitus on antaa konkreettisia esimerkkejä ja vinkkejä opettajalle avoimien tehtävien avulla opettamiseen. Opettaja tarvitsee aiheesta paljon tietoa ja harjoitusta ennen kuin saavuttaa mahdollisimman tehokkaan opetuksen tason. Tämä tutkielma voi toimia opettajan ensiaskeleena avoimien tehtävien pariin ja vaikka olisi jo perehtynyt aiheeseen, tutkielma tarjoaa kattavan koontinsa ansiosta varmasti uutta tietoa tai uusia vinkkejä opetukseen.

Tutkimuskysymykset muotoutuivat tutkielmaa tehdessä seuraaviksi:

- Millaisia avoimia tehtäviä on olemassa?
- Miten avoimet tehtävät edistävät oppimista?
- Miten avoimia tehtäviä voi käyttää matematiikan opetuksessa?

Kyseinen tutkielma-aihe valikoitui, koska ongelmanratkaisu on perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa niin suuressa roolissa, ja avoimet tehtävät ovat yksi kätevä tapa toteuttaa ongelmanratkaisua opetuksessa (Opetushallitus 2014). Opetuksessa olisi hyvin tärkeää painottaa ajattelutaitojen kehittymistä ja kannustaa oppilaita ennemminkin ymmärtämään kuin opettelemaan ulkoa sääntöjä, menetelmiä ja rutiineja. Avoimia tehtäviä on muutamia kertoja käsitelty yliopiston opettajakursseilla, mutta niillä ei ole annettu käytännön vinkkejä siihen, miten niitä tulisi opetuksessa käyttää. Suomenkielisestä materiaalista ei löydy kattavaa koontia erilaisista avoimista tehtävistä tai niiden opetuskäytöstä. Tämän tutkielman on tarkoitus tarjota koonti auttamaan jokaista matematiikan opettajaa, joka pohtii avoimien tehtävien käyttöä opetuksessaan. Voidakseen käyttää avoimia tehtäviä tehokkaasti, opettaja tarvitsee harjoitusta niiden avulla opettamisesta. Vaikka avoimien tehtävien käyttö on alkanut jo 1970-luvulla, ne soveltuvat edelleen nykypäivän koulumaailmaan. 2000- ja 2010-luvuilla on tehty tutkimusta avoimiin tehtäviin liittyen ja tämä tutkielma pyrkii keskittymään tähän uudempaan tutkimusmateriaaliin. Aihe rajattiin koskemaan yläkoulun matematiikan opetusta, joten myös lähiteiksi valitut tutkimukset käsittelevät yläkouluikäisiä. Avoimia tehtäviä voi soveltaa opettamiseen myös muilla koulutusasteilla, mutta tässä tutkielmassa keskitytään vain yläkoulun matematiikan opetukseen aineiston rajaamiseksi.

Tutkielma alkaa johdannon jälkeen toisessa kappaleessa ongelmanratkaisun käsittelyllä. Aluksi tarkastellaan ongelmia, ongelmanratkaisua ja määritellään, mikä on matemaattinen ongelma. Seuraavaksi käsitellään ongelmanratkaisua perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden näkökulmasta

ja perustellaan sen avulla, miksi ongelmanratkaisua tulee opettaa. Lisäksi toisessa luvussa esitellään, miten ongelmanratkaisua voi käyttää opetuksessa ja millaisia taitoja ongelmanratkaisussa tarvitaan. Luvun lopussa tarkastellaan erästä ongelmanratkaisumallia ja erilaisia ongelmanratkaisustrategioita, joiden hallitsemisesta saattaa olla apua ongelmanratkaisuprosessissa. Kolmannessa luvussa käsitellään avoimia tehtäviä. Luvun alussa tarkastellaan erilaisia tehtävätyyppejä, määritellään avoin ja suljettu tehtävä sekä jaetaan opetuskäyttöiset tehtävät noihin luokkiin. Tämän jälkeen tarkastellaan, millaisia luokitteluja avoimille tehtäville on olemassa ja millaisia nämä erilaiset avoimet tehtävät ovat. Lisäksi esitellään melko laajasti avoimien tehtävien tarjoamia hyötyjä opetuksessa ja mitä haasteita niiden opetuskäytössä saattaa olla.

Neljännessä luvussa päästään tutkielman ydinaiheeseen eli siihen, miten avoimia tehtäviä tulisi opetuksessa käyttää. Aluksi esitellään tehtävän valintaan liittyviä seikkoja, miten avoimia tehtäviä voi luoda ja miten valita juuri tietylle ryhmälle sopiva tehtävä. Lisäksi pohditaan, mitä opettaja voi tehdä ennen oppituntia ja miten hän voi valmistautua tuntiin mahdollisimman hyvin. Seuraavaksi tarkastellaan itse opetustilannetta: millainen opetustilanteen tulisi olla tehokkaan oppimisen saavuttamiseksi ja mitä opettajan tulee tilanteessa ottaa huomioon. Luvussa esitetään myös, miten avoimia tehtäviä voidaan käyttää oppilaiden arvioimiseen ja miten avoimien tehtävien parissa työskentelyä voidaan arvioida. Lopuksi esitetään konkreettinen esimerkki oppitunnista ja vinkkejä opettajalle avoimien tehtävien käyttöön. Viidennessä luvussa kootaan tutkielman aiheita yhteen pohdintojen ja johtopäätösten avulla.

Tämä Pro gradu -tutkielma on kirjallisuuskatsaus, ja se perustuu matematiikan ja didaktiikan alojen artikkeleihin ja tutkimuksiin. Erityisesti keskityttiin löytämään tutkimuksia avoimista tehtävistä ja niiden käytöstä opetuksessa, mutta etsittiin myös tietoa yleisesti ongelmanratkaisusta. Tutkielman lähdekirjallisuutta etsittiin kasvatustieteellisestä tietokannasta ERIC:stä ja Volterista hakusanoilla open problem, open approach ja problem solving. Artikkeleita ja tutkimuksia löydettiin myös edellä esitellyllä tavalla löydettyjen artikkelien lähdeluetteloista. Tutkielman lähdekirjallisuutena käytettiin vain vertaisarvioituja materiaaleja. Näiden tieteellisten artikkelien lisäksi tutkielmassa käytettiin matematiikan didaktiikan perusteoksia.

2. Ongelmanratkaisu

Jokainen ihminen käyttää ongelmanratkaisua päivittäin arkisten ongelmien ratkaisemiseksi ja ratkaisuehdotusten perustelemiseksi. *Ongelman* määritellään aiheuttavan ristiriita, josta seuraa ajattelutoimintaa, joka pyrkii ristiriidan poistamiseen eli ratkaisun keksimiseen (Haapasalo 2011). Matemaattisen ongelmanratkaisun harjoittaminen tukee loogista päättelyä ja ajattelun taitojen kehittymistä ja niiden ansiosta myös arkisten tilanteiden ratkeamista. Siksi on tärkeää edistää oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja jo varhain opiskelu-uralla ja matematiikan opetuksen yhdeksi tärkeimmäksi tehtäväksi onkin asetettu matemaattisen ajattelun kehittäminen (Pehkonen, Pekama & Seppälä 1991). Ongelmanratkaisun tärkeys näkyy läpi tämänhetkisten perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus 2014). Aiemmin matematiikan opetusta on kritisoitu rutiinitehtävien käyttämisestä ja korkeampien ajattelutaitojen opettamatta jättämisestä, mutta jo 90-luvulta saakka opetussuunnitelma on tukenut ongelmanratkaisun opettamista mallikkaasti (Pehkonen ym. 1991). Ongelmanratkaisun opetusta on pyritty tuomaan lähemmäs juuri näitä arkisia tilanteita ja todellisen elämän tarpeita käyttämällä avointa ongelmanratkaisua, jota käsitellään paremmin seuraavissa luvuissa (Ahtee & Pehkonen 2000).

Ongelmanratkaisutaidon oppiminen ja opettaminen on vaikeampaa kuin laskurutiinien, koska tehtävien tekemiseen ei ole valmista kaavaa, ja niitä pitäisi kyetä tarkastelemaan monesta eri näkökulmasta. Tätä kuvaa hyvin Haapasalon (2011) kirjassa esitetty Davisin lausahdus: ”Ongelmanratkaisu on kaikista inhimillisistä oppimisen muodoista kaoottisin ja vaikeimmin selvittävä.” Oppilaan on mahdollista oppia vain yrittämällä itse. Ongelmatehtävien ratkaiseminen vaatii tekijältä luovuutta ratkaisuideoiden keksimiseen ja sitkeyttä yrittää aina epäonnistumisen jälkeen uudelleen (Leppäaho 2018). *Matemaattisen luovuuden* määritellään tuottavan omaperäistä työtä, joka poikkeaa merkittävästi omasta perustiedosta, ja epätavallisia ratkaisuja tai näkökulmia ongelmaan (Fatah, Suryadi, Sabandar & Turmudi 2016). Opettajalla on mahdollisuus auttaa oppilaita kehittymään ratkaisuideoiden keksimisen luovuudessa ja ongelmanratkaisusitkeydessä. Luovuuden kehittäminen näkyy perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden laaja-alaisissa tavoitteissa (Opetushallitus 2014).

Oleennaista ongelmanratkaisutaidon harjoittamisessa on saada oppilas kiinnostumaan ongelmanratkaisuprosessista eli motivoida oppilasta. Ongelma voi laittaa aivot liikkeelle ja herätellä uteliaisuutta. Pólyan (2014) mukaan oppilas saattaa kiinnostua ongelmanratkaisusta, jos saa oivaltamisen riemua näin tapahtuessa ja vielä lisäksi onnistuu ratkaisemaan ongelman itse. Opettajalla on hyvin tärkeä rooli ongelmanratkaisutehtävien tarjoamisessa, koska sopivan tasoiset tehtävät tukevat oppilaan intoa ratkaista ongelmia, kun taas liian vaikeat ja helpot tehtävät vähentävät kiinnostusta.

Miksi ongelmanratkaisu siis on niin tärkeää? Matemaatikko George Pólyan (2014) mukaan ongelmanratkaisu on matematiikan ydin. Matemaattisen ajattelun ja soveltamisen harjaantumisen lisäksi se kehittää yleisesti tiedollisia valmiuksia (Pehkonen ym. 1991). Ongelmanratkaisu kehittää myös luovuutta ja usein motivoi oppilaita matematiikan opiskeluun (Pehkonen ym. 1991). Ongelmanratkaisu kehittää siis lähes kaikenlaisia taitoja niiden luokittelutavasta riippumatta (Haapasalo 2011). Tässä luvussa tarkastellaan, mitä matemaattinen ongelmanratkaisu on, miten siihen suhtaudutaan perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa ja miten sitä voi opettaa. Lisäksi esitellään joitain hyödyllisiä apuvälineitä ongelmanratkaisua varten.

2.1 Matemaattinen ongelmanratkaisu

Matemaattisen ongelman ratkaisemisen määritellään vaativan ratkaisijalle aiemmin tuttujen tietojen yhdistelemistä uudella tavalla (Pólya 2014). Ongelman ymmärtäminen ja ratkaiseminen vaativat ajattelutyötä. Oppilaan matemaattiset tiedot ovat sidoksissa toisiinsa, ja niistä muodostuu tietorakenne

(Leppäaho 2018). Tähän perustuvaa oppimiskäsitystä kutsutaan *konstruktivismiksi*. Olennaista on, ettei oppilas pelkästään saa uutta tietoa, vaan laajentaa tietorakennettaan rakentamalla vanhojen ja uusien tietojen välille yhteyksiä (Pehkonen ym. 1991). Oppilas ikään kuin valikoi saamaansa tietoa ja tulkitsee sitä (Leppäaho 2007). Rakentamista pidetään oppimiselle tärkeänä, sillä se vaatii asioiden ymmärtämistä. Ongelmaa ratkaistessaan oppilas hakee tarvittavaa tietoa omasta tietorakenteestaan. Hän löytää ratkaisun, kun pystyy muodostamaan lisää yhteyksiä vanhojen tietojen välille sekä lisäämään uutta tietoa.

Ongelmatehtävän vastakohta on *rutiinitehtävä*, jonka ratkaisemiseen oppilas tietää heti tarvittavat toimenpiteet (Leppäaho 2018). On hyvin oppilaskohtaista, mikä on milloinkin kullekin ongelmatehtävä. Toiselle oppilaalle tehtävä saattaa olla rutiinitehtävä, jos hän on esimerkiksi tehnyt vastaavan tehtävän ennenkin, kun taas toiselle saman ryhmän oppilaalle kyseessä on ongelmatehtävä. Ongelmanratkaisu sopii siitä huolimatta jokaiselle, kunhan käytetään sopivantasoisia tehtäviä oikealla tavalla (Pehkonen ym. 1991). Jokaisella on mahdollisuus kehittyä ja edistää omia taitojaan. Ongelmanratkaisu onkin hyvä tapa saada oppilaat innostumaan matematiikan opiskelusta, koska jokaisen on mahdollista saada positiivisia onnistumisen kokemuksia omasta taitotasostaan riippumatta.

Ongelmatehtävä on hyvä, jos ratkaisijan tulee ponnistella oikean ratkaisun löytämiseksi ja tarkastella tuttuja asioita uudesta näkökulmasta. Tärkeintä on kuitenkin saada oppilas motivoitumaan ja innostumaan tehtävän ratkaisemisesta (Leppäaho 2018). Ongelmaa ratkaistessa oikea ratkaisu hyvin harvoin löytyy ensimmäisellä yrityksellä. Ratkaisuprosessiin kuuluvat yritykset ja erehdykset, joiden jälkeen palataan takaisin alkuun. *Ongelmanratkaisustrategia* on etukäteen opittu menetelmä, joka täytyy valita ongelman ratkaisemiseksi (Leppäaho 2018). Oppilaan tulee prosessin edetessä valita, millä strategialla haluaa ongelman ratkaista. Ongelmanratkaisustrategioita ovat esimerkiksi takaperin ratkaiseminen, yleistysten tekeminen, jakaminen pienempiin osiin ja yksinkertaistaminen (Leppäaho 2018). Valitsemisen taito onkin hyvin tärkeää ongelmanratkaisussa, koska oppilaan tulee tehdä paljon valintoja liittyen siihen, mitä tietoa ja ongelmanratkaisumalleja käyttää ongelmaa ratkaistessaan.

Matemaattinen ongelmanratkaisutaito tarkoittaa oppilaan taitoa ratkaista ongelmia, jotka vaativat ratkaisumallien ja -strategioiden käyttämistä matemaattisen tiedon soveltamiseksi (Leppäaho 2018). Oppilaan tulisi käyttää tehtävän ratkaisemiseen *heuristisia strategioita*, jotka laittavat ajatukset liikkeelle ja ylläpitävät ajattelua (Pehkonen ym. 1991). Niihin kuuluvat kaikki löytämisen ja keksimisen menetelmät sekä säännöt, joilla oppilas yrittää saada ongelmatehtävän ratkaistua (Pólya 2014). Heuristisen päättelyn avulla yritetään siis löytää ratkaisun osia, joita parantelemalla voidaan lopulta muodostaa ongelman ratkaisun täsmällinen todistus. Nämä ohjenuorat tekevät ongelmanratkaisusta tehokasta, koska ratkaisija tietää, mitä yrittää seuraavaksi ongelman ratkaisemiseksi. Heuristisiin strategioihin kuuluvat ongelmanratkaisumallit ja -strategiat. Myöhemmin tässä luvussa esitellä Pólyan ongelmanratkaisumalli.

2.2 Ongelmanratkaisu perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa

Ongelmanratkaisu on merkittävässä roolissa monella elämän osa-alueella. Siksi sitä onkin tärkeää harjoitella koko koulunkäynnin ajan. Opetussuunnitelman perusteissa sanoja ”ongelma” ja ”ongelmanratkaisu” käytetään jokseenkin eri merkityksessä kuin tässä tutkielmassa. Sanalla ongelma tarkoitetaan välillä mitä tahansa tehtävää ja ongelmanratkaisulla sen ratkaisemisesta. Silti opetussuunnitelman perusteet sisältävät paljon tutkielmassa määriteltyä ongelmanratkaisua ja siihen liittyviä tavoitteita. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2014) on suunniteltu vastaamaan oppimiskäsitystä, jossa on olennaista, että oppilas oppii asettamaan tavoitteita ja ratkaisemaan

ongelmia. Ongelmanratkaisu näkyy siis vahvasti perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa niin kaikkia oppiaineita koskevissa laaja-alaisissa tavoitteissa kuin matematiikan oppiaineenkin kohdalla. Työtavoista puhuttaessa kerrotaan, että tutkiva ja ongelmalähtöinen työskentely on oppimisen kannalta merkittävää, koska se kehittää kriittistä ajattelua ja soveltamisen taitoja. Kognitiivisia taitoja tulee oppia niin, että opetukseen sisältyy ongelmanratkaisua kehittäviä osa-alueita. (Opetushallitus 2014)

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa ongelmanratkaisutaidon merkitys näkyy kaikkien luokka-asteiden kohdalla. Tässä tarkastellaan opetussuunnitelman perusteita yläkoulun osalta, koska tutkielma keskittyy yläkoulun opetukseen. Kaikkia aineita koskevassa laaja-alaisessa tavoitteessa L1 opettajaa kehoitetaan luomaan tilanteita, joissa esiintyy ongelmanratkaisua, päättelyä ja johtopäätösten tekemistä, ja näin kehittämään ajattelun taitoja. (Opetushallitus 2014)

Matematiikan opiskelun päämäärä on opettaa oppilaita ymmärtämään matemaattisia rakenteita ja oppia matemaattista ajattelua (Pehkonen, Näveri & Laine 2013). Matematiikan oppiaineessa ongelmanratkaisutaidoilla on luonnollisesti vielä suurempi merkitys kuin muissa aineissa. Jo opetuksen lähtökohdiksi valitaan aiheita, ilmiöitä ja niihin liittyviä ongelmia, jotka kiinnostavat oppilaita. Matematiikan opetuksen yhdeksi tehtäväksi on määritelty ongelmien ratkaisemisen kehittäminen. Oppilaiden tulisi oppia ongelmien ratkaisemisen lisäksi myös niiden mallintamista. Opettajan tuella oppilaan tulisi oppia ongelmien jäsentämistä ja kehittää muita ongelmanratkaisussa tarpeellisia taitoja. Ongelmia ratkaistessa pitäisi lisäksi osata soveltaa tieto- ja viestintäteknologiaa. Matematiikan opetusta voi opetussuunnitelman perusteiden mukaan eriyttää ylöspäin antamalla oppilaille erilaisia työskentelymuotoja, joista esimerkkinä mainitaan ongelmalähtöiset tutkimustehtävät. (Opetushallitus 2014) Opetussuunnitelma siis vaatii laskutaidon harjoittamisen lisäksi ongelmanratkaisun ja matemaattisen ajattelun opettamista (Pehkonen ym. 2013).

Ongelmanratkaisutaito näkyy vahvasti läpi koko perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden. Opettajan on tärkeää olla siitä tietoinen ja noudattaakseen opetussuunnitelmaa sisällyttää opetukseensa kaikkia näitä opetussuunnitelman perusteiden vaatimia ongelmanratkaisutaitoja koskevia tavoitteita. Seuraavaksi tarkastellaan ongelmanratkaisun opettamista sekä sen tarjoamia mahdollisuuksia ja haasteita. Myöhemmin tutkielmassa esitellään, mitä ovat avoimet tehtävät, ja miten ne ovat yksi keino toteuttaa juuri tätä ongelmanratkaisun opettamista.

2.3 Ongelmanratkaisun opettaminen

Ongelmanratkaisun opettamisella tarkoitetaan kaikkia niitä toimia, joilla pyritään edistämään oppilaan ongelmanratkaisutaidon kehittymistä (Haapasalo 2011). Opettajan on todettu olevan ongelmanratkaisutilanteessa oppilaan työskentelylle merkittävin ulkopuolinen vaikuttaja (Leppäaho 2018). Siksi opettajan on tärkeää olla tietoinen ongelmanratkaisun opettamisen haasteista, jotta hän pystyy tekemään parhaansa tukeakseen oppilaiden oppimista. Opettajaan vaikuttavat kaikki taustatekijät kuten kokemus, matematiikan tietous, tarpeet ja motivaatio (Leppäaho 2018). Lisäksi oppilaan työskentelyyn vaikuttaa hänen oma taustansa, johon kuuluu matematiikan tietous, motivaatio, kokemukset matematiikasta ja uskomukset (Leppäaho 2018). Opettajan merkitys on suuri, koska hän pystyy oppilaalle oikeantasoisien ongelmien valitsemisen lisäksi opettamaan oppilaalle ongelmanratkaisua opettamalla esimerkiksi heuristisia strategioita, joista on paljon hyötyä ongelmatehtäviä kohdatessa. Oppilaiden kehittyttyä, hallitessa perusoperaatiot ja kiinnittäessä huomiota ratkaisumenetelmiin opettaja voi antaa heille ratkaistavaksi yhä vaikeampia ongelmia (Haapasalo 2011). Kuitenkin itse ongelmanratkaisua voi oppia vain ongelmia ratkaisemalla. Tässä opettaja voi olla apuna ohjaamalla oppilaita tekemään oikeita valintoja ja tarkastelemaan ajatteluaan (Haapasalo 2011). Lopulta

oppilailla on tarvittavat taidot suurempien strategiakokonaisuuksien oppimiseen ja vaikeidenkin ongelmien ratkaisemiseen.

Ongelmanratkaisun opettaminen ei ole yksinkertaista, sillä opettajan on mietittävä tarkkaan oppilaiden taidot ja tehtävään tarvittavat edellytykset. Oppilaat tulisi saada motivoitumaan tehtävästä, ja heillä tulisi olla riittävät matemaattiset taidot sekä tehtävänlukutaidot. Lisäksi oppilailla pitäisi olla edellytykset tehtävän visualisointiin, joustavaan ajatteluun ja analogioiden muodostamiseen. Opettajan tulisi tästä syystä opettaa oppilaille ensin perusvalmiudet ongelmanratkaisua varten, ja vasta sen jälkeen voidaan alkaa ratkaista ongelmia. Kaiken tämän lisäksi opettajan tulisi pystyä luomaan luokkaan positiivinen ilmapiiri, jossa uskalletaan rohkeasti tehdä virheitä ja yrittää uudelleen sekä parantaa oppilaiden asenteita ongelmanratkaisua kohtaan. Erityisesti heikommalla oppilaalla vaativat itseluottamuksen kohentamista pystyäkseen ratkaisemaan ongelmia itsenäisesti. Ongelmanratkaisutilanteessa ihanteellisinta on, jos oppilas tekee itsenäisesti tai oppilaat tekevät ryhmässä suurimman työn ja opettaja on neuvonantajan roolissa. (Pehkonen ym. 1991) Oppilaan pitäisi saada harjoitusta itsenäisestä työskentelystä ongelmanratkaisun parissa, mutta oppilas ei välttämättä etene lainkaan, jos tehtävä on hänelle liian vaikea. Toisaalta jos opettaja auttaa liikaa, oppilaalle ei jää mitään pohdittavaa. Ei siis ole kovinkaan helppoa opettaa ongelmanratkaisua, koska opettajalla on lukuisia asioita, jotka on otettava huomioon.

Schroeder ja Lester (1989) kehittivät jaottelun ongelmanratkaisun opetukselle, jonka mukaan opettaja voi opettaa itse ongelmanratkaisusta, ongelmanratkaisua varten tai ongelmanratkaisun kautta. Opettajan opettaessa itse ongelmanratkaisusta tarkoitus on saada oppilaat ymmärtämään kokonaiskuva koko prosessista vaiheineen sekä oppimaan, kuinka suhtautua ongelmanratkaisutilanteisiin. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi seuraavassa alaluvussa esitellyn ongelmanratkaisumallin avulla tai opettamalla oppilaille uusia ongelmanratkaisustrategioita, joita he voivat käyttää ongelmanratkaisussa. Kun opetetaan ongelmanratkaisua varten, keskitytään matematiikkaan. Oppilaille opetetaan osaamiensa taitojen soveltamista erilaisiin tilanteisiin. Tarkoituksena on tarjota oppilaille erilaisia esimerkkejä matematiikkaan liittyvistä käsitteistä ja malleista sekä harjoitella niiden soveltamista. Opettaja voi myös opettaa ongelmanratkaisun kautta, jolloin ongelmanratkaisu toimii tilanteessa opetusmenetelmänä. Tällöin pääpaino ei välttämättä ole ongelmanratkaisun oppimisessa, vaan sen käyttämisessä työvälineenä. Tarkoituksena on, että oppilas soveltaa tietoja ja taitoja uuteen ongelmatehtävään muuttaen sen rutiinitehtäväksi. Tämänkaltaisen ongelmanratkaisu soveltuu hyvin myös arkielämän ongelmien ratkaisemiseen. (Leppäaho 2018)

2.4 Pólyan ongelmanratkaisumalli

George Pólyaa pidetään 1900-luvun tärkeimpänä ongelmanratkaisun tutkijana ja hänet tunnetaan laajimmin ongelmanratkaisuun liittyvistä kirjoituksistaan. Hänen ajatuksensa ongelmanratkaisusta eivät perustu tutkimukseen, vaan kokemukseen matematiikan opettamisesta ja tutkimisesta. Kuuluisimmassa teoksessaan Pólya (2014) esittelee ongelmanratkaisumallin, josta on muotoutunut todennäköisesti käytetyin malli ongelmanratkaisussa. Vaikka malli on kehitetty jo vuonna 1945, se vastaa silti melko hyvin modernia oppimiskäsitystä oppilaan ja opettajan oman pohdinnan korostamisen ansiosta (Pólya 2014). Ehkä malli siksi on edelleen niin suosittu. Pólyan ongelmanratkaisumalliin kuuluu neljä vaihetta:

1. ongelman ymmärtäminen
2. suunnitelman tekeminen
3. suunnitelman toteuttaminen
4. ratkaisun tarkasteleminen

Ensimmäisessä vaiheessa ratkaisijan tulisi ymmärtää käsillä oleva ongelma. Oppilaan tulisi tarkastella, mitä tietoja on annettu ja mikä on tuntematon esimerkiksi piirtämistä tai kirjoittamista apuna käyttäen. Toisessa vaiheessa oppilaan pitäisi löytää yhteyksiä tuntemattomien ja annettujen tietojen välillä, ja löydettyjen yhteyksien avulla luoda ratkaisusuunnitelma. Tässä kohtaa ratkaisijan tulee pohtia, onko aiemmin kohdannut vastaavanlaista tehtävää, ja pystyisikö sitä käyttämään apuna tämän ongelman ratkaisemiseksi. Lisäksi ratkaisija voi yrittää muotoilla tehtävän yksinkertaisemmalla tavalla tai ratkaista tehtävästä ensin pienen osan. Kolmannessa vaiheessa toteutetaan toisessa vaiheessa kehitetty ratkaisusuunnitelma. Oppilaan tulee tarkistaa kaikki vaiheet, jotta ne on varmasti tehty oikein. Viimeisessä vaiheessa tarkastellaan saatua ratkaisua. Ratkaisija tarkistaa tuloksen ja jokaisen vaiheen perusteluiden oikeellisuuden sekä pohtii tuloksen ja ratkaisumenetelmän käytettävyyttä muiden ongelmien ratkaisemiseksi. (Pólya 2014)

Pólyan (2014) mukaan edellä esitettyjen kysymysten ja lauseiden esittäminen itselle tai oppilaalle saattaa auttaa ratkaisemaan ongelman. Tämä on yksi ongelmanratkaisumalli, jota opettaja voi yrittää opettaa oppilaille helpottaakseen ongelman ratkaisun etenemistä. Jos oppilas on jumissa tehtävänsä kanssa eikä tiedä, mitä tekisi seuraavaksi, hän voi aina palata ongelmanratkaisumalliin. Mikä on seuraava vaihe? Mitä kysymyksiä siihen liittyy? Kun ongelmanratkaisumalli on oppilaalle tuttu, hän pystyy soveltamaan sitä jokaiseen ongelmanratkaisutehtävään ja pääsemään helpommin eteenpäin ongelman kohdatessaan. Ongelmanratkaisumallien lisäksi tehtävän ratkaisemista helpottavat heuristiset strategiat, joita esitellään seuraavaksi.

2.5 Ongelmanratkaisustrategiat

Aiemmin tässä luvussa esiteltiin, mitä heuristiset strategiat ovat. Ne ovat siis ennalta opittuja menetelmiä, jotka laittavat ajattelun liikkeelle, ja joista oppilas voi valita mieleisensä avuksi ongelman ratkaisemiseen (Leppäaho 2018). Niihin kuuluvat kaikki tavat ja säännöt, joita oppilas voi käyttää apuna ongelmanratkaisussa. Oppilaat on hyvä tutustuttaa ongelmanratkaisustrategioihin, jotta ratkaisijalla on aina jokin menetelmä, mitä voi seuraavaksi yrittää päästäkseen ratkaisemisessa eteenpäin. On helppo turhautua tehtävän tekemiseen, mikäli ei pääse eteenpäin eikä keksi, miten edetä. Joidenkin määritelmien mukaan heuristiset strategiat ja ongelmanratkaisustrategiat ovat sama asia, mutta joidenkin määritelmien mukaan heuristisiin strategioihin kuuluu ongelmanratkaisustrategioiden lisäksi ongelmanratkaisumallit. Edellisessä alaluvussa esiteltiin yksi ongelmanratkaisumalli, ja seuraavaksi käsitellään ongelmanratkaisustrategioita.

Heuristiikkojen opettaminen tulisi aloittaa mahdollisimman helpoista strategioista selkein ohjein (Haapasalo 2011). Vaikka oppilas hallitsisi monta eri ongelmanratkaisustrategiaa, hänen pitää sen lisäksi osata valita, mitä niistä milloinkin käyttää. Pehkonen, Pekama ja Seppälä (1991) esittelevät kirjassaan ongelmanratkaisustrategioista järjestelmällisen kokeilun, tilanteen yksinkertaistamisen, mallikuvion piirtämisen, symmetrian käyttämisen, taaksepäin työskentelyn ja poissulkemisen strategian. Heidän mukaansa ongelmanratkaisu kannattaa usein aloittaa järjestelmällisestä kokeilusta. Jos ratkaisuvaihtoehtoja on rajattu määrä, voi tällä tavalla yksinkertaisesti koittaa kaikkia mahdollisia vaihtoehtoja löytääkseen oikean ratkaisun. Ratkaisijan kannattaa kuitenkin harkita, mitä vaihtoehtoa

yrittää, jotta löytäisi ratkaisun mahdollisimman pienellä vaivalla, eikä tarvitse oikeasti käydä kaikkia vaihtoehtoja läpi (Pehkonen ym. 1991). Tätä ongelmanratkaisustrategiaa kutsutaan myös arvaa-ja-testaa -menetelmäksi.

Tilanteen yksinkertaistamisen tarkoituksena on nimensä mukaan muodostaa ongelmasta yksinkertaisempi ongelma. Sen ratkaisun avulla voidaan keksiä ratkaisun yleinen muoto ja siirtyä takaisin alkuperäiseen ongelmaan (Pehkonen ym. 1991). Tämän myös analogiaksi kutsutun ongelmanratkaisustrategian avulla voidaan hyödyntää helpomman ongelman ratkaisemiseksi käytettyä menetelmää, sen tulosta tai molempia (Pólya 2014). Haapasalon (2011) mukaan tämän ongelmanratkaisustrategian hallitseminen on olennaista, koska matematiikassa tulisi aina tuottaa yhä yleisempiä ja yleisempiä ratkaisuja. Kuva tai kuvio auttaa usein ratkaisijaa hahmottamaan tilanteen paremmin, koska kaikkia kuvioon liittyviä yksityiskohtia on vaikeaa miettiä yhtä aikaa. Jos piirtää hyvän mallikuvion, voi koko ongelman joskus ratkaista pelkästään sen avulla (Pehkonen ym. 1991; Pólya 2014). Piirrettyä kuvaa ja ajatuksia on helppo tarkastella uudelleen, vaikka ajatus välillä karkaisikin muualle. Vastaavasti jos ongelmasta löytää jonkun symmetrian, se pienentää ongelman ratkaisemiseen tarvittavaa aikaa.

Lopusta alkuun -menetelmä eli analyysi auttaa siinä tapauksessa, jos ongelman lopputulos tiedetään (Haapasalo 2011; Pólya 2014). Tällöin ratkaisija voi kulkea lopputuloksesta taaksepäin päästäkseen ongelman alkuperäiseen tilaan (Pehkonen ym. 1991). Poissulkemisen strategia on Pehkosen, Pekaman ja Seppälän (1991) mukaan yksi käytetyimmistä ongelmanratkaisustrategioista. Siinä ratkaisija miettii ensin kaikki mahdolliset ratkaisut ja alkaa eliminoimaan niitä pois epäsuotuisimmasta lähtien päätyen lopulta jäljelle jääneeseen oikeaan ratkaisuun. Tämä ongelmanratkaisustrategia auttaa oppilaita matemaattisten ongelmien ratkaisemisen lisäksi myös arkipäivän päätöksenteossa ja arkiongelmien ratkaisemisessa (Pehkonen ym. 1991). Pólya (2014) esittelee kirjassaan hajottamisen ja uudelleenyhdistämisen strategian. Siinä ratkaisija tarkastelee ongelmaa ensin pieninä osina, minkä jälkeen kokoaa elementit yhteen uudella tavalla. Tällöin ongelma saattaa vaikuttaakin aivan erilaiselta (Pólya 2014).

3. Avoimet tehtävät

Opetuksessa käytettävien tehtävien valinnalla on suuri merkitys (Boaler & Dweck 2015). Matematiikan oppitunnilla oppilaille luodaan mahdollisuus oppia ja tämä tapahtuu pääasiassa tehtävien kautta. Myös Iso-Britannian matematiikan opettajien kansallisneuvosto National Council of Teachers of Mathematics on asettanut tehtävien valinnan ja käytön yhdeksi tehokkaan opetuksen periaatteista. Nykyään opettajia kehoitetaan käyttämään opetuksessaan ongelman tapaisia tehtäviä mieluummin kuin laittamaan oppilaat seuraamaan opettajan ohjeita askel askeleelta, koska oppilaat sitoutuvat matemaattiseen ajatteluun juuri ongelmatehtävien avulla. Se, mitä oppilaat oppivat, määräytyy heille annettujen tehtävien perusteella. (Sullivan, Clarke & Clarke 2013)

Tässä luvussa tutustutaan erilaisiin opetuksessa käytettäviin tehtäviin, erityisesti avoimiin tehtäviin. Lisäksi tarkastellaan, miten avoimia tehtäviä voidaan luokitella, millaisia etuja ja hyötyjä niiden käytöstä on opetukselle, opettajalle ja oppilaalle sekä toisaalta mitä haittoja niistä voi olla tai millaisia haasteita niiden käytössä.

3.1 Avoimien tehtävien esittely

Avoimet tehtävät (engl. open problem) ovat yksi tapa toteuttaa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden vaatimaa ongelmanratkaisun opettamista. Opetuskäyttöiset tehtävät voidaan jakaa avoimiin ja suljettuihin. Suljetussa tehtävässä alku- ja lopputilanne ovat yksikäsitteisesti määritellyt. Lähes kaikki oppikirjojen tehtävät ovat suljettuja: alkutilanne on selkeä, ja tehtävällä on tasan yksi oikea vastaus. Suljetuissa tehtävissä oppilaan tehtäväksi jää ainoastaan löytää ratkaisureitti (Ahtee ym. 2000). Avoimissa tehtävissä joko alku- tai lopputilanne tai molemmat ovat avoimia eli sisältävät useita erilaisia vaihtoehtoja. Ongelman lopputilanteen ollessa avoin (engl. open-ended problem) siihen ei ole olemassa ainoastaan yhtä oikeaa vastausta. Kaikki vastaukset, jotka ovat lähtöisin tehtävän alkuehdoista, ovat oikein (Leppäaho 2007). Jos tehtävän alkutilanne on avoin (engl. open-beginning problem), ratkaisija saa itse valita mistä alkutilanteesta lähtee liikkeelle ja miten etenee annettuun lopputilanteeseen (Leppäaho 2007). Kaikkein avoimimmat tehtävät ovat sellaisia, joissa sekä alku- että lopputilanne ovat avoimia (engl. both-ends-open problem). Ratkaisijan tehtävä on tällöin luoda ongelma itse ja ratkaista se valitsemallaan tavalla (Leppäaho 2007).

Joidenkin määritelmien mukaan myös tehtävät, joiden ratkaisuprosessi on avoin, ovat avoimia tehtäviä (Nohda 2000). Tällöin avoimiin tehtäviin kuuluisivat kaikki tehtävät, jotka on mahdollista ratkaista useammalla tavalla. Niihin sisältyisi tämän määritelmän mukaan myös esimerkiksi rutiinitehtävät, jotka voi ratkaista kahdella eri tavalla ja oikeastaan lähes kaikki matemaattiset tehtävät. Tässä tutkielmassa avoimiin tehtäviin määritellään kuuluvan vain tehtävät, joiden alku- tai lopputilanne tai molemmat ovat avoimet aineiston rajaamiseksi. Jotkut tutkijat määrittelevät avoimiin tehtäviin sisältyvän alku- ja/tai lopputilanteeltaan avointen ongelmien lisäksi tehtävät, joita voi kehittää avoimesti (Fatah ym. 2016). Tällä tarkoitetaan, että oppilaiden ratkaistua aiemmat ongelmat, he voivat ratkaista uusia ongelmia vaihtamalla edellisen ongelman alkuehtoja. Tässä tutkielmassa nämä tehtävät esitellään seuraavassa alaluvussa termillä ongelmakentät.

Tehtävien avoimuus kehittyi Japanissa 1970-luvulla ja sillä haluttiin korostaa erityisesti oppilaiden luovuutta, ongelmanratkaisu- ja keksimistaitoja sekä merkityksellisen keskustelun rakentamista luokassa (Ahtee ym. 2000; Pehkonen ym. 2013). Japanilainen koulukulttuuri eroaa esimerkiksi suomalaisesta melko paljon, koska useissa ryhmissä on jopa 40 oppilasta (Nohda 2000). Vaikka koulukäytännöt eroavat eri maissa varsin paljon, on alkujaan aasialainen opetusmenetelmä levinnyt myöhemmillä vuosikymmenillä ympäri maailman. Aiemmassa japanilaisessa matemaattisessa tutkimuksessa oli keskitytty pääasiassa matematiikkaan, mutta 1970-luvulla huomio alkoi siirtyä yksittäisiin oppilaisiin, heidän mahdollisuuksiinsa ja erilaisiin ajattelutapoihinsa sekä opetusmenetelmiin,

jotka kehittävät oppilaiden erilaisia ajattelutapoja (Nohda 2000). Shimada teki 70-luvulla tutkimuksen oppilaiden korkeampien matematiikan taitojen arvioinnista. Siinä tutkittiin taitoa matematisoida tilanne ja käsitellä sitä sekä kykyä tehdä yhteistyötä muiden kanssa matemaattisen ongelman ratkaisemiseksi (Nohda 2000). Shimada kehitti muiden tutkijoiden kanssa tutkimuksen seurauksena ”villiläisen ongelman”, jossa kysymystä ei ole määritelty selkeästi, avatakseen mahdollisuuden monille erilaisille ratkaisuille, mutta myös löytääkseen uusia lähestymistapoja yhdistää aiemmin opittua tietoa (Kwon, Park & Park 2006). Kun konstruktioivinen oppimiskäsitys levisi maailmalla, oli tarve kehittää opetusmenetelmä, joka vastaisi sen asettamiin haasteisiin (Pehkonen ym. 2013). Avoimien tehtävien ajateltiin olevan yksi vastaus tähän ongelmaan, koska niiden katsotaan olevan yhteydessä konstruktioiviseen tiedon rakentamiseen. Näiden tehtävien käyttö opetuksessa levisi ympäri maailman 1980- ja 1990-luvuilla ja silloin aihetta tutkittiin melko paljon (Pehkonen ym. 2013). Myös viimeisinä vuosikymmeninä aiheesta on tehty tutkimusta opetuksen kehittyessä jatkuvasti.

Työskennellessään avointen tehtävien parissa oppilaan toiminta poikkeaa suuresti suljettujen tehtävien työstämisestä (Sullivan ym. 2013). Avoimien tehtävien ratkaiseminen antaa oppilaalle enemmän harkintavapautta, mutta vaatii myös tiedon monipuolisempaa käyttöä ja usein päätösten tekemistä (Leppäaho 2018). Siksi ongelmanratkaisu vaatii luovuutta, erityisesti oppilaan osaamien ajattelutapojen ja asenteiden muuttamista joustavammiksi (Ahtee ym. 2000). Leppäahon (2007) mukaan tehtävien avoin lähestyminen on opetustapa, jossa korostuu oppilaiden ymmärtäminen ja luovuus. Matemaattisella luovuudella tarkoitetaan uuden tiedon luomista ja joustavia ongelmanratkaisutaitoja (Kwon ym. 2006). Avoimien ongelmien ratkomisesta käytetään usein termiä *avoin ongelmanratkaisu*, koska halutaan korostaa oppilaiden tekevän valintoja ja päätöksiä prosessin kuluessa (Haapasalo 2011). Puhutaan myös *luovasta ongelmanratkaisusta*, kun halutaan painottaa nimenomaan tehtävissä tarvittavaa luovuutta ja joustavuutta (Ahtee ym. 2000). Avoin ongelmanratkaisu koostuu hyvin monesta opetus- ja oppimisstrategiasta, joiden mukaan oppilaalle tarjotaan tietoa sellaisessa muodossa, että hänen on mahdollista löytää uutta informaatiota (Ahtee ym. 2000). Opetustilanteessa opettaja voi esimerkiksi antaa oppilaille kiinnostavan ongelmatilanteen, jota oppilaat saavat työstää ajan kanssa (Ahtee ym. 2000).

Avoin lähestymistapa (engl. open approach) tarkoittaa tilannetta, jossa opettaja antaa oppilaalle oppimistehtävän, jonka alku- ja/tai lopputilannetta ei ole täsmällisesti määritelty (Ahtee ym. 2000). Sitä kuvataan myös opettajan maailmanlaajuisesti hyväksyttynä menettelytapana auttaa oppilaita optimaalisten oppimisympäristöjen kanssa (Pehkonen ym. 2013). Tätä lähestymistapaa voi toteuttaa avoimien tehtävien avulla, koska niiden on todettu olevan lupaava ratkaisu oikeanlaisen oppimisympäristön luomiseen ja tarjoavan mahdollisuuden opettaa ja oppia matematiikkaa merkityksellisesti (Pehkonen ym. 2013). Avoimet tehtävät tarjoavat erilaisten oppimismuotojen takia optimaaliset edellytykset kognitiiviseen kehittymiseen, jossa uutta tietoa rakennetaan konstruktioivisesti ja aiemmin olemassa olevaa tietoa arvioidaan (Sullivan ym. 2013).

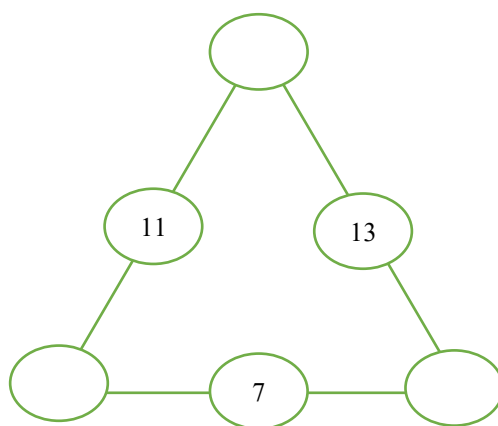
Nohdan (1995) mukaan avoimella tehtävällä on kaksi vaatimusta. Ensinnäkin tehtävä tulee valita tutuista ja kiinnostavista aiheista, jotta se sopisi jokaiselle oppilaalle. Näin oppilaat pitävät ongelman ratkaisemista merkityksellisenä. Heistä tuntuu, että he pystyvät ratkaisemaan ongelman omilla taidoillaan, ja he tuntevat saavuttaneensa jotain saadessaan ongelman ratkaistua. Valitun ongelman tulee siis olla tarpeeksi joustava, jotta voidaan ottaa huomioon oppilaiden erilaiset tasot matemaattisissa taidoissa. Toiseksi avoimen tehtävän pitäisi sopia matemaattiseen ajatteluun ja uusien ongelmien luomiseen. Lisäksi tehtävällä tulisi olla erilaisia eritasoisia ratkaisutapoja. Avoimet tehtävät ovat kaiken kaikkiaan hyvin moninainen työkalu, koska niitä voidaan käyttää niin moneen tarkoitukseen. (Nohda 1995)

Ongelmanratkaisua pyritään opettamaan avoimien tehtävien avulla, jotta se vastaisi paremmin todellisen elämän tarpeita (Ahtee ym. 2000). Ongelmanratkaisutehtävät muodostavat oppilaille mahdollisuuden konstruktioiviselle aktiivisuudelle todennäköisemmin kuin muut tehtävät (Sullivan, Mousley

& Zevenbergen 2005). Avoimet tehtävät sopivat tähän tarkoitukseen juuri alku- ja lopputilanteen moninaisuuden takia. Ongelmana on, että lähes kaikki oppikirjojen tehtävät ovat suljettuja. Opettaja joutuu käyttämään paljon aikaa tehtävien luomiseen, jos haluaa käyttää opetuksessaan avoimia tehtäviä. Toisaalta ongelmanratkaisu saadaan melko luontevasti osaksi opetusta juuri avoimien tehtävien avulla, jos kysymystä ei määritellä ollenkaan tai se määritellään epämääräisesti (Haapasalo 2011). Suljetuista tehtävistä voi tehdä avoimia melko helposti: jättämällä tehtävästä pois kysymyksen tai jonkin alkuarvoista (Ahtee ym. 2000).

Kaiken koulutoiminnan pitäisi toimia pohjana tulevalle oppimiselle (Nohda 2000). Opettajan tulisi tarjota oppilaille paras mahdollinen oppimisympäristö ja mahdollisuudet oppia, jotta heillä olisi tulevaisuudessa parhaat edellytykset osaamiselle. Oppilaat ovat kuitenkin eritasoisia, eikä jokainen pysty saavuttamaan korkeimpia arvosanoja ja tavoitteita. Avoin lähestymistapa tähtää siihen, että jokainen oppilas voisi oppia matematiikkaa omien taitojensa mukaan niin, että he pääsevät itse vaikuttamaan matematiikan oppimiseensa (Nohda 2000; Sullivan, Bourke & Scott 1997). Avoimien tehtävien tekemiseen liitetään usein aktiivinen tiimityöskentely tavallisen itsenäisen työskentelyn sijaan (Haapasalo 2011). Opettajan tehtäväksi jää tulkita oppilaiden ajatuksia ja opastaa niitä oikeaan suuntaan. Avoimien tehtävien ratkaisuprosessissa korostuu vapaa ideointi suljettujen tehtävien kontrolloidun ja systemaattisen prosessin sijaan (Haapasalo 2011).

Esimerkkinä avoimesta tehtävästä voidaan esittää kuvan 1 aritmagon-kolmio. Sen sivuilla on luvut jo valmiina. Kolmion kulmiin pitäisi keksiä sellaiset luvut, että jokaisen sivun lukujen summa olisi sama. Tehtävän voi ratkaista monella eri tavalla ja oikeita ratkaisuja on ääretön määrä. Tässä tehtävässä alkutilanne on suljettu, koska kolmion sivujen luvut on annettu valmiiksi. Tehtävän lopputilanne on avoin, koska oikeita vastauksia on useita ja niihin voi päästä monella eritasoisella ratkaisutavalla.



Kuva 1: Aritmagon-kolmio.

3.2 Avoimien tehtävien luokittelu

Pehkonen (1997a) määrittelee avoimia tehtäviä käsittelevät artikkelikokoelmansa johdannossa avoimien tehtävien olevan ongelmaluokka, johon kuuluu erilaisia ongelmaryhmiä: tutkimustehtävät, ongelmanasettelutehtävät, arkielämän tilanteet, erilaiset projektit, ongelmakentät, ongelmien varioinnit ja tehtävät, joissa ei ole kysymystä.

Tutkimustehtävissä (engl. investigations) on yleensä annettu alkutilanne, jonka puitteissa oppilaan tulee ensin muodostaa ongelma ja vasta sitten ratkaista se. Näitä käytetään laajasti esimerkiksi

Englannissa, Skotlannissa ja Australiassa. Tutkimustehtävien käytön tarkoitus on tukea oppilaiden luovuutta ja erityisesti ajattelutaitoja. Ongelmanratkaisun lisäksi tutkimustehtävät harjoittavat ongelman asettelua, koska oppilas voi tutkimuksen yhteydessä muodostaa oman ongelman. Matematiikan opetuksessa avoimien tehtävien käyttäminen antaa oppilaille mahdollisuuden työskennellä oikean matemaatikon tapaan. (Pehkonen ym. 2013) Osa tutkijoista pitää kaikkia ongelmanratkaisutehtäviä tutkimustehtävinä, koska erityisesti ratkaisemisen loppuvaiheeseen kuuluu tutkimustehtäville ominaisia toimia kuten vaihtoehtoisten ratkaisujen tarkastelu ja uusien ongelmien pohtiminen (Haapasalo 2011). *Projektit* (engl. projects) ovat laajempia tutkimustehtäviä, joita työestetään usein pitkään, toisinaan jopa koko oppimisjakson ajan.

Ongelmakentät (engl. problem fields) ovat jäsenneltyjä tutkimuksia, joissa opettaja valmistelee etukäteen jatkokysymyksiä ja riippuen siitä, miten oppilaat onnistuvat ratkaisemaan ongelmia, päättää, mihin suuntaan oppilaat menevät, ja kuinka pitkälle he työskentelevät annettujen ongelmien kanssa (Pehkonen ym. 2013). Ongelmat on tarkoitus esitellä oppilaille vähitellen, ja jatkon tulisi liittyä oppilaiden ratkaisuihin (Pehkonen 1997b). Ongelmakenttä on joukko vaikeusasteeltaan hyvinkin eritasoisia ongelmia, jotka on liitetty luonnollisella tavalla yhteen (Haapasalo 2011; Leppäaho 2018). Tämä tarjoaa opettajalle vapauden johdatella oppimistilannetta eteenpäin oppilaiden taitotason mukaan. Usein alkutilanne, ja muutama ensimmäinen askel on annettu eli ongelmakentästä muotoillaan ensimmäiset ongelmat (Ahtee ym. 2000). Tämän jälkeen alkaa avoin ongelmanratkaisu, kun oppilas jatkaa ongelmien parissa työskentelyä rakentamalla ja muotoilemalla itse seuraavat ongelmat (Ahtee ym. 2000). Mistä tahansa ongelmasta voi muodostaa ongelmakentän vaihtamalla tehtävässä annettuja tietoja ja ehtoja (Pehkonen 1997b). Ongelmakentät ovat hyvä tapa kehittää ongelmanratkaisutaitoja ja konstruoida tietoa, koska lähtöongelma tarjoaa mahdollisuuden luoda aina uusia ongelmia (Haapasalo 2011). Vastakohtana ongelmakentille voidaan pitää pulmatehtäviä, jotka ovat juuri ja juuri ongelmatehtäviä ja jotka vaativat vain yhtä oivallusta sen ratkaisemiseksi (Haapasalo 2011).

Esitellään esimerkkinä, miten edellä esitetystä aritmagon-kolmiosta voi muodostaa ongelmakentän. Aluksi oppilaille annetaan ratkaistavaksi yksi tapaus aritmagon-kolmiosta ja annetaan tehtävänannoksi kolmion täyttöohjeet. Oppilaat löytävät ratkaisun, minkä jälkeen heiltä kysytään, pystyvätkö he löytämään toisen ratkaisun, ja kuinka monta erilaista ratkaisua he pystyvät löytämään. Tiedämme, että aritmagon-kolmioon on loputon määrä ratkaisuja, mutta oppilaille tuottaa usein vaikeuksia löytää kolmioon useampi erilainen ratkaisu (Pehkonen 1997b). Oppilailta voidaan myös kysyä, pystyvätkö he löytämään kolmion kulmiin sellaiset luvut, että sivujen summa olisi tietty annettu luku. Tämä vaatii oppilailta erilaista lähestymistapaa ja ajattelua. Oppilailta voidaan myös kysyä, onko kolmioon mahdollista sijoittaa negatiivisia lukuja. Jos opettaja haluaa oppilaiden harjoittelevan juuri negatiivisia lukuja, hän voi jo alun perin laittaa kolmion sivun summaksi nollan tai negatiivisen luvun ja kysyä oppilailta, mitkä luvut ovat mahdollisia kolmion sivun summia. Lopuksi oppilaiden halutaan keksivän yleinen sääntö, jolla kolmion kulmien luvut saa aina selvitettyä. Tähän voidaan johdatella kysymällä oppilailta, miten ongelman voisi yleistää. Näin yhdestä tehtävästä saadaan aikaan laajempi kokonaisuus, ongelmakenttä, jonka ratkaiseminen vaatii erilaisia lähestymistapoja (Pehkonen 1997b).

Arkielämän tilanteet (engl. real-life situations) tuovat matematiikan tehtäviä lähemmäs tosielämää ja luonnollista arkiympäristöä. Kun oppimistehtävät koskevat kontekstiltaan arkisia tilanteita, matematiikka saattaa oppilaiden mielestä ”herätä eloon”, koska se motivoi ja näyttää heille, mistä syystä matematiikkaa oikeasti opiskellaan. Tehtävä pitää kuitenkin pystyä liittämään opittavaan asiaan luonnollisesti, tai sillä saattaa olla vastakkainen vaikutus. Tilanteen pitää olla oppilaille tuttu ja luonnollinen, eikä esimerkiksi tuntemattomammasta kulttuurista tai teennäiseltä tuntuva. Jos tehtävänasettelussa onnistutaan, oppilaat ovat usein taitavia näiden tehtävien parissa. (Sullivan ym. 2013) Tehtävät, joissa ei ole kysymystä (engl. problems without question), ovat nimensä mukaisia: tehtävänannossa ei ole kysymystä eikä siinä kerrota yksiselitteisesti, mitä ratkaisijan pitäisi tehdä. Näissä tehtävissä oppilaan tulee itse muodostaa kysymys, johon haluaa muodostaa vastauksen.

Tehtävässä voi olla annettuna paljon tietoa ja alkuehtoja, mutta oppilaan pitää itse valita, mihin suuntaan haluaa tehtävää ja ratkaisuaan viedä.

Ongelmien variointia (engl. problem variations) kutsutaan myös mitä jos ei -strategiaksi. Siinä oppilaan tulee ensin määrittää ratkaistavasta ongelmasta kaikki attribuutit ja sen jälkeen kyseenalaistaa jokainen niistä vuorotellen kysymällä mitä jos ei (Seo 1997). Tällä tarkoitetaan annettujen tietojen pohtimista ja uusien ongelmien muodostamista pohtimalla, mitä jos tätä arvoa tai tietoa ei annettaisi-kaan tehtävänannossa. Attribuutteja muuttamalla syntyy paljon uusia ja yleisempiä ongelmia, joiden avulla oppilas voi pohtia ja vertailla, miten attribuuttien muuttaminen vaikuttaa ongelman ratkaisuun. Ongelman variointitehtävien päämääränä on antaa oppilaille mahdollisuus keksiä uusia ideoita, arvioida idean merkityksellisyyttä ja löytää uusia yhteyksiä (Seo 1997). *Ongelmanasettelutehtävillä* (engl. problem posing) tarkoitetaan tehtäviä, joissa oppilaan on tarkoitus muodostaa tehtävänanto itse (Seo 1997). Pehkosen (1997a) avoimien tehtävien luokittelussa ongelmanasettelutehtävät ovat oma ongelmaryhmänsä, mutta ongelman asettelua sisältyy moniin muihinkin ongelmaryhmiin kuten ongelman variointiin.

Avoimet tehtävät voidaan jakaa kolmeen tyyppiin sillä perusteella, onko niiden alku- vai lopputilanne avoin (Pehkonen 1997a). Joko alkutilanne on avoin, lopputilanne on avoin tai molemmat ovat avoimia. Jos sekä alku-, että lopputilanne ovat suljettuja, kyseessä on suljettu tehtävä. Kuvassa 2 on esitetty, miten eri ongelmaryhmät jakautuvat ongelmatyyppeihin (Pehkonen 1997a).

lopputilanne alkutilanne	SULJETTU	AVOIN
SULJETTU	suljettu ongelma	arkielämän tilanteet tutkimukset ongelmakentät ongelmamuunnokset
AVOIN	arkielämän tilanteet ongelmamuunnokset	arkielämän tilanteet ongelmamuunnokset projektit ongelmanasettelutehtävät

Kuva 2: Ongelmaryhmien jakautuminen eri ongelmatyyppeihin.

3.3 Opetuksen hyödyt

Miksi avoimia tehtäviä pitäisi opettaa? Tutkimusten mukaan opettaminen avoimella lähestymistavalla on tehokas tapa opettaa perinteiseen opetusmetodiin yhdistettynä (Pehkonen 1997b). Vaikka osa tutkimuksista on jo melko vanhoja, uudempien tutkimusten tulokset nykypäivän koulumaailmasta

vastaavat vanhempien tutkimusten tuloksia. Avoimien tehtävien avulla opettamisesta on paljon hyötyä opettajalle, oppilaille ja koko opetukselle, ja näitä positiivisia vaikutuksia esitellään tässä aluvuossa.

Luvussa kaksi esiteltiin, miten perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2014) vaatii ongelmanratkaisun opettamista oppilaille. Koska ongelmanratkaisua on joka tapauksessa opetettava, opetussuunnitelman sitä koskevat tavoitteet voi täyttää käyttämällä opetuksessa avoimia tehtäviä. Ne vaativat enemmän luovuutta kuin rutiinitehtävät ja kehittävät oppilaiden taitoja opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisesti (Pehkonen ym. 2013). Yksi avoimien tehtävien opetuskäytön hyödyistä opettajalle on siis se, että tulee opettaneeksi oppilaille ongelmanratkaisua opetussuunnitelman perusteiden vaatimalla tavalla.

Toinen avoimien tehtävien käytön suurista hyödyistä on, että jokaisen oppilaan pitäisi pystyä löytämään ongelmaan ratkaisu oman taitotasensa mukaan (Kwon ym. 2006). Tavallisella oppitunnilla opettaja käy asioita usein läpi perustasolla, jotta mahdollisimman suuri osa oppilaista hyötyisi opetuksesta. Tämän jälkeen oppilaat työskentelevät itsenäisesti, opettaja käy auttamassa heikompia oppilaita, mutta taitavampien oppilaiden taitojen kehittämiseksi ei juurikaan jää aikaa (Pehkonen 1992). Oppilaat oppivat eri tavoilla ja siksi tällainen opetusmetodi, joka tarjoaa oppilaille mahdollisuuden näyttää osaamisensa eri tavoilla, on kovin hyödyllinen (Munroe 2015). Avoimen lähestymistavan tavoite on, että jokainen oppilas pystyisi määrätietoisesti oppimaan matematiikkaa oman taitotasensa mukaisesti (Nohda 2000). Se tarjoaa myös eritasoisille oppilaille enemmän mahdollisuuksia osallistua tunnilla (Nohda 2000). Tämän takia avoimet tehtävät ovat hyvä tapa *eriyttää* opetusta, vaikka ryhmässä olisikin hyvin eritasoisia oppilaita. Eriyttäminen tarkoittaa ryhmän eri taitotasoisten ja erilaiset oppimisedellytykset omaavien oppilaiden huomioon ottamista opetuksessa. Tämä saattaa olla hyvinkin haastavaa, mikäli samassa ryhmässä on todella heikkoja ja todella taitavia oppilaita. Heikommille jokainen opetettava asia pitäisi selittää perusteellisesti, mutta taitavammat puolestaan tarvitsisivat haasteita, jotta mielenkiinto matematiikkaa kohtaan säilyisi.

Avoimet tehtävät mahdollistavat taidoiltaan, kiinnostuksen kohteiltaan ja matemaattisen ajattelun tasoiltaan erilaisten oppilaiden työskentelyn tukien heidän tutkimisprosessiaan ja ongelmien luomista (Nohda 2000). Kwon, Park ja Park (2006) ovat sitä mieltä, että matematiikan opetuksen pitäisi kokonaisuudessaan keskittyä kehittämään oppilaiden luovaa ajattelua, jossa oppilaat voivat vapaasti yrittää omia ratkaisutapojaan. Matematiikan ei pitäisi olla pelkkää laskemista, vaan tähdätä ymmärryksen ja matemaattisen ajattelun kehittämiseen (Pehkonen 1992; Pehkonen ym. 2013). Kouluopetusta on syytetty perinteisestä opetusmetodista, jossa oppilas opettelee ulkoa matemaattiset säännöt ja lauseet ja käyttää aina niitä ratkaistaviin ongelmiin yrittäen löytää yhden ainoan oikean vastauksen. Oppilaat ajattelevat helposti matematiikan olevan pelkästään kokoelma sääntöjä ja tehtäviä (Sullivan ym. 1997). 25 vuotta sitten koulun arki on ollut osittain erilaista kuin nykypäivänä. Aiemmin matematiikan opiskelu oli vielä enemmän kaavojen ja metodien opettelua, mutta onneksi opiskelu on vuosikymmenten saatossa alkanut korostaa enemmän ajattelun taitoja ja ymmärtämistä.

Matematiikan oppitunti saattaa helposti edetä mekaanisesti opettajakeskeisesti niin, että ensin opettaja näyttää esimerkin avulla passiivisille oppilaille, miten ongelma ratkaistaan, minkä jälkeen oppilaat yrittävät ratkaista vastaavanlaisia tehtäviä toistamalla sen, mitä opettaja teki (Munroe 2015; Pehkonen 1992). Erityisesti 30 vuotta sitten opetus on ollut hyvin opettajakeskeistä: opettajalla on ollut vahva auktoriteettiasema ja oppilaiden tehtävä oli kuunnella ja toimia opettajan ohjeiden mukaisesti. Samanlaisen tehtävän ratkaiseminen ei ole enää ongelmanratkaisua, koska opettaja on jo näyttänyt oppilaille, miten vastaavia tehtäviä tehdään. Tehtävistä tulee oppilaille rutiinitehtäviä, koska he oppivat tietyn rutiinin, jolla he tekevät sen tyypiset tehtävät opettajan esimerkin jälkeen. Blanc (1997) kuvaa tämän perinteisen opetusmetodin avulla oppimista pelin sääntöjen opetteluksi oikean matematiikan sijaan. Perinteinen opetustapa sopii hyvin tiedon opettamiseen, mutta menetelmien oppiminen vaatii jotain muuta (Pehkonen ym. 2013). Suljetut tehtävät eivät edistä oppilaiden

luovaa ajattelua, joten nämä tavoitteet saavuttaakseen on opettajan käytettävä opetuksessaan avoimia tehtäviä. Tällöin oppilaille tarjotaan mahdollisuus testata erilaisia ongelmanratkaisustrategioita niin arkielämän tilanteisiin kuin matemaattisiin ongelmiin (Kwon ym. 2006). Avoimien tehtävien käyttö mahdollistaa arkielämän ongelmien parissa työskentelyn niin, että oppilaat vastaavat ongelmiin aktiivisesti, ja oppiminen tapahtuu luonnollisissa tilanteissa (Pehkonen ym. 2013). Oppitunnilla opettaja tarjoaa oppilaille matemaattisen ongelmatilanteen, johon oppilaat käyvät käsiksi yhdessä saavuttaen lopulta ratkaisun (Nohda 2000). Avoimien tehtävien avulla opetetaan oppilaskeskeisesti, jolloin oppilaat ovat aktiivisia koko opetusprosessin ajan (Munroe 2015).

Koska avoimissa tehtävissä alku- tai lopputilanne ei ole tarkasti määritelty, oppilaat eivät välttämättä ala muistella, mikä sääntö tai menetelmä sopisi juuri tähän tehtävään, vaan he joutuvat miettimään niiden tarkoitusta syvemmin ja tekemään erilaisia päätöksiä niiden suhteen (Sullivan ym. 2013). Tämä korostaa ajattelutaitojen kehittämistä ja ymmärryksen tason saavuttamista ulkoa opettelun sijaan. Käyttämällä opetuksessa aktiivisesti avoimia tehtäviä oppilaiden uskotaan ymmärtävän paremmin keskeiset periaatteet ja käsitteet, koska oppilaat työskentelevät ongelmanratkaisuympäristössä ja pystyvät yhdistämään arkielämän luokkahuoneeseen (Pehkonen ym. 2013). Avoimet tehtävät avaavat erilaisten ratkaisujen ja ratkaisureittien lisäksi mahdollisuuden löytää uusia tapoja yhdistellä aiemmin opittua tietoa (Kwon ym. 2006). Tällöin tavoitteena on saada oppilaat tekemään luovia matemaattisia toimia ja herätellä heidän kiinnostustaan, innostustaan ja yhteistyötaitojaan ongelmanratkaisun yhteydessä (Kwon ym. 2006). Avoimet tehtävät ovat siis myös tapa saada oppilaat kiinnostumaan matematiikasta ja motivoitumaan sen opiskeluun tekemällä ja jopa luomalla itse (Nohda 2000; Sullivan, Bourke & Scott 1997). Ainakin 90-luvulla suomalaiset yläkouluikäiset oppilaat toivoivatkin opetuksen lisää avoimuutta ja ongelmanratkaisua, koska he pitivät avoimia tehtäviä kiinnostavana tapana oppia matematiikkaa (Pehkonen 1992; Pehkonen 1997b). Avoimien tehtävien etujen ansiosta voisi kuvitella, että oppilaat ovat tätä mieltä myös nykyään. Koska tehtävät sallivat erilaiset vastaukset ja lähestymistavat, ne eivät lannista oppilaita yhtä helposti kuin suljetut tehtävät (Kwon ym. 2006). Avoimien tehtävien parissa työskentely tukee oppilaiden osallisuutta luokan toiminnassa sekä kannustaa heitä tutustumaan ja tutkimaan, kasvattamaan motivaatiotaan, etsimään yhteyksiä asioiden välillä ja tunnistamaan vaihtoehtoja (Viseu & Oliveira 2012). Avoimet tehtävät helpottavat myös oppilaiden arvioimista, koska niiden avulla pystyy helposti tekemään päätelmiä oppilaiden ajattelutaidoista ja käsiteltyjen asioiden ymmärtämisestä (Kwon ym. 2006).

Avoimet tehtävät edistävät myös oppilaiden matemaattista keskustelutaitoa, jos oppilaat keskustelevat keskenään erilaisista päättelyistä ja ratkaisuista (Kwon ym. 2006; Viseu ym. 2012). Ideoiden kehittäminen, ongelmatilanteiden pohdiskelu ja vaihtoehtojen tasapainottelu vaativat oppilaiden välistä keskustelua ja sosiaalista kanssakäymistä (Pehkonen ym. 2013). On siis loogista, että samalla oppilaiden matemaattinen keskustelutaito kehittyy. Matematiikasta keskusteleminen taas mahdollistaa sen, että oppilaat voivat oppia muiden kanssa jaetuista ideoista ja saada selvennystä matemaattiseen ymmärtämiseen (Viseu ym. 2012). Matemaattinen keskustelu edistää keskustelijan oppimisen lisäksi myös muiden ryhmäläisten oppimista, ja siksi luokkakulttuurissa olisi olennaista huomioida luokkakavereiden sanomiset ja tekemiset (Viseu ym. 2012). Koulukulttuuria on kritisoitu keskustelukulttuurin rajoittamisesta, vaikka sillä on kulttuurissamme tärkeä rooli (Pehkonen ym. 2013). Vapaaseen keskusteluun pitäisi rohkaista rajoittamisen sijasta pitäen kuitenkin huolta, että keskustelu pysyy järkevien rajojen sisäpuolella (Pehkonen ym. 2013).

Avoimien tehtävien katsotaan edesauttavan myös oppilaan omaperäisyyttä ja joustavuutta, ja siksi niitä käytetäänkin usein mittaamaan oppilaan luovuutta. Kwon, Park ja Park (2006) tekivät tutkimuksen, jonka tarkoituksena oli tutkia, edistävätkö avoimet tehtävät matemaattista luovuutta. Tutkimuksen mukaan avoimien tehtävien käyttö edisti tehokkaasti kaikkia kolmea oppilaiden matemaattisen luovuuden osatekijää: sujuvuutta, joustavuutta ja omaperäisyyttä (Kwon ym. 2006). Myös Kadirin ja Gusnin (2017) sekä Fatahin, Suryadin, Sabandarin ja Turmudin (2016) tutkimusten mukaan avoin lähestymistapa oppimismenetelmänä kehittää luovaa ajattelutaitoa. Oppilaat tulisi saada ymmär-

tämään, ettei tehtävien tekemisessä ja ongelmanratkaisussa tärkeintä ole oikea vastaus vaan se, miten tehtävää ratkaisee ja miten vastaukseen pääsee. Matka siis on tärkeämpää kuin päämäärä. Pehkosen (1992) tutkimuksen mukaan konstrukttiivisen oppimiskäsityksen kannalta on ilahduttavaa, että suomalaiset yläkoulun oppilaat olivatkin tätä mieltä ainakin 90-luvulla. Avoimen lähestymistavan sanotaankin avaavan oppilaiden sydämet matematiikalle (Nohda 2000). Tutkimuksen tulokset vaikuttavat hieman epäilyttäviltä, sillä nykyään oikea vastaus vaikuttaa olevan oppilaille tärkein.

3.4 Opetuksen haasteet

Vaikka avoimien tehtävien käyttöön opetuksessa liittyy paljon hyötyjä, se tuo myös haasteita. Suurin haaste avoimien tehtävien käytössä on jo aiemmin mainittu tehtävien puute. Oppikirjat ovat täynnä suljettuja tehtäviä: usein ilman ainoatakaan avointa tehtävää (Haapasalo 2011). Tavallisesti opettajat käyttävät opetuksessaan tunnollisesti matematiikan oppikirjoja ja niiden tehtäviä, jotka lähes aina ovat suljettuja. Opettajalle on työlästä ryhtyä etsimään tai tekemään itse aiheeseen sopivia avoimia tehtäviä. Tehtävien luominen on aikaavievää ja haastavaa. Vaikka opettaja onnistuisi löytämään haluamastaan aiheesta hyvän avoimen tehtävän, se ei välttämättä ole oppilaille sopivan tasoinen. Ongelman ratkaiseminen saattaa vaatia tietoja ja taitoja, joita oppilailla ei vielä ole. Opettajan pitää siis huomioida, että oppilailla on ongelman ratkaisemiseen tarvittavat ennakkotiedot ja -taidot. Tehtävä ei saa olla liian vaikea, koska oppilaat saattavat turhautua, mikäli eivät pääse etenemään tehtävän ratkaisussa. Toisaalta ongelma ei saa myöskään olla liian helppo, koska silloin sen ratkaisemisesta ei saada tavoiteltua hyötyä. Jos tehtävä onkin ratkaisijalle rutiinitehtävä, ei ole enää kyse ongelmanratkaisusta (Leppäaho 2018). Opettajan pitää pohtia avoimen tehtävän valintaa tarkasti, jotta sen ratkaisemisella oppitunnilla olisi edellisessä alaluvussa esitettyjä positiivisia vaikutuksia. Avoimen työskentelytavan yhdistäminen luokkahuoneeseen saattaa olla vaikeaa myös opetussuunnitelman rajoitusten ja ulkopuolisen opetuksen arvioinnin takia (Sullivan ym. 2013). Onneksi Suomessa opetussuunnitelma kannustaa ongelmanratkaisuun, joten tällaista joidenkin ulkomaiden koulukulttuurien ongelmaa ei pitäisi esiintyä.

Oppitunnille pitäisi pystyä luomaan positiivinen ilmapiiri, jossa oppilaat uskaltavat yrittää uutta, tehdä virheitä ja päästä erehdyksestä uuteen yritykseen. Vanhojen sananlaskujen mukaan virheistä oppii, mutta oppimisen lisäksi virheiden tekeminen kehittää aivoja (Boaler ym. 2015). Vaikka virheiden tekeminen edistää oppimista, se saattaa helposti lannistaa oppilaan. Opettajan luoma positiivinen ilmapiiri luokkahuoneessa motivoi ja kannustaa oppilaita yrittämään. Tärkeää on myös pohtia, mihin tähtää avoimen tehtävän teettämisellä. Jos avoin tehtävä on tutkimustyyppinen ja oppilaiden tulee kirjoittaa tutkimuksesta pitkä selostus, tehtävä saattaa oppilaiden mielestä tuntua täysin irralliselta projektilta (Blanc 1997). Tällöin keskipisteessä ei välttämättä enää ole avoin ja luova lähestymistapa matematiikkaan, vaan ratkaisun ja tulosten esittäminen (Blanc 1997). Vaikka Blanc (1997) käsittelee artikkelissaan avoimia tehtäviä Iso-Britannian opetussuunnitelman näkökulmasta, sopivat hänen päättelmänsä hyvin myös Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin (2014).

Haasteena on myös oppilaiden harjaantumattomuus avoimiin tehtäviin (Blanc 1997). On vaikeaa ryhtyä ratkaisemaan avointa tehtävää, mikäli ei ole aiemmin törmännyt sellaiseen. 90-luvulla avoimet tehtävät ovat olleet suomalaisessa matematiikan opetuksessa melko uusi asia, mutta edelleen ne vaikuttavat puuttuvan monen opettajan opetuksesta. Opettajan tulisi opettaa oppilaille ensin muutamia välineitä avoimen tehtävän tekemiseen kuten ongelmanratkaisu-luvussa esitettyjä ongelmanratkaisustrategioita tai -malleja. Näin oppilailla olisi valmiina työkaluja, joiden avulla tarttua tehtävään ja lähteä ratkaisemaan sitä (Haapasalo 2011). Avoimia tehtäviä löytyy eritasoisia, joten oppilaiden kanssa tulisi lähteä liikkeelle vähiten avoimista ja oppilaiden harjaantuessa siirtyä vähitellen entistä avoimempia tehtäviä kohti. Tehtäviä voidaan myös ensin ratkaista yhdessä opettajan johdolla, jolloin opettaja pystyy opastamaan oppilaita kohti sellaista työskentelyä, jota heiltä odottaa. Koko tehtävien

tekemiseen harjaantumisen prosessi vie kuitenkin aikaa. Vaikka avoimet tehtävät olisivat loistava tapa oppia monia taitoja, toisinaan matematiikan oppijaksot sisältävät niin runsaasti opetettavaa asiaa, ettei opettaja ehdi käydä tätä prosessia läpi oppilaiden kanssa vaan tyytyy käyttämään oppikirjan valmiita suljettuja tehtäviä.

Avoimien tehtävien käyttö oppitunnilla vaatii opettajalta taitoa ottaa kaikki edellä mainitut seikat huomioon (Blanc 1997). Se, millaisia tehtäviä opettaja valitsee, perustuu hänen tietämykseensä (Sullivan ym. 2013). Esimerkiksi Sullivanin, Clarken, Clarken ja O'Shean (2009) tutkimuksen mukaan avoimien tehtävien toteuttaminen oppitunnilla on monimutkaista. Jos opettaja tai oppilaat eivät ole ennen käyttäneet avointa lähestymistapaa, ei avoimien tehtävien käyttö välttämättä tee opetuksesta ja oppimisesta tehokasta (Kadir ym. 2017). Jotta opettaja käyttäisi opetuksessaan avoimia tehtäviä, tulee hänen ensin kiinnostua opetuksensa kehittämisestä ja sitä myötä avoimesta lähestymistavasta ja alkaa tutustua aiheeseen. Opettajan uskomuksia täytyy saada muutettua niin, että hän pitäisi avoimien tehtävien käyttöä hyvänä tapana oppia, sillä opettajan uskomukset ohjailevat jokaista hänen järjestämänsä opetus- ja oppimistilannetta (Pehkonen ym. 2013). Koska avoimien tehtävien käyttöä oppitunneilla on tutkittu enemmän vasta viimeisinä vuosikymmeninä, on luonnollista, että konsepti on osalle opettajista vielä vieras. Opettajaopiskelijoiden olisi tärkeää tutustua avoimiin tehtäviin jo koulutuksensa aikana ja saada niiden käytöstä kokemusta (Pehkonen ym. 2013). Yksi tämän tutkielman tavoitteista onkin koota yhteen avoimiin tehtäviin liittyvää tietoa ja esitellä lukijalle niiden opetuskäyttöä.

Ei riitä, että opettaja osaa valita oikeanlaisen avoimen tehtävän oppitunnille, vaan lisäksi hänen pitää osata tulkita oppilaiden mielteitä ja reagoida oppilaiden matemaattisiin vastauksiin (Sullivan ym. 2013). Vaikka tehtävä olisi hyvin valittu, se ei itsessään takaa tehokasta opettamista. Opettajan on tärkeää valita näkökulma, jota haluaa korostaa annetussa tehtävässä ja sen perusteella pohtia, miten organisoii ja ohjaa oppilaiden työskentelyä, mitä kysymyksiä kysyy ja miten haastaa oppilaita heidän matemaattisen taitotasonsa mukaan (Viseu ym. 2012). Opettajan saattaa olla vaikeaa auttaa ja opastaa oppilaita avoimessa työskentelyssä. Hänen tulisi tukea oppilaiden ajattelua ja ideointia paljastamatta liikaa ja antamatta suoria vastauksia ongelmiin.

Avoimet tehtävät ovat haasteellisia opetuksessa myös siksi, että avoimuus ja luovuus eivät sovi kovinkaan hyvin tavallisiin kokeisiin (Blanc 1997). Vaikka niitä ei voi suoraan soveltaa perinteisiin kokeisiin, on avoimien tehtävien ratkaisemista kuitenkin mahdollista arvioida. Tähän palataan seuraavassa luvussa, jossa esitellään avoimien tehtävien käyttöä opetuksessa.

Seuraavassa luvussa päästään tutkielman ytimeen eli avoimien tehtävien käyttöön opetuksessa. Luvussa annetaan konkreettisia esimerkkejä ja vinkkejä siihen, miten avoimia tehtäviä voidaan käyttää opetuksessa. Lisäksi esitellään, miten opettajan tulisi toimia, jotta avoimien tehtävien avulla opettaminen olisi mahdollisimman tehokasta ja hyödyllistä eli miten opetuksella tavoitettaisiin kaikki edellä esitetyt hyödyt. Opettajan on myös tärkeää tuntee opetuksen haasteet ja tietää, miten ne tulisi ottaa huomioon opetuksessa. Seuraava kappale siis jatkaa tästä luvusta tuoden asioita käytännöllisemmälle tasolle.

4. Avoimet tehtävät matematiikan opetuksessa

Kuten jo edellisessä luvussa on mainittu, avoimien tehtävien opetuskäyttö tarjoaa mahdollisuuden tehokkaaseen matematiikan opetukseen joustavuuden ja oppilaskeskeisyyden takia ja menetelmä onkin tullut suosittumaksi vuosi vuodelta (Munroe 2015). Tarkoituksena on saada oppilaat ymmärtämään käsitteet ja konseptit paremmin sekä kehittää oppilaiden ajattelutaitoja. Tämä kuitenkin edellyttää, että opettaja osaa käyttää avoimia tehtäviä opetuksessa oikein: hyödyntää kaikki edellisessä luvussa esiteltyt avoimien tehtävien edut, mutta myös valmistautua huolellisesti opetuksen haasteisiin ja ottaa ne huomioon opetustilanteessa. Ongelmien avulla opettaminen saattaa olla vaikea konsepti ymmärtää ja siitä ei välttämättä tiedetä tarpeeksi (Lampert 2001). Opettajat valittavat, etteivät pysty opetuksessa kunnolla toteuttamaan avointa lähestymistapaa, koska heidän tietonsa siitä, mitä pitäisi tehdä ja odottaa, ovat niin puutteelliset (Munroe 2015). Suomessa matematiikan aineenopettajan opinnot koostuvat suurelta osin ainetietouteen liittyvistä kursseista, mikä tarkoittaa, että opettamiseen liittyviä kursseja on melko vähän. Sen takia esimerkiksi avointa lähestymistapaa ei välttämättä käydä opinnoissa lainkaan läpi. Jos avoin lähestymistapa on opettajalle uusi asia, hänen täytyy luonnollisesti jo ennen tehtävän valitsemista tutustua konseptiin. Vaikka kyseessä olisi opettajalle täysin uusi opetustapa, aiheeseen tutustuminen ja huolellinen valmistautuminen helpottavat opettajan työtä opetustilanteessa (Stein, Engle, Smith & Hughes 2008).

Aivan aluksi opettajan tulee ymmärtää avoimien tehtävien todella olevan tehokas tapa opettaa, jotta hän motivoituu itse opettamaan avoimella lähestymistavalla (Pehkonen ym. 2013). On tärkeää tietää, mitkä ovat avoimen lähestymistavan tavoitteet sekä tuntea avoimien tehtävien avulla opettamisen hyödyt ja haasteet. Koko prosessi siis alkaa aiheeseen perehtymisestä. Yksi havainnollinen tapa tutustua aiheeseen voisi olla seurata oppituntia, jossa käytetään avointa lähestymistapaa. Vaihtoehtoisesti muilta opettajilta voi kysyä kokemuksia, mikäli he ovat käyttäneet opetuksessaan avoimia tehtäviä. Opettajilla saattaa olla erilainen käsitys siitä, millaista on tehokas opetus avoimien tehtävien avulla. Siksi on olennaista kollegojen näkemysten lisäksi lukea aiheesta erilaisista näkökulmista kirjoitettuna.

Avoimesta lähestymistavasta saattaa olla vaikeaa löytää tietoa kootusti, mutta esimerkiksi tämä tutkielma ja erityisesti tämä luku tarjoavat opettajalle kattavan koonnin avoimien tehtävien avulla opettamisesta. Tässä luvussa annetaan vinkkejä ja konkreettisia esimerkkejä opettajalle avoimien tehtävien käyttöä varten. Ensin tarkastellaan tehtävän valitsemista ja siinä huomioitavia asioita. Seuraavaksi esitellään, miten valmistautua oppituntiin ja millainen itse opetustilanteen tulisi olla. Lopuksi pohditaan, miten avoimia tehtäviä voidaan käyttää arviointiin ja miten avoimien tehtävien parissa työskentelyä voidaan arvioida sekä esitetään konkreettisia esimerkkejä avoimien tehtävien avulla opettamisesta.

4.1 Tehtävän valinta

Opettajan tulee pohtia avoimen tehtävän valintaa tarkasti (Stein ym. 2008). Kaikkein onnistunein aihevalinta ryhmälle on sellainen, joka kiinnostaa jokaista oppilasta ja joka sen takia herättää matemaattista keskustelua oppilaiden kesken (Nohda 2000; Sullivan ym. 1997). Usein tällainen oppilaita kiinnostava aihealue löytyy arkielämän tilanteista, koska silloin korostuu matematiikan yhteys arkielämään, ja oppilaiden on helpompi kokea matematiikka hyödylliseksi luonnollisten tilanteiden ansiosta. Sopivan aihealueen valinnan jälkeen on pohdittava, mitä oppilaat tietävät aiheesta etukäteen. On tärkeää, että oppilaat ymmärtävät tehtävän tekemiseen tarvittavat käsitteet ja konseptit. Oppilailta tulee olla edellytykset tehtävän ratkaisemiseen yksinkertaisimmalla tavalla. Tehtävän tulee olla sopivan haastava, muttei liian vaikea. Matematiikassa etevimmät oppilaat voivat yrittää ratkaista tehtävän vaikeammalla tavalla, joka saattaa vaatia ensin asioiden selvittämistä ja opettelua, mutta heidän

taitonsa riittävät tehtävän ratkaisemiseen myös tällä tavalla (Kwon ym. 2006). Siksi avoimet tehtävät ovat oikein käytettynä tehokas tapa eriyttää opetusta. Tukea tarvitsevat oppilaat voivat ratkaista tehtävän helpommalla tavalla ja edistyneemmät oppilaat vaikeammalla tavalla. Opettaja voi tarkkailla oppilaiden ratkaisutavan valintaa ja ohjata oppilaita varovasti kohti heidän taitotasoonsa sopivaa ratkaisureittiä.

On tärkeää miettiä etukäteen, mikä on avoimen tehtävän tarkoitus ja mitä tavoitteita haluaa sillä saavuttaa, jotta opettaja voi ohjata oppilaiden työskentelyä sen mukaan. Tehtävien avoimuus mahdollistaa matemaattisiin avainajatuksiin keskittymisen, ja niitä voi käyttää kannustamaan oppilaita tutkimaan, tekemään päätöksiä, yleistämään, etsimään kaavoja ja yhteyksiä, keskustelemaan sekä tunnistamaan vaihtoehtoja (Sullivan ym. 2005). Tehtävän voi valita esimerkiksi niin, että sen ratkaisemisessa tarvitaan tiettyä matemaattista käsitettä tai periaatetta. Opettaja voi valita tällaisen tehtävän, jos haluaa oppilaiden vahvistavan esimerkiksi tietyn käsitteen hallintaa. Avoimen tehtävän ja valitun käsitteen parissa työskentely tukee käsitteen vahvistamista, koska oppilaat ratkaisevat ongelmaa, ja samalla arkielämä yhdistyy oppimisympäristöön (Pehkonen ym. 2013). Toisaalta tavoitteena voi olla uuteen aiheeseen johdattelu ongelman kautta. Ongelma saa oppilaat helpommin motivoitumaan aiheeseen ja vastaanottamaan uutta tietoa. Tavoitteiden ei tarvitse välttämättä edes liittyä opintojakson aiheisiin, vaan esimerkiksi luovuuden ja matemaattisen ajattelutaidon kehittämiseen. Tällöin pääpaino on nimenomaan edellisessä luvussa esitettyjen avoimien tehtävien positiivisten vaikutusten saavuttamisessa eikä niinkään tietyn aiheen osaamisen vahvistamisessa.

Kuten jo edellisessä luvussa mainittiin, oppikirjoissa on usein pelkästään suljettuja tehtäviä. Opettaja joutuu etsimään avoimia tehtäviä muualta tai tekemään niitä itse, mikäli haluaa käyttää niitä opetuksessa. Suljetuista tehtävistä on kuitenkin mahdollista tehdä avoimia tehtäviä, jos muuttaa alkuohtoja. Tutkimustehtävän saa aikaan, jos alkuperäisestä tehtävästä jättää pois osan informaatiosta (Leppäaho 2007). Tällöin oppilas joutuu pohtimaan erilaisia vaihtoehtoja ja tutkimaan eri arvoja ongelmaa ratkaistessaan. Jos aiheesta on mahdollista muodostaa suurempi kokonaisuus, voi siitä tehdä projekti-tehtävän, jossa ongelmaa työestetään pidemmän aikaa ja mahdollisesti jatkojalostetaan. Samoin ongelmasta voidaan jättää pois kysymys tai tehtävänanto (Leppäaho 2007), jolloin ongelma muuttuu ongelmanasettelutehtäväksi tai tehtäväksi ilman kysymystä, joista molemmat ovat avoimia tehtäviä. Tällöin oppilaan täytyy miettiä erilaisia vaihtoehtoja ja tehdä valintoja sen suhteen, millaista tehtävää alkaa ratkaista.

Tehtävien muokkaaminen avoimiksi tehtäviksi tai kokonaan uusien tehtävien luominen saattaa aluksi tuntua vaikealta, mutta helpottuu ja selkeytyy, kun tutustuu ensin jo valmiisiin avoimiin tehtäviin. Arkielämän tilanteisiin liittyviä avoimia tehtäviä voi kehittää suoraan arkisista tilanteista oppilaita kiinnostavista aiheista. Jos pitää mielessä avoimet tehtävät, opettaja voi keksiä hyvän aihealueen arkitilanteesta ja muokata siitä sopivan tehtävän oppilaille. Opettaja voi muodostaa ongelmakenttätyyppisen tehtävän valitsemalla tai luomalla ensin yhden ongelman ja muokkaamalla sen jälkeen esimerkiksi ongelman arvoja tai asetelua erilaiseksi (Ahtee ym. 2000). Näin samasta aihealueesta muodostuu monta avointa ongelmaa, jotka liittyvät toisiinsa, mutta joita pitää tarkastella eri näkökulmista.

Oppilastyöt ovat olennainen osa luonnontieteiden opiskelua, mutta niitä voi käyttää myös matematiikan opetuksessa. Oppilastöissäkin ääripäinä voidaan pitää suljettua ja avointa työskentelyä. Suljetussa työskentelyssä oppilaat saavat valmiin työohjeen, jota seurata, kun taas avoimessa työskentelyssä oppilaille saatetaan antaa vain aihepiiri, josta tulee itse rajata kiinnostava ratkaistava ongelma (Ahtee ym. 2000). Esimerkki avoimen oppilastyön tehtävänannosta voisi olla: ”Tutki leivontatarvikkeiden liukoisuuksia.” Tarkoituksena on löytää aihe, joka kiinnostaa oppilaita ja joka käsittelee oppilaille valmiiksi tuttua aihepiiriä.

4.2 Valmistelu

Osa opettajista ei halua antaa oppilailleen ratkaistavaksi avoimia tehtäviä, koska he pelkäävät oppilaiden esittävän ratkaisuja, joita eivät itse ymmärrä tai kysymyksiä, joihin eivät osaa vastata (Munroe 2015). Opettajan ei voi odottaa osaavan suoraan vastata kaikkiin kysymyksiin, mutta onneksi aina voi tehdä selvitystyötä. Hyvä valmistautuminen on kuitenkin opettajan suurin valttikortti näitä tilanteita varten. Oppitunnin valmisteluun ei riitä pelkästään tehtävän valitseminen, vaan opettajan tulee valmistautua myös muilla tavoilla. Esimerkiksi tehtävän asetelulla ja sillä, miten sen esittelee oppilaille, on suuri merkitys (Stein ym. 2008). Jos avoin lähestymistapa on oppilaille uusi konsepti, opettajan on pohdittava, miten johdatella oppilaita tehtävien uudenlaiseen lähestymiseen ja miten saada työskentely onnistumaan. Avoimien tehtävien tekeminen vaatii oppilailta erilaista työskentelyä ja eri taitojen käyttämistä kuin tavallisesti. Siksi tehtävien ratkominen ja siihen vaadittava prosessi on oppilaille haastavaa, jos he eivät ole ennen työskennelleet avoimien tehtävien parissa.

Opettajan tulisi ennen avoimen tehtävän teettämistä opettaa oppilaille apukeinoja ongelmien ratkaisemiseen (Haapasalo 2011). Mikäli ongelmanratkaisun apuvälineitä ei ole opetettu, erityisesti heikosti matematiikassa pärjäävien oppilaiden saattaa olla vaikeaa päästä alkuun avoimen tehtävän ratkaisemisessa. Ongelmanratkaisustrategiat ja -mallit ovat apuvälineitä, joiden käyttöä opettaja voi opettaa oppilaille avuksi ongelmien ratkaisemiseen (Pólya 2014). Muutama opittu ongelmanratkaisustrategia ja -malli antaa oppilaille työkalut pohtia tehtävää ja päästä ongelmatilanteesta eteenpäin (Pehkonen ym. 1991). Oppilaat saattavat pelästyä tehtävien avoimuutta, koska eivät suoraan tiedä, mitä tehdä seuraavaksi. Juuri näitä malleja ja strategioita seuraamalla oppilaalla on aina uusi kysymys tai näkökulma, jota soveltaa ongelmaan seuraavaksi. Vaikka oppilas seuraisi tiettyä strategiaa tai mallia hyvinkin tarkasti, ei avoimen tehtävän ratkaisemisesta tule silti rutiinia, sillä ne antavat ainoastaan vinkkejä ratkaisemisen seuraaviin vaiheisiin eikä valmista rakennetta koko ratkaisulle.

Avoimia tehtäviä opetuksessaan käyttävän opettajan tulisi yrittää ymmärtää oppilaiden keskustelusta heidän ajatuksiaan, jotta hän voisi jalostaa ideoita matemaattiseen toimintaan ja kannustaa oppilaita eteenpäin (Nohda 2000). Koska avoimet tehtävät korostavat konstruktiivista oppimiskäsitystä, jossa oppilaiden ajatusten kehittyminen ja rakentuminen ovat tärkeitä, opettajan tulee kuunnella oppilaita ja heidän ajatuksiaan tarkasti. Opettajan tulisi yrittää hyödyntää oppilaiden pohdintoja ja edetä opetuksessa niiden mukaan. Jo ennen opetustilannetta on hyvä pohtia, mitä kysymyksiä voi esittää oppilaille viedäkseen heidän ajatteluaan oikeaan suuntaan (Viseu ym. 2012). Opettajan pitää kuunnella oppilaiden ajatuksia tarkasti ja reagoida matemaattisiin ratkaisuihin oikealla tavalla (Sullivan ym. 2013).

Yksi avoimen lähestymistavan avulla opettamisen peruseriaatteista liittyy opettajan päätöksentekoon: opettajan on tärkeää antaa oppilaiden ehdottaa kaikkia odottamattomiakin ajatuksia ja ratkaisutapoja (Nohda 2000). Tämä saattaa olla hyvinkin vaikeaa, jos oppilaat esittävät täysin odottamattomia ideoita, joihin opettaja ei ole pystynyt valmistautumaan. Ennen oppituntia opettajan tulisi pohtia mahdollisimman monta ratkaisutapaa tehtävään ja pohtia niihin liittyviä ajatuksia. Opettajan tulisi miettiä etukäteen, millaisia kysymyksiä oppilaat saattavat esittää. Tällöin opettaja on valmistautunut oppilaiden ideoihin ja ehdotuksiin niin hyvin kuin mahdollista ja voi johdatella ratkaisua oppilaiden valitsemaan suuntaan. Toinen avoimen lähestymistavan avulla opettamisen peruseriaatteista onkin arvostaa oppilaiden toimintaa (Nohda 2000). Tämä saattaa olla haastavaa, mikäli opettaja on verrannut ratkaisuvaihtoehtoja ja arvottanut niistä mielessään yhden muita paremmaksi. Opettajan pitäisi kuitenkin pystyä antamaan oppilaille vapaus kehittää ratkaisua heidän valitsemaansa suuntaan. Lisäksi opettajan on hyvä miettiä, miten arvelee oppilaiden alkavan ratkaista ongelmaa, miten he saavat tehtävän ratkaistua ja millaisia vääriä ratkaisuja he saattavat ehdottaa (Stein ym. 2008). Välillä oppilaille syntyy matematiikan opetuksessa virhekäsityksiä, joita on vaikea korjata jälkikäteen. Jos opettaja tietää ryhmän oppilaiden yleiset virhekäsitykset, hän pystyy suunnittelemaan

avoimen tehtävän siten, että se keskittyy nimenomaan virhekäsityksiin, ja korjaa ne oppilaiden ratkaistessa ongelmaa.

Tarkoituksena on, että oppilaat ratkaisisivat avointa tehtävää oman matemaattisen taitotasonsa mukaisesti. Opettajan on hyvä valmistautua jo etukäteen siihen, miten ohjata matematiikassa taitavia oppilaita haastamaan itsensä. Toisaalta on hyvä valmistautua myös heikompaan oppilasta auttavaan kysymykseen, joiden avulla olisi tarkoitus koota ajatuksia ja päästä ratkaisussa eteenpäin, jos oppilas on aivan jumissa ratkaisun kanssa.

4.3 Opetustilanne

Edellisessä aluvuossa kerrottiin, miten opettajan tulisi valmistautua ennen oppituntia. Tässä aluvuossa esitellään ohjeita opettajalle oppitunnilla työskentelemiseen. Yksi tapa käyttää avoimia tehtäviä opetuksessa on *keksivä oppiminen* (Ahtee ym. 2000). Sitä ei ole tarkasti määritelty lukuisien siihen kuuluvien opetus- ja oppimisstrategioiden takia, mutta olennaista sen mukaan on, että oppilaan tulisi löytää ja keksiä uutta, ja opettajan tulisi tarjota tietoa sellaisessa muodossa, että se on mahdollista (Ahtee ym. 2000). Oppilaan rooli on hyvin aktiivinen, koska hänen pitää ihmetellä, kyseenalaistaa opittava asia ja tehdä kysymyksiä. Siksi keksivää oppimista pidetään suositeltavana oppimisen tapana (Ahtee ym. 2000). Erityisesti matematiikan opetuksen tarkoitukseen keksivästä oppimisesta on johdettu jo edellisessä luvussa esitelty avoin ongelmanratkaisu, joka on avoimien tehtävien avulla opettamista.

Avointa lähestymistapaa sisältävällä oppitunnilla opettajan tulisi aivan ensin kertoa oppilaille tarkasti, mitä heidän on tehtävän avulla tarkoitus oppia (Sullivan ym. 2013). Näin oppilaat saavat käsityksen siitä, mitä heiltä odotetaan, ja miksi tehtävä on opiskelun kannalta olennainen. Tehtävän esittelyn hetkellä, käynnistysvaiheessa, opettaja esittelee ongelman, joka sisältää olennaisia matemaattisia ajatuksia sekä välineet, jotka oppilaille on käytettävissä tehtävän ratkaisemiseksi (Stein ym. 2008). Ongelmanratkaisu alkaa sillä, että oppilas tulee tietoiseksi ongelmasta ja päättää ratkaista sen (Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco 2012). Opettajan on hyvä tässä vaiheessa korostaa niitä tehtävänannon puolia, joihin haluaa oppilaiden keskittyvän (Munroe 2015). Oppilaat alkavat tutkia ongelmaa ja Pólyan ongelmanratkaisumallin mukaan yrittävät selvittää, mitkä ovat annettuja tietoja ja mitkä tuntemattomia (Pólya 2014). Hähkiöniemen, Leppäahon ja Franciscon (2012) mallin mukaan ratkaisija etenee tiettyä sykliä pitkin: ongelman asettaminen, ratkaisun tutkiminen, arvauksen tekeminen ja perustelu tai arvauksen tarkasteleminen. Opettaja voi käyttää tätä mallia auttamaan oppilaiden ratkaisuprosessia esimerkiksi kehottamalla palaamaan edelliseen vaiheeseen, jos he ovat vahingossa hypänneet sen yli.

Oppilaiden työskentely avoimen lähestymistavan parissa koostuu kolmesta vaiheesta: ongelman matemaattisesta muodostamisesta, erilaisten lähestymistapojen tutkimisesta ja uusien ongelmien asettamisesta (Nohda 2000). Ensimmäisessä vaiheessa opettaja näyttää oppilaille alkuperäisen tehtävän ja oppilaat yrittävät muodostaa siitä matemaattisen ongelman oman osaamistasonsa mukaisesti (Nohda 2000). Optimaalisessa tilanteessa oppilas tekee valintoja sen suhteen, mitä haluaa tutkia ongelmaan liittyen (Hähkiöniemi ym. 2012) eli oppilas muodostaa ongelmasta omanlaisensa ongelman. Opettajan tulee esitellä tehtävänannossa esiintyvät käsitteet, jos ne eivät ole oppilaille valmiiksi tuttuja. Opettajan tulisi myös muistuttaa oppilaita avoimen työskentelyn periaatteista eli esimerkiksi, että tehtävään on monta eri ratkaisua ja ratkaisutapaa, oppilaiden on tarkoitus olla luovia ja että kaikki ideat ovat hyviä ja pohtimisenarvoisia (Sullivan ym. 2013). Tämä olisi hyvä tehdä ennen tehtävän esittelemistä, jotta oppilaat keskittyvät siihen, mitä opettaja sanoo, eivätkä yritä jo työstää ongelmaa.

Esittelyn jälkeistä vaihetta kutsutaan tutkimisen vaiheeksi (Stein ym. 2008). Siinä oppilaat alkavat käsitellä ongelmaa. He tutkivat ratkaisuvaihtoehtoja ja yrittävät erilaisia ajatuksia (Hähkiöniemi ym.

2012). Samalla opettajan pitää tarkkailla oppilaiden matemaattista ajattelua, mikä onnistuu kiertelemällä luokassa (Stein ym. 2008). Tämä on tärkeää siksi, että opettaja pääsee selville oppilaiden oppimispotentiaalista ja seikoista, jotka olisi hyvä jakaa koko luokan kesken (Stein ym. 2008). Opettajan tulee vastustaa kiusausta kertoa oppilaille, miten ongelma ratkaistaan ja antaa heidän itse tutkia tehtävää rauhassa (Sullivan ym. 2013). Mikäli oppilaat eivät pääse ajattelussa eteenpäin, heitä tulisi kuitenkin kannustaa pyytämään apua, jotta he ottavat enemmän vastuuta oppimisestaan (Munroe 2015). Opettaja voi esimerkiksi muistuttaa oppilaita harjoitelluista ongelmanratkaisumalleista ja -strategioista, ja yrittää niiden avulla johdatella oppilaiden ajattelua eteenpäin. Opettajan on tärkeää olla auttamatta liikaa (Boaler ym. 2015). Oppilaiden tulisi saada kokemusta itsenäisestä työskentelystä niin, etteivät kuitenkaan jää yksin ongelman kanssa (Pólya 2014). On siis hyvin olennaista, että opettaja pystyy olemaan antamatta oppilaille liikaa vihjeitä. Tämä on usein opettajille vaikeaa, mutta avoimen lähestymistavan toteutuminen vaatii, että oppilaat ratkaisevat ongelmia itse ja opettajan rooli on enemmänkin ohjaava ja tukeva.

Tässä vaiheessa oppilaat tarkastelevat erilaisia lähestymistapoja muodostamaansa ongelmaan ja yrittävät löytää ratkaisun omien tietojensa ja taitojensa perusteella (Nohda 2000). Pólyan ongelmanratkaisumallissa kyseessä on toinen vaihe eli oppilaat tekevät suunnitelman siitä, mitä lähestymis- ja ratkaisutapaa yrittävät käyttää ongelmaan sekä kolmas vaihe, jossa suunnitelma toteutetaan eli ongelma yritetään ratkaista (Pólya 2014). Oppilaiden tulee valmistautua myös selittämään ja perustelemaan lähestymistapansa muille oppilaille. Näin varmistetaan, että oppilaat todella ymmärtävät, mitä ovat tehneet (Munroe 2015). Oppilaiden olisi tarkoitus pohtia tehtävää hetken ensin itse, minkä jälkeen he voivat toisiaan apuna käyttäen yrittää löytää ongelmaan mallikkaan ratkaisun (Stein ym. 2008).

Oppilaiden tutkittua tehtävää siitä on tarkoitus keskustella yhteisesti koko luokan kesken, jotta oppilaat saavat jaettua ajatuksiaan. Opettajan rooli koko luokan yhteisessä keskusteluvaiheessa ei ole korostaa ja hyväksyä tiettyä ratkaisu- ja lähestymistapaa oikeana eikä näyttää esimerkkejä ratkaisuprosesseista, vaan kehittää ja rakentaa oppilaiden omia ja koko luokan yhteisiä ideoita (Stein ym. 2008). Oppilaiden on tärkeää harjoitella kriittistä ajattelua perustelemalla, miksi on valinnut tietyn lähestymistavan, jotta he oppivat katsomaan laskua pidemmälle ja miettivät tehtävän soveltamista todelliseen elämään (Munroe 2015). Tämä on Pólyan ongelmanratkaisumallin viimeinen vaihe (Pólya 2014), jossa pyritään tarkastelemaan ratkaisua, sen oikeellisuutta ja käytettävyyttä. Jos opettaja kysyy oppilailta kysymyksiä, tutkimusten mukaan on hyvin tärkeää antaa heille tarpeeksi aikaa miettiä kysymystä ennen vastaamista, jotta oppilaan itsevarmuus ja ajattelutaidot kehittyvät (Munroe 2015). On hyvin yleistä, että oppilaille annetaan liian vähän vastausaikaa, eikä kysymyksiin siksi ehditä vastata. Keskusteluvaiheen tavoitteena on, että jokainen saisi uusia näkökulmia katsoa ongelmaa ja löytäisi asioita, joita ei välttämättä ole itse vielä ongelmasta huomannut. Tämän jälkeen oppilaat voivat jatkaa ongelman parissa työskentelyä yksin tai pienessä ryhmässä, mikäli tehtävää on tarkoitus ratkaista ryhmissä. Kun oppilaat tai ryhmät ovat saaneet ratkaisunsa muodostettua, siirrytään vertailemaan erilaisia ratkaisuja. Tarkoituksena on, että oppilaat ja ryhmät esittelevät ratkaisunsa ja niistä keskustellaan. Tässä vaiheessa opettajan olisi myös hyvä kehottaa oppilaita käyttämään oikeita matemaattisia käsitteitä ja symboleja sanallisen selityksen sijaan, jotta ne tulevat oppilaille tutuiksi (Munroe 2015).

Oppilaiden keskustellessa erilaisista lähestymistavoista opettajan tulisi luoda luokkaan hyvä ilmapiiri matemaattiselle keskustelulle. Tavoitteena on kannustaa oppilaita osallistumaan keskusteluun ja antaa heidän ymmärtää, kuinka tärkeää aktiivisuus on (Munroe 2015). Jos opettaja ei ole ennen toiminut luokkakeskustelun vetäjänä, se on aluksi vaikeaa, mutta kehittyy harjoituksen myötä (Stein ym. 2008). Opettajan pitäisi opastaa oppilaita keskustelemaan erilaisten ehdotettujen ratkaisujen suhteesta toisiinsa ja johdatella heitä yhdistelemään erilaisten ratkaisujen osia muodostaen lopulta siistin ratkaisun (Nohda 2000). Erilaisia ratkaisuja esiteltäessä opettaja voi kysyä, kuka teki ratkaisun toisella tavalla tai kenellä on eri perustelu (Munroe 2015). Tärkeintä on, että oppilaiden toiminta on avointa, eli että he pohtivat ja muodostavat kysymyksiä (Sullivan ym. 1997). Opettajan tulisi välttää

sanomasta ”tuo on väärin”, yrittää ymmärtää oppilaan ajattelua ja työstää sitä eteenpäin (Boaler ym. 2015). Asian voi muotoilla esimerkiksi kertomalla oppilaalle ymmärtävänsä, mitä hän yrittää ja esittämällä tietyn seikan, miksi valittu tapa ei toimi tai kehottamalla kiinnittämään huomiota erityisesti johonkin tiettyyn asiaan.

Avoimen tehtävän pitäisi soveltua taitotasoltaan hyvin eritasoisille oppilaille. Opettaja pystyy opetustilanteessa auttamaan heikompaa sekä taitavampaa oppilasta. Kaikkein tärkeintä on, että opettajalla on korkeat odotukset kaikkia oppilaita ja heidän suorituksiaan kohtaan, jotta vältetään vähättelemästä oppilaan taitoja (Munroe 2015). Kuka tahansa oppilas voi pärjätä tiettyssä avoimessa tehtävässä hyvin. Mikäli heikommalla oppilaalla on vaikeuksia tehtävän kanssa, opettaja voi pyytää häntä muotoilemaan, miten hän näkee ongelman (Boaler ym. 2015). Se on loistava kysymys, koska oppilas joutuu pohtimaan ongelmaa ja selittämään ajatuksiaan ääneen, mikä yleensä johtaa uusiin ideoihin ja parempaan ymmärrykseen. Oppilaiden saattaa välillä olla vaikeaa tunnistaa tehtävänannosta olennainen tieto. Opettaja voi auttaa tässä korostamalla tärkeimpiä tietoja (Munroe 2015). Myös esimerkiksi Pólyan ongelmanratkaisumalliin liittyvät kysymykset ovat sellaisia, joita opettaja voi kysyä oppilailta auttaakseen heitä eteenpäin.

Optimaalisen ratkaisuprosessin mukaan ongelman ratkaisun jälkeen oppilaan tulisi palata takaisin alkuperäiseen ongelmaan, muodostaa uusi ongelma ongelmavariointiin tai ongelmakentän tapaisesti ja alkaa tutkia ongelmaa toisella tavalla (Hähkiöniemi ym. 2012). Tämä sopii hyvin tehtäväksi oppilaille, joka on tehtävänsä kanssa valmis. Jos matematiikassa lahjakas oppilas on saanut ongelman jo ratkaistua, opettaja voi pyytää häntä keksimään uuden vastaavan, mutta vaikeamman kysymyksen (Boaler ym. 2015). Tällainen ongelmanasettelu vaatii oppilaalta syvempää ajattelua (Boaler ym. 2015), ja on siksi nopealle ja taitavalle oppilaalle hyvä jatkotehtävä. Samalla oppilaan ajattelu laajenee ja kehittyy (Sullivan ym. 2005). Kun nopeimmat oppilaat ovat valmiita, he voivat ratkaista toistensa tekemiä uusia ongelmia samasta aiheesta. Luokkatovereiden tekemien tehtävien ratkaiseminen on oppilaista usein kiinnostavaa ja saattaa samalla motivoida oppilaita aktiiviseen työskentelyyn. Jos eritasoisia oppilaita sisältävä oppilasryhmä jaetaan pienempiin ryhmiin, joissa avointa tehtävää työskentelee yhdessä, voisi olla toimivaa jakaa oppilaat vaihkeaa taitotasojen mukaisesti tasoryhmiin, jotta he pystyvät toimimaan ryhmässä yhdenvertaisina ja rakentamaan yhteistä ratkaisua. Opettajan tehtävä on muotoilla jatkotehtävät siten, ettei oppilaista tunnu, että he joutuvat toistamaan samaa, ja että heitä rangaistaan nopeasta ongelmanratkaisusta (Sullivan ym. 2005).

Opettajan tulee kannustaa oppilaita matemaattisten ideoiden rakentamisen lisäksi myös arvioimaan omia sekä muiden oppilaiden matemaattisia ajatuksia (Stein ym. 2008). Tehtävien arviointi kuuluu Bloomin taksonomian ajattelun tasoilla korkeampiin taitoihin ja siksi oppilaiden tulisi pyrkiä harjoittelemaan sitä. Tässä keskustelun ja ratkaisujen yhteen kokoamisen vaiheessa oppilaiden on tarkoitus vertailla erilaisia ratkaisuja, löytää niistä yhteyksiä ja keskustella niistä (Stein ym. 2008). Jos opettaja on kierrellyt luokassa tarkkailemassa oppilaiden työskentelyä, hän tietää, kenen kannattaa esittää ratkaisunsa kaikille yhteisesti. Opettaja voi pyytää luokasta vapaaehtoisia oppilaita esittämään ratkaisunsa, mutta valitsemalla esittäjät hän voi valita oppilaita, joiden ratkaisuihin on kaikille erityisen hyödyllisiä seikkoja (Stein ym. 2008). Näin saadaan myös todennäköisemmin aikaan hyvää keskustelua aiheesta. Ajankäytöllisesti ongelman ratkaisemiseen kannattaa käyttää noin puolet käytettävästä ajasta, jolloin toinen puoli jää ongelman, ratkaisujen ja strategioiden läpikäymiseen yhdessä (Lampert 2001). Toki on otettava huomioon, millaisesta tehtävästä on kyse. Jos avoin tehtävä on projekti tai muu useamman oppitunnin tai koko oppijakson kestävä kokonaisuus, on ajankäyttö mietittävä toisin.

Yksi avoimien tehtävien tavoitteista on korostaa sitä, että tehtävällä on useita erilaisia hyviä ratkaisutapoja yhden ainoan oikean ja parhaan sijasta. Erilaisten lähestymistapojen vertailussa on tärkeää, ettei oppilaista tunnu, että heidän ratkaisutapansa olisi jollakin tavoin muita huonompi. Opettaja voi korostaa oppilaille, että mitä useampi ratkaisutapa löydetään, sen parempi (Stein ym. 2008). Ratkaisuja voidaan kuitenkin verrata esimerkiksi käytettävyydeltään ja tehokkuudeltaan tiettyissä tilanteissa.

Oppilaiden esitellessä omia ratkaisujaan on tärkeää käydä niitä tarkasti läpi, eikä pelkästään esitellä eri ratkaisuja. Muuten ratkaisujen läpikäymisestä ei ole oppilaille juurikaan hyötyä. Opettaja voi korostaa eri ratkaisujen yhteydessä, mitä matemaattisia ajatuksia kukin strategia tuo esiin ja miten erilaiset ratkaisut ovat yhteydessä toisiinsa (Stein ym. 2008), ja näin tilanteesta tulee oppilaille hyvin hyödyllinen. Opettaja voi pyytää tässä vaiheessa oppilaita tutkiskelemaan ratkaisunsa käytännön sovelluksia (Munroe 2015). Lopuksi oppilaiden on tarkoitus yrittää muodostaa ratkaisustaan yleisempi ongelma, jonka ratkaisemalla he löytävät yhä yleisemmän ratkaisun (Nohda 2000).

Opettajan tehtävä on jutella oppilaiden kanssa matematiikasta, jonka parissa he työskentelevät, ohjata oppilaita ja laajentaa heidän ajatteluaan (Boaler ym. 2015). Oppilaat suoriutuvat avoimista tehtävistä hyvin siksi, että opettajalla on enemmän aikaa keskustella oppilaiden kanssa, kun he työstävät ongelmaansa (Boaler ym. 2015). Opettajan pitäisi pystyä asettumaan oppilaan asemaan, yrittää katsoa ongelmaa oppilaan silmin ja ehdottaa sellaisia asioita, jotka saattaisivat tulla oppilaan mieleen (Pólya 2014). Oppilaiden esittämät kysymykset ovat avainasemassa, mutta heitä voi olla vaikea saada kysymään kysymyksiä vapaasti ja avoimesti. Eräs tapa houkuttaa oppilaita kysymään rohkeasti on kirjoittaa kysymykset luokan seinälle esimerkiksi julisteisiin koko luokan mietittäviksi (Boaler ym. 2015). Tällöin oppilaat saavat käsityksen kysymystensä merkittävydestä, kun ne kirjoitetaan jopa seinälle. Opettaja voi kirjoittaa taululle muitakin oppilaiden ajatuksia ja viedä oppituntia eteenpäin niiden avulla oppilaiden asettamista lähtökohdista. Tällainen oppilaiden omien selitysten ja perusteluiden käyttäminen oppitunnin sisältönä on yksi tapa aktivoida ja motivoida oppilaita osallistumaan (Munroe 2015).

Oppitunnille tulisi pystyä luomaan positiivinen oppimisen ilmapiiri, jossa oppilaat uskaltavat ottaa riskejä, kertoa mielipiteensä ja tehdä virheitä ilman pelkoa luokkatovereiden ivaamisesta ja tuomitsemisesta. Opettajan tulee jatkuvasti muistuttaa oppilaita siitä, että ponnistelu ja epäonnistuminen ovat hyvästä (Boaler ym. 2015). Oppilaiden tulisi tukea toistaan, uskaltaa yrittää erilaisia ratkaisutapoja, pohtia ideoita heti arvostelematta niitä ja jatkaa yrittämistä vastoinkäymisistä huolimatta (Boaler ym. 2015). Yleisesti tiedetään oppimismahdollisuuksien maksimoituvan, kun oppilaat tutkivat aktiivisesti, uskaltavat ottaa riskejä ja tehdä virheitä sekä pystyvät kommunikoimaan keskenään ja selittämään ajatuksensa toisille (Sullivan ym. 1997). Virheiden tekemisen pitäisi tuntua turvalliselta ja oppilaiden olisi hyvä uskaltaa vastustaa perinteisiä ajatuksia ja yrittää vilttejäkin ideoita (Boaler ym. 2015). Kaikkein tuotteliain luokkahuone on sellainen, jossa oppilaat käsittelevät monimutkaisia ongelmia, heitä kannustetaan ottamaan riskejä, he joutuvat ponnistelemaan ja tekemään virheitä, mutta heistä tuntuu silti hyvältä työskennellä vaikean ongelman parissa (Boaler ym. 2015). Opettaja pystyy vaikuttamaan suuresti oppitunnin ja ryhmän ilmapiiriin kannustamalla oppilaita yrittämään ja toisaalta ehkäisemällä virheiden pilkkaamista. Oppimismahdollisuuksien maksimoituminen edellyttää lisäksi, että oppilaita kannustetaan kehittämään ja käyttämään omia strategioitaan ja tiedon pitäisi rakentua konstruktiiivisesti vanhan tiedon ja kokemuksen päälle (Sullivan ym. 1997).

Yksi tapa luoda luokkahuoneeseen positiivinen oppimisen ilmapiiri on jakaa oppilaat pieniin ryhmiin tekemään tehtävää. Silloin ongelman ratkaiseminen on kiinni ryhmän jäsenistä ja heidän ideoistaan, mikä edistää yhteistoiminnallista oppimista ja sitä kautta positiivista oppimisympäristöä. Ryhmätyöskentelyn on todettu muutenkin olevan tehokas tapa oppia matematiikkaa (Boaler ym. 2015). Parhaassa tapauksessa oppilaat jakavat ideoita, vertailevat niitä ja lähtevät työstämään niistä parhaita eteenpäin. Opettajan tulee miettiä ryhmäjakoa, jotta työskentely sujuisi mahdollisimman hyvin. Täsoryhmät ovat hyvä vaihtoehto, koska silloin todennäköisimmin jokainen pystyy osallistumaan ratkaisemiseen tasavertaisesti eikä jää toimeettomaksi osaamattomuuden takia. Luokka kannattaa järjestää siten, että pulpetit ovat pienissä ryhmissä ja oppilaat istuvat toisiaan vastatusten, jotta he todella kohtaavat toisensa kasvokkain ja heidän on helpompi keskustella (Lampert 2001).

Oppilaiden matemaattinen keskustelutaito kehittyy, kun he keskustelevat erilaisista vaihtoehdoista ja perustelevat mielipiteitään (Kwon ym. 2006; Viseu ym. 2012). Perustelutaito onkin matematiikassa

tärkeää (Boaler ym. 2015). Yhdessä työskentely edistää positiivisen ilmapiirin lisäksi yhteistyötaitoja ja tehostaa oppimista (Kwon ym. 2006). Oppilaiden ryhmässä työskentelyn lisäksi opettaja voi yrittää edistää positiivista oppimisilmapiiriä korostamalla oppilaille, ettei tehtävän ratkaisemisessa ole tärkeitä oikean vastauksen saaminen, vaan ajatus työ ja se, miten tehtävää ratkaisee. Tämän sisäistettyään oppilaat eivät enää lannistu väärän vastauksen saamisesta, vaan alkavat arvioida ratkaisuaan ja sen vaiheita uudelleen. Oppilaat ymmärtävät, ettei väärän vastauksen saaminen ole katastrofi ja että virheen tekeminen on oikeastaan hyödyllistä ja opettavaista. Oppilaiden hyväksyessä virheiden tekemisen oppimisilmapiiri muuttuu positiivisemmaksi, kun virheitä ei enää tarvitse pelätä. Kun luokassa vallitsee positiivinen oppimisympäristö, jossa ei välitetä virheistä, opettaja voi pyytää oppilasta esittämään väärinkin ratkaistun tehtävän taululle, jolloin oppilaat voivat yhdessä miettiä, mikä kohta ja ajatus tehtävässä on väärin (Munroe 2015). Näin saadaan luokan oppilaat toimimaan ja kehittymään yhdessä ja estetään muiden oppilaiden tekemän saman ajatusvirheen.

Aivan oppitunnin lopuksi oppilaita on hyvä pyytää kirjoittamaan sanallinen tiivistelmä siitä, mitä he ovat oppineet, mitä eivät ymmärtäneet, mistä pitivät oppitunnissa ja mitkä kysymykset jäivät askarruttamaan mieltä sekä yleisesti mielipiteitä eri ratkaisumenetelmistä ja miten opittua voisi hyödyntää (Munroe 2015). Myös taululle voidaan kirjoittaa yhteinen tiivistelmä kaikista oppilaiden ideoista ja koko oppitunnista.

4.4 Arviointi

Avoimia tehtäviä on vaikeaa käyttää suoraan tavallisessa kokeessa ratkaisujen moninaisuuden ja eritasoisuuden takia. Yksittäisen avoimen tehtävän ratkaisemiseen käytetään yleensä reilusti aikaa, mitä perinteisessä kokeessa ei ole. Voidaan siis todeta, että avoimet tehtävät eivät sovellu kovin hyvin perinteisiin kokeisiin. Se ei kuitenkaan tarkoita, että avoimia tehtäviä ei voisi käyttää oppilaiden arvioimiseen tai että avoimien tehtävien ratkaisemista ei voisi arvioida. Vaikka avoimien tehtävien hallitsemista on vaikeaa mitata perinteisillä kokeilla, sitä voidaan mitata muilla tavoilla.

Avoimien tehtävien tekemisen arvioimista vaikeuttaa se, että opettajan tulee arvioida oppilaan ajatus työtä ja koko prosessia eikä tehtävän ratkaisun oikeellisuutta. Voi tuntua vaikealta mitata oppilaan matemaattista ajattelua ja luovuutta oikean ratkaisun sijaan, mutta Nohda (2000) on kehittänyt neljä kriteeriä, joiden avulla oppilaan ratkaisua voidaan arvioida: sujuvuus, joustavuus, omaperäisyys ja tyylikkyys. Sujuvuutta voidaan mitata sillä, kuinka monta ratkaisua oppilas osaa tuottaa ja joustavuutta löydettyjen matemaattisten ideoiden määrällä (Nohda 2000). Omaperäisyydellä mitataan oppilaan ajatusten omaperäisyyden tasoa ja tyylikkyydellä sitä, kuinka yksinkertaisesti ja selvästi oppilas on ilmaissut ajatuksensa (Nohda 2000). Perinteisillä kokeilla pystytään mittaamaan, kuinka hyvin oppilas hallitsee tietyt asiat, mutta avoimet tehtävät tarjoavat mahdollisuuden mitata laajemmin oppilaan matemaattisia taitoja. Niiden on todettu jopa helpottavan arvioimista, koska niiden avulla pystytään oikeasti arvioimaan oppilaiden ajattelutaitoa ja käsiteltyjen asioiden ymmärtämistä ulkoa oppimisen sijaan (Kwon ym. 2006).

Miten arviointi avoimien tehtävien ja näiden kriteerien perusteella onnistuu konkreettisesti? Opettaja voi antaa oppilaille oppijakson alussa tehtäväksi yhden tai useamman avoimen tehtävän. Tämän jälkeen opiskellaan oppijakson asiat ja ajattelutaidon ja luovuuden odotetaan kehittyvän. Oppijakson lopussa opettaja antaa oppilaille tehtäväksi samat tehtävät kuin oppijakson alussa ja vertaa yksittäisen oppilaan ratkaisuja keskenään (Nohda 2000). Tällöin opettaja voi edellä esitettyjen kriteerien perusteella arvioida, miten oppilaan matemaattinen ajattelu on kehittynyt oppijakson aikana. Samaa voidaan soveltaa yksittäiseen oppituntiin, jolloin ajattelun kehitystä mitataan yksittäisen oppitunnin alussa ja lopussa. Tämä vie oppitunnista kuitenkin melko paljon aikaa, joten se ei välttämättä sovellu kovin hyvin yksittäiseen lyhyeen oppituntiin, mutta voisi soveltua esimerkiksi pidempään kaksois-tuntiin.

4.5 Konkreettinen esimerkki oppitunnista

Nohda (2000) esittelee esimerkkinä avoimien tehtävien opetuskäytöstä ja oppitunnin kulusta Tsubotan vuonna 1988 pitämän oppitunnin, jossa käsitellään marmorikuulaongelmaa. Tässä alaluvussa tarkastellaan tätä opetustilannetta edellä esitetyn avoimien tehtävien opetusmallin valossa. Tarkoituksena on tarjota malliesimerkki avointa lähestymistapaa hyödyntävästä oppitunnista opettajalle, jolla ei juurikaan ole kokemusta avoimista tehtävistä, jotta hänen on helpompi suunnitella omaa opetustilannettaan ja rakentaa opetustaan oikeaan suuntaan.

Jo ennen itse opetustilannetta opettajan pitää valmistautua oppituntiin. Hänen pitää valita tai tuottaa itse tietyille oppilaille ja opetusryhmälle sopiva avoin tehtävä ja määritellä tehtävän tarkoitus. Lisäksi opettajan tulee valmistautua oppilaiden esittämiin kysymyksiin, erilaisiin ratkaisutapoihin ja siihen, miten haastaa eritasoiset oppilaat. Mikäli avoin lähestymistapa on oppilaille uusi oppimismenetelmä myös oppilaita pitää valmistella ennen opetustilannetta korostamalla avoimen työskentelyn tärkeitä piirteitä ja opettamalla esimerkiksi ongelmanratkaisustrategioita ja -malleja. Oppitunnin alkaessa opettajan pitää kertoa oppilaille, mitä heidän on tarkoitus oppia tehtävän avulla. Tämän jälkeen alkaa ratkaisuprosessin käynnistysvaihe, jossa opettaja esittää marmorikuulaongelman oppilaille pelitilanteena: ”Pelaamme marmorikuulilla peliä, jossa niitä heitetään paperille ja tarkoituksena on vertailla kuulien hajaantuneisuutta. Voittaja on se, jonka marmorikuulat hajaantuvat eniten.” Opettaja esittelee paperilla kolmen pelaajan tilanteet heitetystä marmorikuulista ja kysyy oppilailta, kuka kolmesta heidän mielestään voittaa pelin. Tehtävässä alkutilanne on määritelty, mutta oppilaiden tulee tehdä valintoja, mihin suuntaan he lähtevät muodostamaan ratkaisua.

Seuraavaksi alkaa tutkimisen vaihe, eli oppilaat alkavat käsitellä ongelmaa. Opettaja antaa oppilaille välineet pelata marmorikuulapeliä, jotta he näkevät oikeasti, miten peli käytännössä toimii. Näin oppilaiden on helpompi alkaa ratkaista ongelmaa. Oppilaat ratkaisevat tehtävää pienissä ryhmissä pohditen erilaisia lähestymistapoja ongelmaan. Opettaja kiertelee luokassa tarkkailemassa oppilaiden työskentelyä ja varmistamassa, että jokainen ryhmä pääsee liikkeelle. Hetken kuluttua alkaa ensimmäinen keskusteluvaihe, jossa opettaja pyytää muutamaa oppilasta esittämään ajatuksensa alkuperäiseen kysymykseen kaikille yhteisesti. Pian oppilaat huomaavat, että tehtävä on mahdollista ratkaista monella eri tavalla. Opettaja opastaa oppilaiden ajattelua kysymällä, miten voidaan määritellä, mitkä marmorikuulat ovat levinneet eniten ja miten vakuuttaa muut oppilaat omasta ratkaisusta. Oppilaiden on siis tarkoitus osata myös perustella oma lähestymistapansa ja ratkaisuehdotuksensa. Oppilaat tekevät ehdotuksia ja käyvät keskustelua koko luokan kesken erilaisista tavoista tehdä päätöksiä.

Keskusteluvaiheen ajatusten jakamisen jälkeen oppilaat palaavat takaisin pieniin ryhmiin työstämään ongelmaa uusien ideoiden innoittamana. Opettaja kysyy tässä vaiheessa oppilailta, onko hyvän päätöksen arvioimiseen mahdollista käyttää jonkinlaista lukua yrittäen saada oppilaat käyttämään oikeita matemaattisia merkintöjä. Ryhmien muodostettua ratkaisut ongelmaan päästään kolmanteen vaiheeseen eli ongelman erilaisten lähestymistapojen tarkasteluun. Tarkoituksena on esitellä erilaisia ratkaisuehdotuksia perusteluineen sekä vertailla niitä ja niiden käytettävyyttä positiivisessa oppimisilmapiirissä. Oppilaat ehdottavat ratkaisuja koko tehtävään ja opettajan edelliseen kysymykseen luvun käyttämisestä hyvän valinnan arvioimisessa. Oppilaat tekevät vastaehdotuksia luokkatoveriensä ehdotuksille ja huomaavat, ettei kaikkia tapoja voi käyttää pelin poikkeustapauksiin. Oppilaat kokoavat ratkaisut joukoksi hiottuja ja mallikkaita ratkaisuja. Lopuksi palataan takaisin alkuperäiseen tilanteeseen ja siihen päätökseen, mikä kolmesta esitetystä tilanteesta on voittaja. Yhdessä oppilaat valitsevat ehdotuksista mielestään parhaan tavan valita voittaja vaihtoehtojen joukosta. Oppilaat päätyvät mittaamaan marmorikuulien määrittämän pinta-alan ja tekemään päätöksen sen perusteella. Pohdiskelun päätteeksi oppilaat päätyvät siihen, ettei valittu menetelmä sittenkään tarjoa riittävän hyvää vastausta marmorikuulien hajaantumiselle. Oppilaat haluavat palata ongelman pariin vielä uudelleen. Ongelma oli oppilaille loistava tutkimustehtävä, koska se oli oppilaille sopivan

tasoinen, ja oppilaat innostuivat sen ratkaisemisesta. Opettaja päättää oppitunnin sanomalla: ”Tänään opimme, kuinka mitata ja vertailla monitulkintaisia kohteita.”

Oppitunnin ratkaisuprosessin aikana oppilaat siis asettivat ongelman, muodostivat oman lähestymistavan siihen, hyväksyivät, että ratkaisutapoja on monia sekä tarkastelivat ja perustelivat erilaisia ratkaisuja. Oppitunti on malliesimerkki avoimen lähestymistavan avulla opettamisesta. Myöhemmin opettaja voi laittaa oppilaat pohtimaan ratkaisujen käytännön sovelluksia, eli voisiko niitä käyttää johonkin muuhun kuin vain tämän yhden ongelman ratkaisemiseen. Lopulta on tarkoitus muodostaa yhä yleisempi ongelma ja yhä yleisempi ratkaisu siihen. Koko avoimen tehtävän parissa työskentelystä on hyvä kirjoittaa oppituntien jälkeen tiivistelmä, joka sisältää kaiken olennaisen. Tiivistelmän kirjoittaminen laittaa oppilaat pohtimaan asioita syvemmin ja miettimään omaa oppimistaan.

5. Pohdinta

Yläkoulussa matematiikan oppitunnit etenevät usein samalla kaavalla. Ensin opettaja opettaa oppilaille uuden asian, ja aiheesta tehdään yhdessä muutama laskuesimerkki, minkä jälkeen oppilaat harjoittelevat esimerkkien tapaisia tehtäviä. Tällä tavalla opiskelu on kaavamaista ja harjoittaa tietyn menetelmän käyttämistä luovuuden ja soveltamisen sijaan. Oppilaat saattavat oppia menetelmät hyvin, mutta eivät välttämättä lainkaan ymmärrä, mitä tekevät. He saattavat opetella tehtävätyypit ulkoa koetta varten, minkä jälkeen kaikki unohtuu. Ratkaisuna tähän ongelmaan ovat avoimet tehtävät, joiden avulla pystyy edistämään aiheiden syvempää ymmärtämistä, luovuutta, omaperäisyyttä sekä matemaattista ajattelu- ja keskustelutaitoa (Kwon ym. 2006; Leppäaho 2007). Asioiden ymmärtäminen johtaa usein myös siihen, että ne muistetaan paremmin. Vaikka avoin lähestymistapa kehitettiinkin jo 1970-luvulla, siihen liittyvät perusajatukset soveltuvat edelleen hyvin nykypäivän koulumaailmaan ja erityisesti matematiikan opetukseen (Pehkonen ym. 2013).

Suljetut tehtävät ovat oppikirjoista yleisimmin löytyviä tehtäviä, joiden alku- ja lopputilanteet ovat tarkasti määritellyt. Avoimissa tehtävissä sen sijaan alku- tai lopputilanne tai molemmat ovat avoimia eli ne eivät ole tarkasti rajatut, jolloin ratkaisijan tulee tehdä valintoja vaihtoehtojen suhteen (Leppäaho 2007). Tehtävien oppitunnille valitseminen vaikuttaa oppilaiden mahdollisuuksiin oppia ja lopulta siihen, mitä he oppivat (Boaler ym. 2015; Sullivan ym. 2013). Opettajia kehoitetaan käyttämään opetuksessa yhä enemmän ongelmatehtäviä. Avoimien tehtävien avulla oppiminen kehittää oppilaiden korkeampia ajattelutaitoja, mikä onkin tärkeä tavoite matematiikan opetuksessa. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) matematiikan opetuksen vaatimuksena on ongelmanratkaisun opettaminen, sillä se kehittää matemaattista ajattelua, ja sitä tarvitaan päivittäin arkisten ongelmien ratkaisemiseksi. Avoimet tehtävät ovat yksi hyvä tapa opettaa ongelmanratkaisua opetussuunnitelman perusteiden vaatimalla tavalla. Avoimien tehtävien ratkaiseminen on matemaattista ongelmanratkaisua, jonka määrittely vaativan vanhojen tietojen yhdistelemistä uudella tavalla. Prosessissa korostuu konstruktiiivinen oppimiskäsitys, jonka mukaan oppilas oppii rakentamalla omaa tietorakennettaan lisäämällä sinne tietoa ja luomalla yhteyksiä tietojen välille (Pehkonen ym. 2013).

Avoimet tehtävät ovat tehokas oppimismenetelmä, ja ne edistävät oppimista monella tavalla. Opettamiseen liittyy luonnollisesti myös haasteita, jotka opettajan on tunnettava tehokkaan opetustilanteen saavuttamiseksi. Oppitunneilla opettaja käy asioita usein läpi perustasolla, jotta jokainen pysyisi opetuksessa mukana. Avoimien tehtävien parissa työskenneltäessä jokainen oppilas voi muodostaa ratkaisun oman taitotasonsa mukaan (Kwon ym. 2006), mikä tehostaa oppimista. Taitotasoltaan heikompi oppilas saattaa oppia enemmän ratkaistessaan avointa tehtävää oman tasonsa mukaisesti kuin hänelle liian vaikeasta opetuksesta. Toisaalta matematiikassa taitava oppilas pääsee hyödyntämään taitojaan ja tehostamaan oppimistaan ratkaistessaan tehtävää vaikeammalla tavalla. Oppiminen on tällöin oppilaskeskeistä, joten jokainen oppilas pääsee myös osallistumaan tunnilla huomattavasti enemmän kuin tavallisessa opettajakeskeisessä opetuksessa. Paitsi että oppilaat pääsevät osallistumaan tunnilla aktiivisemmin, he myös pääsevät vaikuttamaan omaan oppimiseensa, mikä saattaa motivoida opiskeluun. Yksi avoimien tehtävien eduista on, että ne liittyvät matematiikan luonnollisella tavalla arkielämään (Pehkonen ym. 2013). Oppilaita saattaa toisinaan olla vaikea motivoida matematiikan opiskeluun, koska he eivät ymmärrä, mihin opeteltavia asioita oikeasti tarvitaan. Kun tehtävä on liitetty arkisiin tilanteisiin ja luonnolliseen ympäristöön, matematiikan yhteys muuhun elämään on helppo ymmärtää. Arkielämään liittäminen saattaa usein motivoida oppilaita ja innostaa heitä matematiikan opiskeluun (Nohda ym. 2000), mikä taas tutkitusti edistää oppimista.

Avoimien tehtävien parissa luova ajattelu kehittyy ja asioiden ymmärtäminen paranee (Pehkonen ym. 2013). Koska oppilaat joutuvat tekemään ratkaisun suhteen valintoja ja käyttämään aiemmin opittua uudennlaisilla tavoilla, he joutuvat miettimään oppimiaan sääntöjä, menetelmiä, käsitteitä ja periaatteita syvemmin (Sullivan ym. 2013). Tässä korostuu ulkoa opetteluun sijaan asioiden syvällisempi ymmärtäminen, johon matematiikan opetuksessa tähdätään. Avoimien tehtävien ratkaiseminen kehittää myös matemaattista keskustelutaitoa, koska työskentely sisältää yhteistä keskustelua koko luokan kesken (Viseu ym. 2012). Lisäksi oppimista edistää avoimessa lähestymistavassa luokan positiivinen oppimisilmapiiri, jossa oppilaat kannustavat toisiaan, uskaltavat ottaa riskejä ja yrittää virheen jälkeen uudelleen. Hyvän ilmapiirin luominen opetustilanteeseen saattaa olla vaikeaa, mutta oppilaiden oppimisen kannalta todella tärkeää. Ihanteellisinta olisi, jos ryhmän oppilaat eivät pelkää virheitä tai sitä, että muut oppilaat saavat tietää virheistä, vaan suhtautuvat niihin positiivisesti. Tällöin ilmapiiri muuttuu huomattavasti positiivisemmaksi ja kannustavammaksi, ja avoimelle työskentelylle on paremmat edellytykset.

Avoimien tehtävien voidaan määrittellä eri tavoilla. On myös kehitetty monia erilaisia luokittelutapoja, joilla jäsenellä avoimia tehtäviä. Tutkimuksissa käytetään erilaisia luokitteluja ja samanniminen ongelmaryhmä saattaa tarkoittaa eri tutkijoille hyvinkin eri asioita. Tutkielmassa esiteltiin kaksi yleisesti käytössä olevaa luokittelutapaa. Yksi luokittelutapa on jakaa avoimet tehtävät sen perusteella, onko tehtävän alkutilanne, lopputilanne vai molemmat avoimia (Leppäaho 2007). Toinen ryhmittelytapa on jakaa avoimet tehtävät tutkimustehtäviin, ongelmanasettelutehtäviin, arkielämän tilanteisiin, erilaisiin projekteihin, ongelmakenttiin, ongelmien variointiin ja tehtäviin, joissa ei ole kysymystä (Pehkonen 1997a). Näiden luokittelujen avulla opettaja saa paremman käsityksen siitä, millaisia avoimia tehtäviä on olemassa, jolloin hän pystyy helpommin suunnittelemaan niiden sisällyttämistä omaan opetukseensa.

Parhaan mahdollisen oppimistilanteen luomiseksi avoimien tehtävien parissa opettajan tulee tietää, miten suunnitella oppitunti ja miten järjestää opetustilanne (Blanc 1997). Avoimien tehtävien monipuolisuuden ansiosta on monta erilaista tapaa käyttää niitä matematiikan opetuksessa. Tehtävän valinta vaikuttaa opetuksen järjestämiseen paljon, koska aiemmin esiteltyjen avoimien tehtävien ryhmät eroavat toisistaan huomattavasti, ja niillä on erilaisia tavoitteita (Pehkonen 1997a). Tietyn tehtävän valitsemisella tai luomisella on suuri merkitys, koska sen tulisi motivoida oppilaita, olla sopivan haastava olematta liian vaikea, sisältää vain oppilaille tuttuja käsitteitä ja olla ratkaistavissa monella eritasoisella tavalla. Opettajan pitää miettiä, mitä haluaa tehtävän teettämisellä saavuttaa, jotta työskentely johtaisi haluttuun päämäärään. On turhaa valita satunnaisesti tehtävä, jolle opettaja ei ole asettanut tavoitteita, sillä jokaisella oppitunnilla tehtävällä asialla tulisi olla tarkoitus maksimaalisen hyödyn saavuttamiseksi (Kadir ym. 2017).

Ennen opetustilannetta opettajan tulee valmistella harjaantumattomia oppilaita avoimeen lähestymistapaan kertomalla, millaista työskentelyä heiltä odotetaan ja opettamalla heille muutamia välineitä kuten ongelmanratkaisustrategioita ja -malleja tehtävän ratkaisua varten. Lisäksi opettajan on mietittävä etukäteen, miten esittää ongelma oppilaille (Stein ym. 2008). Oppilaiden mahdollisia kysymyksiä ja ratkaisutapoja on hyvä pohtia etukäteen, jotta opettaja osaa reagoida niihin sopivalla tavalla. Yksi tärkeimmistä seikoista on varmasti se, että opettaja valmistautuu itse olemaan tilanteessa avoin, kuuntelemaan oppilaiden odottamattomiakin ehdotuksia ja reagoimaan niihin avoimin mielin.

Opetustilanteen vaiheet ovat käynnistysvaihe, tutkimisen vaihe, yhteinen keskusteluvaihe, ongelman ratkaisemiseen palaaminen, ratkaisujen vertailu ja uuden ongelman muodostaminen, josta alkaa taas uusi ongelmanratkaisusykli. Käynnistysvaiheessa opettaja esittelee oppilaille tehtävän ja kertoo, mitä

sen avulla on tarkoitus oppia (Stein ym. 2008; Sullivan ym. 2013) korostaen niitä asioita, joihin toivoo oppilaiden kiinnittävän huomiota. Tutkimisen vaiheessa oppilaat pohtivat erilaisia lähestymistapoja ja tekevät valintoja, mihin haluavat ongelmassa keskittyä (Hähkiöniemi ym. 2012). Seuraavaksi oppilaiden on tarkoitus vaihtaa ajatuksia yhteisen keskustelun muodossa, jotta jokainen löytäisi tehtävästä erilaisia puolia ja saisi uusia näkökulmia tarkastella ratkaisua. Tässä vaiheessa oppilaiden pitäisi myös pystyä perustelemaan lähtökohtansa. Opettajan on tärkeää tukea oppilaiden koko ongelmanratkaisuprosessia auttamalla heitä tarvittaessa. Ajatustenvaihdon jälkeen oppilaat palaavat takaisin ratkaisemaan ongelmaa. Kun oppilaat ovat saaneet tehtävän ratkaistua, heidän on tarkoitus esitellä ratkaisunsa ja vertailla erilaisia ratkaisuja keskenään. Ihanteellisessa tilanteessa palataan takaisin alkuperäiseen ongelmaan, josta on tarkoitus muodostaa taas uusi yleisempi ongelma, jonka ratkaisemalla päästään yhä yleisempään ratkaisuun (Nohda 2000). Ratkaisuprosessin vaiheet toistuvat sykleittäin niin kauan, kun tehtävän parissa halutaan työskennellä. Kun ongelmanratkaisu on saatu päätökseen, oppilaiden on tarkoitus vielä koota kaikki ajatukset yhteen kirjoittamalla prosessista tiivistelmä.

Oppilaiden on tärkeää keskittyä oikean vastauksen saamisen sijaan tehtävän ymmärtämiseen ja oikean ratkaisupolun löytämiseen. Avoimet tehtävät ja niiden ratkaiseminen kannustavat tähän, koska ongelmaa ratkaistessa vastaan tulee virheitä, joista tulee jatkaa uuteen yritykseen. Matemaattisen ajattelutaidon kehittyminen ja matematiikan aiheiden syvempi ymmärtäminen kuuluvat matematiikan opetuksen tärkeimpiin tavoitteisiin, ja ne voidaan saavuttaa paremmin avointen tehtävien avulla. On olemassa paljon erilaisia avoimia tehtäviä, joita voidaan käyttää opetuksessa monipuolisesti. Kaiken kaikkiaan avoimet tehtävät ovat hyvin monipuolinen väline tehokkaan oppimisen saavuttamiseksi.

Lähteet

- Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: EDITA, 50 – 63.
- Blanc, P. 1997. Implementing open problem-solving, some pitfalls of curriculum development through assessment in the UK. Teoksessa Pehkonen, E. Use of open-ended problems in mathematics classroom. United Kingdom: University of Bristol. 12 – 24.
- Boaler, J. & Dweck, C. 2015. Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching. San Francisco: Jossey-Bass.
- Fatah, A., Suryadi, D., Sabandar, J. & Turmudi. 2016. Open-ended approach: An effort in cultivating students' mathematical creative thinking ability and self-esteem in mathematics. Teoksessa Journal on Mathematics Education. Bandung: Indonesia University of Education, Vol. 7, 11 – 20.
- Haapasalo, L. 2011. Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu. Lappeenranta: Kopio Niini OY.
- Hähkiöniemi, M., Leppäaho, H. & Francisco, J. 2012. Model for teacher assisted technology enriched open problem solving. Teoksessa Bergqvist, T. 2012. Learning problem solving and learning through problem solving. Ruotsi: University of Umeå.
- Kadir, L. & Gusni, S. 2017. The implementation of open-inquiry approach to improve students' learning activities, responses, and mathematical creative thinking skills. Teoksessa Journal on Mathematics Education. Indonesia: University of Jakarta, Vol. 8, 103 – 114.
- Kwon, O. N., Park, J. S. & Park, J. H. 2006. Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. Teoksessa Asia Pacific Education Review, Vol. 7 (1). Korea: Seoul National University, 51 – 61.
- Lampert, M. 2001. Teaching problems and the problems of teaching. Yale University, 3 – 12.
- Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa: Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Leppäaho, H. 2018. Ongelmanratkaisun opettamisesta. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. 2018. Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti, 368 – 389.
- Munroe, L. 2015. The open-ended approach framework. Teoksessa European journal of educational research, Vol. 4. Japan: Hiroshima University, 97 – 104.
- Nohda, N. 1995. Teaching and evaluating using “open-ended problems” in classroom. Teoksessa Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 27, 57 – 61.
- Nohda, N. 2000. Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. Teoksessa Nakahara, T. & Koyama, M. Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) Hiroshima, Vol. 1, 39 – 53.
- Opetushallitus. 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet
- Pehkonen, E., Pekama, E. & Seppälä, R. 1991. Matemaattinen ongelmanratkaisu: Tehtäviä peruskoulun ja lukion matematiikan opetukseen. Helsinki: MFKA-Kustannus Oy.

- Pehkonen, E. 1992. Problem fields in mathematics teaching. Part 3: Views of Finnish seventh-grades about mathematics teaching. Helsinki: Helsingin yliopisto.
- Pehkonen, E. 1997a. Use of open-ended problems in mathematics classroom. Helsinki: Helsingin yliopisto, 7 – 9.
- Pehkonen, E. 1997b. Use of problem fields as a method for educational change. Teoksessa Use of open-ended problems in mathematics classroom. Helsinki: Helsingin yliopisto, 73 – 83.
- Pehkonen, E., Näveri, L. & Laine, A. 2013. On teaching problem solving in school mathematics. Teoksessa Center for Educational Policy Studies Journal, Vol. 3 (4), 9 – 20.
- Pólya, G. 2014. Ratkaisemisen taito: Kuinka lähestyä matemaattisia ongelmia. Suom. J. Järnström. Helsinki: Art House Oy.
- Schroeder, T. & Lester, F. 1989. Developing understanding in mathematics via problem solving. NCTM Yearbook.
- Seo, H. S. 1997. On the use of what-if-not strategy for posing problem. Teoksessa Use of open-ended problems in mathematics classroom. Helsinki: Helsingin yliopisto, 85 – 87.
- Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. 2008. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. Teoksessa Mathematical Thinking and Learning 10. LLC, 313 – 340.
- Sullivan, P., Bourke, D., Scott, A. 1997. Learning mathematics through exploration of open-ended tasks: Describing the activity of classroom participants. Teoksessa Use of open-ended problems in mathematics classroom. Australia: Australian Catholic University, 88 – 104.
- Sullivan, P., Mousley, J. & Zevenbergen, R. 2005. Planning and teaching mathematics lessons as a dynamic, interactive process. Teoksessa Chick, H. & Vincent, J. Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol. 4. Melbourne: PME, 249 – 257.
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. & O’Shea, H. 2009. Exploring the relationship between task, teacher actions and student learning. Teoksessa Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 5. Thessaloniki, Greece: PME, 185 – 192.
- Sullivan, P., Clarke, D. & Clarke, B. 2013. Teaching with tasks for effective mathematics learning. Teoksessa Peter-Koop, A. & Wilson, P. Mathematics teacher education 9. Lontoo: Springer.
- Viseu, F. & Oliveira, I. 2012. Open-ended tasks in the promotion of classroom communication in mathematics. Teoksessa International Electronic Journal of Elementary Education. 2012. Vol. 4. Kutahya: Kura Publishing, 287 – 299.