Ei-klassiset korrelaatiot ja informaation lokaalisuus

Pro-gradu tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikan ja tähtitieteen laitos
Teoreettinen fysiikka
Kesäkuu 2020
Marwan Haddara
Tarkastajat:
dos. Teiko Heinosaari
dos. Iiro Vilja

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan ja tähtitieteen laitos

Haddara, Marwan: Ei-klassiset korrelaatiot ja informaation lokaalisuus

Pro-gradu, 102 s., 4 liites.
Teoreettinen fysiikka
Kesäkuu 2020

Vuonna 1964 John Stewart Bell esitti nykyään Bellin teoreemana tunnetun tuloksen, joka osoitti että kvanttiteoria sallii korrelaatioita joita ei voi selittää millään lokaalilla yhteisen alkuperän mallilla. Teoreeman voimakkuus perustuu sen korkeaan abstraktiontasoon, jossa lähtöoletukset muotoillaan tavalla, joka on suurilta osin riippumaton systeemien ja niitä kuvaavien teorioiden täsmällisistä yksityiskohdista.

Joidenkin näkemysten mukaan Bellin teoreeman nojalla luonnossa esiintyy välittömiä vuorovaikutuksia toisistaan erotettujen systeemien välillä. Jokatapauksessa näitä kvanttiteorian ei-klassisia korrelaatioita ei voi käyttää kommunikointiin, joten ainakaan suoria ristiriitoja suhteellisuusteorian vaatimusten kanssa ei ole.

Useassa eri kontekstissa on kuitenkin konkretisoitunut se, että yhteys kvanttimekaniikan ei-klassisten korrelaatioiden ja mahdollisuuden kommunikoida ylivalonnopeuden välillä on äärimmäisen hienovarainen. 1990-luvulla esitettiin ajatuksia siitä, että ei-klassiset korrelaatiot ja suhteellisuusteorian kausaalisuusperiaate voisivat olla niinkin hankalasti sovitettavia yhteen, että ne saattaisivat jo oleellisesti määritellä kvanttiteorian. On kuitenkin esimerkkejä korrelaatioista, jotka ovat kvanttimekaanisen kuvauksen ulkopuolella, mutta jotka eivät silti mahdollista kommunikaatiota.

Sittemmin on käynnistynyt valtavasti kasvanut tutkimussuuntaus, jossa kvanttiteorian, tai yleisempien fysikaalisten teorioiden perusteita selvitetään Bellin teoreeman esitystä vastaavalla, lähes malliriippumattomalla tavalla. Samalla on oivallettu, käytännön sovelluksien kannalta, että korkea abstraktiontaso mahdollistaa myös ns. laiteriippumattomien informaationkäsittelyprotokollien muotoilun.

Tutkielmassa annetaan mallivapaa, tai laiteriippumaton näkökulma fysiikan perusteisiin. Työssä esitetään moderni katsontakanta Bellin epäyhtälöihin, Tsirelsonin rajaan ja yleisten signaalilokaalien korrelaatioiden selvittämiseen. Tämän jälkeen tunnistetaan piirteitä, jotka ovat yhteisiä kaikille signaalilokaaleille teorioille, jotka sallivat ei-klassisia korrelaatioita. Lopuksi esitetään informaation kausaalisuus -periaate, joka rajaa sallittuja korrelaatioita voimakkaammin kuin pelkästään vaatimus signaalilokaalisuudesta.

Asiasanat: laatikkotaso, laiteriippumattomuus, Bellin teoreema, Bellin epäyhtälöt, Tsirelsonin raja, kvanttimekaaniset korrelaatiot, signaalilokaalisuus, informaation kausaalisuus

Sisältö

Johdanto

Kvanttimekaniikka on alkuesityksestään saakka ollut konseptuaalisesti vaikeaselkoinen. Tämä tosiasia on herättänyt ajatuksia mahdollisista vaihtoehtoisista luonnonkuvauksista, jotka voisivat antaa kvanttiteorian ennustuksille fysikaaliselta näkökannalta selkeämmän selityksen. Varsinkin teorian alkuaikoina pyöriteltiin ideoita mahdollisista malleista, jotka pystyisivät selittämään kvanttiteorian ennustukset palauttaen klassisesta fysiikasta tuttuja konsepteja, kuten determinismiä.

Kvanttiteorian erilaisia klassisia selityksiä poissulkevilla tai niiden olemassaolon puolesta esitetyillä argumenteilla on pitkä, tähänkin päivään asti jatkuva historia. Tässä tutkielmassa sivutaan läheltä monia merkittäviä keskustelunaiheita, jotka ovat olleet tai ovat edelleen suuressa roolissa kvanttifysiikan perusteiden selvityksessä. Tarkoitus ei ole antaa kattavaa historiallista katsausta aiheeseen, ja monia perinteisesti näissä konteksteissa mainittuja tuloksia jätetään käsittelemättä. Lisäksi väistetään aihepiiriin kytköksissä olevat tulkinnalliset kysymykset.

Kuuluisimpana klassisia selityksiä rajoittavana tuloksena voidaan pitää John Stewart Bellin vuonna 1964 esittämää [1] teoreemaa, jonka nojalla deterministiset lokaalit mallit ovat ristiriidassa kvanttiteorian kanssa. Aatos muotoillaan tilanteelle, jossa selitetään useasta palasta koottujen, oletusten mukaan erillisten, systeemien välisiä korrelaatioita. Bellin teoreema antaa laboratoriossa testattavan kriteerin, nk. Bellin epäyhtälön, jonka ennustetaan toteutuvan kaikilla lokaalisdeterministisille malleilla, mutta rikkoutuvan ainakin joissakin kvanttimekaanikan kuvaamissa koejärjestelyissä. Tätä ilmiötä kutsutaan nykyään usein kvanttiepälokaalisuudeksi. Joidenkin näkökulmien mukaan Bellin teoreema osoittaa, että mielivaltaisen välimatkan päässä olevat systeemit voivat vaikuttaa toisiinsa. Tavallinen kvanttimekaniikka ei jokatapauksessa salli ilmiön käyttämistä kommunikointiin. Sanotaankin, että kvanttimekaaniset korrelaatiot ovat signaalilokaaleja.

Historiallisesti kiintoisina seikkoina mainitaan, että todennäköisesti Bellin teoreeman ja ensimmäisten lupaavien epäyhtälöitä testaavien kokeiden esim. [2] innoittamana, tai muutoin ajan hengen mukaisesti, 1970-80 -lukujen taitteessa kuitenkin esitettiin joitakin ideoita kvanttiepälokaalisuuden tai kietoutumisen käyttämisestä ylivalonnopeuden kommunikoinnin mahdollistamiseen. Ideat toimivat kannustimina signaalilokaalisuuden takaavien teoreemanomaisten toteamusten artikuloimiseen kvanttimekaniikassa [3, 4].

Erityishuomiona voidaan nostaa vuonna 1982 julkaistu, FLASH-lyhennenimellä kulkeva, protokolla [5] jossa kommunikoinnin kietoutuneiden tilojen avulla mahdollistaa täydelliseen kvanttitilojen kloonaamiseen kykenevä laite. FLASH on akronyymi sanoista "First Laser-Amplified Superluminal Hookup"[5]. Ajatuskoe herätti suurta kiinnostusta ja sitä voidaan pitää kipinänä, joka johti nykyisin ei-kloonausta -teoreemana (engl. no-cloning theorem) tunnetun [6] tuloksen, joka osoittaa että protokolla ei toimi, kuuluisaksi tulemiseen [7, 8].

Sittemin on tunnistettu kokonainen parvi kvantti-informaation prosessointiin liittyviä tehtäviä joilla voidaan nähdä olevan yhteys mahdollisuuteen käyttää kvanttiepälokaalisuutta viestintään [9–12]. Erityisesti viimeisen karkeasti kolmen vuosikymmenen aikana on ymmärretty, että kvanttiteorian ei-klassiset piirteet ovat voimakkaita ja keskeisiä resursseja erilaisissa informaationprosessointiprotokollissa. Joskus puhutaan jopa 'toisesta kvanttivallankumouksesta', kun viitataan mm. klassisiin verrattuna ylivertaisten kvanttiinformaatioteknologioiden, kvanttitietokoneiden yms. odotettuun yleistymiseen ja kaupallistumiseen. Kasvanut tarve ymmärtää informaationprosessoinnin äärimmäisiä fysikaalisia rajoja on antanut uutta pontta ja näkökulmaa myös teorian perusteisiin keskittyvälle tutkimukselle.

Kiinnostusta kvanttiteorian fysikaalisen pohjan selvitykselle on tullut myös haasteista yhdistää yleistä suhteellisuusteoriaa ja kvanttimekaniikkaa saman teoreettisen viitekehyksen alle. Unifikaatio voi vaatia joidenkin kvantti- tai suhteellisuusteoreettisten periaatteiden yleistämistä - tai jopa luopumista joistakin näille teorioille tyypillisistä piirteistä. Näissä yhteyksissä ymmärrys kvanttiteorian fysikaalisesta sisällöstä nousee erityisen keskeiseksi, sillä teorioiden yhdistäminen voi tarvita aivan uudenlaisen matemaattisen koneiston. Kvantti-informaatioon ja systeemien korrelaatioihin liittyvät seikat ovat antaneet merkittäviä näkökulmia myös tällä kvanttiteorian ja yleisen suhteellisuusteorian yhdistämistä tavoittelevalla ja tarkastelevalla tutkimussuuntauksella esim. [13, 14]. Informaatioteoria asetetaankin joskus, tai nykyään yleensä, kvanttiteorian ja suhteellisuusteorian rinnalle modernin fysiikan perusrakenteena [15].

1980-luvun lopussa esitettiin joitakin ideoita kvanttimekaniikan epälineaarisista laajennuksista esim. [16]. Näissäkin yhteyksissä huomattiin [17, 18], että kietoutumisen yms. takia epälineaarisuudet johtavat helposti ylivalonnopeuden kommunikointiin. Toisaalla epälineaarisuuden osoitetettiin johtavan myös termodynamiikan toisen pääsäännön rikkoutumiseen [19]. Myöhemmin on jopa näytetty [20], että kvanttidynaamisten operaattoreiden lineaarisuus ja täyspositiivisuus voidaan johtaa olettamalla kvanttimekaaninen tila-avaruus, Bornin sääntö sekä signaalilokaalisuus. Tämä ei välttämättä ks. esim. [21] tarkoita sitä, että lineaarisuus olisi yleisesti väistämätön signaalilokaalisuuden seuraus, sillä lineaarisuus voi olla piilotettuna muihin oletuksiin, kuten kvanttimekaanisen tila-avaruuden geometriaan. Joka tapauksessa minkä tahansa edellä kuvaillun kaltaisen dynaamisesti epälineaarisen laajennuksen on hylättävä ainakin jokin mainituista oletuksista [20]. Tässä mielessä tuntemamme kvanttimekaniikka on ainoa vaihtoehto joka voi olla sopusoinnussa suhteellisuusteorian kanssa sen jälkeen kun em. 'perusrakenne' on oletettu. Nähtävästi kvanttiteoriaa ei ole helppo muokata tai yleistää sopusointuisasti suhteellisuusteorian kanssa ilman että koko koneisto kaipaisi rukkausta.

Voidaan mainita kaksi toisilleen läheistä tutkimussuuntausta, joissa on viimeaikoina tehty merkittäviä harppauksia kvanttiteorian perusteiden selvittämisessä.

Ensimmäisessä suuntauksessa kvanttiteoria asetetaan nk. yleistettyjen todennäköisyysteorioiden viitekehykseen (engl. generalized probability theory l. GPT) ks. esim. [22]. Yleinen viitekehys sisältää operationaalisesti motivoidut perusrakenteet tilat, suureet yms. mahdollistaen erilaisten teorioiden määrittelyä ja niiden piirteiden vertailua. Tässä viitekehyksessä on pyritty etsimään sellaisia hyvin motivoituja periaatteita jotka antaisivat kvanttiteorialle vaihtoehtoisen aksiomatisoinnin ts. periaatteita jotka poimisivat kvanttiteorian kaikkien yleisten teorioiden joukosta. Viite [23] on esimerkki, jossa tässä on onnistuttu ks. myös [24]. Kvanttiteorian erilaisten aksiomatisointien löytäminen on merkittävää myös mahdollisten yleisempien mallien kannalta. Nimittäin erilaiset teorian määrittelevät aksioomat antavat näkökulmaa siihen, minkälaisista periaatteista voitaisiin mahdollisesti luopua, tai mitä voitaisiin yleistää ja minkälaisia fysikaalisia seurauksia muokkauksilla olisi. Tavallisessa kvanttimekaniikan Hilbertin avaruusmuotoilussa perinteiset aksioomat ovat toteamuksia matemaattisesta koneistosta.

Toisessa suuntauksessa teorioiden perusperiaatteita selvitetään ainoastaan niiden sallimien korrelaatioiden avulla. Tarkasteltavat objektit edustavat kokeellisesti testattavaa mittausdataa ns. laatikoita (engl. black box). Kontrastina edelliseen, tässä lähestymistavassa ei oleteta tiloja, suureita tms. teorian rakennetta. Tämän lähestymistavan etuna on se, että erilaisten periaatteiden asettamisesta saadaan heti kokeellisesti testattavissa olevia kriteereitä, joilla eri malleja voidaan esim. verrata kvanttiteorian ennustuksiin. Suuntauksen voidaan nähdä saaneensa alkunsa Sandu Popescun ja Daniel Rohrlichin artikkelista ”Quantum nonlocality as an axiom” [25]. Lähtöajatuksena olivat huomiot siitä, että kvanttiepälokaalisuus ja relativistiset kausaliteettivaatimukset olisivat niinkin hankalasti sovitettavia yhteen, että ko. kriteerit voisivat jo oleellisesti määrätä kvanttiteorian ks. mm. johdatus viitteessä [26]. Nykyään PR-laatikkona tunnettu esimerkki ei-klassisesta signaalilokaalista korrelaatiosta, joka ei ole saavutettavissa kvanttiteoriassa osoitti kuitenkin, että näin ei ole. Sittemin on pyritty selvittämään muita lisäkriteereitä, jotka voisivat poimia kvanttimekaanisten korrelaatioiden joukon kaikkien signaalilokaalien korrelaatioiden joukosta.

Tässä tutkielmassa seurataan jälkimmäistä suuntausta ja esitetään laatikkotason katsontakanta kvanttifysiikan perusteisiin. Tutkielman tarkoitus on antaa eräs näkökulma yleisiin rajoihin tai piirteisiin, joita voidaan odottaa modernin fysiikan perusteorioiden maailmankuvaan sopeutuvalta, mutta mahdollisesti yleisemmältä mallilta. Tarkastelun keskiössä ovat ei-klassisten korrelaatioiden yhteys mahdollisuuteen kommunikoida mielivaltaisen nopeasti, sekä kysymys kvanttiteoreettisten korrelaatioiden rajojen fysikaalisesta selityksestä. Samalla nähdään nk. laiteriippumattomien informaationprosessointiprotokollien perusteet.

Luvussa **1** esitetään peruskäsitteet; laatikot, signaalilokaalit ja kvanttimekaaniset korrelaatiot. Luvussa **2** johdetaan CHSH-epäyhtälö ja näytetään Bellin teoreema. Samalla selvennetään klassisten korrelaatioiden sisältöä kuitenkaan syventymättä teoreemasta olevaan valtaisaan kirjallisuuteen. Luvussa **3** johdetaan kvanttimekaaninen yläraja eli ns. Tsirelsonin raja CHSH-epäyhtälölle ja esitetään PR-laatikko, joka rikkoo Tsirelsonin rajaa maksimaalisesti. Lisäksi selvennetään klassisten, signaalilokaalien ja kvanttimekaanisten korrelaatioiden joukkojen yleisiä suhteita toisiinsa. Luvussa **4** esitetään piirteitä, jotka voidaan tunnistaa yhteiseksi kaikille ei-klassisia korrelaatioita salliville signaalilokaaleille teorioille. Lopuksi, luvussa **5** annetaan lyhyt katsaus viimeaikoina esitettyihin korrelaatioiden joukkoa signaalilokaalisuutta voimakkaammin rajoittaviin kriteereihin ja esitetään yksityiskohtaisemmin nk. informaation kausaalisuus-periaate, jota voidaan pitää signaalilokaalisuuden yleistyksenä. Liitteessä **A** on annettu esimerkki tutkielmassa esitettyjen yleisten rajoitteiden soveltamisesta kvanttikloonauskoneiden optimaalisuustodistuksiin.

Kvanttiteorian, suhteellisuusteorian ja todennäköisyysteorian peruskäsitteet oletetaan tunnetuiksi eikä näiltä osin esitetä viitteitä, ellei jokin piirre ole korostamisen arvoinen. Kuvat on tehty käyttäen Microsoftin Paint 3D ohjelmistoa.

1 Peruskäsitteet ja merkintätavat

Yleensä fysiikassa havaitsijaan liitetään koordinaatisto (engl. reference frame), jonka perusteella tapahtumiin voidaan liittää aika- ja paikka koordinaatit. Koordinaatistossa voidaan luonnollisella tavalla määritellä käsitteet kuten etäisyys, tulevaisuus tai menneisyys. Tämän tutkielman tarkastelussa riittäisi abstraktimpi 'erotettujen laboratorioiden' taustarakenne yhdistettynä perusjärjestykseen, joka oikeuttaisi termien kuten ennustus, syy, seuraus yms. käyttämisen ilman perusteluntarvetta. Avaruusaika tuo kuitenkin käteviä käsitteitä ja motivaatiota ajatusten esittämiseen. Voidaan ajatella yleisien tapahtumien kulun olla kuvailtu vaikka jossakin erityisasemassa olevassa koordinaatistossa, jota ei tehdä eksplisiittiseksi.

Suhteellisuusteoriassa havaittaville vaikutuksille eli fysikaalisille signaaleille tulee yläraja kausaalisuusperiaattesta; vaatimuksesta siitä että syy-seurausjärjestykset ovat 'yksikäsitteisesti' määrätyt. Ylivalonnopeuden signaalit mahdollistavat kausaalisten lenkkien ts. kommunikaation menneisyyteen ja täten erilaisten nk. isoisäparadoksien muodostamisen. Olettaen toki, että kokeentekijät voivat manipuloida signaaleja ja rakentaa paradokseja. Signaalinopeuden äärellisyys on keskeinen osa modernia fysiikkaa. Kutsutaan mitä tahansa viestintämetodia, jossa signaalille on äärellinen yläraja, esim. korkeintaan valonnopeus, perinteiseksi viestintäkanavaksi. Perinteiset viestintäkanavat ovat tänä päivänä, ja ehkä enemmistön fyysikoista mielestä tulevaisuudessakin, ainoita tunnettuja viestintäkanavia.

Perinteisissä, tai klassisissa teorioissa oleellisia käsitteitä ennustusten tekemiseen ovat objektit; hiukkaset, kentät yms. ja niiden havaittavat dynaamisesti kehittyvät ominaisuudet. Fysiikan *operationaalisessa* lähestymistavassa relevantteja käsitteitä ovat preparaatiot, testit ja tehtävät tai toimenpiteet. Tämän tutkielman lähestymistapa ja terminologia on suuresti operationaalisten periaatteiden innoittama. Tässä kuitenkin kyseiset periaatteet esitetään äärimmäisessä muodossaan; ainoana viimekädessä relevanttina asiana pidetään kokeellisesti tuotettavaa mittausdataa. Tässä osiossa motivoidaan edellämainittu lähestymistapa ja kiinnitetään perustermistö.

Yhtään vähättelemättä käytännönkokeiden suunnittelemiseen tai toteutuksiin liittyviä monimutkaisuuksia voidaan perustyypin hyvälle fysikaaliselle tai empiiriselle kokeelle karkeasti käsittää sisältävän kaksi vaihetta. Ensimmäisessä vaiheessa tarkasteltava systeemi eli näyte valmistellaan eli preparoidaan jonkin mahdollisimman systemaattisen ja toistettavissa olevan proseduurin mukaisesti. Toisessa osassa systeemin jotakin havaittavaa ominaisuutta testataan mittalaitteella, joka voi olla hienostunut tai vähemmän hienostunut, kuten ihmissilmä. Testin seurauksena rekisteröidään mittaustulos tai lukuisia tuloksia. Ottamatta toistaiseksi kantaa siihen esiintyykö luonnossa missään mielessä 'aidosti' epädeterministisiä tapahtumia, tunnustetaan se tosiasia että yleisesti ottaen hyvinkin hallitussa kokeessa käytettäviin laitteisiin, kuten näytteen valmistavaan preparaattoriin yms. voi liittyä luonnollista vaihtelua, kuten termisiä fluktuaatioita. Täten vaikka sama testi suoritettaisiin näennäisesti identtisillä valmisteluilla ei yleisesti ottaen ole takeita siitä, että havaitaan sama mittaustulos.

Toisaalta mittalaitteen ja tarkasteltavan systeemin vuorovaikutus voi muuttaa systeemin ominaisuuksia tai jopa hävittää tarkasteltavan systeemin, kuten esim. voidaan väittää tapahtuvan fotonin absorptiossa detektoriruudulle. Nämä toteamukset huomioonottaen otetaan se asenne, että empiirinen koe tulisi yleisesti ottaen käsittää tilastollisena toimenpiteenä; lukuisien identtisten preparaatioiden ja mittausten koekierrosten tulosten taulukointina. Kokeessa taulukoidun mittaustulosten esiintymistiheyksiä voi toki ilman etukäteistä teoreettista malliakin hyödyntää yksittäisten tapahtumien todennäköisyyksien arvioimiseen identtisissä olosuhteissa. Edellisissä toteamuksissa tehdään perusoletus kokeiden toistettavuudesta, ja ehkä jonkinnäköisestä symmetriasta ajassa tai sen abstraktiossa, tämä on oleellinen osa fysiikan perusteita; fyysikko voi jakaa informaation preparaatioprosessista ja käytetyistä laitteista muille fyysikoille, jotka voivat replikoida eli todentaa koetulokset.

1.1 Laatikkotaso

Oletetaan, että fyysikko Aliisa on kiinnittänyt preparaatioprosessin ja tarkastelee systeemin eri ominaisuuksia erilaisten mittausten alla. Preparaatioprosessia voi yleisesti ottaen myöskin edustaa jokin satunnaismuuttuja, vaikka ϱ. Aliisa testaa systeemiä N:llä eri mittalaitteella X, joita voivat edustaa ilman yleisyyden menetystä symbolit joukosta $\{1, 2 \ldots N\}$. Kullekkin mittalaitteelle on äärellinen, mutta muutoin mielivaltainen, määrä eri mahdollista mittaustulosta esim. $a_x \in \{1, 2 \ldots M_X\}$. Kokeessa k:sta koekierroksesta tuotettaville mittaustulosfrekvensseille $f_k(a_x|X, \varrho) = \frac{k_{a_X}}{k}$, missä k_{a_x} on tapahtumien a_X lukumäärä, annetaan todennäköisyystulkinta muodollisella lausekkeella

$$lim_{k \to \infty} f_k(a_x|X, \varrho) = P(a_x|X, \varrho).$$

Tämä merkintätapa vihjaa, että mittalaitteen asetusta, ja preparaatiota vastaaville muuttujille X ja ϱ tulisi olla omat jakaumat. Yleensä oletetaan, että kyseiset muuttujat ovat vapaan tahdon omaavan kokeentekijän hallittavissa ja täten 'fysikaalisesti' kiinnostavina jakaumina pidetään ensisijaisesti ko. ehdollisia todennäköisyyksiä. Joissakin tilanteissa on hyödyllistä laittaa näillekin muuttujille jakauma, kyseisten jakaumien ei kuitenkaan tarvitse olla peräisin mistään fysikaalisesta teoriasta vaikka voitaisiinkin väittää, että samat säännöt pätevät kokeentekijöille kuin muillekin fysikaalisille jutuille. Läpi tutkielman oletetaan, että preparaatioprosessi on kiinnitetty, mutta mielivaltainen, ja pudotetaan merkinnöistä ϱ ellei korostaminen syystä tai toisesta ole tarpeellista.

Kutsutaan todennäköisyysjakaumien kokoelmaa $\{P(a_X|X)\}$ *käyttäytymiseksi*, viitteen [27] terminologiaa laajentaen. Merkataan lyhyesti $P(a_X|X)$ ja oletetaan asiayhteydestä tunnetuksi tarkoitetaanko yksittäistä jakaumaa tai käyttäytymistä.

Sanotaan myös, että muuttujat ϱ ja X määräävät kokeellisen *kontekstin* ts. olosuhteet joissa koe on suoritettu ja että muuttujat ovat tapahtuman a_X *tilastollisia syitä* [28, s.5] eli ne määräävät mittaustulosjakaumat. Voidaan olettaa että konteksti sisältää oleelliset avaruusaikakoordinaatit siten, että preparaatio ja mittaus ovat ennen tuloksen ylöskirjausta.

Vaikka käyttäytymisen tunteminen voikin antaa fyysikolle ennustuskykyä, ei pelkkää kokelmaa mittaustulosdataa eri konteksteissa yleensä kutsuta teoriaksi. Suurpiirteisesti voidaankin sanoa, että teoreettisen fysiikan tarkoitus on luoda matemaattisia malleja tai yleispäteviä teorioita selittämään kokeissa havaittuja relaatioita. Perusajatus on, että muuttujat ϱ, X saavat teoriassa matemaattisen esityksen, jolloin teoriaa voidaan käyttää ennustusten tekemiseen myös alkuperäisten kokeellisten kontekstien ulkopuolelle. Teorian ennustusten testaaminen näissä uusissa ympäristöissä antaa metodin falsifioida tai vahvistaa teoriaa tai testata teorian soveltuvuuden rajoitteita. Toisaalta teorian ennustusten kokeellinen varmentaminen ei sinänsä ole riittävä peruste sanoa, että teoria on 'oikea'. Diplomaattisempi ilmaisu olisi, että teoria on 'hyvä' tai yleinen, tai sisältää *jotakin* oikeaa.

Tässä ei tehdä sitoutumista mihinkään tiettyyn teoriaan. Oletus on, että riippumatta teorian matemaattisesta muotoilusta, tulisi hyvällä teorialla olla 'selitys' kokeessa havaittavalle käyttäytymiselle ts. jakaumien todennäköisyysväittämille. Perinteisissä klassisissa teorioissa mittausprosessi ei ole erityisroolissa ennustusten tekemisessä, vaikka käytännön kokeessa käytettäisiinkin mittalaitetta. Jos käyttäytymisen selitys oletetaan olevan tässä mielessä klassinen, muuttuja X voidaan tulkita yksinkertaisesti valitun suureen lukemisen indikaattorina esim. halutaanko paikka tai liikemäärä. Muuttujan ϱ voidaan tulkita sisältävän informaatio alkuehdoista, vapausasteista ja mahdollisesta evoluutiosta aina 'hetkeen jolloin ominaisuus päätetään lukea' asti. Toisaalta esimerkiksi kvanttimekaniikassa mittausta ei voi irrottaa systeemin kuvauksesta. Tässä tapauksessa muuttuja ϱ samaistetaan kvantti-tilan kanssa, ja muuttuja X suureen, jolla on M_X mahdollista mittaustulosta kanssa. Ts. kirjoitetaan $P(a_X|X) = tr[\varrho W_{a_X|X}]$, missä $\varrho \in \mathbb{S}(\mathcal{H})$, $W_{a_X|X} \geq 0$ $\forall a_X, X$ ja $\sum_{a_x} W_{a_X|X} = I_{\mathcal{H}}$ $\forall X$. Tutkielmassa mukaillaan esim. viitteen [29] merkintätapoja. $\mathcal{H}$ on systeemin Hilbertin avaruus, $\mathbb{S}(\mathcal{H}) = \{\varrho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) | tr[\varrho] = 1, \varrho \geq 0\}$ on vastaava tila-avaruus, $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ on jäkiluokkaoperaattorien joukko, eli joukko rajoitettuja lineaarioperaattoreita $t \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ t: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, joille $tr[t] < \infty$ ja $I_{\mathcal{H}}$ on identiteettikuvaus avaruudessa $\mathcal{H}$. Merkintää $\mathbb{S}_{ext}(\mathcal{H})$ käytetään puhtaiden tilojen joukolle, eli niille $\varrho \in \mathbb{S}(\mathcal{H})$ joille $\varrho^2 = \varrho$.

Huomautetaan, että samalle mittausdatalle voi lähtökohtaisesti olla paitsi selitys useammassa eri teoriassa, myös useampi selitys samassa teoriassa. Näistä tosiasioista huolimatta kutsutaan välillä kylmäpäisesti asetuksen X valintaa mitattavan fysikaalisen suureen valinnaksi.

Kaikille käyttäytymisille oletetaan tutkielmassa äärelliset mittausasetusten, ja niitä vastaavien mittaustulosten joukot. Tämä ei ole lähtökohtaisesti oletus minkään tarkastelun kannalta kenties oleellisista fysikaalisen systeemin vapausasteista. Nimittäin voisi olla, että laitteet mittaavat jatkuvanakin pidettävää ominaisuutta kuten esim. valonsäteen aallonpituutta ja antavat äärellisen määrän tulosteita vaikka jonkin laitteeseen kiinnitetyn deterministisen tai epädeterministisen säännön mukaisesti. Esimerkiksi jokin Aliisan laite voisi tulostaa +1, kun aallonpituus on > 500nm ja -1 muulloin. Täten mittaustulosten äärellinen määrä voidaan tulkita joko esimerkiksi toteamuksena laitteen resoluutiosta, tai määrittelemättömästä tavasta jolla laite reagoi erilaisiin mielivaltaisen monimutkaisiin systeemin konfiguraatioihin. Tässä mielessä kokoelma $P(a|X)$ edustaa koetilanteen kokonaisvaltaista abstraktiota; käyttäytyminen ei lähtökohtaisesti ota kantaa, tai sillä ei lähtökohtaisesti voida päätellä, allaolevien fysikaalisten systeemien vapausasteista, tai edes siitä, mitä mittalaite todellisuudessa tekee. Voisi esim. olla että laitteen sisällä on noppa, jonka silmäluvun mukaan palautetaan lukema.

Voidaan ajatella, että yksittäistä koekierrosta vastaten Aliisalla on käytössään laatikko, joka ottaa yhden syötteen (engl. input) X äärellisestä joukosta ja tuottaa välittömästi tuhoten kyseisen laatikon tulosteen (engl. output) a_X todennäköisyydellä $P(a_x|X)$. Kutsutaan tämän tason tarkastelua laatikkotason tarkasteluksi, ja käytetään termejä käyttäytyminen ja laatikko sekaisin.

Todennäköisyystulkinta vaatii että $\sum_{a_X} P(a_X|X) = 1 \ \forall X$ ja $P(a_X|X) \geq 0 \ \forall a_X, X$, riippumatta laatikon selityksestä. Laatikon sanotaan olevan deterministinen, eli täysin muuttujien X määräämä, jos $P(a_X|X) \in \{0, 1\} \ \forall a_X, X$ ja epädeterministinen, tai satunnainen muulloin. Käyttäytymistä, jonka kaikki todennäköisyydet ovat uniformisti jakautuneita merkataan symbolilla $\mathfrak{I}$ ja kutsutaan tasajakaumaksi. Koska konveksikombinaatio todennäköisyysjakaumia on todennäköisyysjakauma, voidaan määritellä laatikoiden konveksikombinaatio ilmeisellä tavalla.

Laatikkoa voidaan pitää primitiivisenä prosessorina, jonka toiminta perustuu allaoleviin fysiikan lakeihin. Mitä tahansa laatikkotasolla esitettyä informaation prosessointiprotokollaa kutsutaan *laiteriippumattomaksi*; laatikon sisuksista, eli fysikaalisista systeemeistä ja mittausmenetelmistä joilla laatikko realisoidaan ei tehdä oletuksia. On hyväksyttyä esimerkiksi kuvitella, että preparaattori ja mittalaitteet ovat lahjoja joulupukilta, eikä fyysikolla lähtökohtaisesti ole mitään käsitystä siitä miten ne on rakennettu vaikka siis uskottaisiin siihen, että laatikkoa voi kuvata esim. kvanttimekaanisesti.

Ottamatta sen enempää kantaa siihen, onko yksinkertaisista syöte-tuloste kojeista suurempaa hyötyä, tai siihen miten allaolevia fysiikan lakeja tulisi kuvata, todetaan että esimerkiksi jollakin asetuksella uniformisti jakautuneita tulosteita antavaa laatikkoa voitaisiin 'lähtökohtaisesti' soveltaa noppapeleissä ja mahdollisesti jopa kryptografiassa. Erityisesti kryptografisiin sovellutuksiin olisi kuitenkin tärkeää varmistua satunnaisuuden 'aitoudesta'. Jos epädeterministiselle laatikolle löytyy deterministinen selitys, ei olisi mitenkään poissuljettua että pahantahtoinen taho, vaikka joulupukin pajalla työskentelevä korruptoitunut tonttu, voisi päästä oleellisiin preparaattorin parametreihin käsiksi, ja ennustaa laitteen generoimaa tässä näennäistä satunnaisuutta mahdollisesti rikkoen protokollan toimivuus. Käytännölliseltä näkökannalta oleellista lienee deterministisen selityksen 'helppous'; tarpeeksi monimutkaista viimekädessä deterministisiin tapahtumiin perustuvaakin systeemiä voi joillakin oletuksilla pitää hyvänä satunnaisuuden lähteenä.

Kysymys siitä, onko luonnossa aitoa satunnaisuutta eli kärjistäen onko olemassa fysikaalisia laatikoita joille ei ole determinististä selitystä tai ei on ikivanha. Satunnaisuus on erottamaton osa kvanttimekaniikkaa esim. Bornin säännön ja Gleasonin teoreeman nojalla. Tämä on eräs kvanttiteorian ominaisuus, jota voidaan pitää klassisten teorioiden näkökulmasta erikoisena. Ennustuskyvyn puolesta epädeterminismiä voi pitää jopa ei-toivottavana ominaisuutena, vaikka satunnaisuudelle löytyisikin sovellutuksia.

Huomautetaan oitis että mille tahansa yksittäiselle äärellisten syötteiden ja tulosteiden epädeterministiselle laatikolle $P(a_X|X)$ voidaan löytää deterministinen selitys. Nimittäin voidaan muodollisesti määritellä muuttuja λ joka sisältää kullakin kokeen kierroksella listan kyseisellä kierroksella deterministisesti määrättyjä vasteita eli tuloksia a_X kullekkin mittalaitteelle X; $\lambda \equiv [a_1, a_2, \ldots a_N]$ määritellen deterministisen laatikon eli $P(a_X|X, \lambda) \in \{0, 1\}$. Kyseisen kaltaisia listoja on äärellinen määrä; yksi lista jokaiselle äärellisen määrän vasteita kombinaatiolle. Voidaan siis kirjoittaa

$$P(a_X|X) = \sum_{\lambda} P(\lambda)P(a_X|X, \lambda).$$

Tämän mallin sisältö on, että jokaisella kokeen kierroksella preparaattorista lähtee lista λ todennäköisyydellä $P(\lambda)$, antaen deterministiset ohjeet systeemin vasteelle kunkin mittauksen alla. Vaikka malli ei annakkaan mitään selitystä muuttujan λ jakautumiselle, voidaan tässä alkuperäisen laatikon epädeterminismille antaa 'tietämättömyystulkinta'. Mallin olemassaolo käsittää käsittää intuitiiviset ideat kuten preparaattorin toimintaan liittyvät, vaikka termiset satunnaisvaihtelut. Mikään yksittäinen laatikko, oli tai ei sille kvanttimekaanista selitystä, ei edellisen nojalla pakota hyväksymään luontaista satunnaisuutta.

Huomautetaan myös että vaikka satunnaisuus on kvanttiteorialle tyypillistä, myös mille tahansa deterministiselle laatikolle $P(a_X|X)$ voidaan aina löytää kvanttimekaaninen selitys. Argumentin vuoksi olkoon Aliisalla laatikko jolla $X \in \{1,2\}, a_1 \in \{1, \dots M_1\}$ ja $a_2 \in \{1, \dots M_2\}$. Deterministisyyden nojalla $P(a_X|X) \equiv \delta_{a_X, \tau_X}$ jollakin $\tau_X \in \{1, \dots M_X\}$. Ilman yleisyyden menetystä voidaan valita $\tau_1 = M_1$ ja $\tau_2 = M_2$, sillä tämä vastaa mittaustulosten mielivaltaista uudelleennimeämistä. Valitaan $d = max\{M_1, M_2\}$- ulotteinen Hilbertin avaruus, kiinnitetään ortonormaali kanta $\{\varphi_i\}_{i=1}^{d}$ ja valitaan suureen X, jolla $M_X = d$ (ilman yleisyyden menetystä $X = 1$) projektiiviset efektioperaattorit $W_{a_1|X=1} = |\varphi_{a_1}\rangle \langle\varphi_{a_1}|$ ja kvanttitila $\varrho = |\varphi_{\tau_1}\rangle \langle\varphi_{\tau_1}|$, näillä valinnoilla on nähdään että voidaan palauttaa $P(a_1|X = 1) = \delta_{a_1,\tau_1}$. Toisaalta jakaumalle $P(a_2|X = 2)$ voidaan rakentaa M_2 efektiä sisältävä suure esimerkiksi projektioita yhdistelemällä kuten; $W_{a_2=1|X=2} = \sum_{i=1}^{(M_1-M_2)} |\varphi_i\rangle \langle\varphi_i|$ ja $W_{a_2=k|X=2} = \left|\varphi_{(M_1-M_2+k)}\right\rangle \left\langle\varphi_{(M_1-M_2+k)}\right|$, kun $k \neq 1$. Tämä konstruktio on mielivaltainen eikä välttämättä mielenkiintoinen, mutta ilmeisesti yleistettävissä mielivaltaisille deterministisille laatikoille, osoittaen sen mitä väitettiin. Huom. että jos $M_1 = M_2$ väite on erityisen triviaali.

1.2 Yhdistetyt laatikot ja signaalilokaalisuus

Kuvitellaan tilanne, jossa fyysikot Aliisa ja Petri tekevät kaukana toisistaan olevissa laboratorioissa erillisille systeemeille haluamiaan testejä. Olkoon Aliisalla kaksi mittalaitetta $X \in \{\spadesuit, \clubsuit\}$ ja jokaiselle mittalaitteelle on M_X mahdollista mittaustulosta $a_X \in \{1, \dots M_X\}$. Vastaavasti olkoon Petrillä kaksi mittalaitetta $Y \in \{\heartsuit, \diamondsuit\}$ ja M_Y mahdollista mittaustulosta b_Y. Fyysikot voivat yhdistää eri laboratorioissa generoidut mittaustuloslistat perinteistä viestintäkanavaa käyttäen yhdistetyksi käyttäytymiseksi $P(a,b|X,Y)$. Tässä alaindeksit X,Y on pudotettu luettavuuden helpottamiseksi, sillä valittu mittaus voidaan lukea todennäköisyyden ehdosta.

Oletus siitä, että kyseinen käyttäytyminen on saatu yhdistämällä kaksi erillisesti tuotettua mittaustuloslistaa johtaa konsistenssi vaatimukseen, missä marginaali $\sum_a P(a,b|X,Y) = P(b|X,Y)$ edustaa Petrin laboratoriossa havaittua käyttäytymistä vast. $\sum_b P(a,b|X,Y) = P(a|X,Y)$ Aliisan käyttäytymistä.

Erityisesti jos käyttäytyminen edustaa sellaista koejärjestelyä jossa jokaisen 'mittaustapahtumaparin' avaruusaikakoordinaatit ovat paikanluonteisesti erotetut ja Aliisa ja Petri olisivat havainneet että jollakin X ja Y

$$\sum_b P(a,b|X,\heartsuit) = P(a|X,\heartsuit) \neq P(a|X,\diamondsuit)$$
$$\sum_a P(a,b|\spadesuit,Y) = P(b|\spadesuit,Y) \neq P(b|\clubsuit,Y),$$

olisi selvää, että he voisivat rakentaa laatikoista mielivaltaisen 'nopeasti' toimivan viestimen. Viestintälaite toimii yhteen suuntaan jos vain jompikumpi ylläolevista epäyhtäsuuruuksista toteutuu, kahteen suuntaan jos molemmat. Oletetaan esimerkiksi, että ainakin alempi toteutuu, ts. Petrin marginaalit yleisesti ottaen riippuvat Aliisan valitsemasta mittausparametrista. Sovitaan Aliisan asetuksen $\spadesuit$ vastaavan viestiä (kyllä) ja asetuksen $\clubsuit$ viestiä (ei). Nyt kaukana olevan Petrin on mahdollista mittaustuloksistaan lukea, vertaamalla mittaustulosfrekvenssejä jakaumiin $P(b|\spadesuit,Y)$ jne. kumman asetuksen Aliisa olisi valinnut ja siis saada viesti. Periaatteessa Petrin tulisi saada, ainakin epädeterministisessä tapauksessa, mitata useita hiukkasia jotta hän voisi varmuudella päätellä mitä Aliisa yrittää kertoa. Joka tapauksessa Petri voisi puutteellisellakin datalla, jopa yhdellä mittaustuloksella, koettaa arvata kolikonheittoa suuremmalla todennäköisyydellä Aliisan viestin oikein ja täten tässäkin tapauksessa kyettäisiin siirtämään edes *jotain* informaatiota, ikäänkuin rätisevällä puhelimella. Olisi mahdollista että Petri 'saa' viestin paikanluonteisesti erotettuna Aliisasta ja täten kuvatunkaltainen mahdollisuus on *heti* ristiriidassa suhteellisuusteoriasta tulevan kausaalirakenteen kanssa.

Relativististen kausaaliteettiperiaatteiden ja kaikkien tunnettujen kokeiden mukaisesti voidaan vaatia että Aliisan (Petrin) lokaali käyttäytyminen on tämänkaltaisessa tilanteessa riippumaton 'kaukana' olevan Petrin (Aliisan) mittauskontekstista ts. kaikilla X, Y:

$$\sum_a P(a,b|X,Y) = P(b|X,Y) = P(b|Y)$$
$$\sum_b P(a,b|X,Y) = P(a|X,Y) = P(a|X).$$

Näitä ehtoja kutsutaan ei-viestintää (engl. no-signaling) -ehdoiksi. Ne takaavat, että Aliisa ja Petri eivät voi viestiä toisilleen edellä kuvatulla tavalla. Kutsutaan ei-viestintää ehdot toteuttavia laatikoita myös signaalilokaaleiksi laatikoiksi. Signaalilokaalisuus on tämän tutkielman keskeisimpiä käsitteitä.

Epärelativistisessa kvanttimekaniikassa, ja tässä tutkielmassa, yhdistettyjä systeemejä kuvataan yleensä tensoritulorakenteella. Olkoon $\mathcal{H}_A$ ja $\mathcal{H}_B$ Aliisan ja Petrin systeemien mielivaltais-ulotteiset Hilbertin avaruudet. Mittauksia ja vastaavasti evoluutiota dynaamisesti riippumattomille systeemeille, jollaisia paikanluonteisesti erotettujen asioiden oletetaan olevan, kuvataan Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ lokaaleilla, muotoa $A_{a|X} \otimes I$ ja $I \otimes B_{b|Y}$ olevilla operaattoreilla. Täten ylläesitettyä koejärjestelyä vastaavan kvanttimekaanisen selityksen käyttäytymiselle nähdään yleisesti ottaen olevan muotoa $P(a,b|X,Y) = tr[A_{a|X} \otimes B_{b|Y} \varrho_{AB}]$ jollekkin kvanttitilalle $\varrho_{AB} \in \mathbb{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$. Koska $\sum_a A_{a|X} = I_{\mathcal{H}_A}$ ja $\sum_b B_{b|Y} = I_{\mathcal{H}_B}$ nähdään että tällä tavoin esitetyt kvanttilaatikot toteuttavat ei-viestintää -ehdot. Muistutetaan kuitenkin että esim. epärelativistisessa kvanttimekaniikassa ei ole periaatteessa mitään ylärajaa hiukkasten nopeudelle tms. tavalliselle 'viestinviejälle' eikä kvanttiobjekteilta vaadita esimerkiksi Lorentz-invarianssia. Ei-viestintää ehdot tulisikin tältä kantilta nähdä eräänkaltaisena operationaalisesti motivoituna, primitiivisenä minimiehtona jonka on toteuduttava, ainakin tietyissä avaruusaikakonfiguraatioissa, jotta teoria voi olla sopusoinnussa suhteellisuusteorian kanssa. Signaalilokaalisuus on muutoin sinänsä avaruusajasta tai suhteellisuusteoriasta riippumaton vaatimus. Tavallinen kvanttimekaniikka kykenee tässä mielessä kuvaamaan toisistaan erotettuja useasta palasta koottuja systeemeitä, ilman että laboratorioiden välille muodostuisi ei-perinteinen kommunikaatiomenetelmä.

Vastaavasti voidaan kuvitella n:n osapuolen koejärjestelyjä. Kukin osapuoli i omistaa mittalaitteen, jonka asetuksia X_i on äärellinen, mutta muutoin mielivaltanen määrä. Ilman yleisyyden menetystä voidaan kirjoittaa $X_i \in \{1, 2 \dots N_i\}$. Edelleen oletetaan, että kunkin osapuolen valintaa X_i vastaa äärellinen määrä mahdollisia mittaustuloksia $a_{(i,X_i)} \in \{1, 2 \dots M_{X_i}\}$. Tilannetta kuvaavia todennäköisyysjakaumia edustaa laatikko $P(a_1, a_2, \dots a_n|X_1, X_2 \dots X_n) \equiv P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\})$, missä mittausvalinnan indikaattori X_i on luettavuuden vuoksi pudotettu symbolista $a_{(i,X_i)}$, sillä se voidaan lukea ehdosta.

Vastaavasti sanotaan laatikon $P(a_1, a_2, \dots a_n|X_1, X_2 \dots X_n)$ olevan signaalilokaali, jota voidaan vaatia esim. osapuolten mittaustapahtumien paikanluonteisuuden nojalla, jos jokaiselle osapuolien joukon $I = \{1, 2, \dots n\}$ osajoukolle $E \subset I$ marginaalijaukaumat $\sum_{\{a_i\};i \in I \setminus E} P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\}) \equiv P(\{a_{X_i}\} : i \in E|\{X_i\})$ ovat riippumattomia osapuolien $i \in I \setminus E$ mittausvalinnoista $X_i : i \in I \setminus E$. Toisinsanottuna

$$P\left(\{a_{X_i}\} : i \in E|\{X_i\}\right) = P(\{a_{X_i}\} : i \in E|\{X_i\} : i \in E).$$

Tämä ei-viestintää ehtojen muotoilu osajoukoille takaa, että muutoin mielivaltaista käyttäytymistä ei voi käyttää viestintään siinäkään tapauksessa, että jotkut osapuolista olisivat samassa huoneessa tai muutoin yhdistäisivät mittaustuloksensa; signaalilokaalisuuden takaamiseksi joka ikisen jakauman $P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\})$ marginaalin on oltava riippumaton muitten osapuolien valinnoista. Ilmeisesti ylläolevat vaatimukset toteutuvat, eli riittäväksi ehdoksi kelpaa että kaikille $i \in I, X_i$ ja X_i' pätee

$$\sum_{a_i} P(a_1, \dots a_i, \dots a_n|X_1, \dots X_i \dots X_n) = \sum_{a_i} P(a_1, \dots a_i, \dots a_n|X_1, \dots X_i' \dots X_n).$$

Helposti nähdään että nämä oletukset pätevät myös kvanttimekaanisille selityksille kun jokaisen osapuolen mittaukset ovat paikallisia. Voidaan sanoa, että kvanttiteoria on signaalilokaali teoria.

Useamman osapuolen käyttäytymistä kutsutaan myös *korrelaatioksi* sillä yleisesti ottaen laatikon todennäköisyyksille ei päde $P(a, b|X, Y) = P(a|X)P(b|Y)$ eli eri laboratorioissa havaituilla mittaustuloksilla voi olla riippuvuussuhteita. Merkataan symbolilla $\mathcal{P}$ laatikoiden joukkoa, joita rajoittavat ainoastaan normointi - ja positiivisuusehdot, symbolilla $\mathcal{S}$ signaalilokaalien laatikoiden joukkoa ja symbolilla $\mathcal{K}$ niiden laatikoiden joukkoa joille on kvanttimekaaninen selitys lokaalien mittausoperaattorien avulla. Ilmeisesti $\mathcal{K} \subset \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{P}$. Samaan tapaan kuin yksinkertaisten laatikoiden tapauksessa, voidaan kuvitella useamman osapuolen käyttäytymisille deterministisiä ym. selityksiä. Usean osapuolen tapauksessa tarkastelusta tulee kuitenkin huomattavasti mielenkiintoisempaa, kuten seuraavaksi havainnollistetaan.

2 Bellin teoreema

Kuuluisassa EPR-paradoksissa [30] argumentoitiin, kvanttimekaniikan ennustamiin korrelaatiohin nojaten, että kvanttitila ei sisällä kaikkia ennustusten kannalta fysikaalisesti merkittäviä tekijöitä systeemistä. Paradoksi muodostuu karkeasti oletuksista siitä, että fysikaaliseen systeemiin voidaan tietyissä tilanteissa liittää hyvin määritellyt ominaisuudet ilman että niitä mitataan (nk. realismi) ja siitä että paikanluonteisesti erotetut mittaustapahtumat eivät vaikuta toisiinsa (lokaalisuus). Ajatus oli, että paradoksin nojalla kvanttiteorialle tulisi kehittää 'täydellisempi' jopa deterministinen ontologinen malli, joka sisältäisi tavallisen formalismin ulkopuolelle tai 'piiloon' jääneet tekijät joilla voitaisiin selittää korrelaatiot.

Vuonna 1964 julkaistussa artikkelissa "On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox" [1] John Stewart Bell esitti nykyään Bellin teoreemana tunnetun syvällisen tuloksen, jonka nojalla mikään nk. lokaalisrealistinen malli ei voi selittää kvanttiteorian ennustamia korrelaatioita yleisesti ottaen. Tulos perustuu siihen, että lähtöoletuksista saadaan laatikkotason, eli ainoastaan mittattavaa dataa koskeva kriteeri, jolla voidaan erottaa toisistaan laatikoiden mahdollisia selityksiä.

Koejärjestely, jota alkuperäinen paperi [1] käsittelee, vastaa tilannetta jossa kummankin osapuolen systeemille mitataan kaksiarvoista suuretta. Nykyään on muodostunut tavaksi kutsua kyseisen koejärjestelyn kaikenkaltaisia yleistyksiä (useampi osapuoli, mahdollinen mittaustulos jne.) vastaavia epäyhtälöitä Bellin epäyhtälöiksi. Ja kokeita, joissa ko. epäyhtälöitä testataan Bell-kokeiksi.

Tässä esitettävä epäyhtälö tunnetaan kuitenkin Clauser-Horner-Shimony-Holt -epäyhtälönä (lyh. CHSH-epäyhtälö), tai joskus CHSH-Bell epäyhtälönä. Kyseinen epäyhtälö esitettiin [31] ensimmäisen kerran vuonna 1969 ja sitä voidaan pitää alkuperäisen Bellin epäyhtälön [1] yleistyksenä, jonka etuna on lisäksi helpompi kokeellinen testaus [31].

2.1 CHSH-epäyhtälö

Merkataan Aliisan laitteiden asetuksia symboleilla $\clubsuit$ sekä $\spadesuit$ ja Petrin asetuksia symboleilla $\heartsuit$ sekä $\diamondsuit$. Oletetaan lisäksi, että kummallekkin mittalaitteen asetukselle on kaksi mahdollista lopputulosta, joita edustavat ilman yleisyyden menetystä luvut -1 ja 1. Merkataan Aliisan mittaustulosta kirjaimella a_X ja Petrin vast. kirjaimella b_Y, nyt siis $a_X, b_Y \in \{-1, 1\}$ kaikilla $X \in \{\clubsuit, \spadesuit\}$ ja $Y \in \{\heartsuit, \diamondsuit\}$. Tilannetta kuvaa laatikko $P(a, b|X, Y)$

Oletetaan, että kullakin kokeen kierroksella systeemeihin liitetään muuttuja λ, joka edustaa systeemin 'täydellisintä mahdollista' kuvausta. Laatikko tulisi palautua keskimääräistyksenä ko. muuttujien jakauman yli.

Yleisin kuviteltavissa oleva malli havaitulle käyttäytymiselle on

$$P(a, b|X, Y) = \int_\Lambda d\lambda \left[q(\lambda|X, Y) P(a, b|X, Y, \lambda) \right],$$

missä oletetaan, että integraali on hyvin määritelty mitallisessa joukossa Λ. Myöskin $q(\lambda|X, Y) \geq 0$ ja $\int_\Lambda q(\lambda|X, Y) d\lambda = 1$. Oletetaan että malli on sellainen, jossa kokeentekijöillä on vapaa tahto valita mittausasetuksensa, se. muuttuja λ ei vaikuta, eikä korreloi asetuksiin X, Y. Täten voidaan kirjoittaa kirjoittaa $q(\lambda|X,Y) = q(\lambda)$, tämän voi nähdä Bayesin säännöstä $q(\lambda|X,Y) = \dfrac{q(X,Y|\lambda)q(\lambda)}{q(X,Y)}$ kun $q(X,Y|\lambda) = q(X,Y)$ jne.

Lisäksi oletetaan, että malli on signaalilokaali, ts. $P(a|X,Y,\lambda) = P(a|X,\lambda)$ ja $P(b|X,Y,\lambda) = P(b|Y,\lambda)$. Jos näin ei olisi, niin preparaattorin parametrien jakautumisen $q(\lambda)$ 'parempi' kontrolloiminen, esim. jos preparaattori voisi joka kerta poimia saman λ, jolla ei-viestintää ehdot eivät päde, saattaisi johtaa osiossa **1.2** kuvatun viestintäkanavan mahdollistumiseen.

Todennäköisyyksille pätee aina: $P(a,b|X,Y,\lambda) = P(a|b,X,Y,\lambda)P(b|X,Y,\lambda)$ $= P(b|a,X,Y,\lambda)P(a|X,Y,\lambda)$. Koska korrelaation oletetaan olevan täysin selitettävissä muuttujalla λ, on informaation toisessa laboratoriossa saadusta mittaustuloksesta oltava merkityksetöntä lokaalien ennustusten kannalta kullakin kokeen kierroksella, eli on oltava $P(a|b,X,Y,\lambda) = P(a|X,\lambda)$ ja $P(b|a,X,Y,\lambda) = P(b|Y,\lambda)$.

Kokoamalla edelliset oletukset yhteen, voidaan kirjoittaa

$$P(a,b|X,Y) = \int_\Lambda d\lambda \left[P(a|X,\lambda)P(b|Y,\lambda)q(\lambda)\right], \tag{1}$$

Ehtoa (1) on kutsuttu joskus esim. objektiiviseksi lokaalisuudeksi [32], lokaaliksi kausaalisuudeksi [33, kpl.7], lokaaliksi realismiksi, [34] tai Bell-lokaalisuudeksi [35, 36]. Bell-lokaalisuus ilmaisee, että mikä tahansa mahdollinen statistinen riippuvuus $P(a,b|X,Y) \neq P(a|X)P(b,|Y)$ laatikkotasolla on täysin selitettävissä hiukkaspariin koodatun tekijän λ, joka voi sisältää esim. kvanttimekaanisen kuvauksen ulkopuolelle jääneitä tms. mielivaltaisia parametrejä, avulla.

Määritellään sitten CHSH-Bell -korrelaatiofunktio kaavalla

$$C = \langle a_\spadesuit b_\heartsuit \rangle + \langle a_\clubsuit b_\heartsuit \rangle + \langle a_\clubsuit b_\diamondsuit \rangle - \langle a_\spadesuit b_\diamondsuit \rangle.$$

Hajotelmasta (1) saadaan C:n arvolle epätriviaali yläraja. Nimittäin

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{a,b=\pm 1} ab\,[P(a,b|\spadesuit,\heartsuit) + P(a,b|\clubsuit,\heartsuit) + P(a,b,|\clubsuit,\diamondsuit) - P(a,b|\spadesuit,\diamondsuit)] && (2)\\
&= \sum_{a,b=\pm 1} ab \left[\int_\Lambda d\lambda q(\lambda)\,[P(a|\spadesuit,\lambda)P(b|\heartsuit,\lambda) + \ldots - P(a|\spadesuit,\lambda)P(b|\diamondsuit,\lambda)]\right] && (3)\\
&= \int_\Lambda d\lambda q(\lambda)\,[\langle a_{\spadesuit,\lambda}\rangle\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle + \langle a_{\clubsuit,\lambda}\rangle\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle + \langle a_{\clubsuit,\lambda}\rangle\langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle - \langle a_{\spadesuit,\lambda}\rangle\langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle]\,. && (4)
\end{aligned}
$$

Tässä ensimmäinen riviin päästään ottamalla summaus ab yhteiseksi tekijäksi muotoa $a_X b_Y P(a,b|X,Y)$ olevista termeistä ilman alaindeksejä; näin voi tehdä koska $a_X, b_Y \in \{-1,1\}$ kaikilla $X \in \{\spadesuit,\clubsuit\}$ ja kaikilla $Y \in \{\heartsuit,\diamondsuit\}$. Identiteetin (1) nojalla saadaan (3). Alimmalla rivillä on otettu vakiot ja summa integraalin sisään sekä otettu käyttään merkintätapa $\langle a_{X,\lambda}\rangle = \sum_{a=\pm 1} aP(a|X,\lambda)$, ja samoin b_Y:lle. Merkintätapa on hyväksyttävä, sillä ilmeisesti

$$
\sum_{a,b=\pm 1} aP(a,|X,\lambda)bP(b|Y,\lambda) \equiv \sum_{a=\pm 1} aP(a|X,\lambda)\sum_{b=\pm 1} bP(b|Y,\lambda) = \langle a_{X,\lambda}\rangle\langle b_{Y,\lambda}\rangle.
$$

Eli lambdasta-riippuvat odotusarvot $\langle a_{X,\lambda} b_{Y,\lambda}\rangle$ voidaan ilmaista lokaalien odotusarvojen $\langle a_{X,\lambda}\rangle$ ja $\langle b_{Y,\lambda}\rangle$ avulla. Kirjoitetaan lausekkeen (4) integraalin sisällä oleva sulkulauseke muodossa

$$
\langle a_{\spadesuit,\lambda}\rangle\,(\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle - \langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle)\ \ + \langle a_{\clubsuit,\lambda}\rangle\,(\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle + \langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle) = \pitchfork\,.
$$

Koska $a_X, b_Y \in \{-1,1\}$ on oltava $|\langle a_{X,\lambda}\rangle| \leq 1$ ja $|\langle b_{Y,\lambda}\rangle| \leq 1$ eli myöskin

$$
\begin{aligned}
|\pitchfork| &= |\langle a_{\spadesuit,\lambda}\rangle\,(\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle - \langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle)\ \ + \langle a_{\clubsuit,\lambda}\rangle\,(\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle + \langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle)\,|\\
&\leq |\langle a_{\spadesuit,\lambda}\rangle||\langle b_{\heartsuit,\lambda)}\rangle - \langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle| + |\langle a_{\clubsuit,\lambda}\rangle||\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle + \langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle|\\
&\leq |\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle - \langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle| + |\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle + \langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle|,
\end{aligned}
$$

missä toiselle riville päästään käyttämällä itseisarvofunktiolle kolmioepäyhtälöä. Ilmeisesti joko $|\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle| \geq |\langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle|$ tai $|\langle b_{\diamondsuit,\lambda}\rangle| \geq |\langle b_{\heartsuit,\lambda}\rangle|$, joten käymällä läpi mahdolliset vaihtoehdot voidaan todeta alimman rivin menevän aina muotoon $|\pitchfork| \leq$

$2\,|\langle b_{Y,\lambda}\rangle|$ eli on oltava aina $|\pitchfork| \leq 2$. Nyt nähdään että korrelaatiofunktiolle C pätee

$$|C| = \left|\int_\Lambda d\lambda q(\lambda)[\pitchfork]\right| \leq \int_\Lambda d\lambda q(\lambda)|\pitchfork| \leq \int_\Lambda 2q(\lambda)d\lambda = 2, \tag{5}$$

missä on käytetty tietoa $q(\lambda) \geq 0$ ja $\int_\Lambda q(\lambda)d\lambda = 1$. Epäyhtälö (5) on tunnettu CHSH-epäyhtälö. Merkataan ylärajaa $C_{\mathfrak{B}} = 2$. Yläraja on epätriviaali, sillä lausekkeen algebrallinen maksimi on 4.

Kuvitellaan sitten kvanttimekaanisesti kuvattu koe jossa fyysikot tekevät mittauksia kaksidimensioisille systeemeille. Merkataan nuolilla $\uparrow = (1,0)^T$ $\downarrow = (0,1)^T$ Hilbertin avaruuden $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2$ ortonormaalia kantaa jossa esitetään matriisit $\sigma_Z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ja $\sigma_X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Aliisan detektoriasetukset $\spadesuit$ ja $\clubsuit$ samaistetaan projektiivisien mittauksien Z ja X - akselien suhteen ja Petrin asetukset $\heartsuit$ ja $\diamondsuit$ akselien $\searrow$ sekä $\nearrow$ suhteen. Vastaavat odotusarvot lasketaan nyt Aliisalle operaattoreista $A_Z = \sigma_Z$ ja $A_X = \sigma_X$ ja Petrille $B_\searrow = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_Z + \sigma_X)$ ja $B_\nearrow = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_Z - \sigma_X)$. Näillä valinnoilla, jos on preparoitu singlettitila $\varrho_{AB} = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$, $\Psi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\otimes\downarrow - \downarrow\otimes\uparrow)$, niin saadaan korrelaatiofunktiolle

$$\begin{aligned}
C &= \langle a_z b_\searrow\rangle + \langle a_x b_\searrow\rangle + \langle a_x b_\nearrow\rangle - \langle a_z b_\nearrow\rangle \\
&\equiv tr[\varrho_{AB}(A_Z \otimes B_\searrow)] + tr[\varrho_{AB}(A_X \otimes B_\searrow)] + \ldots - tr[\varrho_{AB}(A_Z \otimes B_\nearrow)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2.
\end{aligned}$$

Tulos tarkoittaa, että kvanttimekaniikassa on ainakin joitakin koejärjestelyitä, joita ei voi selittää Bell-lokaalisuuden toteuttavilla jakaumilla.

Bellin teoreeman voi lukea seuraavasti: mikään vaatimuksen (1) toteuttava teoria ei voi rikkoa CHSH-epäyhtälöä $|C| \leq C_{\mathfrak{B}} = 2$. Tulos on sinänsä riippumaton kvanttimekaniikasta. Koska kuitenkin kvanttiteoriassa voidaan rikkoa CHSH -epäyhtälöä, kenties 'yllättävästi' tai intuition vastaisesti, niin yleensä Bellin teoreema lausutaan seuraavassa muodossa: mikään teoria, jonka ennustukset vastaavat statistisesti kvanttiteorian ennustuksia ei voi toteuttaa ehtoa (1).

Todetaan, että vuosikymmenien aikana on tehty useita kokeita, joissa on havaittu CHSH-epäyhtälön rikkoutumista ja yleisesti ottaen hyvällä tarkkuudella sopusointuisia tuloksia kvanttiteorian ennustusten kanssa silloinkin kun mittaukset suoritetaan paikanluonteisesti. Kuitenkin kokeiden toteuttamisessa on omat haasteensa ja testitilanteissa käytännöllisistä syistä voi olla -tai voi jäädä- ”possunreikiä”, joilla voitaisiin ainakin periaatteessa selittää havaittu epäyhtälöiden rikkoutuminen ilman että oletusta (1) tarpeen varmuudella hylätä. Jotta mahdolliset Bell-lokaalit teoriat voitaisiin perustellusti sulkea pois, olisi kokeissa luonnollisesti pystyttävä ilman epäilystä osoittamaan ko. alkuoletusten epäonnistuminen. Tässä viitataan vuonna 2015 suoritettuun kokeeseen [37], jonka nojalla[1] on äärimmäisen epätodennäköistä että havaittua epäyhtälön rikkoutumista voitaisiin selittää Bell-lokaalilla teorialla. Samassa viitteessä on käsitelty erilaisia possunreikiä ja tapoja joilla ne voidaan koejärjestelyllä sulkea pois. Näyttäisi siis siltä, että luontoa ei tulisi kuvata teorialla joka on Bell-lokaali.

2.2 Bellin teoreeman merkityksestä

Bellin teoreema on aikojen saatossa johdettu useammalla tavalla ja joissakin allaolevat oletukset vähintäänkin näyttävät erilaiselta. Luokkaa teorioita, joita Bellin teoreema koskee onkin kutsuttu teoreeman ensiesityksestä [1] lähtien useilla eri sanayhdistelmillä, riippuen siitä minkälaisista, tai minkä näköisistä alkuoletuksista tarkalleen ottaen on lähdetty liikkeelle. Joitakin perinteisesti käytetyistä käsitteistä, kuten ’lokaali realismi’ on viimeaikoina kritisoitu hämärähkönä [34, 38].

Teoreeman ensiesityksestä on tutkielman tekemisen aikaan kulunut lähes kuusikymmentä vuotta. Silti, myös johtoon tarvittavista tarkoista premisseistä, ja täten teoreeman seurauksista käydään tänäkin päivänä kiivaanakin pidettävää sananvaih-

[1]Bell-kokeita on käsitelty kirjallisuudessa ja tehty laboratorioissa vuosikymmenien ajan. Lyhyen katsauksen kokeisiin liittyvisä ongelmista sekä haasteista löytää mm. mainitusta viitteestä [37].

toa ks. esim. [39–42]. Joissakin yhteyksissä väitetään, esim. [35, 38, 39] ja [43, kpl.10], että oleellisesti ainoana oletuksena Bellin teoreeman johdolle tarvitaan vaatimus lokaaleista vaikutuksista. Mitään implisiittistä 'klassisuutta' ei siis sisältyisi -eikä tarvittaisi teoreeman johtoon. Tämän näkemyksen [36] mukaan olisi syytä harkita vakavasti esim. Bohmin mekaniikan [44, 45] kaltaisia teorioita, jotka sisältävät eksplisiittisiä epälokaaleja vuorovaikutuksia systeemien välillä, joita on lähtökohtaisesti hankala sovittaa yhteen suhteellisuusteorian kanssa.

Myös päinvastaisia mielipiteitä löytyy, esim. [40, 46, 47]. Tämän asenteen mukaan lokaalisuus ei ole ainoa oletus Bellin teoreeman johdon takana. Vaadittu toinen -vähintään implisiittinen- oletus voi ottaa useita eri asuja Bellin teoreeman erilaisissa todistuksissa ja sitä voitaisiin nimittää vaikka sitten, kenties epämääräisesti, realismiksi tai klassisuudeksi.

Bell-kokeen peruspremissi on, että yhdistettyjä jakaumia $P(a, b|X, Y)$ voidaan arvioida vasta, kun fyysikot yhdistävät mittaustuloksensa ja tämän oletetaan tapahtuvan -tunnetun fysiikan mukaisesti- perinteistä viestintäkanavaa käyttäen. Täten teorian operationaalisesti mielekäs lokaalisuuden käsite palautuu signaalilokaalisuuden toteutumiseen teorian parhaankin kuvauksen λ tasolla.

Oletukset $P(a|X, Y, \lambda) = P(a|X, \lambda)$ sekä $P(b|X, Y, \lambda) = P(b|Y, \lambda)$ oleellisesti sanovat, että ei-viestintää ehdot toteutuvat siinäkin tapauksessa, että jakauma $q(\lambda)$ poimisi joka kerta saman kyseisessä teoriassa täydellisimmän tilan λ. Tämä pitää paikkansa tavallisessa kvanttimekanikassa, mutta ei esimerkiksi Bohmin mekaniikassa, jossa 'piilomuuttujien tasolla' on sisällytettynä välittömiä vuorovaikutuksia ja alkuehdot määräävät systeemin ominaisuudet deterministisesti. Bell-lokaalisuus on *vahvempi* kuin ei-viestintää ehto; kaikki Bell-lokaalit teoriat ovat signaalilokaaleja teorioita. Signaalilokaalisuuden takaamiseksi täytyy prediktiivisesti epäsignaalilokaaleissa teorioissa postuloida, tai vakuuttavammin perustella matemaattisesti, jotakin muuttujien λ jakautumisesta $q(\lambda)$ ja niiden hallittavuudesta, jottei aiemmin kuvailtu kommunikointikanava tulisi mahdolliseksi.

Toisen Bellin teoreeman johdossa korostetun oletuksen $P(a|b,X,Y,\lambda) = P(a|X,\lambda)$, $P(b|a,X,Y,\lambda) = P(b|Y,\lambda)$ operationaalinen sisältö on, että fyysikko joka tietää muuttujan λ, ei saa lisää ennustuskykyä kaukana olevan hiukkasen ominaisuuksista mittaamalla omaa hiukkastaan. Oletuksen mukaan toisen laboratorion mittaustulosten hyödyntäminen yksittäisten koekierrosten ennustamisessa vaatii kommunikointia fyysikoiden välillä. Kääntäen se, että fyysikko voi käyttää korrelaatioita kaukana olevan hiukkasen ominaisuuksien parempaan ennustamiseen mittauksen jälkeen (esim. jos $P(a|b,X,Y,\lambda) \neq P(a|X,\lambda)$) ei lähtökohtaisesti implikoi, että lokaali mittaus olisi muuttanut mitään objektiivista fysikaalista kaukana olevan hiukkasen ominaisuutta. Nämä toteamukset lähestyvät teoreettisten rakenteiden tulkinnallisia kysymyksiä, kuten esim. kuvaako kvanttitila - tai tässä laatikko, systeemin 'todellista' fysikaalista konfiguraatioita, vai kokeentekijän informaatiota systeemistä. Syventyminen tulkinnallisiin kysymyksiin väistetään, ja tyydytään toteamaan että vaikka mittauksella tulkittaisiin tässä olevan jokin vaikutus toisessa laboratoriossa tapahtuviin asioihin, ei vaikutuksella ainakaan ole operationaalista merkitystä. Tässä viitekehyksessä vaikuttaa siltä, että Bell-lokaalisuuden voidaan nähdä muodostuvan parista oletuksia; prediktiivinen signaalilokaalisuus ja toinen ehto, jonka voidaan nähdä liittyvän kuvauksen täydellisyyteen [48]. Kummassakin näkökulmassa kokonaisuus on tavallaan enemmän kuin osiensa summa.

Tässä tutkielmassa kysmys Bell-epälokaalisuuden todellisesta alkuperästä on toissijainen. Korrelaatiot voidaan kenties selittää vaikka jollakin erikoisella säilymislailla, välittömien, retrokausaalisten vuorovaikutusten tai vaikka laboratorioita linkittävän madonreiän (jotakin tämänkaltaistakin on esitetty ks. [49]) avulla. Jos nämä mallit ovat sopusoinnussa laatikkotason signaalilokaalisuuden kanssa, ts. mahdolliset välittömät vaikutukset pysyvät piilossa, ne kelpaavat laatikoiden selitykseksi. Tästä eteenpäin otetaan Bell-lokaalisuus esitetyssä muodossaan eräänä laatikoiden $\mathcal{P}$ joukkoa rajoittavana aksioomanomaisena ehtona ja Bell-epälokaalien korrelaatioiden olemassaolo paikanluonteiseisestikin suoritetuille mittauksille kokeellisesti todennettuna tosiasiana.

Tarkennetaan vielä Bell-lokaalien korrelaatioiden sisältöä. Kriteeri muotoiltiin vaatimalla käyttäytymisiltä $P(a,b|X,Y)$ hajotelmaa

$$P(a,b|X,Y) = \int_{\Lambda} d\lambda \left[P(a|X,\lambda)P(b|Y,\lambda)q(\lambda) \right].$$

Esityksessä ei vaadittu, että lokaalit todennäköisyysvasteet $P(a|X,\lambda)$ tai $P(b|Y,\lambda)$ olisivat deterministisiä. Käy kuitenkin ilmi, että annettu muotoilu tarjoaa vain näennäisesti suurempaa yleisyyttä: stokastinen Bell-lokaali malli on olemassa jos ja vain jos on olemassa myös deterministinen malli. Tämä tosiasia huomattiin aikaisin viitteessä [50], mutta tässä seurataan ensisijaisesti viitteessä [51] löytyvää argumenttia.

Ilmeisesti deterministisen mallin olemassaolo implikoi epädeterministisen mallin, sillä konveksikombinaatio Bell-lokaaleita laatikoita on Bell-lokaali ja mielivaltainen epädeterministinen jakauma saadaan sopivana konveksikombinaationa determinististiä jakaumia. Käänteisen tuloksen voi nähdä huomaamalla, että vasteiden $P(a|X,\lambda)$ satunnaisuus voidaan siirtää piilomuuttujalle korvaamalla λ muuttujalla $\lambda' = (\lambda, \mu_A, \mu_B)$ [51]. Tässä μ_A, μ_B ovat toisistaan ja muuttujasta λ riippumattomia, uniformisti välille [0,1] jakautuneita satunnaismuuttujia. Nyt nähdään että alkuperäinen Bell-lokaali käyttäytyminen voidaan palauttaa muuttujan λ' determinististisistä lokaaleista vasteista $P'(a|X,\lambda')$, $P'(b|Y,\lambda')$ ja distribuutiosta $q'(\lambda') \equiv q(\lambda)$, keskimääräistämällä muuttujien μ_A, μ_B yli, kun määritellään

$$P'(a|X,\lambda') = \begin{cases} 1 & \mu_A \leq P(a|X,\lambda) \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases} \quad \text{ja} \quad P'(b|Y,\lambda') = \begin{cases} 1 & \mu_B \leq P(a|X,\lambda) \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä ei ole tarpeen ottaa kantaa mallin fysikaaliseen mielekkyyteen. Jokatapauksessa nähdään että Bell-lokaaleihin laatikoihin liittyvä satunnaisuus on sellaista, jolle voidaan antaa tietämättömyystulkinta.

Koska mahdollisia mittaustuloksia on äärellinen määrä, tässä kaksi jokaiselle mittalaitteelle, voidaan integraali yli Λ-avaruuden korvata summalla yli eri tuloksiin johtavien 'relevanttien' determinististen konfiguraatioiden, joita on tässä $2^4 = 16$ kpl.:

$$P(a, b|X, Y) = \sum_{\lambda} P(\lambda)P(a|X, \lambda)P(b|Y, \lambda).$$

Tämä on analoginen osion **1.1** esimerkkiin, jossa kukin deterministinen konfiguraatio identifioitiin listan, jossa jokaiselle laitteen asetukselle kullakin kierroksella on määrätty mittaustulos, kanssa; $\lambda = [a_\spadesuit, a_\clubsuit : b_\heartsuit, b_\diamondsuit]$. Lista mittaustuloksia sisältää kullakin koekierroksella arvot jokaiselle mitattavissa olevalle suureelle. Bell-lokaalisuuden rikkoutuminen implikoi täten että kyseisen kaltaista listaa ei voi olla olemassa. Tai oikeammin että jokaisen Bell-epälokaalin mittaustulokset yksittäisellä kokeen kierroksella määräävän listan tulee ottaa huomioon kaukana oleva mittauskonteksti. Voidaan väittää, että tavallinen kvanttiteoria, minimaalisessa tulkinnassa, jonka ennustukset ovat tilastollisia ei ota yleisesti kantaa suureiden arvoihin yksittäisillä kokeen kierroksilla eikä täten ota em. listojen olemassaoloonkaan ts. ei puhu ominaisuuksista joita ei ole mitattu: "kokeilla joita ei tehty, ei ole tuloksia" [52].

Bell-epälokaalisuus voidaan ottaa todisteena aidosti ei-klassisesta resurssista; korrelaatioita ei voida ainakaan selittää preparaattorin systeemeihin ennalta kirjoittamilla ominaisuuksilla. Merkataan Bell-lokaalien laatikoiden joukkoa kirjaimella $\mathfrak{B}$ ja kutsutaan $\mathfrak{B}$'n elementtejä myös klassisiksi tai lokaalisrealistisiksi laatikoiksi. Kirjallisuudessa kvanttiteorian sitä ominaisuutta, että Bellin epäyhtälöt rikkoutuvat, kutsutaan usein kvanttiepälokaalisuudeksi (engl. quantum nonlocality, usein Bell-epälokaalisuuteen viitatessa käytetään myös lyhyesti termiä *nonlocality*). Olisi kenties perusteltua käyttää jotakin toista käsitettä esim. kvanttiepäseparoituvuutta [46]. Tässä tutkielmassa näitä käsitteitä käytetään ristiin; ko. käsitettä voidaan pitää lyhennyksenä "Bellin epäyhtälöiden rikkoutumiselle kvanttimekaniikassa".

3 Ei-klassisista korrelaatioista

Kvanttimekaaniset, dynaamisesti riippumattomien systeemien väliset, korrelaatiot voivat olla voimakkaampia kuin mitä voidaan selittää klassisella lokaalilla mallilla. Luvussa **2.1** annetussa esimerkissä korrelaatiofunktio $C = \langle a_{\spadesuit} b_{\heartsuit} \rangle + \langle a_{\clubsuit} b_{\heartsuit} \rangle + \langle a_{\clubsuit} b_{\diamondsuit} \rangle - \langle a_{\spadesuit} b_{\diamondsuit} \rangle$ sai arvon $4 > |C| = 2\sqrt{2} > 2$. Seuraavassa osiossa näytetään, että tämä arvo on kvanttimekaniikassa teoreettinen yläraja CHSH-Bell korrelaatiofunktiolle C. Tulos on epätriviaali, sillä alkuoletuksena olivat ainoastaan se, että kummallakin osapuolella mitattavia suureita on kaksi, ja että suureet ovat kaksiarvoisia. Periaatteessa voitaisiin kuvitella vaikka kuinka monimutkainen systeemi joka istuu näihin oletuksiin; esimerkiksi systeemin Hilbertin avaruuden dimensiosta ei oletettu mitään. Tuloksen esitti ensimmäisen kerran Boris Tsirelson vuonna 1980 [53].

Nykyään on muodostunut tavaksi kutsua yleisempienkin Bell- lausekkeiden pienintä kvanttimekaanista ylärajaa Tsirelsonin rajaksi. Merkataan ko. korrelaatiofunktion ylärajaa alaindeksillä $\mathcal{K}$, esim. CHSH-epäyhtälö on $|C| \leq C_{\mathcal{K}}$. Kvanttimekaanisia Bellin epäyhtälöitä kutsutaan myös joskus Tsirelsonin epäyhtälöiksi.

3.1 Tsirelsonin raja ja PR-laatikko

Rajan CHSH-epäyhtälölle voi johtaa useammalla eri tavalla. Tässä esitettävä tapa seuraa oleellisesti viitteitä [54] ja [28, kpl. 20,4].

Kaukana toisistaan olevat Aliisa ja Petri mittaavat kumpikin kahta kaksiarvoista suuretta joiden ajatellaan vastaavan mittalaitteen orientaatiota X Aliisalle ja Y Petrille. Tässä $X \in \{\spadesuit, \clubsuit\}$ ja $Y \in \{\heartsuit, \diamondsuit\}$ kuten aikaisemmin. Merkataan Aliisan lokaalin suureen $\mathbf{A_X}$ mittaustuloksia $a \in \{-1, 1\}$ vastaavia Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}_A$ tapahtumaoperaattoreita (efektejä) symboleilla $A_{X,+}$ ja $A_{X,-}$. Vastaavasti merkataan Petrin suurelle $\mathbf{B_Y}$ Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}_B$ efektejä symboleilla $B_{Y,+}$ ja $B_{Y,-}$. Avaruuksien $\mathcal{H}_A$ ja $\mathcal{H}_B$ dimensiot voivat olla mielivaltaisia. Nyt siis $A_{X,a}, B_{Y,b} \geq 0$ kaikilla $a, b \in \{-1, 1\}$ sekä $A_{X,+} + A_{X,-} = I_{\mathcal{H}_A}$ ja $B_{Y,+} + B_{Y,-} = I_{\mathcal{H}_B}$.

Yleisessä tapauksessa lokaalit operaattorit $A_{X,a}$ ja $B_{Y,b}$ eivät ole projektiivisia, eikä yhdistetty tila ϱ_{AB} puhdas. Samat mittaustulostodennäköisyydet voidaan kuitenkin mallintaa projektiivisten mittausten avulla puhtaalle tilalle jossakin laajennetussa Hilbertin avaruudessa [27]. Tämän voi nähdä olevan seurausta Naimarkin teoreemasta ks. esim. [28, kpl. 7.3], jonka nojalla voidaan löytää $\varrho'_{A'B'} \in \mathbb{S}_{ext}(\mathcal{H}_{A'} \otimes \mathcal{H}_{B'})$, $\Pi(a) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_{A'}) = \{p \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A'}) | p^2 = p = p^*\}$ ja $\Pi(b) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_{B'})$ jolle

$$P(a, b|X, Y) \equiv tr[\varrho'_{A'B'}(\Pi(a) \otimes \Pi(b)].$$

Tämä voidaan tulkita fysikaalisesti siten, että Aliisa tai Petri voivat halutessaan huomioida takasteltavan systeeminsä lisäksi myös paikallisen ympäristön, esim. mittalaitteen tilan, ja ajatella mittausten olevan projektiivisia ko. yhdistetylle systeemille. Pilkullinen notaatio voidaan pudottaa saman tien, nimittäin koska ongelman annossa ei rajoitettu Hilbertin avaruuksien dimensioita, on sallittua ilman yleisyyden menetystä olettaa että paikalliset mittaukset ovat projektiivisia, eli että $A^2_{X,a} = A_{X,a}$ ja $B^2_{Y,b} = B_{Y,b}$.

Määritellään operaattorit $\hat{A}_X = A_{X,+} - A_{X,-}$ sekä $\hat{B}_Y = B_{Y,+} - B_{Y,-}$, jolloin odotustulokset $\langle a_X b_Y \rangle$ voidaan laskea kaavalla $\langle a_X b_Y \rangle = tr[\varrho_{AB} \hat{A}_X \otimes \hat{B}_Y]$.

$\hat{A}_X$ ja $\hat{B}_Y$ ovat itseadjungoituja, sillä ne ovat positiivisten eli itesadjungoitujen operaattorien summia (erotuksia). Operaattoreille $\hat{A}_X$ ja $\hat{B}_Y$ pätee

$$I_{\mathcal{H}_A} \leq \hat{A}_X \leq I_{\mathcal{H}_A} \quad \text{ja} \quad -I_{\mathcal{H}_B} \leq \hat{B}_Y \leq I_{\mathcal{H}_B}.$$

Erityisesti oletuksista $A^2_{X,a} = A_{X,a}$ ja $B^2_{Y,b} = B_{Y,b}$ seuraa kuitenkin myös että

$$\hat{A}_X^2 = I_{\mathcal{H}_A} \qquad \text{ja} \qquad \hat{B}_Y^2 = I_{\mathcal{H}_B},$$

nimittäin esimerkiksi $I_{\mathcal{H}_A} = A_{X,+} + A_{X,-}$ implikoi että $A_{X,+} = A^2_{X,+} + A_{X,+}A_{X,-}$ eli $0 = A_{X,+}A_{X,-}$ ja samoin $A_{X,-}A_{X,+} = 0$. Tästä huomiosta nähdään väitetty identiteetti

$$\begin{aligned}\hat{A}_X^2 &= (A_{X,+} - A_{X,-})^2 \\ &= A_{X,+}^2 - A_{X,+}A_{X,-} - A_{X,-}A_{X,+} + A_{X,-}^2 \\ &= A_{X,+} + A_{X,-} = I_{\mathcal{H}_A}.\end{aligned}$$

Samoin voidaan tietysti tehdä $\hat{B}_Y$:lle.

Määritellään lisäksi CHSH-Bell operaattori $\hat{C}$ kaavalla

$$\begin{aligned}\hat{C} &= \hat{A}_\spadesuit \otimes \hat{B}_\heartsuit + \hat{A}_\clubsuit \otimes \hat{B}_\heartsuit + \hat{A}_\clubsuit \otimes \hat{B}_\diamondsuit - \hat{A}_\spadesuit \otimes \hat{B}_\diamondsuit \\ &= \hat{A}_\spadesuit \otimes (\hat{B}_\heartsuit - \hat{B}_\diamondsuit) + \hat{A}_\clubsuit \otimes (\hat{B}_\heartsuit + \hat{B}_\diamondsuit),\end{aligned}$$

jolloin väite $C_K = 2\sqrt{2}$ voidaan kirjoittaa muodossa $\left|tr[\hat{C}\varrho_{AB}]\right| \leq 2\sqrt{2}$, $\varrho_{AB} \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$. Nyt

$$\left|tr[\hat{C}\varrho_{AB}]\right| = \left|\langle\psi|\hat{C}\psi\rangle\right| \leq \|\hat{C}\|_{AB},$$

missä $\|\cdot\|_{AB}$ on operaattorinormi ($\|\hat{C}\|_{AB} = \sup_{\|\phi\|=1}\|\hat{C}\phi\|$) tensorituloavaruudessa ja määritellään sisätulon indusoimana kaavalla $\|A \otimes B\|_{AB} \equiv \|A\|_A\|B\|_B$. Tässä $\|A\|_A$ ja $\|B\|_B$ ovat avaruuksien $\mathcal{H}_A$ ja $\mathcal{H}_B$ operaattorien vastaavasti määritellyt operaattorinormit. Tästä eteenpäin oletetaan kontekstista tunnetuksi mitä normia symbolilla $\|\cdot\|$ tarkoitetaan ja pudotetaan alaindeksit. Viimeinen epäyhtälö on seurausta operaattorinormin määritelmästä sekä Cauchy-Schwarz epäyhtälöstä, joiden avulla saadaan $|\langle\psi|\hat{C}\psi\rangle| \leq \|\psi\|\|\psi\|\|\hat{C}\|$.

Huomataan, että koska $\hat{C}$ on itseadjungoitu, voidaan lisäksi kirjoittaa

$$\|\hat{C}^2\| = \|\hat{C}\hat{C}^*\| = \|\hat{C}\|^2.$$

Tässä viimeinen yhtäsuuruus pitää paikkansa kaikille rajoitetuille operaattoreille [29, s.13]. Todistus väitteelle $C_{\mathcal{K}} = 2\sqrt{2}$ etenee nyt seuraavasti: näytetään että $\|\hat{C}\|^2 = \|\hat{C}^2\| \leq 8$ eli että $\|\hat{C}\| \leq 2\sqrt{2}$. Aikaisemmin todetun nojalla pätee siis

$\left|tr[\hat{C}\varrho_{AB}]\right| \leq 2\sqrt{2}$; tämä viimeistelee todistuksen, sillä nähtiin että tämä raja on saavutettavissa jo kubittiparisysteemille.

Suoralla laskulla nähdään että

$$\hat{C}^2 = \sum_{X,Y}\left(\hat{A}_X^2 \otimes \hat{B}_Y^2\right) + [\hat{A}_\spadesuit, \hat{A}_\clubsuit] \otimes [\hat{B}_\heartsuit, \hat{B}_\diamondsuit] - \hat{A}_\spadesuit^2 \otimes \{\hat{B}_\heartsuit, \hat{B}_\diamondsuit\}$$
$$+\hat{A}_\clubsuit^2 \otimes \{\hat{B}_\heartsuit, \hat{B}_\diamondsuit\} + \{\hat{A}_\spadesuit, \hat{A}_\clubsuit\} \otimes \hat{B}_\heartsuit^2 - \{\hat{A}_\spadesuit, \hat{A}_\clubsuit\} \otimes \hat{B}_\diamondsuit^2.$$

Tässä on käytetty merkintöjä $\{A, B\} = AB+BA$ ja $[A, B] = AB-BA$. Käyttämällä edelliseen identiteettejä $\hat{A}_X^2 = I_{\mathcal{H}_A}$ ja $\hat{B}_Y^2 = I_{\mathcal{H}_B}$ saadaan

$$\hat{C}^2 = 4\left(I_{\mathcal{H}_A} \otimes I_{\mathcal{H}_B}\right) + [\hat{A}_\spadesuit, \hat{A}_\clubsuit] \otimes [\hat{B}_\heartsuit, \hat{B}_\diamondsuit].$$

Ja lopulta

$$\|\hat{C}^2\| \leq \|4\left(I_{\mathcal{H}_A} \otimes I_{\mathcal{H}_B}\right)\| + \left\|[\hat{A}_\spadesuit, \hat{A}_\clubsuit] \otimes [\hat{B}_\heartsuit, \hat{B}_\diamondsuit]\right\| \tag{6}$$

$$\leq 4 + \left(\left\|\hat{A}_\spadesuit\hat{A}_\clubsuit\right\| + \left\|\hat{A}_\clubsuit\hat{A}_\spadesuit\right\|\right)\left(\left\|\hat{B}_\heartsuit\hat{B}_\diamondsuit\right\| + \left\|\hat{B}_\diamondsuit\hat{B}_\heartsuit\right\|\right)$$
$$\leq 4 + 4\|\hat{A}_\spadesuit\|\|\hat{A}_\clubsuit\|\|\hat{B}_\heartsuit\|\|\hat{B}_\diamondsuit\|$$
$$= 8,$$

kuten väitettiin. Tässä käytettiin kahdesti kolmioepäyhtälöä, kerran operaattorinormin ominaisuutta $\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$ ja lopuksi aikaisemmin todettuja identiteettejä $-I_{\mathcal{H}_A} \leq \hat{A}_X \leq I_{\mathcal{H}_A}$ sekä $-I_{\mathcal{H}_B} \leq \hat{B}_Y \leq I_{\mathcal{H}_B}$.

Riviltä (6) huomataan, että Bellin epäyhtälön $|C| \leq 2$ rikkoutumiselle kvanttimekaniikassa vaaditaan välttämätömänä minimiehtona se, että Aliisan ja Petrin lokaalit suureet eivät kommutoi keskenään. Nimittäin jos $[\hat{A}_\spadesuit, \hat{A}_\clubsuit] = 0$ tai $[\hat{B}_\heartsuit, \hat{B}_\diamondsuit] = 0$ niin heti $\|\hat{C}^2\| \leq 4$. Nähdään että suureiden epäyhteensopivuus on kytköksissä CHSH-epäyhtälön rikkoutumiseen kvanttimekaniikassa.

Kvanttiteoria sallii Bellin epähtälöiden rikkoutumisen mielessä voimakkaampia korrelaatioita kaukana toisistaan olevien osapuolien mittaustulosten välillä kuin mitä on selitettävissä klassisella mallilla. Kuitenkin korrelaatioiden teoreettinen yläraja on tässä nähdyn nojalla yleisesti ottaen alhaisempi kuin vastaavan Bellin epäyhtälön algebrallinen yläraja. Intuitiivisesti voitaisiin perustella algebrallista ylärajaa alhaisemman rajan takaavan korrelaatioiden olevan signaalilokaaleja. Asia ei kuitenkaan ole aivan näin yksinkertainen; on olemassa ei-viestintää ehtojen kanssa sopusoinnussa olevia käyttäytymisiä, jotka saavuttavat jopa CHSH-epäyhtälön algebrallisen ylärajan. Tämä tosiasia tuli kuuluisaksi Popescun ja Rohrlicin artikkelista [25], vaikkakin vastaavia tuloksia oli esitetty jo aikaisemmin esim. viittessä [27, yhtälö 1.11] ks. myös lähteen [35, kpl.C.2] viitteet.

Nykyään PR-laatikkona tunnetun, CHSH-epäyhtälön algebrallisen ylärajan saavuttavan käyttäytymisen todennäköisyydet ovat listattuna:

$P(1,1|\clubsuit,\heartsuit) = P(-1,-1|\clubsuit,\heartsuit) = P(1,1|\clubsuit,\diamondsuit) = P(-1,-1|\clubsuit,\diamondsuit) = P(1,1|\spadesuit,\heartsuit) = P(-1,-1|\spadesuit,\heartsuit) = P(1,-1|\spadesuit,\diamondsuit) = P(-1,1|\spadesuit,\diamondsuit) = \frac{1}{2}$. Tälle käyttäytymiselle marginaalit ovat uniformisti jakautuneita joten nähdään että signaalilokaalisuus toteutuu ja $\langle a_\spadesuit b_\heartsuit \rangle = \langle a_\clubsuit b_\heartsuit \rangle = \langle a_\clubsuit b_\diamondsuit \rangle = 1$ ja $\langle a_\spadesuit b_\diamondsuit \rangle = -1$ eli $C = 4$.

Teoreettiselta, erityisesti perusteisiin keskittyvältä, näkökannalta se, että $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{S}$ on erityisen kiinnostava. Tulos osoittaa että voi olla olemassa kvanttiteoriasta oleellisesti poikkeaviakin ei-klassisia teorioita jotka voisivat silti olla sopusoinnussa suhteellisuusteorian kanssa. Kiinnostavasti näitä yleisempiä malleja voitaisiin kuvitella testattavan koko kvanttirakennetta vastaan esim. Tsirelsonin epäyhtälöllä, sillä yläraja oli dimensioista yms. riippumaton absoluuttinen yläraja, samaan tapaan kuin Bell-lokaaleja teorioita on testattu kvanttimekaanisia ennustuksia vastaan.

Mahdollisten kvanttiteoriaa yleisempien signaalilokaalien mallien ominaisuuksia olisi hyödyllistä selvittää. Osiossa **4** esitetään piirteitä, jotka voidaan tunnistaa yhteiseksi kaikille signaalilokaaleille laatikoille, eli riippumatta laatikoiden täsmällisestä selityksestä.

Yleisempien signaalilokaalien korrelaatioiden olemassaolo herättää myös kysymyksen Tsirelsonin rajan fysikaalisesta alkuperästä. Toistaiseksi kokeet eivät ole antaneet syytä epäillä kvanttimekaniikan pätevyyttä. Kvanttirakenne ei kuitenkaan anna ilmeistä, operationaalisesti mielekästä syytä sille, minkä takia korrelaatioiden tulisi olla Tsirelsonin rajan kahlitsemia. Ongelmaa on viimeisen parin vuosikymmenen aikana lähestytty usealta eri näkökannalta. Luvussa **5** annetaan laatikkotason näkökulma siihen, miksi algebralliseen ylärajaan ei päästäisi.

3.2 Kvanttiepälokaalisuus ja kietoutuminen

Lokaalien suureiden epäyhteensopivuus on välttämätöntä CHSH-epäyhtälön rikkoutumiselle kvanttimekaniikassa. Seuraavaksi näytetään, täydellisyyden vuoksi, että hiukkasparin on lisäksi oltava kietoutuneessa tilassa.

Väitteen toteamiseen riittää huomata, että yleisin hiukkasparin ei-kietoutunut eli separoituva tila on muotoa $\mathbb{S}(H_A \otimes H_B) \ni \varrho_{AB} = \sum_i \xi_i \varrho_i^{AB} = \sum_i \xi_i \varrho_i^A \otimes \varrho_i^B$. Tässä $\sum_i \xi_i = 1, \xi_i \geq 0\ \forall i$ ja $\varrho_i^{A(B)} \in \mathbb{S}_{ext}(\mathcal{H}_{A(B)})$. Täten todennäköisyyksille $P(a, b|X, Y)$ pätee

$$
\begin{aligned}
P(a, b|X, Y) &= tr\left[\sum_i \xi_i (\varrho_i^A \otimes \varrho_i^B)(A_{a,X} \otimes B_{b,Y})\right] \\
&= \sum_i \xi_i\, tr\left[(\varrho_i^A \otimes \varrho_i^B)(A_{a,X} \otimes I_{\mathcal{H}_B}) \cdot (I_{\mathcal{H}_A} \otimes B_{b,Y})\right] \\
&\equiv \sum_i \xi_i\, tr\left[(\varrho_i^A (A_{a,X})\right] \cdot tr\left[\varrho_i^B (B_{b,Y})\right] \\
&= \sum_i \xi_i\, P(a|X, \varrho_i^{AB}) P(b|Y, \varrho_i^{AB}),
\end{aligned}
$$

eli jakaumat Bell-lokaalia muotoa ja noudattavat täten Bellin epäyhtälöitä.

Operationaaliselta näkökannalta tulotilat $\varrho_i^A \otimes \varrho_i^B$ voidaankin samaistaa niiden yhdistettyjen systeemin tilojen kanssa, jotka voidaan tuottaa kahta erillistä preparaattoria eri laboratorioissa käyttäen. Jos parin $\varrho_i^A \otimes \varrho_i^B$ tuottamiseen liittyy todennäköisyys ξ_i voidaan niinikään generoida eri laboratorioissa yleisemmät separoituvat tilat. Kietoutuneita tiloja ei saa valmistettua tulotiloista lokaaleilla operaatioilla ja klassisella kommunikaatiolla ks. esim. [29, s. 278]; tulotilojen kietouttaminen vaatii eksplisiittistä globaalia vuorovaikutusta systeemien välillä.

Laatikkotasolla tulotiloja vastaavat ilmeisesti yksittäisten laatikoiden tulot, olettaen lokaalit mittaukset. Osiossa **1.1** nähtiin että jokaiselle yksittäiselle deterministiselle laatikolle voidaan antaa kvanttimekaaninen selitys. Täten tulotiloilla voidaan esittää mikä tahansa deterministinen Bell-lokaali laatikko. Koska mikä tahansa Bell-lokaali laatikko voidaan antaa determinististen Bell-lokaalien laatikoiden konveksikombinaationa ja on olemassa kvanttimekaanisia Bell-epälokaaleja käyttäytymisiä, on ilmeistä että Bell lokaalien laatikoiden joukko $\mathfrak{B}$ on kvanttimekaanisten laatikoiden $\mathcal{K}$ aito osajoukko. Toisinsanoen $\mathfrak{B} \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{P}$.

Tässänähdyn nojalla separoituvia tiloja voitaisiin kutsua myös klassisesti korreloituneiksi tiloiksi. Katsauksen kietoutumisteoriasta löytää esim viitteestä [55]. Tässä ei ole tarkoitus selvittää kietoutumiseen liittyviä yksityiskohtia. Esitetään kuitenkin muutama lisähuomio kvanttiepälokaalisuuden ja kietoutumisen yhteydestä.

Kietoutuminen on välttämätöntä kvanttiepälokaalisuudelle. Itseasiassa mille tahansa hiukkasparille jonka tila on puhdas ja kietoutunut, voidaan löytää suureet joille Bellin epäyhtälö rikkoutuu [56]. Sekoitetuille tiloille juttu on monimutkaisempi; on olemassa epäpuhtaita tiloja, jotka ovat kietoutuneita mutta eivät riko Bellin epäyhtälöä millekkään suureille: tästä annettiin esimerkki projektiivisten mittausten tapauksessa viitteessä [57] ja yleisemmin viitteessä [58] rakentamalla eksplisiittisesti lokaali piilomuuttujamalli. Näille huomioille löytyy vastineita useamman osapuolen tapauksisissa [59].

Tilanne monimutkaistuu edelleen, jos esim. fyysikoiden annetaan tehdä peräkkäisiä mittauksia [60] tai suorittaa mittauksia useille kopioille [61]. Näissä tapauksissa kietoutuneet tilat joille on tavallisessa tilanteessa klassinen malli, saattavatkin rikkoa Bellin epäyhtälöä. Kietoutumisen täsmällinen yhteys kvanttiepälokaalisuuten ei ole tänä päivänä täysin selvä. Viimeaikaisen katsauksen aiheeseen ja avoimiin kysymyksiin voi löytää viitteestä [62]. Kietoutuminen ja kvanttiepälokaalisuus ovat kytköksissä toisiinsa, mutta niitä ei tulisi käyttää synonyymeinä.

3.3 Yleisemmät koejärjestelyt ja korrelaatioiden karakterisointi

CHSH-epäyhtälön esityskonteksti luvussa **2** oli klassisten mallien $\mathfrak{B}$ erottamisessa kvanttimekaanisista selityksistä $\mathcal{K}$, joten CHSH-korrelaatiofunktion C postulointi oli hyväksyttävissä. Tässä osiossa esitetään moderni geometrinen lähestymistapa laatikoiden joukkojen $\mathfrak{B}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$ jne. tarkasteluun. Käsitteet ja työkalut ovat keskeisiä laiteriippumattomassa fysiikassa, sekä käytännölliseltä että fysiikan perusteisiin keskittyvältä näkökannalta. Esitys selventää myös Bellin epäyhtälöiden, Tsirelsonin rajan yms. merkityksiä yleisemmissäkin tilanteissa.

Bellin epäyhtälöt voidaan liittää konveksien monitahokkaiden (engl. convex polytope) teoriaan. Aikainen huomio tästä yhteydestä esitettiin mm. viitteessä [63] ks. myös [27]. Tämä yhteys osoittaa että Bell-lokaalien laatikoiden joukon $\mathfrak{B}$ täydelliseen karakterisoimiseen riittää kussakin koejärjestelyssä äärellinen määrä lineaarisia epäyhtälöitä. Edelleen ko. yhteys mahdollistaa Bellin epäyhtälöiden generoimisen periaatteessa mielivaltaisiin Bell-koetilanteisiin, vaikkakin tehtävä on laskennallisesti työläs ks. mm. [51, 64]. Moderneissa tarkasteluissa seuraavaksi esitettävät 'todennäköisyystahokkaat' ym. ovat ahkeran, erityisesti laskennallisen, tutkimuksen kohteita ja täten myös erilaisia aiheeseen liittyviä erikoistuloksia on runsaasti. Tässä annetaan yleiskuva perustyökaluista. Kattavampi katsaus, ja lisää viitteitä, näihin käsitteisiin ja niiden sovellutuksiin ja merkitykseen fysiikassa löytyy mm. katsausartikkelista [35]. Puhtaasti matemaattisesta konveksien tahokkaiden lähdeteoksesta käy esim. viite [65]. Tästä eteenpäin termillä tahokas tarkoitetaan nimenomaan konveksia tahokasta.

Sanotaan [65, kpl.3], että kompakti konveksi joukko $J \subset \mathbb{R}^D$ on (konveksi)tahokas jos se voidaan antaa äärellisen pistejoukon konveksiverhona. Tahokkaan J dimensio dim J on sen affiiniverhon dimensio. Joukko pisteitä $x \in \mathbb{R}^D$ joille $x \cdot g \leq b$, missä g on kiinnitetty $\mathbb{R}^D$:n vektori ja b on vakio, määrittelee suljetun puoliavaruuden, vast. yhtäsuuruus $x \cdot g = b$ määrittelee (hyper)tason. Tahokas voidaan antaa ekvivalentisti äärellisen kokoelman suljettuja puoliavaruuksia leikkauksena. Hypertaso H leikkaa (engl. cuts) joukon J jos H:n kummastakin määräämästä avoimesta puoliavaruudesta löytyy piste(itä) joukosta J. Joukko F on tahokkaan J rehellinen tai aito sivu (engl. proper face), jos on olemassa hypertaso H joka ei leikkaa J:tä ja $\emptyset \neq F = J \cap H \neq J$, tällöin sanotaan myös tason H tukevan tai sivuavan (engl. support) tahokasta. D-ulotteisen tahokkaan ääripisteitä kutsutaan *kärjiksi* (engl. vertex), ja sen maksimaalisia (D-1 -ulotteisia) sivuja *tahkoiksi* (engl. facet), yleensä 1-ulotteisia sivuja kutsutaan särmiksi (engl. edge), yleisemmin voidaan puhua k-sivuista [65]. Esimerkkeinä tahokkaista voidaan antaa pyramidi, tetraedri ja tason konveksit monikulmiot.

Seuraavaksi yhdistetään edelliset käsitteet Bellin epäyhtälöihin. Oletetaan että osapuolella $i \in \{1, \ldots n\}$ on N_i mittalaitteen asetusta X_i ja mielivaltainen, mutta äärellinen, määrä $|a_{(i,X_i)}|$ jokaista asetusta vastaavaa mittaustulosta $a_{(i,X_i)}$. Laatikko $P(a_1, a_2, \ldots a_n | X_1, X_2 \ldots X_n) \equiv P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\})$ on nyt Bell-lokaali tai klassisesti korreloitunut jos voidaan kirjoittaa

$$P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\}) = \int_\Lambda d\lambda q(\lambda) P(a_1|X_1, \lambda) P(a_2|X_2, \lambda) \cdot \ldots \cdot P(a_n|X_n, \lambda).$$

Edelleen, mm. osiossa **2.2** nähdyn nojalla, voidaan ottaa ainoastaan relevantit, eli eri mittaustuloksiin liittyvät deterministiset konfiguraatiot huomioon ja kirjoittaa

$$P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\}) = \sum_\lambda P(\lambda) P(a_1|X_1, \lambda) \cdot \ldots \cdot P(a_n|X_n, \lambda).$$

Näin ollen, jos kootaan käyttäytymisen $P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\})$ yksittäiset todennäköisyydet vektorin $\vec{p} \in \mathbb{R}^D$, $D = \sum_{X_i}(\Pi_{i=1}^n |a_{(i,X_i)}|)$, komponenteiksi, nähdään että Bell-lokaalien käyttäytymisien eli pisteiden $\vec{p}$ sallittu alue $\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}^D$ on äärellisen määrän lokaaleista deterministisistä ääripisteistä koottujen vektorien konveksiverho. Määritelmän mukaan $\mathfrak{B}$ on siis konveksi tahokas. Huomautetaan myös että joukko $\mathcal{P}$ voidaan niinikään identifioida konveksiksi tahokkaaksi, sillä mikä tahansa yleinen epädeterministinen käyttäytyminen voidaan antaa determinististen käyttäytymisten konveksikombinaationa ja deterministisiä käyttäytymisiä on äärellinen määrä.

Jos hypertaso $H = \{x \in \mathbb{R}^D | x \cdot g = b\}$ ei leikkaa monitahokasta $\mathfrak{B}$, niin ilmeisesti joko $\vec{p} \cdot g \equiv \sum_{\{a\},\{X\}} g(a_1, \ldots, a_n, X_1, \ldots X_n) P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\}) \leq b$ tai $\vec{p} \cdot g \geq b$ kaikilla $\vec{p} \in \mathfrak{B}$. Kumman tahansa näistä epäyhtälöistä toteutumisen tarkastamiseen riittää käydä läpi ääripisteet sillä $\mathfrak{B}$ on konveksi. Ilman yleisyyden menetystä oletetaan että tahokkaalle toteutuu $\vec{p} \cdot g \leq b$, koska tahokkaalle pätevä epäyhtälö voidaan kertoa luvulla -1 muulloin. Tämänkaltainen puoliavaruuden määräävä relaatio on esimerkki 'yleisestä' lineaarisesta Bell-tyyppisestä epäyhtälöstä: jokainen lokaali realistinen laatikko toteuttaa ko. epäyhtälön. Toisaalta tässä annettu yleinen puoliavaruus oli mielivaltainen, ja voi olla lähtökohtaisesti hyvinkin 'kaukana' tahokkaasta ts. voi toteutua vaikka kaikilla laatikoilla. Esimerkiksi Tsirelsonin epäyhtälöt nähdään tässä vastaavina yleisinä Bell-tyyppisinä epäyhtälöinä. Ollakseen mahdollisimman relevantti lokaalisrealistiselle tahokkaalle, epäyhtälön yläraja tulisi olla niin alhainen kuin mahdollista. Merkataan pienintä mahdollisinta yleisen Bell-lausekkeen ylärajaa b, jolla epäyhtälö $\vec{p} \cdot g \leq b$ pätee tahokkaalle $\mathfrak{B}$, kirjaimella R. Jos joukko $F = \{p \in \mathfrak{B} | \vec{p} \cdot g = R\}$ on epätyhjä niin sanotaan, että epäyhtälö sivuaa tahokasta.

Tahokas voidaan antaa äärellisen joukon puoliavaruuksia leikkauksena; ts. voidaan kirjoittaa $\mathfrak{B} = \{\vec{p} \in \mathbb{R}^D | \vec{p} \cdot g^i \leq R^i, \forall i \in I\}$, missä I on äärellinen indeksijoukko. Mikä tahansa Bell-epälokaali laatikko rikkoo tällöin edes jotakin ylläolevan äärellisen kokoelman yhtälöistä. Erityisen tärkeitä ovat ne epäyhtälöt jotka sivuavat tahkoja ts. ne, joille $\dim F^i = \dim \mathfrak{B} - 1$, missä $F^i = \{\vec{p} \in \mathfrak{B} | \vec{p} \cdot g^i = R^i\}$, sillä ne antavat minimaalisen täydellisen joukon tahokkaan määrääviä epäyhtälöitä [35, B.2] ja muut tahokkaalle pätevät epäyhtälöt voidaan johtaa tahkoepäyhtälöistä [66].

Tahkoja sivuavia epäyhtälöitä kutsutaan joskus myös optimaalisiksi tai tiukoiksi Bellin epäyhtälöiksi. Moderneimmissa tarkasteluissa, ja tässä tutkielmassa, tahkoepäyhtälöt otetaan synonyyminä Bellin epäyhtälöille ja puhutaan korostetusti epäoptimaalisista yhtälöistä, tai käytetään toisenkaltaista terminologiaa muulloin. Varoitetaan kuitenkin, että erityisesti vanhemman kirjallisuuden terminologiassa tämänkaltaisia erotteluja ei aina tehdä.

Huomionarvoisesti Bell-lausekkeet, eli kriteerit todennäköisyyksille $\vec{p}$, määräytyvät oleellisesti vektorista g ja niiden toteutuminen on täten mittaustulosten - ja asetusten nimeämisistä riippumatonta, oikeuttaen mm. toistetun 'ilman yleisyyden menetystä' toteamuksen. CHSH- epäyhtälön tapauksessa valinta ± 1 mahdollistaa kirjoittamisen odotusarvojen $\langle a_X b_Y \rangle$ avulla ja tätä valintaa näkee kirjallisuudessa useammankin osapuolen tapauksissa erityisesti jos mittaustuloksia asetuksille on kaksi. Usein näkee myös esitystapaa, jossa odotusarvot korvataan lausekkeilla $C_{XY} = P(a = b|X, Y) - P(a \neq b|X, Y)$ muille kaksiarvoisten lopputulosten symmetrisille valinnoille.

Lisäksi, koska osapuolten, asetusten ja tulosten nimeäminen on mielivaltaista, kutsutaan niitä epäyhtälöitä jotka saadaan annetusta Bell-lausekkeesta näitä lokaaleja valintoja permutoimalla usein 'ekvivalenteiksi' tai samaa perhettä edustaviksi epäyhtälöiksi [67].

Algoritmi optimaalisten epäyhtälöiden etsimiselle on periaatteessa selvä; määrätään Bell-tahokkaan deterministiset kärkipisteet ja selvitetään konveksiverhoa rajaavat tahkot. Tehtävä on kuitenkin laskennallisesti työläs, ja käytännössä täydellisiä Bell-tahokkaiden karakterisointeja on tehty ainoastaan tapauksille joissa on vähän mittausasetuksia tai niitä vastaavia tuloksia, kuten [67, 68]. Tästä syystä uusien epäyhtälöiden etsimistä varten on ehitetty erilaisia työkaluja, ongelman rajoittamista Bell-tahokkaan osajoukkoon tai sopivan symmetrisiin Bell-lausekkeisiin esim. [69, 70]. Huomautetaan että erityisesti näissä konteksteissa epäyhtälöitä jotka voidaan kirjoittaa ainoastaan kaikkien osapuolten 'täysiä' korrelaattoreita $\langle a_{X_1} \dots a_{X_n} \rangle$ käyttämällä kutsutaan joskus korrelaatioepäyhtälöiksi (engl. correlation inequality) vast. Bell-lausekkeita korrelaatiofunktioiksi. Yleisesti ottaen täysiä korrelaattoreita sisältävistä epäyhtälöistä saadaan vain välttämättömiä ehtoja ts. toimitaan tahokkaan osajoukon kanssa, sillä erityisesti näistä ei voida päätellä käyttäytymisen marginaaleista; voi olla useampi käyttäytyminen joka palauttaa samat korrelaattorit. Toisissa yhteyksissä korrelaatioepäyhtälöllä tarkoitetaan mitä tahansa odotusarvojen, eli ei välttämättä täysien korrelaattoreiden avulla esitettyä epäyhtälöä. Yleisemmin Bellin epäyhtälöiden yhteydessä termi korrelaatio viittaa lähtökohtaisesti useamman kuin yhden osapuolen laatikkoon $P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\})$, kuten tässä tutkielmassa. Kirjallisuutta selatessa on hyödyllistä pitää mielessä tämä eri asioihin viittaava similaarinen terminologia.

Koska jokainen laatikko toteuttaa todennäköisyyksien normointiehdot nähdään, että pisteen $\vec{p} \in \mathcal{P}$ spesifioimiseen riittää vektorin $\vec{p}$ komponentteja pienempi lukumäärä. Edelleen koska kaikki signaalilokaalit laatikot $\vec{p} \in \mathcal{S}$ toteuttavat ei-viestintää ehdot, ei erityisesti joukko $\mathcal{S}$, eikä mikään sen osajoukko, ole täysiulotteinen $\mathbb{R}^D$:ssä ts. $\mathcal{S}$ asuu $\mathbb{R}^D$:n affiinissa aliavaruudessa. Tämän seurauksena mm. Bellin epäyhtälöiden esitystapa ei ole uniikki [66] eli samat rajoitteet Bell-tahokkaalle voidaan kirjoittaa useilla eri tavoilla käyttäen normointi- ja ei -viestintää ehtoja. Tämä esitystavan epäyksikäsitteisyys voi olla käytännön kannalta kiusallinen, nimittäin osa erilaisista esitystavoista voi saada tässä mielessä identtiset epäyhtälöt näyttämään silmämääräisesti hyvinkin erilaisilta ja sellaistakin on sattunut, että oleellisesti sama Bellin epäyhtälö on julkaistu kahteen kertaan [71, johdanto].

Esimerkiksi CHSH-epäyhtälö voidaan ei-viestintää ehtoja ja normointivaatimuksia käyttäen ks. esim. [72, yht. 15] saattaa, sopivilla asetusten ja tulosten vaihdoilla osion **2.1** lausekkeesta muotoon $-1 \leq \mathring{\mathfrak{A}} \leq 0$, missä

$$\mathring{\mathfrak{A}} = P(1,1|\spadesuit,\heartsuit) + P(1,1|\spadesuit,\diamondsuit) + P(1,1|\clubsuit,\heartsuit) - P(1,1|\clubsuit,\diamondsuit) - P(1,|\spadesuit) - P(1|\heartsuit).$$

Tämä epäyhtälö esitettiin ensimmäisen kerran vuonna 1974 [32] ja tunnetaan kirjallisuudessa Clauser-Horne (CH-) epäyhtälönä. Vaikka CH - ja CHSH- epäyhtälöt ovat matemaattisessa mielessä ekvivalentteja, voi yhtälön valinnalla olla Bell-testien kannalta merkitystä. Käytännön kokeissa mittausdata on aina äärellistä, ja täten yleensä ei-viestintää ehdot toteutuvat vain approksimatiivisesti tehden epäyhtälöistä epäekvivalentteja [73]. Esim. CHSH-epäyhtälöä arvioidaan globaaleilla korrelaatioilla kun CH-epäyhtälössä on myös lokaaleja statistiikkoja. Epätäydelliseen detektorien toimintaan liittyvien 'virhekierroksien' käsittelystrategia on niinikään merkityksellinen epäyhtälöiden ekvivalenssille [72]. Nämä tosiasiat on tiedostettava kun arvioidaan esimerkiksi eri korrelaatioita hyödyntävien informaatioprotokollien käytännön soveltuvuutta johonkin tehtävään.

On mahdollista näyttää, että positiivisuuskriteerit $P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\}) \geq 0$ ovat $\mathfrak{B}$:n tahkoja [66, kpl.III.B]. Koska kaikki laatikot toteuttavat positiivuskriteerit, kutsutaan näitä usein triviaaleiksi epäyhtälöiksi eli säästetään termi Bellin epäyhtälö epätriviaaleille tahkoyhtälöille. Tahokasta $\mathcal{P}$ rajaavat triviaalit epäyhtälöt ja normointiehdot, tahokasta $\mathfrak{B}$ lisäksi Bellin epäyhtälöt ja signaalilokaalisuus. Joukko $\mathcal{S}$ voidaan niinikään identifioida tahokkaaksi; sitä rajaavat triviaalit Bellin epäyhtälöt, joille pätee signaalilokaalisuus ja normointiehdot toteutuvat. Joukon $\mathcal{S}$ karakterisointiongelma on jossain mielessä päinvastainen kuin Bell-tahokkaan $\mathfrak{B}$. Bell-tahokkaalle voidaan listata ääripisteet, ja ongelma on löytää vastaavat tahkot. Signaalilokaalille tahokkaalle ongelma on löytää ääripisteet.

Kvanttimekaanisen joukon $\mathcal{K}$ geometria on huomattavasti monimutkaisempi. On tunnettua että $\mathcal{K}$ on yleisesti ottaen konveksi [35, kpl. II.B], mutta ei tahokas. Joukkoa $\mathcal{K}$ ei voi määritellä äärellisen määrän puoliavaruuksia leikkauksena. Täten joukon tehokkain rajoittaminen tapahtuu epälineaarisilla epäyhtälöillä. Tiedetään myös, että kvanttijoukon reunalla on joitakin 'litteitä' alueita, sillä joukko toteuttaa ainakin triviaalit epäyhtälöt. Reunalla on yleisesti ottaen myös epätriviaaleja litteitä alueita, sillä esim. viitteessä [74] on löydetty esimerkki usean osapuolen Bellin epäyhtälöstä joka toteutuu kvanttilaatikoille, mutta ei kaikille signaalilokaaleille laatikoille. Lisäksi koska $\mathfrak{B} \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{S}$ niin myös $\dim \mathfrak{B} = \dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{S}$, sillä joukot $\mathfrak{B}$ ja $\mathcal{S}$ asuvat samassa normointi-ja signaalilokaalisuusvaatimusten rajoittamassa $\mathbb{R}^D$:n affiinissa aliavaruudessa. Kvanttijoukon geometrisia piirteitä on selvitetty yksityiskohtaisemmin esim. viimeaikaisessa artikkelissa [75].

Joukon $\mathcal{K}$ täydellistä karakterisointia ei ole tehty edes yksinkertaisimmassa Bell-koejärjestelyssä. Joitakin erikoistuloksia kvanttijoukon rajoituksille yksinkertaisissa koetilanteissa esittivät aikaisin mm. Tsirelson [27, 53, 76] ja Lawrence Landau [77]. Tarkastelut eivät yleisty helposti monimutkaisempiin tilanteisiin. Yleensä pelkästään annetun lineaarisen epäyhtälön Tsirelsonin rajan löytäminenkin on hankala tehtävä.

Eräs käytännöllisempiä menetelmiä kvanttijoukon yleiseen selvittämiseen on Miguel Navascuésin, Stefano Pironion ja Antonio Acínin esittämä laskennallinen työkalu [78, 79] jolla saadaan tiukentuva hierarkia välttämättömiä laskettavissa olevia ehtoja, joiden on toteuduttava jotta laatikolle on kvanttimekaaninen selitys. Geometrisesti jokainen askel $n \in \mathbb{N}$ hierarkiassa antaa kvanttijoukkoa ulkoapäin approksimoivan korrelaatiojoukon K'_n ja on näytetty, että asymptoottisella rajalla sarja suppenee kohti kvanttijoukkoa [79]. Huomionarvoisesti nykyään NPA-hierarkiana tunnettu menetelmä arvioi *kommutoivien operaattorien mallin* avulla selitettävissä olevia korrelaatioita $\mathcal{K}'$. Kommutoivien operaattorien mallissa ei vaadita että Aliisan ja Petrin systeemeitä kuvataan tensoritulolla, ts. lokaalit mittausoperaattorit vastaavat niitä joille $[A_{a|X}, B_{b|Y}] = 0$ kaikilla a, b, X, Y eli käyttäytymiselle pätee $P(a, b|X, Y) = tr[A_{a|X} B_{b|Y} \varrho_{AB}] \equiv \langle\psi|\Pi_X(a)\Pi_Y(b)\,|\psi\rangle$, missä $\psi \in \mathcal{H}_{AB}$ ja $\mathcal{H}_{AB}$ on jokin jaettu Hilbertin avaruus. Tätä mallia käytetään yleensä kvanttikenttäteorioissa.

Kysymys siitä onko $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ muodostui tässä yhteydessä relevantiksi (ilmeisesti $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$). Ongelmaa alettiin kutsua Tsirelsonin ongelmaksi [80], sillä Tsirelson oli alunperin viittessä [27, kpl.2] esittänyt ilman todistusta että määritelmät johtavat samanlaisiin käyttäytymisiin. Alkuperäisestä kysymyksestä on muotoiltu useampi fysikaaliselta sisällöltään aavistuksen erilainen versio. Esim. eräs versio on kysymys niiden korrelaatioiden $\mathcal{K}_{\text{ÄA}}$, joita voidaan approksimoida mielivaltaisen hyvin äärellisulotteisilla mutta rajoittamattomilla tensorituloilla, suhteesta kommutoivien operaattorien malliin [80]. Edellä esitetyillä joukoilla identifioitiin seuraava järjestys: $\mathcal{K} \subset \bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K}_{\text{ÄA}} \subset \mathcal{K}'$ [81]. Tsirelsonin 'ongelmat' ovat osoittautuneet *hyvin vaikeiksi*. Seuraavassa listataan muutamia viimeaikaisia tuloksia.

Alkuperäiseen ongelman asetteluun annettiin vastaus vuonna 2016 (julkaistiin 2019) [81], missä päädyttiin tulokseen $\mathcal{K} \neq \mathcal{K}'$. Tuloksen fysikaalinen merkitys ei ollut selvä, sillä ei ollut tiedossa onko joukko $\mathcal{K}$ edes suljettu; jos erot ovat ainoastaan reunalla, niin malleja ei voitaisi erottaa toisistaan Bell-tyyppisellä epäyhtälöllä. Joukon $\mathcal{K}'$ tiedettiin olevan suljettu esim. NPA:n nojalla [79, koroll. 9]. Myöhempi tulos, joka antoi vaihtoehtoisen todistuksen alkuperäiselle osoittikin, että $\mathcal{K}$ ei yleisesti ottaen ole suljettu [82]. Tammikuussa 2020 arXiv- tietokantaan on ladattu artikkeli [83], joka näyttää osoittaneen että $\bar{\mathcal{K}} \neq \mathcal{K}'$. Vaikuttaa siltä, että eri kvanttijoukkojen määritelmät voidaan periaatteessa erottaa toisistaan Bell-tyyppisellä epäyhtälöllä, edes jossakin koejärjestelyssä, ja täten, että yleisesti ottaen mm. 'Tsirelsonin rajoista' puhuessa tulisi tarkentaa eksplisiittisesti kumpaa mallia käytetään.

Voidaan samaistaa $\mathcal{K} = \bar{\mathcal{K}}$. Useimmissa käytännön ongelmissa voidaan samaistaa myös $\bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K}'$, sillä rajoja arvioidaan jokatapauksessa approksimatiivisesti, esim. käyttämällä joitakin ensimmäisiä NPA:n askelia. Viitteen [84, kpl.6] tuloksen nojalla joukon $\mathcal{K}$ elementeillä voidaan approksimoida mielivaltaisen hyvin elementtejä $\mathcal{K}'$sta koejärjestelyissä joissa Aliisalla on mittalaitteita ja vast. tuloksia kaksi riippumatta Petrin asetuksien ja tulosten määrästä. Koska tämän tutkielman esimerkeissä tarkastellaan yksinkertaisinta (CHSH) Bell-koejärjestelyä, ei näin ollen ole tarpeen tehdä eroa määritelmien välillä.

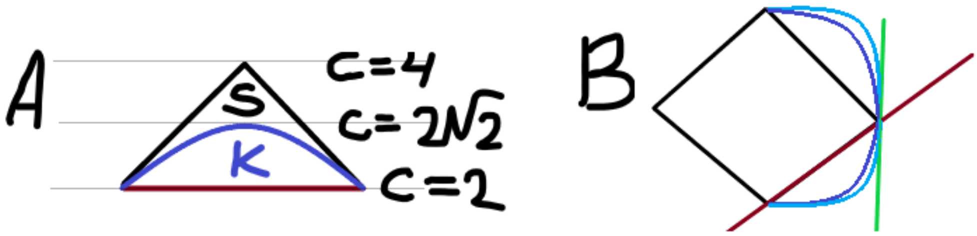
CHSH-Bell koejärjestelyssä tahokkaalla $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{16}$ on $4^4 = 256$ ääripistettä. Tämän voi nähdä huomaamalla, että käyttäytymisessä on neljä todennäköisyysjakaumaa, joissa kussakin on neljä yksittäistä todennäköisyyttä. Koska käyttäytymistä rajoittaa neljä todennäköisyyden normointiehtoa, niin dim $\mathcal{P} = 12$.

Bell-lokaalilla tahokkaalla on 16 determinististä ääripistettä, nämä ovat yhteisiä tahokkaan tahokkaan $\mathcal{P}$ kanssa, sillä esim. mahdollisia mittaustulokset määrääviä listoja $\lambda = [a_\spadesuit, a_\clubsuit : b_\heartsuit, b_\diamondsuit]$ on 2^4 kappaletta. Ottamalla huomioon ei-viestintää ehdot, nähdään että dim $\mathfrak{B} = 8$. $\mathfrak{B}$:n täydellinen selvitys tehtiin aikaisin mm. viitteissä [27, 63]. $\mathfrak{B}$:llä on 24 tahkoa. 16 tahkoa vastaa triviaaleja positiivisuuskriteerejä ja kahdeksan epätriviaalia tahkoa ovat oleellisesti CHSH-epäyhtälö $C \leq 2$ ja sen kahdeksan uudelleennimeämisten symmetriaa. Huom. että muodossa $|C| \leq 2$ kirjoitettuna on itseasiassa koodattuna kaksi tahkoepäyhtälöä $C \leq 2$ ja $-C \leq 2$; yleisemmillä Bell-lausekkeilla ei välttämättä ole em. ominaisuutta. Käyttäytymisen nähdään olevan Bell-lokaali, jos ja vain jos se toteuttaa CHSH-epäyhtälöt [50]. Alkuperäinen Bellin esittämä epäyhtälö [1] ei ollut tahkon määräävä.

Signaalilokaalilla CHSH-tahokkaalla on 16 tahkoa ja 24 ääripistettä. 16 ääripisteistä vastaa $\mathfrak{B}$:n deterministisiä pisteitä, ja kahdeksan jäljelle jäävää ovat oleellisesti PR-laatikko ja sen symmetriat [27, 85]. Jokainen PR-laatikko rikkoo täsmälleen yhtä CHSH-epäyhtälöistä [85, II.B]. Tästä syystä 'yleisten' toteamuksienkin tapauksessa usein riittää keskittyä ainoastaan yhdelle tahkolle ja PR-laatikolle tehtävään tarkasteluun, sillä tulokset yleistyvät symmetrioiden takia koko joukoille; jokainen Bell-epälokaali laatikko rikkoo ainoastaan yhtä CHSH-epäyhtälön symmetrioista. Tämä eleganttinakin pidettävä 'yksi yhteen' suhde signaalilokaalin tahokkaan ei-klassisten ääripisteiden ja Bellin tahkoepäyhtälöiden välillä ei kuitenkaan päde yleisesti ottaen [85, IV].

CHSH-tapauksessa NPA-hierarkian ensimmäinen approksimaatio antaa [78] seuraavan kvanttijoukolle välttämättömän, ja sen symmetrioita vastaavan, ehdon:

$$|\arcsin(D_{\spadesuit,\heartsuit}) + \arcsin(D_{\clubsuit,\heartsuit}) + \arcsin(D_{\clubsuit,\diamondsuit}) - \arcsin(D_{\spadesuit,\diamondsuit})| \leq \pi,$$



Kuva 1. **A**: Hahmotelma CHSH tilannetta vastaavien perusjoukkojen projektiosta jollekkin poikkileikkaukselle. CHSH-epäyhtälö $C = 2$ rajaa Bell-lokaalia tahokasta, joka asuu punaisen viivan alapuolella. Epäyhtälön päällä lepää signaalilokaalin tahokkaan $\mathcal{S}$ PR-ääripiste. Konveksi kvanttijoukko on Tsirelsonin rajan alapuolella. **B**: Hahmotelma mustasta Bell-tahokkaasta, punainen viiva edustaa optimaalista Bellin epäyhtälöä. Vihreä on esimerkki tahokasta sivuavasta epäoptimaalisesta yhtälöstä. Vaaleansininen reuna edustaa NPA:n ensimmäistä askelta, ja sisältää sinisen reunan rajaaman kvanttijoukon.

missä $D_{XY} = \dfrac{\langle a_Y, b_Y\rangle - \langle a_X\rangle\langle b_Y\rangle}{\sqrt{(1-\langle a_X\rangle^2)(1-\langle b_Y\rangle^2)}}$ ja $\langle a_X\rangle \equiv \sum_a aP(a|X)$ vast. b_Y:lle. Laatikoille joille (tai siinä $\mathcal{S}$:n osajoukossa jossa ...) $\langle a_X\rangle = \langle b_Y\rangle = 0$ ehto redusoituu muotoon

$$|\arcsin(\langle a_\spadesuit, b_\heartsuit\rangle) + \arcsin(\langle a_\clubsuit, b_\heartsuit\rangle) + \arcsin(\langle a_\clubsuit, b_\diamondsuit\rangle) - \arcsin(\langle a_\spadesuit, b_\diamondsuit\rangle)| \leq \pi.$$

Tämän epäyhtälön olivat muodossa tai toisessa [86] esittäneet aikaisemmin mm. Tsirelson [76], Landau [77] ja Masanes [87]. Ehto tunnetaan nykyään TLM-kriteerinä. TLM epäyhtälöt antavat välttämättömät ja riittävät [86, 87] ehdot kvanttimekaanisen selityksen olemassaololle tasossa, jossa $\langle a_X\rangle = \langle b_Y\rangle = 0$ (ks. myös [35, II.C.1.b]). Tämä on osaltaan osoitus myös NPA-metodin voimakkuudesta; TLM- kriteerejä vahvempi ehto saatiin jo ensimmäisellä askeleella. Osiossa **2.1** esitetyillä mittauksilla singlettitilalle saavutetaan ylläolevan yläraja, sillä $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ jne. ts. Tsirelsonin raja CHSH-epäyhtälölle on implisiittisesti ko. yhtälössä. Kuvassa 1 on havainnollistettu tässä esitettyjä peruskäsitteitä.

Nopeasti kasvavasta kompleksisuudesta voi saada jotakin käsitystä esim. viitteen [88] analyysistä, jossa on tarkasteltu Bell-tahokasta koejärjestelylle jossa on kolme osapuolta ja kullakin on kaksi kaksiarvoista suuretta. Tässä tapauksessa tahokas on 26 ulotteinen, sillä on 64 ääripistettä, ja sitä rajaa triviaalit tahkot mukaanlukien

53856 Bellin epäyhtälöä, jotka voidaan jakaa 46:een epäekvivalenttiin luokkaan [89]. Vastaavan tilanteen signaalilokaali tahokas on ratkaistu viittessä [89]; ääripisteitä on 53856, ne voidaan luokitella, mutta niillä ei ole helposti nähtävää suhdetta em. Bellin epäyhtälöihin. Vaikka erityisesti useamman osapuolen tapauksissa kompleksisuus muodostuu helposti luotaantyöntäväksi, on viimeaikoina esitetty merkittäviä tuloksia jotka tulevat relevanteiksi nimenomaan tapauksissa joissa osapuolia on > 2, erääseen esimerkkiin tästä törmätään mm. luvussa **5**.

Tässäesitetyn kolmen perusjoukon lisäksi voidaan harkita muistakin malleista peräisin olevia laatikoita ja verrata niitä edellisiin.

4 Yleisiä signaalilokaalisuuden seurauksia

Signaalilokaalien laatikoiden joukko $\mathcal{S}$ on isompi kuin kvanttimekaanisten laatikoiden joukko. Tämä jättää tilaa harkita kvanttiteoriaa yleisempiä teorioita, jotka voivat olla suhteellisuusteorian kanssa sopusoinnussa. Seuraavaksi esitetään, mukaillen erityisesti viitettä [90], ominaisuuksia jotka ovat yhteisiä kaikille laatikoille, joiden taustalla -tai aksioomina on Bell-epälokaalisuus ja signaalilokaalisuus.

4.1 Epädeterminismi

Signaalilokaalisuus, Bellin epäyhtälöiden rikkoutuminen ja determinismi ovat keskenään ristiriitaisia käsitteitä. Tämä on tavallaan Bellin teoreeman seurauksen uudelleenartikulointi.

Todetaan väite vastaesimerkillä. Olkoon $P(a, b|X, Y)$ deterministinen käyttäytyminen eli kaikille X, Y $P(a, b|X, Y) \in \{0, 1\}$. Koska aina pätee $\sum_{a,b} P(a, b|X, Y) = 1$, voidaan kirjoittaa

$$P(a, b|X, Y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } a = a_{(X,Y)} \text{ ja } b = b_{(X,Y)} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Toisinsanoen, pari (X, Y) määrää täysin parin (a, b); $P(a, b|X, Y) \equiv \delta_{(a,b),(a_{(X,Y)},b_{(X,Y)})}$. Nähdään että deterministisen jakauman marginaalit ovat deterministisiä. Voidaan siis todeta että $\delta_{(a,b),(a_{(X,Y)},b_{(X,Y)})} = \delta_{a,a_{(X,Y)}} \cdot \delta_{b,b_{(X,Y)}} = P(a|X, Y)P(b|X, Y)$, joten signaalilokaalisuuden nojalla on edelleen hyväksyttyä kirjoittaa $P(a, b|X, Y) = P(a|X)P(b|Y)$.

Laatikot $P(a|X)P(b|Y)$ ovat Bell-lokaaleja. Voidaan myös sanoa, että satunnaisuus on välttämätöntä, mutta ei riittävää ei-klassisten korrelaatioiden mahdollisuudelle maailmassa, jossa laatikoita ei voi käyttää ei-perinteiseen viestintään. Argumentti yleistyy usean osapuolen tapaukseen ilmeisellä tavalla.

Tässä on mm. käytännön näkökannalta huomionarvoista, että vaikka laatikot olisivatkin korruptoituneen tontun valmistamia, niin Bellin epäyhtälöiden todennettu rikkoutuminen takaa sen, että laatikoiden tuottama satunnaisuus on edes jossain määrin aitoa, eli sellaista, jolle ei ole tietämättömyystulkintaa. Ainakin olettaen, että tonttu ei kykene luomaan possunreikiä, joilla voitaisiin muutoin selittää havaitut ei-klassiset korrelaatiot. Bellin teoreeman nojalla edellä kuvattua satunnaisuutta ei voi selittää laatikoiden sisään erikseen koodatuilla parametreillä. Bellin epäyhtälöiden havaittu rikkoutuminen takaa, ettei ainutkaan signaalilokaalisuutta kunniottava tekijä ei olisi voinut ennustaa mittaustulosta varmuudella. On myös huominarvoista, että satunnaisuuden aitoutta voidaan todeta laiteriippumattomalla tavalla, eli riippumatta laatikoiden mekaniikasta tai täsmällisestä implementoinnista esim. siitä onko laatikon sisällä fotoneita, protoneita, tai kubitteja, kuditteja tms. Nämä seikat luovat pohjan laiteriippumattomille satunnaislukujen luomisprotokollille ja sovellutuksille ks. esim [91]. Joitakin käytännön näkökulmia on käsitelty mm. katsausartikkelissa [35, IV.C].

4.2 Jaettavuus, yksiavioisuus ja kloonaus

Kvanttimekaniikassa usean hiukkasen kietoutumisen jakautumiselle osasysteemien välille on olemassa nk. yksiavioisuusrajoitteita (engl. monogamy) ks. esim. [92, 93]. Terävän esimerkin yksiavioisuudesta saa tilanteesta jossa esim. Aliisa ja Petri jakavat maksimaalisesti kietoutuneen systeemin, vaikka tilan $\varrho_{AB} = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$, nyt sama Aliisan hiukkanen A ei voi olla kietoutunut kolmannen hiukkasen C kanssa. Tämän voi todeta huomaamalla, että mikäli A olisikin kietoutunut lisäksi C:n kanssa, olisi pari ϱ_{AB} myös kietoutunut C:n kanssa. Nimittäin jos ϱ_{ABC} olisi muotoa $\sum_k \xi_k \varrho_{AB} \otimes \varrho_C^k$ olisi $\varrho_{AC} = \sum_k \xi_k \frac{1}{2} I_{\mathcal{H}_A} \otimes \varrho_C^k$, joka on tulotila. Toisaalta jos ϱ_{AB} on kietoutunut C:n kanssa, on ϱ_{AB} oltava sekoitetussa tilassa, mikä on ristiriidassa lähtöoletuksen $\varrho_{AB} = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$ kanssa. Yleisemmin, jos Aliisa ja Petri eivät ole maksimaalisesti kietoutuneita, voidaan joskus rajata osasysteemien välistä kietoutumista epätriviaaleilla epäyhtälöillä [92, 93]. Kietoututumista kvantifioidaan yleensä jollakin sopivalla mitalla, kuten konkurrenssilla (engl. concurrence).

Vaikka kietoutuminen ja Bell-epälokaalisuus eivät ole synonyymejä, käy ilmi että vastaavankaltaiset rajoitteet ovat ominaisia Bell-epälokaaleille signaalilokaaleille korrelaatioille. Tässä osiossa esitetään korrelaatioiden jaettavuuteen liittyviä perustuloksia, havainnollistetaan yksiavioisuutta Bellin epäyhtälöiden rikkoutumisen avulla ja identifioidaan yleinen ei-kloonausta teoreema.

Määritellään kahden osapuolen laatikon $P(a, b|X, Y)$ olevan f-jaettava Petrin luona jos on olemassa $(f + 1)$:n osapuolen laatikko

$P(a, b_1, \ldots b_f|X, Y_1, \ldots Y_f)$, missä $b_i \in \{b\}$ sekä $Y_i \in \{Y\}$ $\forall i$ joka on symmetrinen parien (b_i, Y_i) suhteen, ja saaduille marginaalijaukaumille pätee

$$P(a, b_i|X, Y_i) = P(a, b|X, Y) \qquad \forall i \in \{1, \ldots f\}$$

aina kun $Y = Y_i$, $b = b_i$ [90]. Kyseiset marginaalit saadaan summaamalla kaikki Petrin systeemit poislukien i ja käyttämällä signaalilokaalisuutta. Yo. laajennetun jakauman olemassaolo käsittää myös ajatuksen siitä, että Petri voisi halutessaan 'monistaa' systeeminsä. Monistamisen jälkeen Petrillä on f kappaletta objekteja, joista joka ikinen käyttäytyy Aliisan systeemin kanssa kuten alkuperäinen ts. Petri voi käyttää mitä tahansa systeemeistään alkuperäisen laatikon käyttäytymisen palauttamiseen. Tunnistetaan oitis määritelmän läheinen yhteys kloonauksen käsitteeseen. Seuraavaksi näytetään, että mikäli kahden osapuolen laatikko on f-jaettava, kaikki Bellin epäyhtälöt toteutuvat kyseisellä laatikolla kun Petrillä on mittausasetuksia f tai vähemmän.

Oletetaan että f-laajennettu laatikko $P(a, b_1, \ldots b_f|X, Y_1, \ldots Y_f)$ on olemassa, ja että Petrillä on f kappaletta asetuksia $Y \in \{1, \ldots f\}$. Oletusten nojalla erityisesti jakaumat $P(a, b_1, \ldots b_f|X, Y_1 = 1, \ldots Y_f = f)$ ovat olemassa, joten voidaan kirjoittaa

$$P(a, b|X, Y) = \sum_{b_1,\ldots b_f} P(a, b_1, \ldots b_f|X, Y_1 = 1, \ldots Y_f = f) \cdot \delta_{b,b_Y}.$$

Nimittäin signaalilokaalisuuden nojalla

$$\begin{aligned} &\sum_{b_1,\ldots b_f} P(a, b_1, \ldots b_f|X, Y_1 = 1, \ldots Y_f = f) \cdot \delta_{b,b_Y} \\ &= P(a, b_Y = b|X, Y_1 = 1, \ldots Y_f = f) \equiv P(a, b|X, Y). \end{aligned}$$

Toisaalta ehdollisen todennäköisyyden määritelmän nojalla pitää paikkansa että

$$\begin{aligned} &\sum_{b_1,\ldots b_f} P(a, b_1, \ldots b_f|X, Y_1 = 1, \ldots Y_f = f) \cdot \delta_{b,b_Y} \\ &= \sum_{b_1,\ldots b_f} P(b_1, \ldots b_f|Y_1 = 1, \ldots Y_f = f) \cdot P(a|b_1, \ldots b_f, Y_1 = 1, \ldots Y_f = f) \cdot \delta_{b,b_Y}. \end{aligned}$$

Ylläolevan lausekkeen todetaan olevan Bell-lokaalia muotoa samaistuksilla

$$\begin{aligned} P(b|Y, \lambda) &= \delta_{b,b_Y} \\ P(a|X, \lambda) &= P(a|b_1, \ldots b_f, X, Y_1 = 1, \ldots Y_f = f) \\ P(\lambda) &= P(b_1, \ldots b_f|Y_1 = 1, \ldots Y_f = f). \end{aligned}$$

Tulos luetaan siten, että mikäli alkuperäinen laatikko on f-jaettava, on kyseisen laatikon toimintaa mahdollista emuloida Bell-lokaalilla mallilla aina kun Petrillä mittausasetuksia on f ottamalla lokaaliksi piilomuuttujaksi mittaustulokset b_i kiinnitetyillä valinnoilla Y_i. Bellin epäyhtälöt pienemmälle määrälle asetuksia kuin f ovat myös toteutettavissa, kun rajoittaudutaan tarkastelemaan $f-$jaetun marginaaleja.

Käänteinen tulos on myös olemassa; jokainen Bell-lokaali laatikko

$$P(a,b|X,Y) = \int q(\lambda)P(a|X,\lambda)P(b|Y,\lambda)$$

on mielivaltaisesti jaettava (merk. ∞-jaettava). Väitteen toteamiseksi riittää huomata että

$$P(a,b_1,\dots b_f|X,Y_1,\dots Y_f) = \int q(\lambda)P(a|X,\lambda)P(b_1|Y_1,\lambda)\cdot\ldots\cdot P(b_f|Y_f,\lambda),$$

missä $P(b_i|Y_i,\lambda) = P(b|Y,\lambda)$ kaikilla $i \in \{1,\dots f\}$ ja $2 \leq f \in \mathbb{N}$, kelpaa jaettavuuden määritelmän mukaiseksi laajennukseksi. Bell-lokaalisuutta ja ∞-jaettavuutta voidaan tässä mielessä pitää ekvivalentteina käsitteinä.

Tehdään vielä seuraava huomio: jos n:n osapuolen laatikko on Bell-lokaali ts. $P(\{a_{X_i}\}|\{X_i\}) = \int_\Lambda d\lambda P(\lambda)\Pi_{i=1}^n P(a_i|X_i,\lambda)$, voidaan minkä tahansa osapuolen i suhteen tehdä $f-$laajennus

$$\begin{aligned}&P(a_1,\dots(a_{i_1},\dots a_{i_f}),\dots a_n|X_1,\dots(X_{i_1}\dots X_{i_f}),\dots X_n)\\ =&\int q(\lambda)P(a_1|X_1,\lambda)\cdot\ldots\cdot(P(a_{i_1}|X_{i_1},\lambda)\cdot\ldots\cdot P(a_{i_f}|X_{i_f},\lambda))\cdot\ldots\cdot P(a_n|X_n,\lambda),\end{aligned}$$

missä $P(a_{i_k}|X_{i_k},\lambda) = P(a_i|X_i,\lambda)$ kaikilla $k \in \{1,\dots f\}$ ja $2 \leq f \in \mathbb{N}$. Tästä laajennetusta jakaumasta osapuoli i saa marginaaleina alkuperäistä laatikkoa vastaavaa käyttäytymistä minkä tahansa osapuolien kanssa käyttäen mitä tahansa systeemeistä i_k. Täten voidaan julistaa, että Bell-lokaalissa maailmassa korrelaatioiden jakamiselle minkä tahansa osapuolen suhteen ei ole periaatteessa rajoitteita.

Seuraavaksi esitetään kvantitatiivisia rajoja korrelaatioiden jakautumiselle osapuolien välille analogisesti kvanttikietoutumisen yksiavioisuudelle käyttäen hyväksi ylläesitettyjä jaettavuuteen liittyviä tuloksia. Tässä tarkastelussa käytetty mitta korrelaatioiden yksiavioisuudelle on Bellin epäyhtälöiden rikkoutuminen. Kietoutumisen yksiavioisuus on ilmeisesti kytköksissä Bellin epäyhtälöiden rikkoutumiseen, sillä esimerkiksi jos Aliisan ja Petrin kubitit A, B ovat maksimaalisesti kietoutuneet, eli A ei ole kietoutunut Kaarlon kubitin C:n kanssa, täytyy olla että Aliisan ja Kaarlon välinen CHSH-epäyhtälö ei rikkoudu, rikkoutui Aliisa-Petri parin epäyhtälö miten tahansa. Nimittäin osiossa **3.2** todettiin, että kietoutuminen on välttämätöntä Bellin epäyhtälön rikkoutumiselle.

Tässä keskitytään tapaukseen jossa n:n osapuolen korrelaatioiden voimakkuuksien rajoitteita, eli Bellin epäyhtälöiden rikkoutumista, tarkastellaan yksittäisten parien välillä. Esitettävät todistukset seuraavat suurilta osin viitettä [94].

Tarkastellaan tilannetta, jossa on yksi Aliisa (systeemi A) ja n Petriä (i:nnen Petrin systeemi B^i). Oletetaan että Petrien mittaustilanteet ovat keskenään identtisiä; jokaisella Petrillä on sama määrä mittalaitteen asetuksia Y_i ja niitä vastaavia mittaustuloksia b_{Y_i}. Koetilannetta kuvaa yhdistetty laatikko $P(a, b_1 \dots b_n | X, Y_1, \dots Y_n)$. Käytetään merkintää $\mathcal{B}(A, B)$ osapuolien A, B väliselle, Bell-lausekkeelle ts. kahden osapuolen Bellin epäyhtälö on muotoa

$$\mathcal{B}(A, B) = \sum_{a,b} \sum_{X,Y} g(a, b, X, Y) P(a, b | X, Y) \leq R$$

oleva puoliavaruuden määrittelevä relaatio.

Klassisille, Bell-lokaaleille korrelaatioille pätee ilmeisesti ainakin seuraava triviaali yksiavioisuusrelaatio:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}(A, B^i) \leq nR. \tag{7}$$

Toisaalta tämä raja on tiukka eli saavutettavissa, sillä aikaisemmin nähtiin että Bell-lokaaleja korrelaatioita voidaan jakaa mielivaltaisesti. Näin ollen jos Aliisan ja i:nnen Petrin välinen Bell-lauseke saavuttaa lokaalin realistisen ylärajan R, ei ole periaatteessa mitään syytä miksei Aliisan ja kenen tahansa muunkin -tai kaikkien muiden Petrien välillä voisi käydä näin. Täten klassisissa korrelaatioissa ei ole epätriviaaleja yksiavioisuusrajoitteita.

Seuraavaksi näytetään, että itseasiassa kaikki yleisemmätkin signaalilokaalit jakaumat toteuttavat epäyhtälön (7), kun jokaisella Petrillä on mittalaitteen asetuksia n, eli sama kuin Petrien määrä. Tulos on epätriviaali, sillä jos ei oleteta jakaumien olevan Bell-lokaaleja, joidenkin yksittäisten Petrien ja Aliisan välinen Bellin epäyhtälö $\mathcal{B}(A, B^i) \leq R$ voi rikkoutua. Toisin kuin jakamisen yhteydessä tässä ei siis vaadita, että marginaalit $P(a, b_i|X, Y_i)$ olisivat identtisiä, eli oletetaan vähemmän symmetriaa, vaikka koetilanteet ovatkin muiltaosin identtisiä ts. eli on sama määrä asetuksia ja niitä vastaavia mittaustuloksia jne. kaikille osapuolille i. Epäyhtälö (7) edustaa siis aitoa epätriviaalia yksiavioisuusrelaatiota osapuolten väliselle Bellin epäyhtälön rikkoutumiselle.

Oletetaan että Aliisalla on mielivaltainen, mutta äärellinen määrä $|X|$ asetuksia X ja mielivaltainen, mutta äärellinen määrä asetuksia vastaavia mittaustuloksia a_X. Lisäksi jokaisella n:stä kappaleesta Petrejä on täsmälleen n kappaletta mittalaitteen asetuksia $Y_i \in \{1, \dots n\} \forall i \in \{1, \dots n\}$ ja mielivaltainen, mutta äärellinen määrä asetuksia vastaavia mittaustuloksia b_{Y_i}.

Koska oletetaan, että jokainen Aliisa-Petri pari arvioi saman Bellin epäyhtälön rikkoutumista, kertoimet $g(a, b_{Y_i}, X, Y_i)$ ovat identtisiä kaikilla Aliisa-Petri pareilla ts. kaikilla i, k pätee $g(a, b_{Y_i}, X, Y_i) = g(a, b_{Y_k}, X, Y_k)$ aina kun $Y_i = Y_k$.

Ryhmitellään summalausekkeen $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}(A, B^i)$ termit uudelleen ja kirjoitetaan $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}(A, B^i) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}^i$, missä

$$\mathcal{T}^i = \sum_{a,b} \sum_{X,Y} g(a, b, X, Y) P(a, b|X, Y_{(Y+i-1)\mathrm{mod} n}).$$

Tässä $P(a, b|X, Y_{(Y+i-1)\mathrm{mod}\ n})$ edustaa todennäköisyysjakaumaa tapahtumalle (a, b), kun Aliisa valitsee asetuksen X ja $(Y + i - 1)$ mod n:s Petri valitsee asetuksen Y. Yhtäsuuruus pätee, sillä kertoimet $g(a, b, X, Y)$ jakaumille ovat samat aina kun Petrien asetukset ovat keskenään samat, tästä syystä valittua Petriä indikoiva alaindeksi on pudotettu g- funktion argumentista; riittää tietää mikä asetus on valittu. Huomautetaan että tässä on pudotettu Petriä indikoiva alaindeksi myös todennäköisyysjakauman argumentista, sillä tämä voidaan lukea ehdon alaindeksistä. Termien ryhmittely on tehty siten, että jokainen $\mathcal{T}^i$ sisältää yhden mittausvalinnan jakaumat jokaiselta Petriltä. Esim. kun $i = 1$ summaan tulee jakaumia jossa Petri nro. 1 valitsee asetuksen 1, Petri 2 asetuksen 2, vastaavasti kun $i = 2$ Petri nro.1 valitsee asetuksen n, Petri 2, asetuksen 1 jne.

Nähdään että, jos $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}^i > nR$, täytyy olla että ainakin jollakin i pätee että $\mathcal{T}^i > R$. Väite siitä, että signaalilokaalit jakaumat toteuttavat epäyhtälön (7) todistetaan näyttämällä, että oletusten ollessa voimassa pätee aina $\mathcal{T}^i \leq R$.

Todistetaan väite tapaukselle, jossa $i = 1$, analyysi on identtinen muissa tilanteissa. Todetaan, että

$$\mathcal{T}^1 \leq R \tag{8}$$

on oleellisesti Bellin epäyhtälö, jonka rikkoutumista tarkastellaan yhdistelemällä kaikkien Petrien eri mittausasetusten tuloksia. Tätä kombinaatiota eri asetuksia vastaavia todennäköisyyksiä voidaan ajatella uutena käyttäytymisenä (laatikkona) $P'(a, b|X, Z)$, $b \in \{1, \dots b_Z\}$ $Z \in \{1, \dots n\}$, jolle $P'(a, b|X, Z) = P(a, b_Z|X, Y_Z = Z)$ kaikilla $b = b_Z$, $Z \in \{1, \dots n\}$ jne. Todistetaan, että tälle uudelle kahden osapuolen käyttäytymiselle voidaan kirjoittaa tässä koetilanteessa piilomuuttujamalli joten laatikko toteuttaa Bellin epäyhtälön (8).

Tapauksessa $i = 1$ termi $\mathcal{T}^i$ sisältää jakaumia, joissa Petri 1 valitsee asetuksen 1, Petri 2 asetuksen 2, jne. Kyseiset jakaumat voidaan signaalilokaalisuuden nojalla nähdä jakauman $P(a, b_1, \dots b_n|Y_1 = 1 \dots Y_n = n)$ marginaaleina. Täsmälleen samaan tapaan kuin jaettavuuden yhteydessä kirjoitetaan

$$P'(a, b|X, Z) = \sum_{b_1, \dots b_n} P(a, b_1, \dots b_n|X, Y_1 = 1, \dots Y_n = n)\delta_{b,b_Z}.$$

Joka antaa samaan tapaan lokaalin piilomuuttujamallin samaistuksilla

$$\begin{aligned} P'(b|Z, \lambda) &= \delta_{b,b_Z} \\ P'(a|X, \lambda) &= P(a|b_1, \dots b_n, X, Y_1 = 1, \dots Y_n = n) \\ P'(\lambda) &= P(b_1, \dots b_n|Y_1 = 1, \dots Y_n = n). \end{aligned}$$

Koska identtinen analyysi voidaan tehdä kaikille i, todetaan että kaikille i pätee $\mathcal{T}^i \leq R$, ja täten epäyhtälö (7) toteutuu. Tämän yleisen tuloksen nojalla voidaan sanoa, että epätriviaalit korrelaatioiden yksiavioisuusrelaatiot eivät ole poikkeuksellisia signaalilokaaleille teorioille.

Esitetään todistuksesta vielä muokattu versio, jota on helppo soveltaa mm. CHSH- esitysmuotoon $|C| \leq 2$. Käytetään samanlaista merkintätapaa ja oletetaan koetilanteen olevan samanlainen kuin epäyhtälön (7) todistuksessa.

Oletetaan että kaikilla i pätee

$$\left|B(A, B^i)\right| = \left|\sum_{a,b}\sum_{X,Y} g(a,b,X,Y)P(a,b|X,Y)\right| \leq R.$$

Klassisille korrelaatioille pätee ilmeisesti $\sum_{i=1}^{n} |\mathcal{B}(A, B^i)| \leq nR$ ja täten myös heikompi epäyhtälö

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}(A, B^i)\right| \leq nR. \tag{9}$$

Seuraavaksi näytetään, välittämättä siitä, onko tämä kenties triviaali epäyhtälön (7) ja vaikka tahokkaiden symmetrioiden seuraus, että ainakin epäyhtälö (9) pätee kaikissa signaalilokaaleissa teorioissa.

Selvästi

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}(A, B^i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}^i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{T}^i| \equiv \mathcal{G}.$$

Tässä on arvioitu epäyhtälön (9) vasenta puolta ylöspäin. Merkintä $\mathcal{T}^i$ on sama kuin aikaisemmin. Toistaiseksi ei ole mitään syytä olettaa että lausekkeelle $\mathcal{G}$ pätisi $\mathcal{G} \leq nR$. Seuraavaksi näytetään kuitenkin, että $\mathcal{G} > nR$ ei ole sopusoinnussa signaalilokaalisuuden kanssa. Tämä tarkoittaa erityisesti, että kaikki signaalilokaalit jakaumat toteuttavat epäyhtälön (9), sillä valittujen Bell-lausekkeiden summa arvioituna ylöspäin signaalilokaaleilla jakaumilla toteuttaa ko. epäyhtälön.

Jos $\mathcal{G} > nR$ on oltava, että ainakin jollakin $\mathcal{T}^i$ pätee $|\mathcal{T}^i| > R$. Epäyhtälö $|\mathcal{T}^i| \leq R$ on, samaan tapaan kuin aikaisemmin, kahden osapuolen oletettua muotoa oleva epäyhtälö, jossa on yhdistelty usean Petrin jakaumia uudeksi laatikoksi. Täsmälleen samoin kuin epäyhtälön (7) todistuksessa, voidaan uudelle laatikolle rakentaa lokaali piilomuuttujamalli kaikille i. Koska kaikilla i $|\mathcal{T}^i| \leq R$ pätee myös $\mathcal{G} = \sum_{i=1}^n |\mathcal{T}^i| \leq nR$ ja koska $\sum_{i=1}^n |\mathcal{T}^i| \geq |\sum_{i=1}^n \mathcal{T}^i| = |\sum_{i=1}^n \mathcal{B}(A, B^i)|$ pätee erityisesti epäyhtälö (9); $|\sum_{i=1}^n \mathcal{B}(A, B^i)| \leq nR \quad \square$.

Annetaan lopuksi esimerkki tässäjohdetun epäyhtälön soveltamisesta kolmen osapuolen tapaukseen, jossa selvitetään Aliisa-Petri (A, B) ja Aliisa-Kaarlo (A, C) -parien välisten CHSH-epäyhtälöiden yksiavioisuutta. Tarkasteltava tilanne sopii johdetun tuloksen yleisyyden piiriin vastaten tapausta jossa Petrien määrä, samoin kuin mittausasetusten määrä on 2. Epäyhtälön (9) nojalla kaikissa signaalilokaaleissa teorioissa, kvanttimekaniikka mukaan lukien pätee nyt

$$|C(A, B) + C(A, C)| \leq 4. \tag{10}$$

Tästä nähdään heti esimerkiksi, että jos $C(A, B) > 2$ täytyy olla $C(A, C) < 2$. Toisaalta jos $C(A, B)$ saavuttaa algebrallisen ylärajan, eli käytössä on PR-laatikko, täytyy olla että $C(A, C) \leq 0$. Vaikka epäyhtälöstä (10) saadaan epätriviaaleja yksiavioisuusrelaatioita, ei ko. epäyhtälö ole symmetrinen tason $(C(A, B), C(A, C))$ kaikissa kvadranteissa; periaatteessa yhtälö toteutuisi jos Aliisa-Kaarlo parilla olisi PR-jakauma jolle $C(A, C) = -4$ ja Aliisa-Petri parilla jakauma jolle $C(A, B) = 4$.

Yksinkertaisella argumentilla voidaan kuitenkin nähdä, että epäyhtälö (10) voidaan tiukentaa muotoon

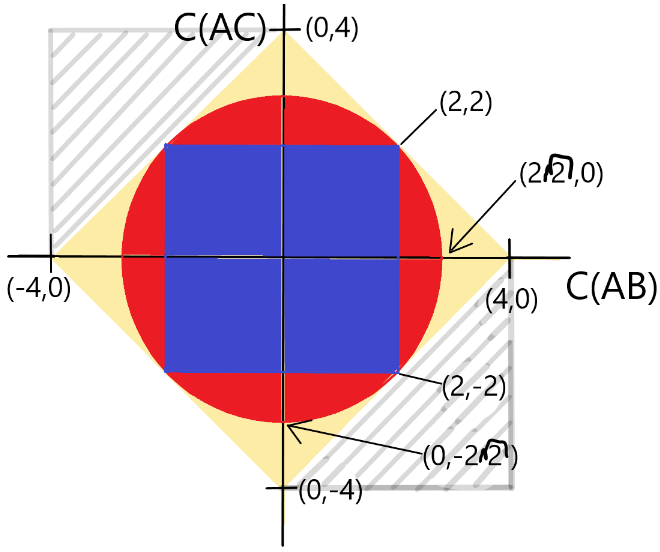
$$|C(A, B)| + |C(A, C)| \leq 4, \tag{11}$$

nimittäin jos esim. $C(A, B) \equiv \sum_{X,Y,a,b} \langle a_X b_Y \rangle > 0$ niin Petrin puolella tapahtuva 'merkkien vaihto' $1 \leftrightarrow -1$ kaikille mittausastuksille muuttaa lausekkeen $C(A, B)$ merkin, sillä tulojen ab merkit muuttuvat Petrin merkkien muuttuessa. Tätä voi havainnollistaa fysikaalisesti tapauksella jossa Petri olisi vaikka vahingossa taulukoinutkin tulokset $(\pm)$ täsmälleen päin vastoin kuin oli sovittu esim. aina kun hiukkanen kääntyy magneettikentässä 'yläpuolella' olevaan detektoriin, merkitsee -1 eikä

$+1$. Matemaattiselta näkökoannalta jos on olemassa signaalilokaali $P(a,b,c|X,Y,Z)$ jonka marginaaleina saadaan $P(a,b|X,Y)$ ja $P(a,c|X,Z)$ joiden CHSH-epäyhtälön lausekkeiden merkit ovat vastakkaiset, on olemassa myös kokoelma $P'(a,b,c|X,Y,Z)$, jonka marginaaleille ne ovat samanmerkkiset, sillä voidaan vaihtaa Petrin tapahtumien $b=1, b=-1$ (tai samoin Kaarlolle) todennäköisyydet päittäin vastaten tapahtumien mielivaltaista uudelleennimeämistä. Lisäksi ko. temppu ei vaikuta CHSH-lausekkeiden normiin ja on täysin lokaali toimenpide; ei tarvitse viestejä, eikä vaikuta muiden osapuolien marginaaleihin. Täten voidaan julistaa tiukennetun epäyhtälön (11) pätevän kaikissa signaalilokaaleissa teorioissa. Tähän epäyhtälöön on päädytty toisenlaisella menetelmällä viitteessä [95].

Huomautetaan, että epäyhtälö (11) on lisäksi tiukka myös siinä mielessä että jokaiselle $|C(A,B)| \in [0,4]$ löytyy $|C(A,C)|$ jolla ko. raja saavutetaan. Tämä nähdään esim. siten, että konveksikombinaatio signaalilokaaleita laatikoita $P'(a,b,c|X,Y,Z)$ ja $P(a,b,c|X,Y,Z)$ on signaalilokaali ja jos P' on laatikko, jonka marginaali (A,B) on PR-laatikko on ko. laatikon marginaalille (A,C) oltava $|C(A,C)| = 0$, vast. P on laatikko jolle marginaalit ovat toisinpäin. Toisaalta mikä tahansa piste reunalta $|C(A,B)| + |C(A,C)| = 4$ voidaan esittää konveksikombinaatioina pisteitä $(|C(A,B)|, |C(A,C)|) = (0,4)$ ja (4,0) [95]. Lisäksi tasajakauman $\mathfrak{I}$ marginaaleille pätee $(C(A,B), C(A,C)) = (0,0)$ eli epäyhtälö (11) rajaa täsmälleen yleisille signaalilokaaleille jakaumille saavutettavan alueen korrelaatiotasossa.

Nyt voidaan sanoa että mikäli parin (A,B) CHSH-epäyhtälö rikkoutuu yleisessä signaalilokaalissa teoriassa, parin (A,C) ei rikkoudu. Tätä voi vielä vahvistaa seuraavaan toteamukseen [95]; jos on yksi Aliisa ja n Petriä, joilla jokaisella kaksi asetusta ja vastaavaa mittaustulosta, niin Aliisa voi rikkoa CHSH-epäyhtälöä korkeintaan yhden Petrin kanssa. Nimittäin jos olisikin esim. Petrit s ja t, niin olisi olemassa jakauma $P(a,b_s,b_t|X,Y_s,Y_t) = \sum_{\{b_i\}\backslash b_s,b_t} P(a,b_1,\ldots b_n|X,Y_1,\ldots Y_n)$, jonka marginaalit rikkoisivat epäyhtälöä (11) ristiriitaisesti.



Kuva 2. Parien (AB) ja (AC) välisten CHSH-korrelaatiofunktioiden sallitut alueet väritettynä. Keltainen alue on sallittu yleisimmissä signaalilokaaleissa teorioissa epäyhtälön $|C(A,B)| + |C(A,C)| \leq 4$ mukaisesti. Punainen on sallittu kvanttimekaniikassa epäyhtälön $C(A,B)^2 + C(A,C)^2 \leq 8$ mukaisesti ja sininen on sallittu klassisille teorioille. Klassisissa korrelaatioissa ei esiinny epätriviaalia yksiavoisuutta, toisin kuin kvanttimekaaniisissa ja yleisimmissä korrelaatioissa. Heikompi epäyhtälö $|C(A,B) + C(A,C)| \leq 4$ toteutuu keltaisen lisäksi harmaalla väritetyllä alueella.

Kvanttimekaniikassa esim. $C(A,B)$ voi olla $\pm 2\sqrt{2}$, tässä tapauksessa (11) rajoittaa parin (A,C) Bell-lausekkeen mahdollista arvoa kvantifioitavissa olevalla tavalla. Viitteessä [96] on johdettu kvanttimekaniikassa pätevä vielä tiukempi kvanttilaatikoille pätevä, ts. dimensioista riippumaton tulos:

$$C(A,B)^2 + C(A,C)^2 \leq 8. \tag{12}$$

Tämä epäyhtälö määrittelee kiekon tasossa $(C(A,B), C(A,C))$; kvanttimekaanisille korrelaatioille sallittu alue tasossa $(C(A,B), C(A,C))$ on pienempi kuin yleisille signaalilokaaleille korrelaatioille. Tämä sallittu alue on niinikään tiukka kvanttimekaniikassa ts. jokainen epäyhtälön (12) määräämän reunan piste ja similaarisesti sisäpiste on saavutettavissa kvanttimekaniikassa [96]. CHSH-yksiavioisuutta on havainnollistettu kuvassa 2, vastaavankaltainen diagrammi on esitetty myös mm. viitteessä [96].

Bellin epäyhtälöiden rikkoutuminen takaa, että laatikot tuottavat satunnaisia lopputuloksia. Yksiaviousuusrelaatiot vihjaavat myös tuotettujen lukujen olevan jossain mielessä salaisia, sillä ne asettavat rajoitteita sille, kuinka kolmannet osapuolet voivat korreloitua mittaustuloksiin: tämä asettaa ylärajoja esim. yritteille arvata Aliisan laatikolla tuotettua symbolia vaikka valittu mittaus olisikin julistettu kaikille. Viittessä [97] on selvitetty joidenkin kryptografisten, tai salausavaimenjako- protokollien turvallisuutta ainoastaan yksiavioisuusrelaatioihin nojaten. Kiinnostavasti joidenkin protokollien voidaan näyttää olevan turvallisia, ainakin tietyillä kriteereillä [97], niitäkin hyökkääjiä vastaan jotka eivät toteuta signaalilokaalisuutta, mutta jotka noudattavat yksiavioisuusrelaatioita. Signaalilokaalisuus on riittävä, mutta ei välttämätön ehto yksiavioisten korrelaatioiden olemassaololle.

Kvanttimekaniikassa tilan täydellinen kopioiminen $\varrho \mapsto \varrho \otimes \varrho$ on yleisesti ottaen mahdotonta. Tämän voi nähdä olevan seurausta kanavien lineaarisuudesta. Nimittäin jos $\sum_i c_i \varrho_i = \tilde{\varrho} \in \mathbb{S}(\mathcal{H}), \mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$ on kombinaatio tiloja, niin tilan klooni olisi $\tilde{\varrho} \otimes \tilde{\varrho} = (\sum_i c_i \varrho_i) \otimes (\sum_j c_j \varrho_j) = \sum_{i,j} c_i c_j (\varrho_i \otimes \varrho_j)$. Toisaalta jos kloonauskuvaus $K : \mathbb{S}(\mathcal{H}) \to \mathbb{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ on lineaarinen, niin tulisi olla $K(\tilde{\varrho}) = \sum_i c_i K(\varrho_i) = \sum_i c_i (\varrho_i \otimes \varrho_i)$, ilmeisesti yleisesti ottaen $K(\tilde{\varrho}) \neq \tilde{\varrho} \otimes \tilde{\varrho}$.

Tunnistetaan vielä yleinen kloonauksen kieltävä argumentti käyttäen edellisiä tuloksia. Kloonaamisessa lähtökohtaisesti keskeistä on osapuolen, esim. Petrin lokaalien mittaustilastojen monistaminen. Ts. jos Petrillä on laatikko $P(b|Y)$, voitaisiin sanoa että Petri kykenee f-kloonaamaan jos on olemassa käyttäytyminen $P(b_1, \dots b_f | Y_1, \dots Y_f)$, jolle $P(b_i|Y_i) = P(b|Y)$ kaikilla $i \in \{1, \dots f\}$, joka on symmetrinen parien (b_i, Y_i) suhteen. Huomautetaan, että ehdot toteuttavien laajennettujen jakaumien löytäminen on oikeastaan triviaalia. Nimittäin tulojakauma

$$P(b_1, \dots b_f | Y_1, \dots Y_f) = P(b_1|Y_1) \cdot \dots \cdot P(b_f|Y_f),$$

missä $P(b_i|Y_i) = P(b|Y)$ kaikilla $i \in \{1, \dots, f\}$ aina kun $Y_i = Y$, toteuttaa vaaditut ehdot.

Tämä ei kuitenkaan suoranaisesti vastaa esimerkiksi kvanttimekaniikassa pätevää kloonaamisen määritelmää. Tässä laatikkomaailman lähestymistavassa 'systeemeihin' ei sinänsä liity eksplisiittisesti tilan käsitettä, eikä täten tuntemattomankaan tilan ajatusta. Halutessaan voi ajatella, että laatikko on tila, mutta tulisi muistaa että käyttäytymisen selitykseen kuuluu yleisesti myös mittausten valinta. Lisäksi laatikkotasolla ei ole lähtökohtaisesti rajoitteita dynaamisille kuvauksille; tarkasteltavat objektit edustavat ensisijaisesti kokeissa testattavia jakaumia, eikä kahden identtisesti toimivan laatikon, tai kahden kokeen jotka tuottavat saman mittausdatan olemassaolossa ole sinänsä mitään ihmeellistä. Kvanttimekaniikassakin on täysin mahdollista preparoida useita systeemeitä tavalla joka vastaa alkuperäisen käyttäytymistä jos kyseinen tila tiedetään etukäteen! Itseasiassa jos rajoittaudutaan kloonaamaan jotakin puhtaiden tilojen ortogonaalista joukkoa $V = \{\varrho_i\}_{i=1}^d$, niin on mahdollista suunnitella tämän tilajoukon täydellisesti kopioiva kvanttimekaaninen kuvaus esim. kaavalla $K(\varrho) = \sum_i tr[\varrho\varrho_i]\varrho_i \otimes \varrho_i$. Keskenään epäortogonaalisia tiloja ei kuitenkaan voi kloonata millään koneella täydellisesti [7].

Kloonauksen kieltävä teoreema on kuitenkin tunnistettavissa, kun otetaan huomioon Petrin systeemin mahdollinen korrelaatio muiden systeemien kanssa. Tämä vastaa intuitiota siitä, että jos Petri oikeasti kykenee kloonaamaan systeeminsä, tulisi ko. kloonatun systeemin havaittavilla ominaisuuksilla olla samankaltaisia riippuvuussuhteita, esimerkiksi Aliisan systeemiin kuin alkuperäisellä. Näiden toteamuksien nojalla näytetään että kloonauksen käsite palautuu jaettavuuden käsitteeseen.

Olkoon $P(a, b|X, Y)$ Aliisan ja Petrin systeemeitä kuvaava laatikko -lähtöasetelma. Tässä ehdotetaan, edellisten perustelujen nojalla, sopivaksi sanoa että Petri kykenee $f-$ kloonaamaan, ellei teoriaan lisätä muita rajoitteita, systeeminsä jos on olemassa yhdistetty jakauma $P(a, b_1, \ldots, b_f|X, Y_1, \ldots Y_f)$ jolle $P(b_i|a, X, Y_i) = P(b|a, X, Y)$ kaikilla $Y_i \in \{Y\}$, $i \in \{1, \ldots, f\}$, $a \in \{a\}_X$. Edellinen perustellaan vaatimuksella Petrin kopioiden samankaltaisesta relaatioista Aliisan systeemiin suhteessa alkuperäiseen. Huomautetaan että ko. yhdistetyn jakauman ehto on toistaiseksi aavistuksen yleisempi kuin jaettavuuden käsite. Nimittäin jos $P(a|X) \neq P'(a|X)$ niin

$$P(b|a, X, Y)P(a|X) \neq P(b|a, X, Y)P'(a|X)$$

ovat kaksi eri laatikkoa. Ero on kuitenkin puhtaasti kosmeettinen, sillä kloonauskoneen käyttö ei lähtökohtaisesti saisi vaikuttaa Aliisan lokaaleihin jakaumiin. Ts. etsitty 'oikea kloonausjakauma' on tarkemman määritelmänsä mukaan olemassa, eli f-kloonaukseen periaatteessa kyetään täsmälleen silloin kun kyetään f-jakamiseen. Toisaalta operationaaliselta näkökannalta jos on olemassa laite joka kykenee tekemään yhden kloonin, voidaan kuvitella samaa tai samankaltaista laitetta käytettävän peräkkäin mielivaltaisen monen kopion tekemiseen. Ts. yhdenkin täydellisen kopion tekeminen implikoi samantien yhdistetyn $f-$jaettavuuden määritelmän toteuttavan jakauman olemassaolon *mielivaltaiselle* f. Täten yleisesti ottaen kloonaaminen on mahdollista, ylläesitetyssä mielessä, jos ja vain jos alkuperäinen käyttäytyminen $P(a, b|X, Y)$ on ∞-jaettava eli Bell-lokaali. Tulos näyttää, että signaalilokaaleissa teorioissa joissa systeemien väliset korrelaatiot ovat yleisesti ottaen Bell-epälokaaleja, täydellinen kloonaus on yleisesti ottaen mahdotonta.

Huomautetaan että edellinen argumentti nojasi ainoastaan laatikoiden korrelaatioon ja oli täten lähtökohtaisesti irrallinen tilannetta kuvaavan teorian muusta matemaattisesta rakenteesta ja täten myös erityisesti tilojen ortogonaalisuudesta, kloonauskuvauksen lineaarisuudesta tai siitä, ovatko kloonattavat systeemit esim. puhtaita tai sekoitettuja. Huomautetaankin, että tässä esitetty täydellisen kloonaamisen kieltävä argumentti on yleisyydeltään oikeammin lähempänä kvanttimekaanikan ei-lähettämistä teoreemaa [98]. Lähettämisessä $L : \mathbb{S}(\mathcal{H}) \to \mathbb{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$, $\varrho \to L(\varrho)$ vaaditaan että $tr_{1/2}[L(\varrho)] = \varrho$. Kloonaus $\varrho \mapsto \varrho \otimes \varrho$ on lähettämisen erikoistapaus ja määritelmien seuraukset ovat erilaisia erityisesti sekoitetutuille tiloille.

Yksiavioisuusrelaatioista saadaan joitakin rajoitteita kloonien laadulle. Annetaan tästä vielä esimerkki käyttämällä aiemmin johdettua kolmen osapuolen CHSH-yksiavioisuusrelaatiota. Olkoon $P(a, b|X, Y)$ Aliisan ja Petrin lähtötilanne ja oletetaan että lähtötilanteessa $|C(A, B)| = Q \neq 0$. Petri tekee kloonauskoneella kaksi kopiota ts. tilannetta kuvaa kloonauksen jälkeen laatikko $P(a, b_1, b_2|X, Y_1, Y_2)$. Koska nyt

$$\left|C(A, B^1)\right| + \left|C(A, B^2)\right| = Q' + Q'' \leq 2R = 4,$$

joten vertaamalla kopioiden keskimääräistä CHSH-epäyhtälön rikkoutumista suhteessa alkuperäiseen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{Q' + Q''}{Q} \leq \frac{2}{Q}$, nähdään, että keskimääräinen CHSH-epäyhtälön rikkoutuminen suhteessa alkuperäiseen on ykköstä pienempi aina kun $Q > 2$. Tämä on toinen tapa todeta, että vähintään toinen klooneista ei käyttäydy kuin, ts. ei riko CHSH-epäyhtälöä samoin kuin, alkuperäinen, kun lähtötilanne rikkoo CHSH-epäyhtälöä. Tätä voidaan käyttää myös työkaluna kloonauskoneiden optimaalisuustodistuksiin esim. kvanttimekaniikassa. Oletetaan argumentin vuoksi, että lähtötilanne saavuttaa Tsirelsonin rajan $Q = 2\sqrt{2}$. Nyt jos löydetään kvanttimekaniikassa $1 \to 2$ kloonaaja ja lähtötilat, parit suureita yms. joka saavuttaa keskimääräisten kloonien CHSH-ylärajan $\frac{1}{\sqrt{2}}$, voidaan kyseisen kloonaajan todeta olevan optimaalinen siinä mielessä, että parempi kloonien laatu kyseisille tiloille ylittäisi Tsirelsonin rajasta tulevat yksiavioisuusrajoitukset kvanttilaatikoille. Toisinsanoen, kyseinen kloonaaja monistaa korrelaatiot optimaalisella tavalla. Huom. että vastaavaa tarkastelua voidaan tehdä käyttäen yleisempiä yksiavioisuusrelaatioita (7). Relaatioita voidaan käyttää myös konkreettisempaan kloonien laadun rajoittamiseen kvanttimekaniikassa, esimerkki tästä on annettu liitteessä **A**.

4.3 Yhteismitattavuus

Kuvitellaan mittaustilanne, jossa saadaan kaksi tulostetta (a, b), $a \in \{1, \ldots M_A\}$ $b \in \{1, \ldots M_B\}$, yhdelle syötteelle $X \equiv A\&B$ määritellen todennäköisyysjakauman $P(a, b|X = A\&B) \equiv p(a, b)$. Erityisesti jos kyseinen yhdistetty jakauma palauttaa marginaaleinaan joidenkin suureiden A ja B (huom. suggestiivinen merkintätapa) mittauksia vastaavat todennäköisyydet ts.

$$\sum_a p(a,b) = p(b) = P(b|X=B)$$
$$\sum_b p(a,b) = p(a) = P(a|X=A),$$

niin voidaan puhua asetuksen $X = A\&B$ vastaavan suureiden A ja B yhteismittausta [2]. Tässäkin tulojakauma $P(a|A)P(b|B)$ kelpaa aina yhteismittauksen määritelmän toteuttavaksi jakaumaksi palauttaen oikeat marginaalit.

Korostetaan että, laatikon sisällä olevien laitteiden, yhteensopivuus ym. ovat viimekädessä piirteitä, joita tulisi tarkastella teoriakohtaisesti. Nimittäin esimerkiksi kvanttimekaanisen tulojakauman $P(a,b|A\&B) = tr[W_{a|A}\varrho] \cdot tr[W_{b|B]}\varrho]$ olemassaolossa ei ole mitään ihmeellistä, vaikka A ja B olisivatkin epäyhteensopivia. Tämänkaltaisen datan voi nähdä olevan peräisin tilanteesta, jossa ajetaan kaksi identtistä koetta rinnakkain siten että toisessa mitataan asetuksella A ja toisella B. Täten laatikkotason yhteisjakauman $P(a,b|A\&B)$, joka palauttaa oikeat marginaalit annetulle koejärjestelylle, olemassaolo ei takaa että suureet ovat korrektissa mielessä yhteismitattavia, eli että yhteisjakauma on olemassa kaikille tiloille. Laitteiden yhteensopivuudelle on tyypillistä, että tulostepari saadaan jokaiselle *yksittäiselle* samasta preparaattorista lähtöisin olevalle objektille, samalla kokeen kierroksella ks. esim. viite [99], missä (epä)yhteensopivuutta on käsitelty yleisemmin.

Tästä huolimatta, similaarisesti kuin kloonauksen yhteydessä, pystytään näyttä-

[2] Usean tulosteen tilanne antaa oikeastaan näennäistä yleisyyttä. Jokainen tapahtumapari (a,b) voidaan nähdä yksittäisenä mittaustuloksena avaruudessa Ω_{AB}, jolla $|\Omega_{AB}| = |\Omega_A| \times |\Omega_B|$ ja täten myös abstraktissa empiirisessä kokeessa yksittäisen 'lampun' syttymisenä mittalaitteessa. Vastaavasti jos jokin $|\Omega_{AB}|$ -lopputulosta antava mittalaite on saatu joulupukilta,edelleen ottamatta kantaa siihen miten laite generoi ko. tulokset, voidaan sen mielivaltaisille tulosteille yrittää antaa 'tulkinta suureiden A ja B yhteismittauksena' eli bijektiivinen kuvaus $v : \Omega_{AB} \to \Omega_A \times \Omega_B$. Tulkintoja on useita, erityisesti yhteismittaukselta vaaditaan $p(\Omega_A, b) = p(b)$ jne. Tässä nähdään kätevämpänä korostetusti kuvitella tämänkaltaisissa konteksteissa aina lamppuparin syttyminen yksittäisen lampun sijaan ts. oletetaan että vast. tulkinta on tehty.

mään konkreettisesti, että yhteismitattavuus, signaalilokaalisuus ja Bellin epäyhtälöiden rikkoutuminen ovat keskenään ristiriitaisia käsitteitä. Tai tarkemmin, että mitkään kaksi edellä listatuista kriteereistä eivät voi yleisesti päteä samanaikaisesti kolmannen kanssa.

Oletetaan että osapuolella $i \in \{1, \dots n\}$ on N_i mittalaitteen asetusta $X_i \in \{1, \dots N_i\}$, ja mielivaltainen mutta äärellinen määrä jokaista asetusta vastaavaa mittaustulosta $a_{(i,X_i)} \in \{1, \dots M_{X_i}\}$. Seuraavien kolmen toteamuksen todetaan olevan tutkielmassa aikaisemmin nähdyn nojalla ekvivalentteja:

1 Osapuolten laatikko $P(a_{(1,X_1)}, \dots, a_{(n,X_n)}|X_1, \dots, X_n)$ on Bell-lokaali, eli laatikolle voidaan kirjoittaa lokaali piilomuuttujamalli.

2 Laatikko toteuttaa Bellin epäyhtälöt.

3 On olemassa yhdistetty jakauma $p(a_{(1,1)}, \dots, a_{(1,N_1)}, \dots a_{(n,1)}, \dots, a_{(n,N_n)})$ kaikille mitatuille suureille, jonka marginaaleina saadaan laatikon todennäköisyydet: $p(a_{(1,k_1)}, \dots, a_{(n,k_n)}) = P(a_1, \dots, a_n|X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n)$ jne.

Toteamukset **1** ja **2** ovat ekvivalentteja määritelmien ja todennäköisyystahokkaisiin liittyvien toteamusten nojalla. Edellisessä osiossa nähtiin, että lauseesta **1** seuraa **3**, nimittäin jakauma

$$
\begin{aligned}
&p(a_{(1,1)}, \dots, a_{(1,N_1)}, \dots, a_{(n,1)}, \dots, a_{(n,N_n)}) \\
= &\int d\lambda q(\lambda) \cdot P(a_{(1,X_1)}|X_1 = 1, \lambda) \cdot \ldots \cdot P(a_{(1,X_1)}|X_1 = N_1, \lambda) \cdot \ldots \\
&\ldots \cdot P(a_{(n,X_n)}|X_n = N_n, \lambda)
\end{aligned}
$$

on hyvin määritelty ja palauttaa oikeat marginaalit jos laatikko on Bell-lokaali. Bell-lokaaleiden korrelaatioiden jaettavuudelle ei ollut rajoitteita. Toisaalta väitteen **3** mukaisen yhdistetyn jakauman olemassaolo takaa, että laatikolle on olemassa piilomuuttujamalli sillä voidaan kirjoittaa

$$P(a_1, \ldots, a_n | X_1, \ldots, X_n) =$$

$$\sum_{a_{(1,1)},\ldots a_{(1,N_1)},\ldots a_{(n,N_N)}} p(a_{(1,1)}, \ldots, a_{(1,N_1)}, \ldots a_{(n,1)}, \ldots, a_{(n,N_n)}) \delta_{a_1, a_{(1,X_1)}} \cdot \ldots \cdot \delta_{a_n, a_{(n,X_n)}}.$$

Tässä yhdistetty jakauma antaa piilomuuttujamallin, nimittäin yhdistetyn jakauman nähdään sisältävän todennäköisyydet kaikkien asetuksien vasteet sisältävälle mittaustuloslistalle $\lambda = [a_{(1,1)}, \ldots, a_{(1,N_1)}; \ldots, a_{(n,N_N)}]$.

Seuraavaksi esitettävä argumentti yhteismittauksen mahdollisuutta vastaan mukailee viitteen [100, Liite] ajatusketjua. Vastaavia elementtejä löytyy myös viitteistä [50, 90]. Oletetaan sitten, että Petri omaa suureiden $Y = 1, \ldots Y = m$ yhteismittaukseen kykenevän laitteen ts. on olemassa yhdistetty jakauma $p(b_1, \ldots b_m)$. Aliisat, joita on n kpl., mittaavat kaukana asetuksilla $X_i \in \{1, \ldots N_i\}$. Koetta kuvaa käyttäytyminen $p(a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_m | X_1, \ldots, X_n)$ jolle pätee, oletusten nojalla, $p(a_1, \ldots, a_n, b_j | X_1, \ldots X_n) = P(a_1, \ldots a_n, b | X_1, \ldots X_n, Y = j)$ kaikilla j. Ei-viestintää ehtojen nojalla täytyy olla että

$$\sum_{a_1,\ldots a_n} p(a_1 \ldots a_n, b_1, \ldots b_m | X_1, \ldots X_n) = p(b_1, \ldots b_m).$$

Tämä huomioon ottaen todetaan että jakauma

$$p(a_{(1,1)}, \ldots, a_{(1,N_1)}, \ldots a_{(n,N_n)}, \ldots, b_1, \ldots, b_m) = 0,$$

jos $p(b_1, \ldots b_m) = 0$ ja

$$\frac{\Pi_{k_1=1,\ldots,k_n=1}^{k_1=N_1,\ldots,k_n=N_n} p(a_{(1,k_1)}, \ldots a_{(n,k_n)}, \ldots, b_1, \ldots b_m | X_1 = k_1, \ldots X_n = k_n)}{p(b_1, \ldots b_m)^{(N_1 \cdot \ldots \cdot N_n - 1)}}$$

muulloin, on paitsi hyvin määritelty, palauttaa myös oikeat marginaalit lausahduksen **3** mukaisesti kaikille Aliisojen ja Petrin suureiden valinnoille. Korostetaan, että tässä ei ole tarpeen ottaa kantaa mallin fysikaaliseen mielekkyyteen. Tässä nähtiin, että suureiden $Y = 1, \ldots Y = m$ yhteismittauksen mahdollisuus yhden osapuolen luona johtaa heti yhdistetyn jakauman olemassaoloon kaikkien osapuolten suureiden arvoille kun otetaan huomioon ei-viestintää ehdot eli toisinsanottuna koetilanteelle on olemassa lokaali piilomuuttujamalli. Täten jokaisessa signaalilokaalissa teoriassa jossa Bellin epäyhtälöiden ennustetaan rikkoutuvan edes joillekkin mittausasetuksille, on yleisesti ottaen oltava rajoitteita yhteismitattavuuden vaatimuksien toteuttavien jakaumien olemassaololle tai signaalilokaalisuus ei voi toteutua.

Viimeistellään edelliset toteamukset esittämällä myös viitteistä [9, 51] löytyvä esimerkki, joka mm. antaa toisenkaltaisen lähestymistavan CHSH-epäyhtälön johtamiseen ja edelleen korostaa yhteismitattavuuden yhteyttä mahdollisuuteen kommunikoida Bell-kokeessa. Oletetaan sitten, että Aliisalla on kaksi mittalaitetta $X \in \{\spadesuit, \clubsuit\}$ ja vast. Petrillä $Y \in \{\heartsuit, \diamondsuit\}$. Näitä vastaavat mittaustulokset ovat joko -1 tai +1 kuten aikaisemmin. Oletetaan, että Petri omaa kyseisten suureiden yhteismittaukseen kykenevän laitteen, eli jakaumat $p(a, b_\heartsuit, b_\diamondsuit|X) = P(a, b_\heartsuit, b_\diamondsuit|X, \diamondsuit\&\heartsuit)$ joille $\sum_{b_\heartsuit} p(a, b_\heartsuit, b_\diamondsuit|X) = P(a, b|X, \diamondsuit)$ ja $\sum_{b_\diamondsuit} p(a, b_\heartsuit, b_\diamondsuit|X) = P(a, b|X, \heartsuit)$ ovat olemassa. Sovitaan Aliisan asetuksen $\spadesuit$ vastaavan viestiä (kyllä) ja asetuksen $\clubsuit$ viestiä (ei). Petri lukee yhteismittauksesta saadun tuloksensa, ja tulkitsee viestin olevan esimerkiksi $\spadesuit$ aina kun $b_\heartsuit \neq b_\diamondsuit$, ja $\clubsuit$ muulloin. Viestintälaitteen voidaan sanoa toimivan, jos Petri pystyy arvaamaan valitun viestin kolikonheittoa suuremmalla todennäköisyydellä Aliisan valintojen ollessa täysin ennalta tuntemattomia eli satunnaisia. Oletetaan ensiksi, että Aliisa valitsee asetuksen $\spadesuit$, tällöin Petri arvaa oikein todennäköisyydellä

$$P_\spadesuit(\text{oikein}) = \sum_{a, b_\diamondsuit \neq b_\heartsuit} p(a, b_\diamondsuit, b_\heartsuit|\spadesuit) \equiv \sum_{a, b_\diamondsuit, b_\heartsuit} \frac{1}{2}|b_\heartsuit - b_\diamondsuit||a|p(a, b_\heartsuit, b_\diamondsuit|\spadesuit).$$

Viimeisen ekvivalenssin voi todeta pitävän paikkansa inspektiolla muistaen, että a_X ja $b_Y \in \{-1, 1\}$ kaikilla $X \in \{\spadesuit, \clubsuit\}$ ja $Y \in \{\heartsuit, \diamondsuit\}$. Vastaavasti tapauksessa jossa Aliisa valitsee $\clubsuit$ todennäköisyys arvata oikein on

$$P_\clubsuit(\text{oikein}) = \sum_{a, b_\diamondsuit = b_\heartsuit} p(a, b_\heartsuit, b_\diamondsuit|\clubsuit) \equiv \sum_{a, b_\heartsuit, b_\diamondsuit} \frac{1}{2}|b_\heartsuit + b_\diamondsuit||a|p(a, b_\heartsuit, b_\diamondsuit|\clubsuit).$$

Täten, ottaen huomioon että Aliisan viesti voi lähtökohtaisesti olla kumpi tahansa nähdään Petrin olevan oikeassa todennäköisyydellä

$$
\begin{aligned}
P(\text{oikein}) &= \frac{1}{2}[P_{\spadesuit}(\text{oikein}) + P_{\clubsuit}(\text{oikein})] \\
&\geq \frac{1}{4}\left[\sum_{a,b_\heartsuit,b_\diamondsuit}(ab_\heartsuit - ab_\diamondsuit)p(a,b_\heartsuit,b_\diamondsuit|\spadesuit) + \sum_{a,b_\heartsuit,b_\diamondsuit}(ab_\heartsuit + ab_\diamondsuit)p(a,b_\heartsuit,b_\diamondsuit|\clubsuit)\right] \\
&\equiv \frac{1}{4}\left[\sum_{a,b=\pm 1} ab\,[P(a,b|\spadesuit,\heartsuit) + P(a,b|\clubsuit,\heartsuit) + P(a,b,|\clubsuit,\diamondsuit) - P(a,b|\spadesuit,\diamondsuit)]\right] \\
&= \frac{C}{4}.
\end{aligned}
$$

Tässä ensimmäinen epäyhtälö saadaan pudottamalla itseisarvot. Ekvivalenssin toteamiseen on käytetty yhteismittauksen määritelmää, suoritettu summaus yli joidenkin muuttujien ja pudotettu alaindeksit jäljelle jäävistä b_Y. Näin voi tehdä, sillä summaus käy kaikkien b_Y yli ja muuttujat saavat arvoja samasta joukosta. Täten, jos Petri omaa yhteismittaukseen kykenevän laitteen, pystyy Petri taatusti päättelemään Aliisan viestin kolikonheittoa suuremmalla todennäköisyydellä heti kun $\frac{C}{4} > \frac{1}{2}$, eli heti kun CHSH-epäyhtälö rikkoutuu, kuten väitettiin.

Yhteenvetona todetaan, että viittaamatta ja riippumatta Hilbertin avaruuden operaattoreihin tai niiden kommututatiivisuuteen, tms. liittyviin seikkoihin, jotka ovat kvanttimekaniikassa keskeisiä yhdistettyjen jakaumien olemassaololle ks. mm. [29, kpl.3] ja [28, kpl.11] sekä [101, Kpl. VIII], suureiden yhteismitattavuudelle on rajoitteita kaikissa teorioissa, jotka ennustavat Bell-epälokaalisuutta ja ovat sopusoinnussa signaalilokaalisuuden kanssa. Erityisesti nähdään että suureiden epäyhteensopivuus ei ole kvanttiteorian erityispiirre, vaan itseasiassa mikään ei-viestintää ehtojen kanssa sopusoinnussa oleva teoria jossa on Bell-epälokaalisuutta tai erityisesti mahdollinen kvanttiteorian täydennys ei voi yleisesti ottaen päästä kyseisestä piirteestä eroon. Voidaan myös lausua että missä tahansa ei-viestintää teoriassa suureiden epäyhteensopivuus on välttämätöntä Bellin epäyhtälöiden rikkoutumiselle.

Bellin epäyhtälöt voidaan nähdä eräinä rajoituksina yhdistettyjen jakaumien olemassaololle kun osapuolten marginaalit on kiinnitetty lausahduksen **3** mukaisesti ja on oletettu signaalilokaalisuus. Muutoin tulojakauma kelpaisi yhteismittauksen määritelmän mukaiseksi jakaumaksi. Kuten huomautettiin, pelkkä yhteisjakauman oleamassaolo ei yleisesti takaa että mittaukset ovat 'oikeassa mielessä' yhteensopivia joten yhteismittauksen ja Bell-epälokaalisuuden yhteyden tarkempi ja selvitys kaipaisi lisärakennetta. Tässä esitetään muutama huomio yhteismitattavuuden ja Bell-epälokaalisuuden yhteydestä kvanttimekaniikassa.

Viitteessä [100] osoitetaan, että mille tahansa Petrin epäyhteensopivalle kaksiarvoiselle suureparille voidaan löytää kaksiarvoinen suurepari Aliisalle, sekä yhdistetyn systeemin tila joka mahdollistaa CHSH-epäyhtälön rikkoutumisen. Ts. voidaan sanoa, että kaksiarvoinen suurepari on epäyhteensopiva jos ja vain jos niiden avulla voidaan rikkoa CHSH-epäyhtälöä. Tästä herää houkutus julistaa, että vaikka kvanttiteoria korvattaisiinkin tulevaisuudessa jollakin vaihtoehtoisella 'täydennetyllä' signaalilokaalilla teorialla ts. vaikka laatikoiden mekaniikkaa kuvattaisiin erilaisella matematiikalla, niin ainakin näitä suurepareja 'vastaavat' mittaukset pysyvät epäyhteensopivina [100]. Kuitenkin viitteissä [102, 103] rakennetaan yleisemmälle väitteelle kvanttimekaaninen vastaesimerkki; epäyhteensopiven suureiden valinta ei yleensä takaa että voidaan rikkoa Bellin epäyhtälöä. Esim. viittessä [102] tulos näytetään kiinnittämällä keskenään epäyhteensopivien suureiden joukko (kolme kaksiarvoisa suuretta) Petrin puolella, ja osoitetaan että riippumatta Aliisalle valituista suureiden joukosta sekä systeemin yhdistetystä tilasta näin rakennettu kvanttilaatikko toteuttaa kaikki Bellin epäyhtälöt. Nähdään että kvanttimekaniikassa sekä kietoutuminen että suureiden epäyhteensopivuus ovat välttämättömiä, mutta eivät yleisesti ottaen riittäviä kvanttiepälokaalisuudelle.

Edelliset saattavat viitata siihen, että kvanttimekaniikassa on jotakin, joka rajoittaa yhteismittauksen mahdollisuutta enemmän kuin pelkästään vaatimus viestinnän mahdottomuudesta Bell-kokeessa. Toisaalta voitaisiin kuvitella, että viitteiden [102, 103] kahden osapuolen koejärjestelyn 'vastaesimerkkejä' olisi ehkä mahdollista soveltaa Bellin epäyhtälöiden rikkomiseen useamman osapuolen koejärjestelyssä.

5 Tsirelsonin rajan perässä

Luvussa **4** nähtiin että mm. satunnaisuus, korrelaatioiden yksiavioisuusrelaatiot, ei-kloonausta teoreema sekä rajoitukset yhteismittauksen mahdollisuudelle voidaan identifioida laatikkotasolla, eli viittaamatta allaolevan teorian täsmälliseen rakenteeseen, yhteiseksi kaikille yleisille ei-klassisia korrelaatioita salliville signaalilokaaleille teorioille. Nämä tulokset osaltaan korostavat signaalilokaalisuuden merkitystä ja sitä voidaan pitää eräänä teorian määräävimmistäkin piirteistä. Toistaiseksi ei ole kuitenkaan esitetty mitään syitä sille, miksi sallittujen korrelaatioiden tulisi olla voimakkaammin supistettuja. Erityisesti signaalilokaalisuus ei yksinään takaa, että laatikoille on kvanttimekaaninen selitys. Voi toki olla, että kvanttiteoria ei ole lopullinen teoria, joten tätä ei tarvitsekkaan vaatia. Joka tapauksessa kvanttiteorialla on vahva tuki eikä esim. CHSH-epäyhtälöä rikkovia 'superkvanttilaatikoita' ole raportoitu. Toki ilman vaihtehtoista luonnonkuvausta ymmärrys prosesseista jotka ovat annetun laatikon rakentamisen kannalta relevantteja on lähtökohtaisesti kvanttiteorian rajoittama.

Nämä tosiasiat ovat suuresti motivoineet kvanttiteorian perusteiden tutkimussuuntausta, jonka tehtävänä on löytää joukon $\mathcal{K}$ edes lähes määritteleviä, fysikaalisesti tai intuitiivisesti mielekkäitä, 'teoriasta riippumattomia' periaatteita. Kyseisiä periaatteita voitaisiin mahdollisesti myös nostaa aksioomanomaiseen asemaan ja nimittää luonnonlaeiksi, samaan tapaan kuin erityisen suhteellisuusteorian valonnopeuden koordinaatistoinvarianssia yms. Perusluontoisina pidettäviä periaatteita voitaisiin käyttää ohjenuorana tai lähtökohtana mahdollisen seuraavan teorian rakentamisessa. Vähintäänkin saataisiin uusia näkökulmia kvanttiepälokaalisuuden alkuperälle ja merkitykselle sekä myös käytännöntehtävien äärimmäisille rajoille.

Ensimmäisissä huomioissa konkreettisia rajoituksia korrelaatioiden CHSH-epäyhtälön rikkoutumiselle saatiin kun laatikoiden informaationprosessointikykyä alettiin selvitää tarkemmin. Esimerkiksi kuvitellaan tilanne jossa Aliisalle annetaan N bittiä pitkä jono $\vec{x}$ ja Petrille N bittiä pitkä jono $\vec{y}$ ja Petrin tehtävä on laskea jokin kaksiarvoinen funktio $f(\vec{x}, \vec{y})$, $f : \{0,1\}^N \times \{0,1\}^N \to \{0,1\}$, niin vähällä keskinäisellä kommunikaatiolla kuin mahdollista; tässä Aliisa ei tiedä $\vec{y}$:tä ja päinvastoin. Pienintä määrä klassista kommunikaatiota jonka fyysikot tarvitsevat tehtävän selvittämiseen annetuilla resursseilla kutsutaan funktion f kommunikaatiokompleksisuudeksi (engl. communication complexity). Jos esim. Aliisa saa lähettää koko jononsa eli N-bittiä Petrille, niin Petri voi laskea funktion. Muunmuassa viittessä [104] huomattiin, että tämänkaltaisissa tehtävissä kvanttikietoutumista voi hyödyntää tarvitun kommunikaation vähentämiseen joillekkin f. Toisissa tapauksissa kietoutuminen ei efektiivisesti vähennä kompleksisuutta [105]. Alunperin Wim van Damin väitöskirjassa vuonna 2000 esitetty, myöhemmin viittessä [105] julkaistu päättelyketju näyttää, että mikäli fyysikoilla olisi pääsy mielivaltaiseen määrään PR-laatikoita, niin *minkä tahansa* kaksiarvoisen funktion f kommunikaatiokompleksisuus redusoituu yhteen bittiin ts. kompleksisuudesta tulee triviaalia. Voidaan väittää, että tämänkaltainen yleisen kompleksisuuden romahtaminen on epäuskottavaa, joten saadaan ainakin eräs peruste sille, miksi kaikkia signaalilokaaleja ei-klassisia korrelaatioita ei esiintyisi luonnossa.

Myöhemmin tätä ideaa on laajennettu tilanteeseen jossa ei vaadita että funktion f laskeminen onnistuu joka kerta, vaan jollakin todennäköisyydellä $p > \frac{1}{2}$ kaikille syötteille $\vec{x}, \vec{y}$. Tässä tilanteessa vaatimus siitä, että kompleksisuus ei romahda rajaa mahdollisia korrelaatioita epäitsestäänselvällä tavalla [106]. Saatu raja jonka yläpuolella kompleksisuudesta tulee taatusti triviaalia vastaa CHSH-epäyhtälön arvoa $C_{TK} \approx 3{,}266$ [107] joka tulee jo aika lähelle Tsirelsonin rajaa $C_{\mathcal{K}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$, mutta väliin jää vielä tilaa. Tutkielman kirjoittamisen aikaan kysymys siitä mitä yleisesti ottaen tapahtuu välillä $[C_{\mathcal{K}}, C_{TK}]$ vaikuttaa olevan avoin. Myöhemmin tuloksia on laajennettu [107] se. suurempi joukko laatikoita, joitakin myös Tsirelsonin CHSH-epäyhtälön alapuolelta mutta kvanttijoukon $\mathcal{K}$ ulkopuolelta, voidaan sulkea pois. Katsaus kommunikaatiokompleksisuuteen yms. löytyy lähteestä [108].

Viitteessä [109] on harkittu nk. epälokaalia laskentaa (engl. nonlocal computation), jossa esim. verrattuna kommunikaatiokompleksisuuteen Aliisan ja Petrin tehtävä on laskea tiettyä muotoa olevan kaksiarvoisen funktion, jonka muodon molemmat tietävät etukäteen, arvo $\hat{f}(\vec{z}) = c$ oikein ilman kommunikaatiota. Jonolle $\vec{z}$ oletetaan pätevän $z_i = x_i + y_i \pmod 2$ kaikille Aliisan ja Petrin paikan päällä täysin satunnaisesti annetuille $\vec{x}, \vec{y}$ ja on huomionarvoista, että osapuolet eivät täten tiedä mitään syötteestä $\vec{z}$. Laskennan sanotaan onnistuneen jos Aliisa voi tuottaa bitin a ja Petri bitin b siten että $c = a + b \pmod 2$. Käy ilmi, että kvanttimekaaniset korrelaatiot eivät anna tässä tilanteessa etua verrattuna klassisiin optimaalisilla strategioilla, mutta voidaan löytää esimerkkifunktioita joilla esim. PR-laatikko takaa parempia onnistumistodennäköisyyksiä [109]. Lisäksi on mahdollista näyttää, että jokainen Tsirelsonin CHSH-epäyhtälöä rikkova laatikko on hyödyllinen epälokaalissa laskennassa. Huomautetaan lopuksi, että mikäli ei oleteta syötteiden $\vec{x}, \vec{y}$ olevan täysin satunnaisesti jaettu, eli kun osapuolet voivat päätellä jotakin syötteestä $\vec{z}$, niin kvanttikorrelaatioista onkin etua verrattuna klassisiin korrelaatioihin [110].

Edellämainitut tulokset antavat joitakin vakuuttavanakin pidettäviä perusteluita sille, miksi luonnossa ei esiintyisi kaikkia signaalilokaaleja korrelaatioita. Ne voidaan nähdä myös käsinkosketeltavina esimerkkeinä suuremmasta trendistä fysiikan perusteiden tutkimuksessa, jossa informaationprosessoinnin mahdollisuuksista ja rajoitteista johdetaan yleisiä lainalaisuuksia. Lisäksi em. periaatteita voidaan tarkastella laatikkotasolla, joten ne voidaan käsittää teoriasta -ja laatikoiden sisällä olevista yksityiskohdista riippumattomina rajoituksina.

Epätriviaalia kommunikaatiokompleksisuutta ja rajoituksia epälokaalille laskennalle voidaan kuitenkin pitää hyvin spesifeinä periaatteina, joiden fysikaalisten implikaatioiden voisi sanoa jopa olevan lähtökohtaisesti toissijaisia. Vaikka esim. kommunikaatiokompleksisuuden romahtamista voi pitää epäuskottavana, joku[3] voi väittää, että tämä tuskin on *se* sääntö, joka määrittelee kvanttimekaniikkaa edes lähes noudattavan maailmankaikkeuden. Jokatapauksessa sitä, että Tsirelsonin raja ilmestyy 'luonnollisesti' kun harkitaan esimerkiksi epälokaalia laskentaa voidaan pitää kiinnostavana ja merkittävänä tuloksena.

Sittemin, erityisesti viimeisen vuosikymmenen aikana, on esitetty useita laatikkotasolla muotoiltavia ehtoja, jotka rajoittavat tavoillaan sallittujen korrelaatioiden joukkoa. Esimerkkeinä fysikaaliselta sisällöltään selkeinä pidettävistä periaatteista voidaan mainita vuonna 2010 julkaistu makroskooppinen Bell-lokaalisuus (engl. macroscopic locality) [111] ja sen viimeaikainen, vuonna 2017 julkaistu, jalostus usean laatikon Bell-lokaalisuus (engl. many-box locality) [112]. Näiden periaatteiden taustalla on ajatus siitä, että kun tavallinen yksittäisiä tulosteita yksittäisille asetuksille tuottava Bell-koe tuodaan makroskooppiseen skaalaan karkeasti siten, että 'makroskooppisen kontekstin' laatikko edustaakin tavallisien tuloksien keskimääräistyksiä, ts. kun syötteen tuloste on mikroskooppisten tulosten keskimääräistys, niin saadun laatikon tulisi olla Bell-lokaali. Tämä nähdään eräänkaltaisena vaatimuksena siitä, että on olemassa rajaseutu, jossa klassisen fysiikan ennustamat laatikot voidaan palauttaa.

Enemmistö varmaankin hyväksyy perustelun klassisen rajan olemassaolosta, ja täten myös esim. makroskooppisen Bell-lokaalisuuden implikoimia rajoja mahdollisille korrelaatioille. Kuitenkin fysiikan perusteisiin keskittyvältä näkökannalta on mahdollista argumentoida, että vastaavat vaatimukset eivät kelpaa teorian primitiivisiksi rakenteiksi. Voidaan väittää, että klassisen rajan tulisi olla teorian fysikaalis-

[3] Voi olla, että säännöstä riippumatta aina joku mussuttaa. Tässä ajetaan takaa sitä, että aksioomanomaiseen asemaan nostettavalle periaatteelle olisi eduksi olla sellainen, että sen sisältö olisi intuitiivinen ja kieltäminen tuntuisi hankalalta kadunfyysikollekin. Signaalilokaalisuutta voitaneen pitää tämänkaltaisena, rajoitteita jaetuille laskentatehtäville *ei ehkä*.

ten perusperiaatteiden seuraus, ei perusperiaate. Joka tapauksessa makroskooppisen - ja usean laatikon Bell-lokaalisuuden voidaan nähdä osoittavan, että ehkä tunnettu fysiikka olisi hyvin erilaista, jos ko. periaatteita rikkovia laatikoita olisi olemassa. Tässä mielessä ne asettavat yleisiä ja uskottavinakin pidettäviä rajoja mahdollisille signaalilokaaleille korrelaatioille.

Kiinnostavasti makroskooppisen Bell-lokaalisuuden implikoimat rajat on kahden osapuolen tapauksissa kvantifioitu täysin; makroskooppisen Bell-lokaalisuuden toteuttavien laatikoiden joukko vastaa NPA-hierarkian ensimmäistä approksimaatiota $\mathcal{K}'_1$ [111]. Toisinsanoen NPA:n ensimmäiselle approksimaatiolle on annettavissa fysikaalinen tulkinta.

Seuraavaksi esitetään yksityiskohtaisesti eräs vahvemmista tähän päivään mennessä esitetyistä korrelaatioiden joukkoa rajaavista periaatteista nk. *informaation kausaalisuus*. Informaation kausaalisuuden voidaan nähdä olevan signaalilokaalisuuden yleistys, jota motivoivat lisäksi laatikoiden informaationprosessointikyvyt.

5.1 Informaation kausaalisuus

Informaation kausaalisuus (engl. information causality) esitettiin vuonna 2009 [113] eräänä kandidaattina kvanttimekaanisten korrelaatioiden joukon mysteerin selittäjäksi. Tilanne, tai tehtävä jota informaation kausaliteetti (lyh. IK) rajoittaa, voidaan luontevasti esittää kahden osapuolen pelinä.

Kullakin pelin kierroksella Aliisalle annetaan jono $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_N)$ satunnaisia ja toisistaan riippumattomia symboleja $x_i \in (1, \ldots d_i)$. Kaukana olevalle Petrille annetaan satunnaisesti symboli $Y \in (1, \ldots N)$. Aliisa ja Petri voittavat pelin, mikäli Petri pystyy saatuaan Y:n arvaamaan Aliisan symbolin x_Y oikein. Merkataan Petrin arvausta symbolilla $\beta_Y \in (1, \ldots d_Y)$. Ennen peliä osapuolet saavat sopia strategiasta ja jakaa keskenään mielivaltaisen määrän signaalilokaaleja resursseja, joita saa vapaasti käyttää pelin aikana. Eräs tapa arvioida Aliisan ja Petrin voittomahdollisuuksia on symbolien arvaustodennäköisyyksien summa $\sum_{i=1}^{N} P(\beta_i = x_i | Y = i)$.

Koska Aliisan jono $\vec{x}$ ja Petrin symboli Y on annettu paikan päällä satunnaisesti, ei ole lähtökohtaisesti syytä olettaa että Petrin arvauksella β_Y olisi mitään riippuvuussuhteita Aliisan symboliin x_Y. Lisäksi ei-viestintää ehtojen nojalla voidaan todeta, että yritykset kasvattaa arvaustodennäköisyyksiä laatikoilla eivät toimi. Nimittäin ainoa epätriviaali strategia yrittää korreloida arvausta ja Aliisan jonon symboleita käsittää symbolien x_i ja Y, tai niiden johdannaisten, syöttämistä laatikoihin. Tilannetta voisi tällöin kuvata mikä tahansa käyttäytyminen, missä Aliisan laatikoiden syötteinä ovat symbolit x_i, vastaavina tulosteina jotkin a_i. Toisella puolella Petri voi syöttää symbolin Y ja tulosteesta b jotenkin lokaalisti prosessoida arvauksen β_Y. Kuten esim. osiossa **2.2**, todettiin, Aliisan tulosteilla ei ole operationaalista merkitystä Petrille niin kauan kun laboratorioiden välillä ei ole perinteistä kommunikaatiota [!]. Signaalilokaalisuuden nojalla tuloste b on riippumaton Aliisan mittausvalinnoista, eikä tästä lokaalisti generoitu arvaus näin ollen ole korreloitunut symbolien x_i kanssa. Petri voi yhtä hyvin heittää d_Y-sivuista kolikkoa; pelin hengen mukaisesti Aliisasta erotetulla Petrillä ei signaalilokaalissa maailmassa ole pääsyä Aliisan symbolijonoon $\vec{x}$.

Tilanteesta tulee huomattavasti mielenkiintoisempi, jos Aliisan annetaan lähettää Petrille viesti kierroksen aikana. Tällöin Petri voi yrittää epätriviaalilla tavalla korreloida Aliisan symboleita arvaukseensa. Kuvitellaan sitten, että Aliisa saa jonon $\vec{x}$ saatuaan käyttää laatikoitaan miten tykkää, ja lähettää tämän jälkeen Petrille symbolijonon $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_{L_M})$. Viestin suuruutta voidaan kvantifioida Shannonin entropialla

$$H(\vec{m}) = \sum_{\vec{m}} -P(\vec{m}) \log(P(\vec{m})) \equiv - \sum_{m_1,\ldots,m_{L_M}} P(m_1, \ldots, m_{L_M}) \log[P(m_1, \ldots, m_{L_M})],$$

missä $\log(\cdot)$ ymmäretään kaksikantaisena logaritmina $\log_2(\cdot)$. Tässä ei oteta kantaa siihen minkälaisiin systeemeihin viesti on kirjoitettu; viestinkantajina voivat toimia aivan yhtä hyvin elektronin spinin orientaatio, mustekuvio papuryskääröllä tai muu mielivaltaisen monimutkainen testattavissa oleva ominaisuus. Oletetaan kuitenkin että Petrille saatavissa oleva klassinen informaatio on korkeintaan M bittiä eli että $H(\vec{m}) \leq M$.

Arvauksen β_i ja muuttujien x_i riippuvuussuhteet ja täten pelin voittoprosentti ovat kytköksissä viestin suuruuteen, joka sovitaan pelin säännöissä ennen aloittamista, ja pelaajien sopimaan strategiaan. Nimittäin jos kommunikaatiolle ei aseteta ylärajaa, Aliisa voi vaikka lähettää vaikka koko saamansa sekvenssin $\vec{x}$ jolloin Petri voi viestin saatuaan aina arvata symbolin x_Y oikein. Lähetetty viesti $\vec{m}$ riippuu käytetyn strategian mukaisesti yleisesti ottaen annetusta symbolijonosta $\vec{x}$. Pelisuunnitelmaa, jossa ei tarvita laatikoita, voitaisiin kutsua triviaaliksi strategiaksi. Tapauksissa, joissa koko jono $\vec{x}$ ei mahdu viestiin $\vec{m}$ voidaan kuvitella, että voittomahdollisuudelle on strategiasta riippumatta yläraja. Informaation kausaliteetti tekee tämän ajatuksen konkreettiseksi.

Korrelaatiota muuttujien β_i ja x_i välillä viestin saamisen jälkeen voi kvantifioida usealla eri tavalla. Ottaen huomioon peliin kuuluva kommunikaatioaspekti, erityisen luonnollisesta mitasta käy Shannonin keskinäisinformaatio (engl. mutual information) $I_{Sh}(x_i : \beta_i) = \sum_{\beta_i, x_i} P(x_i, \beta_i) \log \left(\frac{P(x_i, \beta_i)}{P(x_i)P(\beta_i)} \right)$. Tai entropioiden avulla ilmaistuna

$$I_{Sh}(x_i : \beta_i) \equiv H(x_i) - H(x_i|\beta_i) = H(x_i) + H(\beta_i) - H(x_i, \beta_i),$$

ks. esim. [114]. Tässä $H(x_i|\beta_i) = -\sum_{\beta_i, x_i} P(x_i, \beta_i) \log \left(\frac{P(x_i, \beta_i)}{P(\beta_i)} \right)$ on nk. ehdollinen entropia ja esitetyt yhtäsuuruudet voi todeta suoralla laskulla mm. käyttäen logaritmin ominaisuutta $\log(A/B) = \log A - \log B$ sekä tavallisen entropian $H(\cdot)$ määritelmää. Keskinäisinformaatio $I_{Sh}(x_i : \beta_i)$ voidaan intuitiivisesti tulkita muuttujan β_i sisältämän informaation määränä muuttujasta x_i. Informaation kausaliteetti -periaate vaatii [115], että kaikille strategioille luoda β_i pätee

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_{Sh}(x_i : \beta_i) \leq M. \tag{13}$$

Painotetaan, että parametriä I voidaan arvioida teoriasta riippumatta; muuttujat x_i, β_i ovat syöte-tuloste tason klassisia symboleja, joiden jakautumista minkä tahansa järkevän teorian oletetaan kykenevän kuvaamaan. IK on laatikkotason kriteeri. Signaalilokaalisuus on minimivaatimus IK:n toteutumiselle, sillä muutoin viestin suuruuden yläraja M ei ole edes mielekäs rajoite ts. sitä voidaan triviaalisti rikkoa laatikoita käyttäen. Tässä mielessä IK voidaan nähdä myös signaalilokaalisuuden yleistyksenä; tavallisen Bell-koejärjestelyn ei-viestintää ehdot vastaavat tapausta jossa $M = 0$. Huom. jos $M = 0$ niin $I = 0$, nimittäin aina $I_{Sh} \geq 0$. Toisinsanoen osapuolten laboratorioissa riippumattomasti luodut symbolit pysyvät riippumattomana, kun $M = 0$.

IK saattaa edellisten nojalla vaikuttaa lähes itsestäänselvältä signaalilokaalisuuden pätiessä. Sillä että kokonaisuus on enemmän kuin osiensa summa, on kuitenkin epätriviaaleja seurauksia pelin kannalta. Erityisesti seuraava, periaatteen intuitiivistä merkitystä korostava, viitteissä [113, 115] esitetty, esimerkki osoittaa että PR-laatikot eivät ole sopusoinnussa IK:n kanssa.

Tässä osiossa PR-laatikko $P(a = b|\clubsuit, \heartsuit) = P(a = b|\clubsuit, \diamondsuit) = P(a = b|\spadesuit, \heartsuit) = P(a \neq b|\spadesuit, \diamondsuit) = 1$ on kätevä esittää uudelleennimeämisien $\clubsuit \to 0, \heartsuit \to 0, \diamondsuit \to 1$, $\spadesuit \to 1$ sekä $\forall a_X, b_Y = -1 \to 0$ jälkeen kompaktisti muodossa

$$P_{PR}(a, b|X, Y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kun } a \oplus b = XY \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä $\oplus$ symboloi yhteenlaskua *mod* 2. Ekvivalentisti $P(a \oplus b = XY|X, Y) = 1$. Tämä esitystapa tekee algebrasta yksinkertaisempaa.

Kuvitellaan sitten, että Aliisalle annetaan kahden bitin $x_i \in \{0, 1\}$ jono $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Jos nyt Aliisa saa lähettää kahden bitin viestin $M = 2$, niin triviaali strategia viestillä $\vec{m} = (x_1, x_2)$ takaa voiton joka kerta, eli ratkaisee pelin. Jos $M = 0$ niin signaalilokaalisuuden nojalla $I = 0$, ja Petri voi aivan yhtä hyvin heittää kolikkoa. Epäitsestäänselvästi tapauksessa jossa $M = 1$ PR-laatikoiden käyttö takaa että fyysikot voittavat aina. Oleellinen huomio on se, että ylläesitetylle PR-laatikolle tyypillisesti syötettä $Y = i - 1, i \in \{1, 2\}$ vastaavalle tulosteelle b ja Aliisan tulosteelle a pätee aina $a \oplus b = X \cdot (i - 1)$. Jos Aliisa symbolit (x_1, x_2) saatuaan laskee summan $X = x_1 \oplus x_2$ ja käyttää tätä laatikkonsa syötteenä, nähdään että $a \oplus b = (x_1 \oplus x_2) \cdot (i - 1)$. Toisinsanoen $a \oplus b = 0$, kun $i = 1$ ja $a \oplus b = x_1 \oplus x_2$, kun $i = 2$. Näin ollen, koska aina $x_i \oplus x_i = 0$ ja $0 \oplus x_i = x_i$, voidaan kirjoittaa $x_1 \oplus a \oplus b = x_i$. Täten, jos Aliisa rakentaa laboratoriossaan viestin $\vec{m} = m$ kaavalla $m = x_1 \oplus a$, on selvää että Petri voi viestin avulla luoda oikean arvauksen kysymykseen i valitsemalla laatikon asetuksen $Y = i - 1$ se. $\beta_i = m \oplus b_{i-1}$.

Tässä esimerkissä on selvää, että Petri onnistuu arvaamaan kumman tahansa Aliisan symboleista oikein ja informaation kausaliteetti rikkoutuu; $I = 2$, koska $H(x_i) = 1$ sillä x_1, x_2 ovat unfiromisti jakautuneita, ja $H(x_i|\beta_i) = 0$ sillä tässä aina $\beta_i = x_i$, vaikka $M = 1$. Petri voi lukea kumman tahansa Aliisan bitin x_1 tai x_2 vaikka Aliisa onkin lähettänyt ainoastaan yhden bitin informaatiota. Voidaan ajatella, että saatuan Aliisalta viestin m periaatteessa informaatio kummastakin bitistä x_1, x_2 on olemassa Petrin laboratoriossa; laatikkoa käyttämällä Petri saa valita kumpi 'realisoituu'. Intuitiivisen perusjärjestyksen mukaisesti informaatio jonosta (x_1, x_2) tulisi olla jossain muodossa viestissä m, tässä tilanteessa PR-laatikko antaa tavallaan Petrille vallan päättää Aliisan lähettämän bitin. Huomionarvoisesti ristiriitaa signaalilokaalisuuden kanssa ei kuitenkaan ole, sillä Petri ei voi lukea molempia! Informaation kausaliteetti rajoittaa bittien määrää, joihin Petrillä on pääsy; viestin lähettäjällä tulisi olla valta viestin sisällöstä, tästä IK saa nimensä.

Huom. että yleisemmin PR-laatikkoa käyttämällä Petri voi yhden bitin kommunikaatiolla päätellä tai 'valita' minkä tahansa kaksiarvoisen funktion $r(A, Y) \in \{0, 1\}$ arvon, vaikka Petri ei tietäisikään ko. funktiota. Nimittäin jos Aliisan syöte on $r(A,Y=0)\oplus r(A,Y=1)$, ja tuloste a niin edellisen nojalla

$$\begin{aligned} r(A,Y) &= r(A,Y=0)\oplus a\oplus b \\ &= r(A,Y=0)\oplus [r(A,Y=0)\oplus r(A,Y=1)]\cdot Y. \end{aligned}$$

IK-periaate esitettiin tässä intuitiivisena ja annetun esimerkin nojalla luonnollisenakin vaatimuksena. Toisaalta Bell-lokaalisuuttakin olisi joku voinut pitää intuitiivisena. Epäyhtälöstä (13) ei ole ollenkaan selvää, minkälaisia rajoitteita IK asettaa laatikoiden $\mathcal{S}$ joukkolle yleisesti. Nimittäin lauseke sisältää logaritmisia termejä ja periaatteen toteutumisen varmistaminen annetulle laatikolle nojaa myös ajatukseen optimaalisesta arvausstrategiasta, joka on alustavasti tuntematon ja kenties epäyksikäsitteinen. Tältä näkökannalta nähdään sopivaksi osoittaa, ennen periaatteen muiden seurauksien syvempää selvitystä, että IK pätee ainakin kvanttimekaanisille korrelaatioille.

Pelin voittamisen kannalta kiinnostavinta on yksittäisten symbolien x_i ja β_i riippuvuussuhteet. Ehkä oikeammin, tai ideaalisesti [113], mielekäs 'informaation kausaliteetti' tulisi muotoilla rajoitteena informaation määrälle, joka Petrillä on koko Aliisan symbolijonosta $\vec{x}$, ottaen huomioon Aliisan viesti $\vec{m}$ ja 'kaikki mikä on Petrin omistuksessa' B, esim. Petrin osuus jaetusta systeemistä yms.

Konkreettisemmin haluttaisiin keskinäisinformaatiolauseke $\hat{I}$, jolle $\hat{I}(\vec{x}:\vec{m},B)\leq M$ ja $\hat{I}(\vec{x}:B)=0$ (signaalilokaalisuus). Ajatus on karkeasti se, että Petrin systeemin B ja viestin $\vec{m}$ käsitetään määrittelevän kokonaisuuden jonka sisältämä, eli siitä saatavissa oleva, informaatio Aliisan sekvenssistä $\vec{x}$ tulisi olla viestin suuruuden rajoittama. Tämänkaltaisen lausekkeen $\hat{I}$ relevantit symbolit esim. se mitä on symbolissa B ovat kuitenkin lähtökohtaisesti teoriariippuvaisia, sillä ne viittaavat asioihin jotka ovat viestin lähetyksen jälkeen muodossa tai toisessa Petrin omistaman laatikon sisällä, vaikka näistä esim. teorian sallimilla lokaaleilla kuvauksilla, mittauksilla yms. lopuksi generoitu vastaustuloste β_Y olisikin esitetyssä mielessä teoriasta riippumaton. Esim. kvanttilaatikon määrittelemiseen tarvitaan tila **ja** mittaus; lauseke

$\hat{I}$ voi sisältää esim. Petrin osuuden ϱ_B kvanttitilasta ϱ_{AB}, joka mahdollisesti korreloituu viestiin $\vec{m}$ jonkin lokaalin operaation seurauksena, tai jotakin eksoottisempia tiloja tms. yleisemmistä ei-viestintää teorioista.

Tässä ei ole tarkoitus syventyä laatikoiden mekaniikkaan tai yleisten teorioiden informaationkäsittelyominaisuuksiin yksityiskohtaisesti. Sen sijaan esitetään, viitteen [113] todistusta mukaillen, sopivan yleistetyn keskinäisinformaatiolausekkeen $\hat{I}$ olemassaolo riittävänä ehtona laatikkotason IK-periaatteen (13) toteutumiselle annetussa teoriassa. Tuloksen nojalla IK pätee erityisesti kvanttimekaniikassa. Huomautetaan, että esim. viitteessä [113, yhtälö 3] ehtoa (13) kutsutaan 'välttämättömäksi' ehdoksi IK:n toteutumiselle. Ero johtuu luultavasti[4] siitä, että viitteessä [113] IK identifioidaan kriteerinä $\hat{I}(\vec{x} : \vec{m}, B) \leq M$. Muissa lähteissä esim. [115, 116] IK esitetään lausekkeen (13) toteutumisena, kuten tässä tutkielmassa.

Ensiksi osoitetaan että mikäli teoria sallii sellaisen keskinäisinformaatiolausekkeen $\hat{I}$ määrittelemisen, että kaikille osista A, B, C jne. rakennetulle systeemille (joita kuvataan valitussa teoriassa miten kuvataan) pätee neljä peruskriteeriä, niin aina $\hat{I}(\vec{x} : \vec{m}, B) \leq M$. Toiseksi, käyttämällä kyseisiä kriteerejä näytetään että $\hat{I}(\vec{x} : \vec{m}, B) \geq I$, eli ehdot toteuttavan lausekkeen $\hat{I}$ olemassaolo riittää IK:n toteutumiseen. Vaaditut ehdot ovat seuraavat [113] ks. myös [117, kpl. 4.1.3].

E1 (Konsistenssi): Jos A ja B ovat klassisia, niin $\hat{I}(A : B) = I_{Sh}(A : B)$

E2 (Datankäsittelyepäyhtälö): Teorian sallimat lokaalit kuvaukset $A \to A'$, $B \to B'$ eivät voi kasvattaa keskinäisinformaatiota. Esim. jos $A \to A'$ on lokaali kuvaus niin: $\hat{I}(A' : B) \leq \hat{I}(A : B)$.

E3 (Ketjusääntö): Voidaan määritellä ehdollinen keskinäisinformaatio $\hat{I}(A : B|C)$ jolle pätee $\hat{I}(A : B|C) = \hat{I}(A : B, C) - \hat{I}(A : C)$.

E4 (Symmetrisyys): $\hat{I}(A : B) = \hat{I}(B : A)$.

[4]Viitteen [113] yhteenvedossa IK:sta puhutaan lopulta täysin teoriariippumattomana.

Ei ole itsestäänselvää, että tämänkaltainen keskinäisinformaatiolauseke $\hat{I}$ voidaan määritellä kaikille kuviteltavissa oleville teorioille, tai että määriteltävissä oleva $\hat{I}$ olisi missään mielessä yksikäsitteinen. Tämän päättelyketjun tulos pätee kuitenkin niille teorioille, joissa näin voi tehdä, ottamatta kantaa yksikäsitteisyyteen. Korkeasta abstraktiontasosta huolimatta oletetaan että ylläolevat kriteerit ovat symbolisesti selviä, esim. se, mitä tarkoitetaan ehdon E1 'klassisuudella' tai ehdon E2 termillä 'lokaali kuvaus'.

Huomataan, että mitkä tahansa systeemit A, B voidaan kuvata lokaalisti klassisiksi systeemeiksi A', B' vaikka mielivaltaisella esim. deterministisellä kuvauksella $f(A) = A' \ \forall A$, $g(B) = B' \ \forall B$. Tämän tulisi olla sallittua sillä perusteella, että fyysikko voisi halutessaan omassa laboratoriossaan vaikka heittää omistamansa systeemin roskakoriin, ja korvata sen jollakin klassisella systeemillä. Toisaalta datankäsittelyepäyhtälö implikoi että $\hat{I}(A, B) \geq \hat{I}(A', B')$ ja konsistenssin nojalla $\hat{I}(A', B') = I_{Sh}(A', B') \geq 0$. Näin ollen $\hat{I}(A : B)$ on aina ei-negatiivinen.

Aloittaen ketjusäännöstä nähdään että $\hat{I}(\vec{x} : \vec{m}, B) = \hat{I}(\vec{x} : B) + \hat{I}(\vec{x} : \vec{m}|B)$ koska signaalilokaalisuus-oletuksen mukaan $\vec{x}$ ja B ovat riippumattomia pätee edelleen $\hat{I}(\vec{x} : B) = 0$. Toisaalta käyttämällä symmetrisyyttä, ketjusääntöä ja $\hat{I}$'n positiivisuutta saadaan $\hat{I}(\vec{x} : \vec{m}|B) = \hat{I}(\vec{m} : \vec{x}, B) - \hat{I}(\vec{m} : B) \leq \hat{I}(\vec{m} : \vec{x}, B)$. Nyt on mahdollista argumentoida [113], että kuvauksen $\vec{m} \to \vec{x}, B$ on oltava sallittu annetussa teoriassa jokaiselle $\vec{m}$. Nimittäin informaatio klassisesta viestistä $\vec{m}$ sisältyy täysin jakaumaan $P(\vec{m})$ ja oletettavasti missä tahansa operationaalisesti mielekkäässä teoriassa voidaan kuvata yhdistettyä systeemiä jollakin tilalla $\varrho\,(\vec{m}, [\vec{x}, B])$ siten, että $\varrho\,(\vec{m}, [\vec{x}, B]) \equiv \sum_{\vec{m}} P(\vec{m})\,(\vec{m}, [\vec{x}, B]_{\vec{m}})$. Tässä alaindeksi viittaa siihen, että 'redusoitu' tila $[\vec{x}, B]_{\vec{m}}$ on määritelty kullekkin $\vec{m}$, ottamatta sen enempää kantaa siihen, onko tällä mitään todellisuudessa relevanttia relaatiota $\vec{m}$:ään. Jokatapauksessa tällä perustelulla jokaiselle $\vec{m}$ on olemassa yhdistetyn systeemin preparaatio $[\vec{x}, B]_{\vec{m}}$, joten myös vastaava muunnos $\vec{m} \to \vec{x}, B$. Täten E3:n ja E1:n nojalla $\hat{I}(\vec{m}:\vec{x},B) \leq \hat{I}(\vec{m}:\vec{m}) \equiv H(\vec{m}) \leq M$ eli $\hat{I}(\vec{x}:\vec{m},B) \leq M \quad \square$. Huomautetaan, että vaikka viimeisen ainakin pintapuolisesti harmittomiin operationaalisesti motivoituihin vaatimuksiin nojaavan argumentin yleisyyttä tai tarkkoja seurauksia teorioille kyseenalaistettaisiinkin, ne pätevät ainakin kvanttimekaniikassa. Vaikka todistuksessa halutaankin pysyä mahdollisimman suuressa yleisyydessä, on IK:n suhde kvanttimekaniikkaan tämän päättelyketjun oleellisin tulos tämän tutkielman kannalta; ainakin tässä mielessä oletus on harmiton.

Seuraavaksi näytetään että $I \leq \hat{I}(\vec{x}:\vec{m},B)$. Käyttämällä ketjusääntöä (ja symmetrisyyttä) peräkkäin todetaan että

$$\begin{aligned}\hat{I}(x_1,\ldots,x_N:\vec{m},B) &= \hat{I}(x_1:\vec{m},B) + \hat{I}(x_2,\ldots x_N:\vec{m},B|x_1) \\ &= \hat{I}(x_1:\vec{m},B) + \hat{I}(x_2,\ldots x_N:\vec{m},B,x_1) - \hat{I}(x_2,\ldots x_N:x_1).\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan symbolit x_i olivat riippumattomia, jotenka $\hat{I}(x_2,\ldots x_N:x_1)=0$. Nyt muunnos $\vec{m},B,x_1 \to \vec{m},B$ antaa ylläolevasta datankäsittelyepäyhtälön nojalla lopulta lausekkeen $\hat{I}(\vec{x}:\vec{m},B) \geq \hat{I}(x_1:\vec{m},B) + \hat{I}(x_2,\ldots x_N:\vec{m},B)$.

Ilmeisesti samaa päättelyä voi käyttää iteratiivisesti ylläolevan epäyhtälön jälkimmäiseen palaan siten että lopuksi saadaan $\hat{I}(\vec{x}:\vec{m},B) \geq \sum_{i=1}^{N}\hat{I}(x_i;\vec{m},B)$. Edelleen koska Petri generoi arvauksen lokaalisti muuttujista $\vec{m},B$ pätee $\sum_{i=1}^{N}\hat{I}(x_i;\vec{m},B) \geq \sum_{i=1}^{N}\hat{I}(x_i;\beta_i) \equiv I$ vahvistaen sen mitä väitettiin.

Lopuksi todetaan, että informaation kausaliteetti pätee kvanttimekaniikassa ja täten myös Bell-lokaaleissa teorioissa. Edellisten nojalla riittää näyttää, että ehdot E1-E4 toteuttava $\hat{I}$ voidaan löytää. On tunnettua esim. [113, 114, 118], että Von Neumann -entropian $H_q(\varrho) = -tr[\varrho\log(\varrho)]$ avulla määritellyt lausekkeet

$$\begin{aligned}\hat{I}_q(A:B) &= H_q(\varrho_A) + H_q(\varrho_B) - H_q(\varrho_{AB}), \\ \hat{I}_q(A:B|C) &= H_q(\varrho_{AC}) + H_q(\varrho_{BC}) - H_q(\varrho_{ABC}) - H_q(\varrho_C)\end{aligned}$$

kelpaavat. Tässä ϱ_{ABC} on yhdistetyn systeemin A,B,C kvanttitila, ja $\varrho_A = tr_{BC}[\varrho_{ABC}]$ jne. Ehdot E4 ja E1 nähdään helposti, sillä lausekkeet ovat ilmeisesti symmetrisiä

A:n ja B:n suhteen, lisäksi jos $\varrho = \sum_i P(i) |i\rangle \langle i|$ niin $H_q(\varrho) = H(i)$ jne. joten tämänmuotoisille tiloille ja niiden tuloille pätee konsistenssi. Ehto E3 nähdään suoraan määritelmistä

$$\hat{I}(A : B, C) = H_q(\varrho_A) + H_q(\varrho_{BC}) - H_q(\varrho_{ABC}),$$
$$\hat{I}(A : C) = H_q(\varrho_A) + H_q(\varrho_C) - H_q(\varrho_{AC}).$$

Datankäsittelyepäyhtälön toteutumisen osoittaminen on työläämpää, eikä todistuksen toistamista koeta tässä tarkoituksenmukaiseksi. Lukijaa ohjataan tältä osin esim. viitteisiin [114, kpl.11.9] ja [118, Thrm. 11.15].

Informaation kausaliteetti pätee kvanttimekaniikassa. Aikaisemman nojalla signaalilokaalisuus on välttämätön, mutta ei riittävä ehto IK:n toteutumiselle. Seuraavaksi terästetään, edelleen suurilta osin seuraten viitettä [113], informaation kausaliteettivaatimuksen seurauksia.

Palautetaan mieleen aikaisemmin annettu esimerkkiprotokolla, jossa kahden bitin jonon (x_1, x_2) symbolit voitiin PR-laatikoilla arvata aina oikein kaavalla $\beta_i = x_1 \oplus a \oplus b_{i-1}$, yhden bitin viestin ollessa $a \oplus x_1$ ja tulosteen a ollessa syötteelle $(x_1 \oplus x_2)$. Tälle pelisuunnitelmalle yleisempienkin laatikoiden todennäköisyydet P_1 ja P_2 sille, että Petri arvaa Aliisan bitin 1 ja 2 oikein, voidaan käyttäytymisen avulla ilmaista kompaktisti muodossa

$$P_1 = \frac{1}{2}\left[P(a \oplus b = 0|0,0) + P(a \oplus b = 0|1,0)\right]$$
$$P_2 = \frac{1}{2}\left[P(a \oplus b = 0|0,1) + P(a \oplus b = 1|1,1)\right],$$

missä on otettu huomioon se, että x_1, x_2 ovat satunnaisia, eli Aliisan syöte $x_1 \oplus x_2$ voi olla 0 tai 1. PR-laatikolle $P_1 = P_2 = 1$. Koska CHSH-lauseke on oleellisesti

$$C \equiv C_{1,0} + C_{0,0} + C_{0,1} - C_{1,1} \leq C_{\mathfrak{B}},$$

missä $C_{XY} = P(a = b|X, Y) - P(a \neq b|X, Y)$. Nähdään, että ekvivalentisti

$$C_{X,Y} = P(a \oplus b = XY|X, Y) - P(a \oplus b \neq XY|X, Y)$$

ja koska $P(a \oplus b = XY|X,Y) \equiv 1 - P(a \oplus b \neq XY|X,Y)$ niin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} C &= 2[P(a \oplus b = 0|1,0) + P(a \oplus b = 0|0,0) + P(a \oplus b = 0|0,1) \\ &\quad + P(a \oplus b = 1|1,1)] - 4 \\ &\equiv 4(P_1 + P_2) - 4 \leq C_{\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Tämä antaa ylärajan $(P_1+P_2) \leq \dfrac{C_{\mathfrak{B}}+4}{4} = \dfrac{3}{2}$ eri bittien arvaustodennäköisyyksille käyttäen klassisia korrelaatioita. Korvaamalla $C_{\mathfrak{B}} = 2$ luvulla $C_{\mathcal{K}} = 2\sqrt{2}$ saadaan yläraja $(P_1 + P_2) \leq \dfrac{2\sqrt{2}+4}{4}$ kvanttimekaanisille korrelaatioille. Tässä esitetty relaatio voidaan nähdä eräänä CHSH-epäyhtälön esitystapana, ja kriteerit joita käyttäytymisen tulee noudattaa on koodattu arvaustodennäköisyyksiin P_1 ja P_2. Nähdään myös, että vaikka IK toteutuu kvantti -ja klassisissa teorioissa, niin kvanttiteoria sallii periaatteessa suurempia onnistumistodennäköisyyksiä P_1 ja P_2.

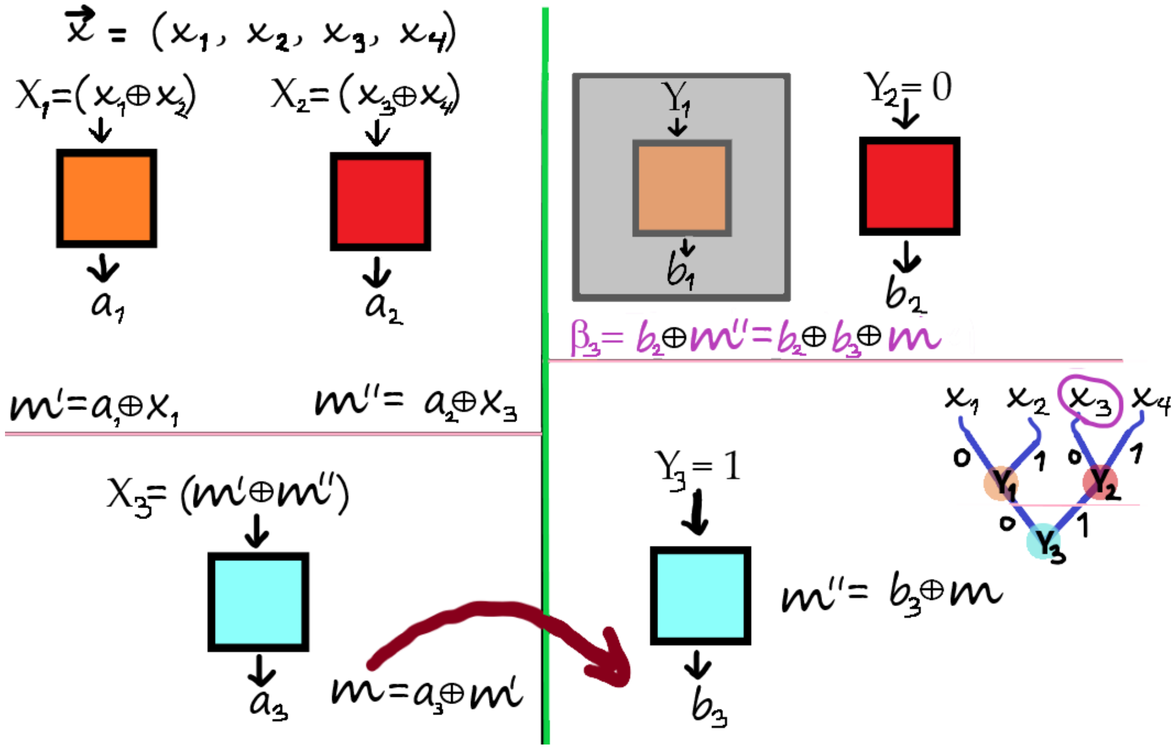
Jos fyysikoille annetaan 'meluisia' PR-laatikoita P_η ts. laatikoita joille pätee $P(a,b|X,Y) = \eta P_{PR} + (1-\eta)\mathfrak{I}$, niin η voidaan yhdistää suoraan CHSH-rikkoutumisen määrään. Nimittäin tasajakaumalle $C[\mathfrak{I}] = 0$ ja PR-laatikolle $C[P_{PR}] = 4$ joten $C[P_\eta] = 4 \cdot \eta$. Meluisia PR-laatikoita on kutsuttu myös *isotrooppisiksi* jakaumiksi [90]. On mahdollista näyttää [90, liite A], että mielivaltainen käyttäytyminen P_o voidaan sopivilla laatikon parametrien käsittelyillä muuttaa isotrooppiseksi (ilman yleisyyden menetystä CHSH-tahokkaan symmetriat huomioon ottaen) $P_o \to P_\eta$ siten, että uuden laatikon CHSH-epäyhtälön arvo $C[P_\eta]$ vastaa alkuperäisen laatikon CHSH-epäyhtälön arvoa $C[P_o]$. Täten, jos ainoa tavoite on osoittaa Tsirelsonin epäyhtälöiden toteutumisen välttämättömyys, niin riittää näyttää että IK implikoi $\eta \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ jollekkin meluisia PR-laatikoita käyttävälle protokollalle, koska $4 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Huom. että isotrooppisille laatikoille, kuten PR-laatikoille, pätee $P_1 = P_2$. Isotrooppiset laatikot ovat perustyökaluja useissa konkreettisissa tarkasteluissa.

Meluisalle PR-laatikolle todennäköisyydellä η pätee $a \oplus b = XY$ ja todennäköisyydellä $(1-\eta)$ tulosteet ovat täysin satunnaisia, eli joko $a \oplus b = XY$ tai $a \oplus b \neq XY$.

Täten voidaan kompaktisti kirjoittaa $P_\eta(a \oplus b = XY|X,Y) = \eta + \frac{1-\eta}{2} = \frac{1}{2}(1+\eta)$.

Muuttujalle η voidaan koettaa etsiä rajoja tutusta tilanteesta, jossa Petri yrittää arvata Aliisan bittejä x_1, x_2 saatuaan yhden bitin viestin. Koska ja x_i:t ovat uniformisti jakautuneita bittejä, pätee $H(x_i) = 1$. Täten $I = 2 - \sum_{i=1}^{2} H(x_i|\beta_i)$. Toisaalta Fanon epäyhtälön $H(A|B) \leq h(P_e) + P_e \log(|A|-1)$ nojalla, ks. esim [118, s. 536], oleellisesti $H(x_i|\beta_i) \leq h(P_i)$. Tässä $P_e \equiv P(A \neq B)$ on todennäköisyys virheelle, $h(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x)$ on binäärinen entropia ja $|A| = |B|$ on symbolien A lukumäärä. Huom. että tässä käytettiin tietoa $\log 1 = 0$ ja $h(x) = h(1-x)$. Täten saadaan seuraava kvantifioitavissa oleva minimiehto informaation kausaliteetille $1 \geq I \geq 2 - \sum_{i=1}^{2} h(P_i)$. Viimeiseen lausekkeeseen voidaan tökätä isotrooppiset arvaustodennäköisyydet ja koettaa ratkaista $1 = 2 - 2h(P_\eta)$; todetaan ilman todistusta, mm. numeerisiin tarkasteluihin nojaten, että tällä menetelmällä ei saavuteta vielä Tsirelsonin rajaa. Yrityksissä lähestyä kvanttimekaanisten korrelaatioiden joukkoa täytyy siis keksiä ovelampia tapoja käyttää laatikoita tai harkita monimutkaisempia koejärjestelyjä tai keksiä muu käytännöllinen tapa nostaa I:n alarajaa.

Kuvitellaan sitten tilanne, jossa Aliisalle annetaan $N = 4$ - bittiä pitkä jono $(x_1, x_2, x_3, x_4), x_i \in \{0,1\}$. Jos Aliisa ja Petri saavat käyttää täydellisiä PR-laatikoita, niin Petri voi jälleen arvata minkä tahansa Aliisan biteistä oikein vaikka Aliisan viestille asetettaisiin ylärajaksi $M = 1$ bittiä. Protokolla, jolla tämä on mahdollista, on aikaisemmin esitetyn informaation kausaliteettia maksimaalisesti rikkovan esimerkin yleistys jossa käytetään lukuisia PR-laatikoita ketjussa. Idea on se, että Aliisa jakaa ensin jononsa kahden bitin osiin (x_1, x_2) ja (x_3, x_4) ja käyttää näistä saatavia lukuja $X_1 = x_1 \oplus x_2$ sekä $X_2 = x_3 \oplus x_4$ syötteinä kahteen eri laatikkoon. Laatikoiden tulosteista a_1, a_2 voidaan rakentaa yhden bitin viestit $m' = x_1 \oplus a_1$ sekä $m'' = x_3 \oplus a_2$. Viestistä m' Petri voisi laatikkoaan 1 käyttämällä selvittää - aikaisemman esimerkin nojalla- joko bitin x_1 tai x_2, vast. viestistä m'' laatikkoa 2 käyttämällä bitin x_3 tai x_4. Molempia ei voi lähettää, sillä $M = 1$, sen sijaan Aliisa

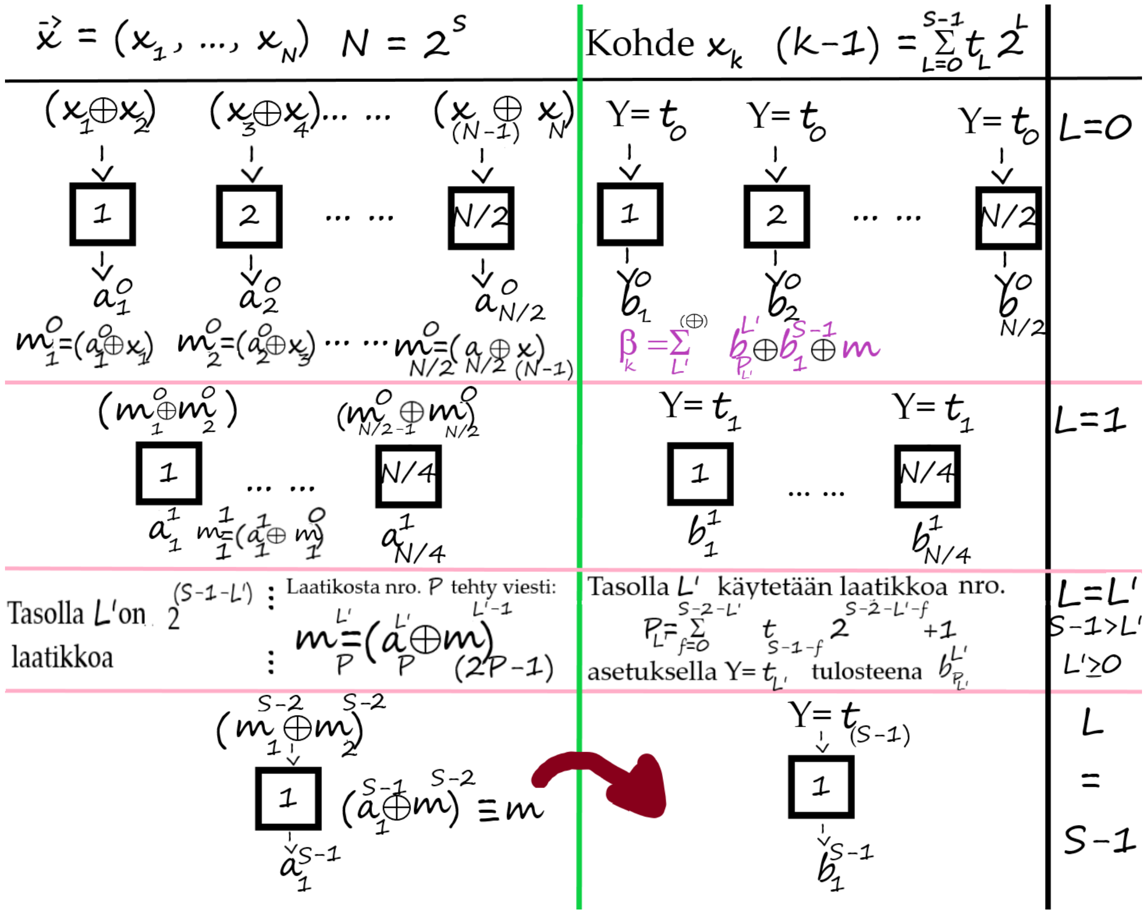


Kuva 3. Käyttämällä kolmea PR-laatikkoa fyysikot voivat ratkaista IK-pelin tapauksessa jossa $M = 1$ ja $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Aliisa jakaa vasemmassa laboratoriossa jonon $\vec{x}$ kahteen osaan, ja syöttää luvut $X_1 = (x_1 \oplus x_2)$, $X_2 = (x_3 \oplus x_4)$ kahteen eri laatikkoon, jotka tuottavat tulosteet a_1 ja a_2. Aliisa syöttää $X_3 = m' \oplus m''$ alemmalla tasolla olevaan kolmanteen laatikkoon ja lähettää viestin $m = a_3 \oplus m'$. Petri voi alimman tason valinnallaan selvittää joko viestin m' tai m''. Ylemmän tason laatikoilla voi valitun viestin avulla purkaa yhden kahdesta Aliisan bittijonon symbolista. Kuvassa Petri tähtää arvauksensa symboliin x_3, valitsemalla turkoosin laatikon asetuksen $Y_3 = 1$ ts. realisoi viestin m''. Käyttäen punaisen laatikon asetusta $Y_2 = 0$ Petri saa haluamansa vastauksen. Tässä tapauksessa Petri ei tarvitse oranssia laatikkoa mihinkään; voidaan esim. ajatella että Petri on syöttänyt ylemmällä tasolla molempiin laatikoihin 0, mutta käyttää vain punaisen tulosta. Kuvan oikeassa reunassa puudiagrammi havainnollistaa kuinka Petri kohdentaa laatikoidensa ja niiden asetusten valintaa alemman tason asetusten nojalla.

laskee tulon $m' \oplus m''$ ja käyttää tätä syötteenä kolmanteen laatikkoon jonka tuloste on a_3. Nyt voidaan rakentaa viesti $m = a_3 \oplus m'$, ja aikaisemman nojalla Petri voi, käyttäen omaa kolmatta laatikkoaan, 'valita' Aliisan viestin m' tai m''. Valitusta viestistä m' (tai m'') on mahdollista purkaa haluttu symboli x_i laatikon 1 (tai 2) asetuksen valinnalla. Protokollaa on kätevä havainnollistaa asettamalla laatikot alassuin olevan pyramidin muotoiseen järjestykseen eri tasoille, kuten kuvassa 3.

Tämä metodi yleistyy ilmeisellä tavalla tapaukseen myös tilanteisiin, joissa Aliisalle annetaan $N = 2^S$, $S \in \mathbb{N}$ bittiä pitkä jono $\vec{x}$. Tässä rakennettavalla pyramidilla on S tasoa, ja laatikoita on käytössä yhteensä $N - 1$. Ylimmällä tasolla Aliisa koodaa parit $(x_1, x_2) \ldots (x_{N-1}, x_N)$ $N/2$:teen laatikkoon. Alemmalle tasolle koodataan edellisen tason tulosteista ja 'vasemman' puolisista symboleista tehdyt bitit $N/4$:ään laatikkoon jne. Alimmalla tasolla on yksi laatikko, jonka tulosteesta Aliisa rakentaa yhden bitin viestin. Petri alkaa purkaa haluamansa symbolin siten, että tason L laatikon asetus $Y = 0$ 'valitsee' ylemmällä tasolla $L - 1$ vasemmanpuolisen, ja $Y = 1$ oikeanpuolisen Aliisan viestin, ja laatikon jota Petri käyttää edellä valitun viestin purkamiseen. On huomionarvoista, että mikäli Petrille annetaan tehtäväksi arvata symboli x_k, niin luvun $(k-1)$ binääriesityksen $k - 1 = \sum_{L=0}^{S-1} t_L 2^L$, $t_L \in \{0, 1\}$ kertoimet $(t_{S-1}, \ldots t_0)$ sisältävät tiedon 'polusta' ts. laatikoiden asetusten valinnoista ja järjestyksestä jolla Petri voi purkaa halutun symbolin; Petri käyttää jokaisella tasolla yhtä laatikkoa se. kunkin arvauksen generoimiseen käytetään aktiivisesti S:ää laatikkoa. Tasolla L' protokollassa käytettävä laatikko voidaan määrätä alempien tasojen valinnoista. Tätä on havainnollistettu kuvassa 4.

Täydellisyyden vuoksi näytetään kuvan 4 protokollan tilanteessa Petrin arvaukselle rekursiivinen kaava. Tämä voidaan nähdä myös arvauksen β_k ilmaisemisena syötteiden $(x_1 \oplus x_2)$... ja t_0... avulla. S-tasoisen pyramidin tapauksessa määritellään funktio $R_S[\vec{x}, \vec{t}] = x_k$, missä $\vec{t} = (t_0, \ldots, t_{S-1})$ kun $k - 1 = \sum_{L=0}^{S-1} t_L 2^L$. Tapauksessa $S = 1$ tiedetään, että $R_1[(x_1, x_2), t_0] = x_1 \oplus (x_1 \oplus x_2) \cdot t_0 = x_{t_0+1}$. Yleisemmässä ta-



Kuva 4. Aliisalle annetaan vasemmassa laboratoriossa $N = 2^S$ bittiä pitkä jono. Aliisa koodaa lähetettävän viestin samalla reseptillä kuin aikaisemmassa tapauksessa; pyramidissa on nyt S tasoa $L \in \{0, S-1\}$. Taso $L = 0$ on ylimpänä ja siinä on $N/2$ laatikkoa joiden indeksointi alkaa vasemmalta, samoin Petrin laboratoriossa laatikoiden pareille. Aliisan tasolla L' laatikon nro. P tulostetta merkataan symbolilla $a_P^{L'}$ (vast. Petrillä $b_P^{L'}$). Jokaisella tasolla Aliisa rakentaa laatikon P tulosteesta ja 'vasemmanpuolisesta' syötteestä viestin $m_P^{L'}$. Viestit kootaan pareihin alkaen vasemmalta, ja niiden summia käytetään alemman tason laatikoiden syötteinä. Viimeisellä tasolla on yksi laatikko ja sen avulla tehty yhden bitin viesti m lähetetään Petrille. Viestin purkaminen alkaa tasolta $S-1$, asetus $Y = 0$ 'valitsee' Aliisan tason $S-2$ vasemmanpuolisen ja asetus $Y = 1$ oikeanpuolisen viestin. Petri laskee tulosteensa ja Aliisan viestin summan, ja käyttää tason $S-2$ vasenta tai oikeaa laatikkoa riippuen edellisen tason asetuksesta. Jos tehtävä on arvata Aliisan jonon k:s symboli x_k, niin luvun $(k-1) = \sum_{L=0}^{S-1} t_L 2^L$ binääriesityksen kertoimet $t_L \in \{0,1\}$ kertovat suoraan kumpaa asetusta 0 tai 1 tulisi käyttää tasolla L. Petri tarvitsee vain yhtä laatikkoa jokaisella tasolla; tasolla L' valittava laatikko $P_{L'}$ voidaan määrätä alempien tasojen valinnoista kaavalla $P_{L'} = \sum_{f=0}^{S-2-L'} t_{S-1-f} \cdot 2^{S-2-L'-f} + 1$. Arvaus β_k lasketaan lopuksi syötteitä t_L ja oikeita laatikoita $P_{L'}$ vastaavista tulosteista kaavalla $\beta_k = \sum_{L'}^{\oplus} b_{P_{L'}} \oplus b_1^{S-1} \oplus m$, missä $\sum^{\oplus}$ indikoi summausta (mod 2).

pauksessa voidaan jakaa jono $\vec{x}$ kahteen se. $\vec{x} = \vec{x'}\vec{x''} = (x'_1, \ldots x'_{N/2})(x''_1, \ldots x''_{N/2}) \equiv (x_1, \ldots x_{N/2})(x_{N/2+1}, \ldots x_N)$ ja kirjoittaa

$$R_S[\vec{x}, \vec{t}] = R_{S-1}[\vec{x'}, \vec{t}_{-1}] \oplus \Big(R_{S-1}[\vec{x'}, \vec{t}_{-1}] \oplus R_{S-1}[\vec{x''}, \vec{t}_{-1}]\Big) \cdot t_{S-1}.$$

Tässä $\vec{t}_{-1} = (t_0, \ldots t_{S-2})$. Yhtäsuuruuden voi todeta suoralla laskulla ottaen huomioon $R_S[\vec{x}, \vec{t}] = x_k$ jne. Tässä nähdään, että Petrin alimman tason valinta t_{S-1} päättää kumpaan $N/2$:n symbolin jonoon x' tai x'' tähdätään jne. Tätä on hahmoteltu myös kuvan 3 puudiagrammissa.

Aika on kypsä päätuloksen esittämiselle. Tässä mukaillaan viitettä [113, Liite]. Olkoon $P(k)$ todennäköisyys sille, että Petri arvaa k:nnen bitin oikein Aliisan jonosta $(x_1, \ldots x_N)$ kun $N = 2^S$ ja $M = 1$. Jos fyysikot käyttävät täydellisiä PR-laatikoita, niin $P(k) = 1\ \forall k$ kuvan 4 protokollalla. Nyt pyramidin PR-laatikot voitaisiin korvata isotrooppisilla laatikoilla, mutta yleisempi tulos, jossa jokaiselle laatikolle pätee $\frac{1}{2}(1+\eta_1) = P_1 \neq P_2 = \frac{1}{2}(1+\eta_2)$ saadaan lähes samalla vaivalla. P_1 voidaan nähdä todennäköisyytenä sille, että laatikkopari toimii kuten PR-laatikko eli halutusti, kun pyramidissa noustaan vasemmalle (vast. P_2 oikealle). Luvun $k-1$ binääriesityksen kertoimet $\vec{t}$ sisälsivät reseptin symbolin x_k arvauspolulle: luku $T = \sum_i t_i : t_i = 1$ kertoo suoraan montako kertaa tähdätään oikealle protokollan aikana.

Koska Petri luo arvauksen laskemalla viestin m ja S:n eri laatikon tulosteen summan (mod 2) nähdään että mikäli parillinen määrä laatikoita toimii virheellisesti päädytään silti oikeaan vastaukseen. Todennäköisyys $Q^Z_{pari}(P)$ sille, että virheitä tehdään parillinen määrä kun laatikoita käytetään Z kappaletta ja jokainen toimii todennäköisyydellä P on

$$Q^Z_{pari}(P) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{Z}{2} \rfloor} \binom{Z}{2j} P^{Z-2j}(1-P)^{2j} \equiv \frac{1}{2}\left[1 + (2P-1)^Z)\right].$$

Tässä $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ja $\lfloor x \rfloor = \max\{a \in \mathbb{Z} | a \leq x\}$ on nk. lattiafunktio (engl. floor function); virhepareja ei voi olla enempää kuin $\lfloor Z/2 \rfloor$. Jälkimmäisen ekvivalenssin voi nähdä binomiteoreemasta $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(n-k)} y^k$, jonka nojalla voidaan identifioida $2Q^Z_{pari} \equiv [P + (1-P)]^Z + [P-(1-P)]^Z$, sillä parittomat potenssit kumoavat toisensa summassa. Samaan tapaan saadaan todennäköisyys sille, että virheitä tapahtuu pariton määrä:

$$Q^Z_{eipari}(P) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{Z-1}{2} \rfloor} \binom{Z}{2j+1} P^{Z-2j-1}(1-P)^{2j+1} = \frac{1}{2}[1-(2P-1)^Z].$$

Todennäköisyys $P(k)$ sille, että Petri arvaa symbolin x_k oikein voidaan nyt, huomioiden että $\eta_i = [2P_i - 1]$, esittää muodossa

$$\begin{aligned} P(k) &= Q^{(S-T)}_{pari}(P_1) \cdot Q^{(T)}_{pari}(P_2) + Q^{(S-T)}_{eipari}(P_1) \cdot Q^{(T)}_{eipari}(P_2) \\ &= \frac{1}{4}[1+\eta_1^{(S-T)}] \cdot [1+\eta_2^T] + \frac{1}{4}[1-\eta_1^{(S-T)}] \cdot [1-\eta_2^T] \\ &= \frac{1}{2}[1+\eta_1^{(S-T)}\eta_2^T]. \end{aligned}$$

Samoin kuin aiemmin, saadaan Fanon epäyhtälöä käyttämällä muotoiltua informaation kausaliteetille vaatimus

$$1 \geq I \geq \sum_{k=0}^{N} [1-h(P(k))] \equiv \sum_{T=0}^{S} \binom{S}{T} \left[1 - h\left(\frac{1+\eta_1^{(S-T)}\eta_2^T}{2}\right)\right].$$

Jos $h(x)$ kehitetään sarjaksi pisteen $x = \frac{1}{2}$ ympäristössä nähdään, että voidaan arvioida $1 - h(x) \geq \dfrac{(2x-1)^2}{2\ln(2)}$, eli täytyy olla

$$1 \geq I \geq \frac{1}{2\ln 2} \sum_{T=0}^{S} \binom{S}{T} (\eta_1^2)^{(S-T)} (\eta_2^2)^T = \frac{1}{2\ln 2}(\eta_1^2 + \eta_2^2)^S.$$

Ilmeisesti jos $\eta_1^2 + \eta_2^2 > 1$, niin voidaan löytää S jolle epäyhtälö $I \leq 1$ rikkoutuu. Minimiehto informaation kausaliteetille on $\eta_1^2 + \eta_2^2 \leq 1$. Erityisesti isotrooppisille laatikoille $P_1 = P_2 = P_\eta$ joten on oltava $2\eta^2 \leq 1$ eli $\eta \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$: Tsirelsonin CHSH-epäyhtälöiden toteutuminen on välttämätön ehto IK:lle.

Käyttäytymisten joukkoa rajaava epäyhtälö $\eta_1^2 + \eta_2^2 \leq 1$ voidaan identifioida Uffinkin vuonna 2002 esittämäksi [119] epäyhtälöksi $(C_{00}+C_{10})^2 + (C_{01}-C_{11})^2 \leq 4$ kun sijoitetaan $P_1 = \dfrac{1}{4}[2 + C_{00} + C_{10}]$ ja $P_2 = \dfrac{1}{4}[2 + C_{01} - C_{11}]$. On tunnettua [86] että Uffinkin epäyhtälö on heikompi kuin. esim TLM-kriteerit.

Viittessä [120] IK:n tässä implikoimaa Uffinkin joukkoa on verrattu mm. NPA-hierarkian ensimmäiseen approksimaatioon K_1'. Vertailun tuloksena nähdään [120] että on joitakin joukon $\mathcal{S}$ viipaleita, missä Uffinkin rajat myötäilevät kvanttimekaanisten korrelaatioiden joukkoa, sillä joissakin $\mathcal{S}$:n viipaleissa NPA tai TLM ovat riittäviä kriteereitä. IK implikoi ainakin osia kvanttikorrelaatioiden reunasta. Toisaalta löydetään myös alueita missä IK:n ja NPA:n väliin jää tilaa. On huomionarvoista, että Uffinkin epäyhtälö johdettiin tässä käyttäen spesifiä pyramidiprotokollaa, jonka optimaalisuudesta ei ole mitään takeita. Viitteessä [121, Liite B] osoitetaankin, että Uffinkin joukko sisältää laatikoita joilla voidaan rikkoa informaation kausaliteettiä hienovaraisemmalla protokollalla. Tiukennettukaan tulos [121, Liite B] ei kuitenkaan saavuta NPA:n rajaa.

Kysymys siitä, implikoiko IK oleellisesti kvanttimekaaniset korrelaatiot edes CHSH-koejärjestelyssä on tutkielman kirjoituksen aikaan avoin. Ts. ne ehdot, jotka olisivat sekä riittäviä että välttämättömiä IK:n toteutumiselle eivät ole, ainakaan vielä, tunnettuja edes yksinkertaisimmassa tilanteessa.

Viitteessä [116] informaation kausaliteettiä verrataan makroskooppisen Bell-lokaalisuuteen -joka implikoi NPA:n joukon $\mathcal{K}_1'$, tässä esitettyä tapausta yleisemmässä järjestelyssä, jossa Aliisalle annetaan jono *dittejä* eli $d-$arvoisia symboleja. Viesti koostuu yhdestä ditistä ja fyysikot käyttävät PR-laatikon yleistystä jolle

$$P(a,b|X,Y) = \begin{cases} \dfrac{1}{d} & \text{kun } (b-a) = XY \bmod d, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä $|a|, |b|, |X| = d$ ja $|Y| = 2$ ja laatikon tiedetään olevan vastaavan signaalilokaalin tahokkaan ääripiste [116]. Samankaltaisella meluisia laatikoita käyttävällä pyramidiprotokollalla voidaan näillä parametreillä osoittaa, että kun d on tarpeeksi iso, niin IK rajoittaa ainakin isotrooppisia korrelaatioita voimakkaammin kuin makroskooppinen Bell-lokaalisuus [116].

Kompleksisuus kasvaa hurjasti jos tarkastellaan useamman osapuolen koejärjestelyjä. Informaation kausaliteetillä on tältä näkökannalta vakavanakin pidettävä rajoite; tilanne on hyvin eksplisiittisesti muotoiltu kahdelle osapuolelle. Viitteen [122] tuloksen nojalla minkä tahansa operationaalisesti mielekkään periaatteen, joka pyrkii rajaamaan kvanttimekaanisten korrelaatioiden joukon, on oltava luonteeltaan usealle osapuolelle suunniteltu. Idea on karkeasti se, että usean osapuolen tilanteissa fyysikot esim. A, B, C voidaan jakaa kahteen ryhmään $A|BC$, $AB|C$ tai $AC|B$ siten, että 'samalla puolella' olevat fyysikot saavat tehdä yhteistyötä ja rakentaa 'yhden' laatikon jolloin alkuperäisestä laatikosta $P(a, b, c|X, Y, Z)$ muodostetaan efektiivisesti kahden osapuolen laatikko $P(a', b'|X', Y')$ ks. myös [123]. On esimerkiksi sallittua, että samassa laboratoriossa olevat laatikot kytketään toisiinsa niin että toisen tulostetta käytetään toisen syötteenä, eli sallitaan kommunikaatio yhteen suuntaan partition sisällä. Väite viimeistellään vastaesimerkillä antamalla esimerkki signaalilokaalista käyttäytymisestä $P(a, b, c|X, Y, Z)$ joka ei kuulu kvanttimekaanisten korrelaatioiden joukkoon, mutta josta mille tahansa kytkentöjen tai ryhmien jakojen avulla johdetulle $P(a', b'|X', Y')$ on Bell-lokaali malli, vaikka laatikoita $P(a, b, c|X, Y, Z)$ olisi lukuisia ja niitä kytkettäisiin peräkkäin [124]. Tämä tarkoittaa, että useamman osapuolen tapauksissa on väistämättä korrelaatioita joita rajaavien periaatteiden täytyy olla lähtökohtaisesti rakennettu usealle osapuolelle, sillä Bell-lokaalit korrelaatiot noudattavat IK:ta eli IK ei hylkää edellistä. Huom. että esim. usean osapuolen signaalilokaalisuudenkin voidaan nähdä olevan kahdelle osapuolelle muotoiltu periaate, sillä ko. ehdot ovat 'samanmuotoisia' vaikka fyysikoita ryhmiteltäisiinkin osajoukkoihin kuten osiossa **1.2** muotoiltiin.

Viitteessä [123] on selvitetty IK:n seurauksia kolmen osapuolen tapauksessa, jossa kaikilla osapuolilla syötteitä sekä tulosteita on kaksi ja osapuolet on ryhmitelty kahteen joukkoon; periaate rajaa joitakin laatikoita, mutta todistetusti ei kaikkia. Joitakin kolmen osapuolen tapauksen seurauksia on selvitetty myös viitteessä [125].

Informaation kausaalisuutta voidaan pitää intuitiivisena, ja sen seurauksia vaikuttavina. Edellä mainittujen tulosten nojalla on kuitenkin selvää, että mikäli periaate halutaan nostaa perusluontoiseen statukseen, tarvittaisiin jokin luonnollinen yleistys useamman osapuolen tapaukseen. Viitteessä [126] on käytetty periaatteen jonkinnäköistä usean osapuolen versiota mm. yksiavioisuusrelaatioiden selvittämiseen. Em. version voidaan kuitenkin väittää kadottaneen suurehkon osan kahden osapuolen tilanteen luontaisesta puoleensavetävyydestä. Tutkielman kirjoittamisen aikaan vaikuttaa siltä, että IK:lle ei ole löytynyt, ainakaan perusteisiin keskittyvältä näkökannalta, merkittävää usean osapuolen yleistystä.

Kevääseen 2020 mennessä tunnetut signaalilokaaleita korrelaatioita rajoittavat laatikkotason perusperiaatteet ovat epätriviaali kommunikaatiokompleksisuus [106], rajoitteet epälokaalille laskennalle [109], makroskooppinen Bell-lokaalisuus [111], usean laatikon Bell-lokaalisuus [112], Informaation kausaalisuus [113] sekä lokaali ortogonaalisuus (engl. local orthogonality) [127]. Lokaali ortogonaalisuus esitettiin vuonna 2013 vasteena tarpeelle useamman kuin kahden osapuolen periaatteelle, ja vaikuittaisi toistaiseksi olevan ainoa esitetty käsite jonka usean osapuolen muotoilu ei koostu osapuolten ryhmittelystä kahteen osaan. Lokaali ortogonaalisuus redusoituu signaalilokaalisuudeksi kahden osapuolen tapauksessa, mutta asettaa voimakkaampia rajoitteita usean osapuolen tapauksessa.

Vuonna 2015 on esitetty tulos [128], jonka nojalla tässä mainitut epätriviaali kommunikaatiokompleksisuus, rajoitteet epälokaalille laskennalle tai lokaali ortogonaalisuus eivät kykene määrittelemään kvanttijoukkoa. Kyseisessä artikkelissa [128] rakennetaan korrelaatioiden joukko $\tilde{Q} \supset \mathcal{K}'$, jota kutsutaan 'lähes kvanttimekaanisiksi' korrelaatioiksi. Joukon $\tilde{Q}$ elementtien osoitetaan toteuttavan ko. kriteerit. $\tilde{Q}$:lla on muitakin operationaalisesti 'haluttavia' ominaisuuksia; sen elementtejä ei voi kytkeä, ts. yhdistää lokaalisti prosessoimalla tai ketjuttamalla toisistaan riippumattomia laatikkopareja -tai parvia peräkkäin laatikoiksi jotka olisivat joukon ulkopuolella eli se on 'suljettu' kytkentöjen suhteen [121, 129]. Tätä vaaditaan miltä tahansa fysikaalisesti konsistenttejä korrelaatioita edustavalta joukolta. Nimittäin fyysikolla oletetaan omassa laboratorioissaan olevan vapaus syöttää haluamaansa laatikkoon miten tahansa, erityisesti mahdollisien muiden laatikoiden tulosteista generoitu symboli. Perusjoukot $\mathfrak{B}, \mathcal{K}$ ja $\mathcal{S}$ ovat esimerkkejä kytkentöjen suhteen suljetuista joukoista [121]. Myös makroskooppisesti Bell-lokaali $\mathcal{K}_1'$ on osoitettu suljetuksi [111].

Vaikuttaa siltä, että ainoat tähän mennessä esitetyt periaatteet, joiden ei ole todistettu toteutuvan kaikille lähes kvanttimekaanisille korrelaatioille $\tilde{Q}$, ovat informaation kausaalisuus ja usean laatikon Bell-lokaalisuus. Viittessä [128] annettiin kuitenkin joitakin numeerisia todisteita sille, että $\tilde{Q}$:n elementit toteuttaisivat IK:n. Saattaakin olla, että suuressa skaalassa laatikkotason fysikaalisten periaatteiden haku suppenee kohti jotakin korrelaatioiden joukkoa (ehkä $\tilde{Q}$), joka ei täysin vastaa kvanttimekaanisia korrelaatioita. Toisin sanottuna ainakin tähän mennessä esitetyt fysikaaliset korrelaatioita rajoittavat periaatteet saattavat jättää tilaa kvanttiteoriaa yleisemmille teorioille, joita voitaisiin testata koko kvanttirakennetta vastaan esim. yleistetyillä Tsirelsonin epäyhtälöillä, tai NPA:n syvemmillä askelilla. Ehkä joku päivä löydetäänkin kvanttiteoriaa yleisempi fysikaalisesti mielekäs malli, jonka ennustamat laatikot ovat kvanttijoukon ulkopuolella. Laatikoista on kuitenkin matkaa valmiisiin teorioihin.

Huomautetaan myös signaalilokaaleihin korrelaatioihin ja vastaaviin liittyvien seikkojen selvityksestä jota on tehty paljon yleistettyjen todennäköisyysteorioiden viitekehyksessä [22, 130]. Joitakin yleisiä signaalilokaalien teorioiden ominaisuuksia -tämän tutkielman tarkastelua täydentävästi- löytää esim. viittestä [131]. GPT-viitekehyksessä on löydetty lukuisia ei-klassisiin korrelaatioihin, signaalilokaalisuuteen, Tsirelsonin rajaan ym. liittyviä merkittäviä yhteyksiä teorian muihin rakenteisiin, ja tehtäviin. Viimeaikainen tulos on näyttänyt, että lähes kvanttimekaaniset korrelaatiot $\tilde{Q}$ eivät toteuta yleensä oletettua nk. ei-rajoitteita hypoteesia (engl.

no restriction hypothesis) [132], joka karkeasti takaa, että kaikilla matemaattisesti määriteltävissä olevilla mittauksilla on fysikaalinen realisaatio. Tältä näkökulmalta joukko $\tilde{Q}$ ei ehkä edusta yleisintä fysikaalisesti mielekästä teorian sallimaa joukkoa, nimittäin ei-rajoitteita hypoteesin toteuttavan teorian sallimien korrelaatioiden tulisi olla vielä voimakkaammin rajoitettuja. Tulos tarkoittaa kiinnostavasti myös että ei-rajoitteita -hypoteesin asettaminen rajaa yleisen teorian sallimaa korrelaatioiden joukkoa jotenkin, joten myös se implikoi periaatteessa kokeellisesti testattavia Bell-tyyppisiä kriteereitä.

Tehdään lopuksi vielä huomio informaation kausaalisuudesta teorian näkökulmasta. Tarkastelussa nähtiin, että mikäli teoria sallii yleistetyn keskinäisinformaatiolausekkeen $\hat{I}$, joka toteuttaa neljä ehtoa (E1-E4), niin IK toteutuu. Tuloksen johdossa oletettiin myös tiettyjen, väitetysti mielekkäiden, lokaalien kuvauksien olevan sallittuja tarkasteltavassa teoriassa. On huomionarvoista, että ehdot E1, E3-E4 koskevat ainakin ensisijaisesti teorian staattisia rakenteita kuten tiloja kun datankäsittelyepäyhtälö E2 asettaa eksplisiittisesti joitakin rajoitteita myös dynamiikalle.

Argumentin vuoksi voidaan edellisiä huomioita verrata esimerkiksi johdannossa mainittuihin tuloksiin kvanttiteorian epälineaarisista laajennuksista. Jotkin epälineaariset kuvaukset, kuten vaikka kvanttikloonaus, mahdollistaisivat kietoutumisen käyttämisen viestintään ja täten myös IK:n rikkomisen. Kvanttiteorian epälineaariset laajennukset jakavat muut teorian perusrakenteet, kuten tila-avaruuden, joten tässä yhteydessä voitaisiin nähdä epälineaaristen kuvausten rikkovan datankäsittelyepäyhtälöä. Yleisemmin laatikkotason IK kriteeri nähdään minimiehtona ehdot E1-E4 toteuttavan keskinäisinformaatiolausekkeen olemassaololle. Tarkemmin jos IK rikkoutuu, niin joko teoria ei salli ehtoja E1-E4 toteuttavaa keskinäisinformaatiolauseketta tai jotkin IK:n todistamisen yhteydessä oletetuista operationaalisesti mielekkäistä kuvauksista eivät ole sallittuja kyseisessä teoriassa. Ehdot E1-E4 toteuttavan lausekkeen oleamassaolo voi rajata sallittuja teorioita tai teorian sallimia tehtäviä huomattavasti voimakkaammin, kuin pelkkä laatikkotason mahdollisten korrelaatioiden selvittämiseen keskittynyt tarkastelu antaa ymmärtää.

Yleistettyjen todennäköisyysteorioiden keskinäisinformaatio -ja entropialausekkeiden ominaisuuksen yhteyttä informaation kausaalisuuteen yms. on sittemmin selvitetty useammassa eri yhteydessä esim. [133–136]. Näissä selvityksissä ehtoja E1-E4 on mm. korvattu entropisilla versioilla, ja IK:n johtamiseen vaadittavia oletuksia on selvennetty. Voidaan pitää hämmästyttävänäkin sitä, kuinka paljon rakennetta seuraa signaalilokaalisuuden ja informaation kausaaalisuuden takaavista entropia -tai keskinäisinformaatiolausekkeista. Viittessä [133] on ehdotettu, että Von-Neumann -entropian kaltaisen mukavasti käyttäytyvän entropialausekkeen olemassaolo saattaisi olla jopa kvanttiteorian määräävä piirre. Toiselta näkökulmalta herää myös houkutus harkita IK:n, tai sen takaavien entropisten ehtojen yhteyksistä termodynamiikkaan. Johdannossakin mainittiin tulos, jossa epälineaarisuudet kvanttimekaniikassa saattavat johtaa paitsi mahdollisuuteen kommunikoida ylivalonnopeuden, myös termodynamiikan toisen pääsäännön rikkoutumiseen [19]. Informaatioon ja termodynamiikkaan liittyvät kysymykset on puolestaan tunnistettu keskeisiksi yleisen suhteellisuusteorian ja kvanttiteorian rajamaastossa [14, 137]. Ei-klassisten korrelaatioiden olemassaolo, signaalilokaalisuus ja informaation kausaalisuus näyttävät olevan kytköksissä valtaosaan modernin fysiikan perusrakenteista.

Yhteenveto

Bellin teoreemaa voidaan pitää eräänä teoreettisen fysiikan syvällisimmistä tuloksista. Bellin epäyhtälöt tekivät mahdolliseksi testata kokeellisesti alunperin näennäisesti metafysikaalista kysymystä mahdollisuudesta selittää kvanttiteoriaa klassisesta fysiikasta tutuilla käsitteillä. Vuosikymmenten aikoina on raportoitu Bellin epäyhtälöiden rikkoutumista ja kokeellisesti paikanluonteisestikin suoritetuille mittauksille todennettu kvanttiepälokaalisuus on otettu konkreettisena todisteena ei-klassisten resurssien olemassaolosta.

Bellin epäyhtälöiden rikkoutuminen on sinänsä kvanttiteoriasta riippumaton piirre, vaikka kvanttiteorian rakenne ja käsitteet kuten kietoutuminen yms. ovat aikanaan olleet suuresti motivoimassa löydöstä. Tässä mielessä vaikka kvanttiteoria korvattaisiinkin tulevaisuudessa vaihtoehtoisella mallilla, on ko. teorialla oltava selitys Bell-epälokaaleille korrelaatioille.

Signaalinopeuden äärellisyys on suhteellisuusteorian kausaalisuusperiaatteen minimivaatimus. Vaikka kvanttiteoria sallii ei-klassisia korrelaatioita, se ei salli niiden käyttämistä viestintään. Yleinen mielipide lienee se että minkä tahansa kvanttiteorian kenties tulevaisuudessa korvaavan teorian tulisi paitsi sisältää selitys Bell-epälokaaleille korrelaatioille sen tulisi olla myös signaalilokaali.

Kvanttiteorialle tyypilliset satunnaisuus, korrelaatioiden yksiavioisuusrelaatiot, ei-kloonausta teoreema ja rajoitukset yhteismittaavien laitteiden olemassaololle voidaan indentifoida yhteiseksi kaikille yleisille signaalilokaaleille teorioille. Voidaan sanoa, että mainitut piirteet eivät ole kvanttiformalismin 'vahinkoja' vaan välttämättömiä seurauksia Bell-kokeissa havaitttujen käyttäytymisten selittämiselle. Nämä huomiot osaltaan korostavat signaalilokaalisuuden merkitystä fysikaalisen teorian perusperiaatteena.

Käytännöllisemmältä näkökannalta Bellin epäyhtälöiden rikkoutuminen ja sen implikoimat ei-klassiset ominaisuudet toimivat perustana laiteriippumattomille informaationprosessointiprokollille. Laiteriippumattomuuden etu on se, että protokollan toimivuuden varmistamista voidaan tehdä ainoastaan mittausdataan nojaten, tekemättä oletuksia fysikaalisista implementoinneista tai oikeastaan edes kvanttirakenteesta. Esimerkiksi kuuluisa BB84 kvanttisalausavaimenjakoprotokolla [138] nojaa implisiittisesti oletukseen siitä, että protokollassa käytetään kubittisysteemeitä [139]. Bellin epäyhtälöiden rikkoutumiseen perustuvissa, laatikkotasolla muotoiltavissa olevissa versioissa voidaan höllentää näitä oletuksia. Toki, kryptografiassa pitää silti varmistua siitä, että informaatiota ei vuoda laboratoriosta ulos muita reittejä. Käytännössä Bell-epälokaalien laatikoiden rakentaminen ei ole helppoa ja perustuu nykyisin ymmärrykseen kvanttimekaniikasta; niiden jotka rakentavat laatikoita tulee osata generoida kietoutumista ja ymmärtää käytännölliset mahdollisuudet implementoida laatikot. Laiteriippumattomat käytännön sovellutuksien selvitykset ovat viimeisen vuosikymmenen aikana olleet aktiivisen tutkimuksen aiheita ks. esim. katsaukset [35, 140].

Tsirelsonin varhaiset selvitykset kvanttikorrelaatioiden rajoista, sekä myöhemmät Popescun ja Rohrlicin huomiot osoittivat, että ainakin periaatteessa voisi olla Bell-kokeita, joissa havaitaan kvanttiteoreettisen kuvauksen ulkopuolella olevia korrelaatioita ilman että signaalilokaalisuus rikkoutuisi. Sittemin on käynnistynyt valtavasti kasvanut selonteko paitsi Bell-epälokaalien ja kvanttiteoreettisten korrelaatioiden jakolinjasta, myös kvanttimekaanisten ja erityisesti kvanttiteorian ulkopuolisten, mutta signaalilokaalien korrelaatioiden reunasta.

On esitetty lukuisia teoriasta riippumattomia periaatteita, tavoitteena löytää intuitiivinen, fysikaalisesti mielekäs syy sille, miksi luonnossa ei esiintyisi kaikkia yleisempiä signaalilokaaleita korrelaatioita. Voidaan pitää hämmästyttävänäkin sitä, että useat näennäisesti kvanttimekaniikasta täysin riippumattomat periaatteet, kuten rajoitukset epälokaalille laskennalle ja informaation kausaalisuus pystyvät esimerkiksi palauttamaan kvanttimekaanisen Tsirelsonin rajan CHSH-Bell -epäyhtälölle.

Kvanttiteorian alkuperäinen konteksti on kuitenkin atomisen fysiikan ilmiöiden selittämisessä ja vaikuttaisi olevan lähtökohtaisesti kaukana em. tehtävistä.

Se, että monet intuitiiviset periaatteet pystyvät palauttamaan kvanttikorrelaatioiden joukon reunaa osoittaa että ainakin osa kvantti- ja superkvantti laatikoiden rajapinnasta edustaa luonnollista kynnystä, jonka toisella puolella tarvittaisiin radikaaleja muutoksia fysiikan perusteissa tai maailmankuvassa. Tätä voidaan pitää myös osoituksena kvanttiteorian erityisyydestä [141]. Tähän päivään mennessä ainutkaan esitetty fysikaalinen periaate ei ole kuitenkaan todistetusti rajannut koko kvanttijoukkoa. Haasteita yleiseen tarkasteluun tulee mm. nopeasti kasvavasta kompleksisuudesta ja siitä, että jo yksinkertaisimmassa CHSH-koejärjestelyssä kvanttijoukon geometria on monimutkainen.

Saattaa olla, että laatikkotason periaatteet eivät suppenekkaan kohti kvanttimekaanisten korrelaatioiden joukkoa, vaan jotakin aidosti isompaa, mutta osia reunasta jakavaa joukkoa. Tämä mahdollisuus jättää tilaa kvanttiteoriaa yleisemmälle mallille. Joitakin luonnollisia laatikkotasolla esitettävissä olevia periaatteita voitaisiin käyttää mahdollisen tulevan mallin rakentamisen ohjenuorana, jos ei aksioomana. Esimerkiksi informaation kausaalisuus signaalilokaalisuuden yleistyksenä implikoi lukuisia kvanttiteoriallekkin identifioitavissa olevia piirteitä. Lisäksi informaation kausaalisuuden yhteys tietynkaltaisten keskinäisinformaatio - ja entropialausekkeiden olemassaoloon viittaa myös ei-klassisten korrelaatioiden rajojen ja teorian salliman dynamiikan mahdollisesta yhteydestä termodynaamisiin periaatteisiin.

Ei-klassisten korrelaatioiden olemassaolo, signaalilokaalisuus ja informaation kausaalisuus asettuvat suhteellisuusteorian, kvanttiteorian sekä mahdollisten informaationprosessointitehtävien rajamaastoon ja saattavat olla lähes kaiken tunnetun fysiikan perusrakenteiden määrittelevässä roolissa.

Viitteet

[1] J. S. Bell, Physics **1**, 195 (1964).

[2] S. J. Freedman ja J. F. Clauser, Physical Review Letters **28**, 938 (1972).

[3] G. C. Ghirardi, A. Rimini ja T. Weber, Lettere al Nuovo Cimento **27**, 293 (1980).

[4] P. J. Bussey, Physics Letters A **90**, 9 (1982).

[5] N. Herbert, Foundations of Physics **12**, 1171 (1982).

[6] A. Peres, Fortschritte der Physik **51**, 458 (2003).

[7] W. K. Wootters ja W. H. Zurek, Nature **299**, 802 (1982).

[8] D. Dieks, Physics Letters A **92**, 271 (1982).

[9] Werner R.F. (2001) Quantum Information Theory — an Invitation. In: Quantum Information. Springer Tracts in Modern Physics, vol 173. Springer, Berlin, Heidelberg.

[10] J. Bae, W. Y. Hwang ja Y. D. Han, Physical Review Letters **107**, 1 (2011).

[11] A. K. Pati ja S. L. Braunstein, Nature **404**, 164 (2000).

[12] A. K. Pati ja S. L. Braunstein, Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics **315**, 208 (2003).

[13] S. L. Braunstein ja A. K. Pati, Physical Review Letters **98**, 1 (2007).

[14] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski ja J. Sully, Journal of High Energy Physics **2013**, 62 (2013).

[15] A. Peres ja D. R. Terno, Reviews of Modern Physics **76**, 93 (2004).

[16] S. Weinberg, Annals of Physics **194**, 336 (1989).

[17] N. Gisin, Physics Letters A **143**, 1 (1990).

[18] J. Polchinski, Physical Review Letters **66**, 397 (1991).

[19] A. Peres, Physical Review Letters **63**, 22 (1989).

[20] C. Simon, V. Bužek ja N. Gisin, Physical Review Letters **87**, 170405 (2001).

[21] G. Svetlichny, arXiv:quant-ph/0208049v1 (2002).

[22] P. Janotta ja H. Hinrichsen, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47**, 323001 (2014).

[23] L. Masanes ja M. P. Müller, New Journal of Physics **13**, 063001 (2011).

[24] G. Chiribella, G. Mauro D'ariano ja P. Perinotti, Physical Review A **84**, 012311 (2011).

[25] S. Popescu ja D. Rohrlich, Foundations of Physics **24**, 379 (1994).

[26] Rohrlich D. (2014) PR-Box Correlations Have No Classical Limit. In: Struppa D., Tollaksen J. (eds) Quantum Theory: A Two-Time Success Story. Springer, Milano.

[27] B. S. Tsirelson, Hadronic Journal Supplement **8**, 329 (1993).

[28] P. Busch, P. Lahti, J.-P. Pellonpää ja K. Ylinen, *Quantum Measurement* (Springer International Publishing Switzerland, 2016).

[29] T. Heinosaari ja M. Ziman, *The Mathematical Languange of Quantum Theory: From Uncertainty to Entanglement* (Cambridge University Press, 2012).

[30] A. Einstein, B. Podolsky ja N. Rosen, Physical Review **47**, 777 (1935).

[31] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony ja R. A. Holt, Physical Review Letters **23**, 880 (1969).

[32] J. F. Clauser ja M. A. Horne, Physical Review D **10**, 526 (1974).

[33] J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 1987).

[34] N. Gisin, Foundations of Physics **42**, 80 (2012).

[35] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani ja S. Wehner, Reviews of Modern Physics **86**, 419 (2014).

[36] T. Norsen, Foundations of Physics Letters **19**, 633 (2006).

[37] B. Hensen *et al.*, Nature **526**, 682 (2015).

[38] T. Norsen, Foundations of Physics **37**, 311 (2007).

[39] T. Maudlin, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47**, 424010 (2014).

[40] R. F. Werner, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47**, 424011 (2014).

[41] T. W Maudlin, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47**, 424012 (2014).

[42] R. F. Werner, arXiv:1411.2120v1 (2014).

[43] D. Dürr ja S. Teufel, *Bohmian Mechanics : The Physics and Mathematics of Quantum Theory* (Springer, 2009).

[44] D. Bohm, Physical Review **85**, 166 (1952).

[45] D. Bohm, Physical Review **85**, 180 (1952).

[46] M. J. W. Hall, arXiv:0909.0015v3 (2009).

[47] M. Zukowski ja Č. Brukner, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47**, 424009 (2014).

[48] L. E. Ballentine ja J. P. Jarrett, American Journal of Physics **55**, 696 (1987).

[49] J. Maldacena ja L. Susskind, Fortschritte der Physik **61**, 781 (2013).

[50] A. Fine, Physical Review Letters **48**, 291 (1982).

[51] R. F. Werner ja M. M. Wolf, Quantum Information and Computation **1**, 1 (2001).

[52] A. Peres, American Journal of Physics **46**, 745 (1978).

[53] B. S. Tsirelson, Letters in Mathematical Physics **4**, 93 (1980).

[54] L. J. Landau, Physics Letters A **120**, 54 (1987).

[55] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki ja K. Horodecki, Reviews of Modern Physics **81**, 865 (2009).

[56] N. Gisin ja A. Peres, Physics Letters A **162**, 15 (1992).

[57] R. F. Werner, Physical Review **40**, 4277 (1989).

[58] J. Barrett, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **65**, 4 (2002).

[59] R. Augusiak, M. Demianowicz, J. Tura ja A. Acín, Physical Review Letters **115**, 1 (2015).

[60] F. Hirsch, M. T. Quintino, J. Bowles ja N. Brunner, Physical Review Letters **111**, 1 (2013).

[61] C. Palazuelos, Physical Review Letters **109**, 1 (2012).

[62] R. Augusiak, M. Demianowicz ja A. Acín, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47**, 424002 (2014).

[63] M. Froissart, Il Nuovo Cimento B (1971-1996) **64**, 241 (1981).

[64] A. Peres, Foundations of Physics **29**, 589 (1999).

[65] B. Grünbaum, *Convex Polytopes* (John Wiley & Sons, Ltd, 1967).

[66] S. Pironio, Journal of Mathematical Physics **46**, 062112 (2005).

[67] D. Collins ja N. Gisin, Journal of Physics A: Mathematical and General **37**, 1775 (2004).

[68] E. Z. Cruzeiro ja N. Gisin, Physical Review A **99**, 022104 (2019).

[69] J. D. Bancal, N. Gisin ja S. Pironio, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **43**, 385303 (2010).

[70] J. D. Bancal, C. Branciard, N. Brunner, N. Gisin ja Y. C. Liang, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **45**, 125301 (2012).

[71] D. Rosset, J. D. Bancal ja N. Gisin, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47**, 424022 (2014).

[72] M. Czechlewski ja M. Pawłowski, Physical Review A **97**, 1 (2018).

[73] M. O. Renou, D. Rosset, A. Martin ja N. Gisin, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **50**, 255301 (2017).

[74] M. L. Almeida, J. D. Bancal, N. Brunner, A. Acín, N. Gisin ja S. Pironio, Physical Review Letters **104**, 1 (2010).

[75] K. T. Goh, J. Kaniewski, E. Wolfe, T. Vértesi, X. Wu, Y. Cai, Y. C. Liang ja V. Scarani, Physical Review A **97**, 022104 (2018).

[76] B. S. Tsirel'son, Journal of Soviet Mathematics **36**, 557 (1987).

[77] L. J. Landau, Foundations of Physics **18**, 449 (1988).

[78] M. Navascués, S. Pironio ja A. Acín, Physical Review Letters **98**, 1 (2007).

[79] M. Navascués, S. Pironio ja A. Acín, New Journal of Physics **10**, 073013 (2008).

[80] V. B. Scholz ja R. F. Werner, arXiv:0812.4305v1 (2008).

[81] W. Slofstra, Journal of the American Mathematical Society **33**, 1 (2019).

[82] W. Slofstra, Forum of Mathematics, Pi **7**, 1 (2019).

[83] Z. Ji, A. Natarajan, T. Vidick, J. Wright ja H. Yuen, arXiv:2001.04383v1 (2020).

[84] M. Navascués, T. Cooney, D. Pérez-garcía ja I. Villanueva, Foundations of Physics **42**, 985 (2012).

[85] J. Barrett, N. Linden, S. Massar, S. Pironio, S. Popescu ja D. Roberts, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **71**, 1 (2005).

[86] A. Cabello, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **72**, 1 (2005).

[87] L. Masanes, arXiv:quant-ph/0309137v1 (2003).

[88] I. Pitowsky ja K. Svozil, Physical Review A. Atomic, Molecular, and Optical Physics **64**, 141021 (2001).

[89] S. Pironio, J. D. Bancal ja V. Scarani, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **44**, 065303 (2011).

[90] L. Masanes, A. Acin ja N. Gisin, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **73**, 1 (2006).

[91] S. Pironio, A. Acín, S. Massar, A. B. De La Giroday, D. N. Matsukevich, P. Maunz, S. Olmschenk, D. Hayes, L. Luo, T. A. Manning ja C. Monroe, Nature **464**, 1021 (2010).

[92] V. Coffman, J. Kundu ja W. K. Wootters, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **61**, 5 (2000).

[93] T. J. Osborne ja F. Verstraete, Physical Review Letters **96**, 1 (2006).

[94] M. Pawłowski ja Č. Brukner, Physical Review Letters **102**, 1 (2009).

[95] B. Toner, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **465**, 59 (2009).

[96] B. Toner ja F. Verstraete, arXiv:quant-ph/0611001v1 (2006).

[97] M. Pawłowski, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **82**, 1 (2010).

[98] H. Barnum, C. Caves, C. A. Fuchs, R. Jozsa ja B. Schumacher, Physical Review Letters **76**, 2818 (1996).

[99] T. Heinosaari, T. Miyadera ja M. Ziman, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **49**, 123001 (2016).

[100] M. M. Wolf, D. Perez-Garcia ja C. Fernandez, Physical Review Letters **103**, 2 (2009).

[101] P. J. Lahti ja K. Ylinen, *Johdatus Kvanttimekaniikkaan* (Gummerus Kirjapaino Oy Jyväskylä, 1989).

[102] E. Bene ja T. Vértesi, New Journal of Physics **20**, 013021 (2018).

[103] F. Hirsch, M. T. Quintino ja N. Brunner, Physical Review A **97**, 1 (2018).

[104] R. Cleve ja H. Buhrman, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **56**, 1201 (1997).

[105] W. Van Dam, Natural Computing **12**, 9 (2013).

[106] G. Brassard, H. Buhrman, N. Linden, A. A. Méthot, A. Tapp ja F. Unger, Physical Review Letters **96**, 1 (2006).

[107] N. Brunner ja P. Skrzypczyk, Physical Review Letters **102**, 1 (2009).

[108] H. Buhrman, R. Cleve, S. Massar ja R. De Wolf, Reviews of Modern Physics **82**, 665 (2010).

[109] N. Linden, S. Popescu, A. J. Short ja A. Winter, Physical Review Letters **99**, 1 (2007).

[110] J. Allcock, H. Buhrman ja N. Linden, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **80**, 8 (2009).

[111] M. Navascués ja H. Wunderlich, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **466**, 881 (2010).

[112] Y. Zhou, Y. Cai, J. D. Bancal, F. Gao ja V. Scarani, Physical Review A **96**, 1 (2017).

[113] M. Pawłowski, T. Paterek, D. Kaszlikowski, V. Scarani, A. Winter ja M. Zukowski, Nature **461**, 1101 (2009).

[114] M. M. Wilde, *Quantum Information Theory*, 2 ed. (Cambridge University Press, 2017).

[115] M. Pawłowski ja V. Scarani, Pawłowski M., Scarani V. (2016) Information Causality. In: Chiribella G., Spekkens R. (eds) Quantum Theory: Informational Foundations and Foils. Fundamental Theories of Physics, vol 181. Springer, Dordrecht.

[116] D. Cavalcanti, A. Salles ja V. Scarani, Nature Communications **1**, (2010).

[117] S. W. Al-Safi, Ph.D. thesis, University of Cambridge, 2015.

[118] M. A. Nielsen ja L. Chuang, Isaac, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).

[119] J. Uffink, Physical Review Letters **88**, 4 (2002).

[120] J. Allcock, N. Brunner, M. Pawlowski ja V. Scarani, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **80**, 3 (2009).

[121] J. Allcock, N. Brunner, N. Linden, S. Popescu, P. Skrzypczyk ja T. Vértesi, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **80**, 2 (2009).

[122] R. Gallego, L. E. Würflinger, A. Acín ja M. Navascués, Physical Review Letters **107**, 1 (2011).

[123] T. H. Yang, D. Cavalcanti, M. L. Almeida, C. Teo ja V. Scarani, New Journal of Physics **14**, 013061 (2012).

[124] R. Gallego, L. Masanes, G. De La Torre, C. Dhara, L. Aolita ja A. Acín, Nature Communications **4**, 1 (2013).

[125] Y. Xiang ja W. Ren, Quantum Information and Computation **11**, 0948 (2011).

[126] L. Y. Hsu, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **85**, 1 (2012).

[127] T. Fritz, A. B. Sainz, R. Augusiak, J. B. Brask, R. Chaves, A. Leverrier ja A. Acín, Nature Communications **4**, 1 (2013).

[128] M. Navascués, Y. Guryanova, M. J. Hoban ja A. Acín, Nature Communications **6**, 6288 (2015).

[129] B. Lang, T. Vértesi ja M. Navascués, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **47**, 424029 (2014).

[130] H. Barnum ja A. Wilce, Barnum H., Wilce A. (2016) Post-Classical Probability Theory. In: Chiribella G., Spekkens R. (eds) Quantum Theory: Informational Foundations and Foils. Fundamental Theories of Physics, vol 181. Springer, Dordrecht.

[131] J. Barrett, Physical Review A **75**, 032304 (2007).

[132] A. B. Sainz, Y. Guryanova, A. Acín ja M. Navascués, Physical Review Letters **120**, 1 (2018).

[133] S. W. Al-Safi ja A. J. Short, Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics **84**, 1 (2011).

[134] H. Barnum, J. Barrett, L. O. Clark, M. Leifer, R. Spekkens, N. Stepanik, A. Wiice ja R. Wiike, New Journal of Physics **12**, 033024 (2010).

[135] A. J. Short ja S. Wehner, New Journal of Physics **12**, 033023 (2010).

[136] E. Wakakuwa ja M. Murao, New Journal of Physics **14**, 113037 (2012).

[137] R. M. Wald, Living Reviews in Relativity **4**, 1 (2001).

[138] C. H. Bennett ja G. Brassard, *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing* (1984).

[139] A. Acín, N. Gisin ja L. Masanes, Physical Review Letters **97**, 1 (2006).

[140] S. Pironio, V. Scarani ja T. Vidick, New Journal of Physics **18**, 100202 (2016).

[141] S. Popescu, Nature Physics **10**, 264 (2014).

[142] R. Cleve, P. Hoyer, B. Toner ja J. Watrous, in *Proceedings. of the 19th IEEE Annual Conference on Computational Complexity* (IEEE, 2004).

[143] V. Scarani, S. Iblisdir, N. Gisin ja C. Geneva, Reviews of Modern Physics **77**, 1225 (2005).

A Yksiavioisuusrelaatiot ja kvanttikloonaus

Tehdään vielä tarkastelu kvanttikloonauksen tai lähettämisen yhteydestä yleisiin yksiavioisuusrelaatioihin. Jos $\mathcal{H}_B \simeq \mathbb{C}^d$ on d-ulotteinen Hilbertin avaruus, jonka eräs ortogonaalinen kantavektorijoukko on $\{\varphi_i\}$ niin on olemassa d^2:n alkion joukko tiloja $\tilde{\varrho} \in \mathbb{S}(\mathcal{H}_b)$ jotka kelpaavat itseadjungoitujen jälkiluokkaoperaattorien vektoriavaruuden $\mathcal{T}_s(\mathcal{H}_b)$ kannaksi. Tämän voi nähdä esim. toteamalla että d:n alkion joukko $|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ on lineaarisesti riippumaton joukko puhtaita tiloja. Edelleen muotoa $|\psi(\alpha)\rangle\langle\psi(\alpha)|$, missä $\psi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_i + e^{i\alpha}\varphi_{j,j\neq i})$, olevat tilat ovat lineaarisesti riippumattomia toisistaan ja esitetystä d:n alkion joukosta. Koska tiloja $|\psi(\alpha)\rangle\langle\psi(\alpha)|$ on $d(d-1)$ kappaletta, nähdään että joukkojen unioni $\{|\psi(\alpha)\rangle\langle\psi(\alpha)|\} \cup \{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}$ on $d + d^2 - d = d^2$:n alkion joukko lineaarisesti riippumattomia tiloja. Täten mikä tahansa jälkiluokkaoperaattori voidaan antaa tilojen lineaarikombinaationa. Toisaalta koska tiloille $tr[\tilde{\varrho}] = 1$ ja $\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}*$ nähdään, että erityisesti jokainen tila on annettavissa jopa affiinikombinaationa lineaarisesti riippumattomia tiloja. Huom. kuitenkin että kaikki affiinikombinaatiot tiloja eivät ole tiloja.

Seuraavaksi näytetään että jos Petri käyttää kloonauskonetta omalla puolellaan, on yhdistettyjen systeemien $(AB_1), (AB_2)$ käyttäytymiset annettavissa, tiettyjen oletusten alla, hyvin spesifissä muodossa. Oletetaan sitten, että Petrin kloonauskone $K : \mathbb{S}(\mathcal{H}_{\mathcal{B}}) \to \mathbb{S}(\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_B)$ toimii siten, että jokaiselle joukon $V \subset \mathbb{S}(\mathcal{H}_b)$ alkiolle $\varrho_B \in V$ kuvaus $\varrho_B \mapsto \varrho_{B_1B_2}$ on sellainen että yksittäisten kopioiden tilat ovat muotoa $\varrho_{B_{1(2)}} = \eta_{1(2)}\varrho_B + \frac{(1-\eta_{1(2)})}{d} I_B$. Tämä oletus sisältää ajatuksen siitä, että yksittäiset kopiot ovat aidosti approksimaatioita alkuperäiselle tilalle; konveksikombinaation jälkimmäinen termi voidaan nähdä kloonausoperaatioon liittyvänä satunnaisena meluna ja luku $\eta_{1(2)} \in [0,1]$ kloonauksen laatua kuvaavana hyvyyslukuna. Vaatimus osajoukolle V taas sisältää ajatuksen siitä, että kloonauskoneen -tai lähetyskoneen ei tarvitse olla täydellisen universaali. Parametria η kutsutaan joskus myös nk. Bloch-vektorin kutistustekijäksi, sillä Blochin esityksessä ks. esim. [29, kpl 2.1.3] $\frac{\eta}{d}(I_b + \vec{r}\cdot\vec{F}) + (1-\eta)\frac{I_B}{d} \equiv \frac{1}{d}(I_B + \eta\vec{r}\cdot\vec{F})$. Esitetty kuvaus on symmetrinen eli kloonit ovat samanlaatuisia) jos $\eta_1 = \eta_2$ ja asymmetrinen muulloin.

Seuraavaksi johdetaan näillä oletuksilla laatikkomaailman yksiavioisuusrelaatioista epätriviaali yläraja kloonien laatua kuvaavalle parametrille η.

Aikaisempien toteamuksien nojalla, yleisin mahdollinen Aliisan ja Petrin kvanttimekaaninen lähtötila, mukaanlukien kietoutuneen lähtötilan mahdollisuus, on annettavissa affiinikombinaationa $\sum_{i,j}\tilde{c}_{i,j}\varrho_i^A \otimes \tilde{\varrho}_j^B$, missä on oletettu, että $\{\varrho_i^A\}$ on lineaarisesti riippumaton (kanta)tilajoukko Aliisan systeemin avaruudelle $S(\mathcal{H}_A)$ (vast. $\{\tilde{\varrho}_i^B\}$ Petrille); Aliisan ja Petrin kantatilojen tensoritulot ovat kanta yhdistetyn systeemin tila-avaruudelle. Erityisesti jos lähtötilanne on muotoa

$$\varrho_{AB} = \sum_{i,j} c_{i,j}\varrho_i^A \otimes \varrho_j^B, \tag{14}$$

missä $\varrho_j^B \in V$ kaikilla summassa olevilla j, niin kloonauksen jälkeen

$$\varrho_{AB_1B_2} = (I_A \otimes K)(\sum_{i,j} c_{i,j}\varrho_i^A \otimes \varrho_j^B) \equiv \sum_{i,j} c_{i,j}\varrho_i^A \otimes \varrho_j^{B_1B_2}$$

ja kopioiden muotoon liittyneiden oletusten nojalla

$$\begin{aligned}\varrho_{AB_{1(2)}} &= \sum_{i,j} c_{i,j}\varrho_i^A \otimes \left(\eta_{1(2)}\varrho_j^B + \frac{(1-\eta_{1(2)})}{d} I_B\right)\\ &\equiv \eta_{1(2)}\varrho_{AB} + \sum_{ij} c_{ij}\frac{(1-\eta_{1(2)})}{d}\varrho_i^A \otimes I_B.\end{aligned}$$

Todetaan, että tämä on konveksikombinaatio yleisesti ottaen kietoutunutta lähtötilaa, ja separoituvaa tilaa. Laatikkotasolla tämänkaltaisen kloonauskuvauksen tuottamat kopiot voidaan nähdä siis konveksikombinaationa, kloonin hyvyyttä kuvaavalla kertoimella η, kvanttimekaanista -ja Bell-lokaalia laatikkoa. Tämä yhteys mahdollistaa kloonausparametrin η epätriviaalin ylärajan etsimisen yksiavioisuusrelaatioista. Olkoon sitten $P(a,b|X,Y)$ kvanttimekaaninen lähtötilanne, jolle $C(A,B)[P] = Q > 2$ ja $P'(a,b|X,Y)$ Bell-lokaali laatikko $C(A,B)[P'] = E \in [-2,2]$. Oletetaan että kloonit ovat symmetrisiä, eli $C(A,B^1) = C(A,B^2) = \eta Q + (1-\eta)E$. CHSH-lausekkeiden yksiavioisuusrelaatioiden nojalla saadaan sijoittamalla

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{|C(A,B^1)|}{Q} = \frac{|\eta Q + (1-\eta)E|}{Q} \leq \frac{2}{Q}.$$

Oletuksen $C(A,B) > 0$ nojalla voidaan vaatia $C(A,B^1) > 0$ (huom. että tämä toteutuu aina kun $\eta \geq \frac{1}{2}$, jota voidaan pitää perusteltuna vaatimuksena), sillä kopion tulisi matkia alkuperäistä käyttäytymistä mahdollisimman hyvin. Täten voidaan pudottaa ylläolevasta itseisarvot. Tämän rajoituksen voidaan nähdä olevan eräs miniehto sille, että kopio käyttäytyy mahdollisimman hyvin kuten alkuperäinen. Nyt siis maksimoidaan ylläolevasta epäyhtälöstä η ehdoilla $2 \geq E \geq -2$ ja $\eta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Saadaan epäyhtälö $\eta \leq \dfrac{2-E}{Q-E}$. Tästä nähdään, että η on suurimmillaan kun $E = -2$ eli $\eta = \dfrac{4}{Q+2} < 1$. Erityisesti jos lähtötilanne saavuttaa Tsirelsonin rajan $Q = 2\sqrt{2}$ pätee $\eta^{max} = \dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$. Tämä epätriviaali yläraja on saatu minimaalisilla oletuksilla kloonien muodosta, ottamatta kantaa täsmälleen esim. kloonattavan joukon muihin yksityiskohtiin kuten symmetrioihin, kokoon tai systeemien täsmällisiin dimensioihin. Jos jokin kloonauskone saavuttaa ko. kutistustekijän, voidaan heti todeta ko. koneen optimaalisuus. Yleensä optimaalisuustodistukset ovat työläitä, joten tässä suhteellisen vähällä vaivalla saatu yläraja voi osoittautua käteväksi.

Epäyhtälö $\eta \leq \dfrac{2-E}{Q-E}$ antaa epätriviaalin ylärajan kaikilla $E \in [-2,2], 2\sqrt{2} \geq Q > 2$. Tässä ei koeta tarpeelliseksi selvittää mahdollisuuksia rajoittaa E:tä yleisesti ottaen. Huomautetaan kuitenkin, että mikäli kloonauskonetta on käytetty kubittisysteemiin, niin voidaan vaatia myös että $E = 0$. Nimittäin ylärajan on pädettävä kaikille kuviteltavissa oleville mittauksille, ja erityisesti projektiiviset mittaukset sekoitetulle tilalle $\frac{1}{2}I$ (Petrin puolella) antavat uniformisti jakautuneita mittaustuloksia ± 1. Huom. myös viitteen [142, kpl. 5.1] tuloksen nojalla projektiiviset mittaukset ovat optimaalinen valinta kun CHSH-epäyhtälöä yritetään rikkoa maksimaalisesti. Täten saadaan kubiteille yläraja $\eta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esimerkki ylärajan $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ saavuttavasta kloonaajasta on olemassa. Nk. *vaihekovariantti* kloonaaja [90]. Vaihekovariantille kloonaajalle on tyypillistä, että Blochin pallon päiväntasaajaa vastaavat puhtaat tilat ts. muodossa $|\psi(\phi)\rangle \langle\psi(\phi)|$ annettavat tilat kopioutuvat yhtä hyvin ylläesitetyn joukon V mielessä ks. esim. [143, kpl. D.2]. Tässä $\psi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow + e^{i\phi} \downarrow)$ ja $\phi \in [0, 2\pi]$.

Vertailun vuoksi symmetriselle universaalille kubittien kloonaajalle eli. nk Bužek-Hillery -kloonaajan $\varrho_B \to \varrho_{B_1 B_2}$ yksittäisille kopioille pätee $\varrho_{B_1} = \varrho_{B_2} = \frac{2}{3}\varrho_B + \frac{1}{2}I$ eli $\eta = \frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tämä (tunnettu) ero kloonien laadussa luetaan siten, että mikäli rajoitutaan kloonaamaan Blochin pallon päiväntasaajaa vastaavia tiloja, vaihekovariantti kloonaaja on parempi vaihtoehto.

Tehty tarkastelu vihjaa että kloonattavien tai lähetettävien tilojen joukon V ja kyseisten joukon alkioiden avulla yhtälön (14) mukaisesti ilmaistavissa olevien yhdistetyn systeemin tilojen Bellin epäyhtälöiden rikkoutumisen välillä on yhteys; täydellisen lähettämisen tai kloonauksen mahdollisuus impikoi että kyseisillä tiloilla ei voida esittää CHSH-epäyhtälöä rikkovia kietoutuneita tiloja huolimatta siitä, mikä on asioiden laita ts. mitä tiloja käytetään toisen osapuolen luona. Esimerkiksi voidaan sanoa, edellisen tuloksen nojalla, että mikäli rajoittauduttaisiin kloonaamaan Blochin pallon päiväntasaajaa pienempää joukkoa, niin joko uudelle joukolle suunniteltu kloonauskone ei voi ainakaan tuottaa parempia klooneja, tai rajoituksen jälkeen yhtälön (14) mukaisesti esitetyillä yhdistetyn systeemin tiloilla ei voida rikkoa CHSH-epäyhtälöä samalla tavalla.

Jos $\{\varrho_i^B\}_{i=1}^{d_B}$ on joukko ortogonaalisia tiloja Petrin luona ja $\{\varrho_i^A\}_{i=1}^{d_A^2}$ mikä tahansa Aliisan kantatilajoukko, niin yleiset näiden avulla kirjoitetut yhdistetyn systeemin ϱ_{AB} tilat ovat affiinikombinaatioita

$$\mathfrak{S}_{AB} = \sum_{i,j} c_{ij}\varrho_i^A \otimes \varrho_j^B \equiv (c_{11}\varrho_1^A + \ldots + c_{(d_A^2 1)}\varrho_{d_A^2}^A) \otimes \varrho_1^B + \ldots + (\sum_{i=1}^{d_A^2} c_{id_B}\varrho_i^A) \otimes \varrho_{d_B}^B.$$

Positiivisuuden takaamiseksi on oltava että $\forall j \ \sum_i c_{ij}\varrho_i^A$ ovat positiivisia ja tiloja, eli tämänkaltaiset yhdistetyn systeemin tilat $\mathfrak{S}_{AB}$ voidaan identifioida konveksikombinaatioksi, eli ei-kietoutuneiksi tiloiksi. Näin ollen epätriviaali teoreettinen yläraja $\frac{2-E}{Q-E}$ 'yhtä hyvin' kloonautuvan joukon V kloonien laadulle voi päteä ainoastaan jos joukko V sisältää epäortogonaalisia puhtaita tiloja (sillä oletettiin ($Q > 2$). Tämä huomio vastaa toteamusta siitä, että keskenään ortogonaalisen tilajoukon täydelliselle kloonaamiselle ei ole rajoitteita. Jos oletetaan joukon V olevan lähetettävissä, niin yhtälön (14) mukaisesti kirjoitetuilla tiloilla ϱ_{AB} ei voida rikkoa CHSH-epäyhtälöä. Viitteen [98] tuloksen nojalla samanaikaisesti lähetettävissä olevat tilat kommutoivat keskenään. Koska kommutoivat matriisit ovat samaan aikaan diagonalisoitavissa, nähdään, että jokainen joukon V alkio voidaan esittää ortogonaalisten tilojen $\{\varrho_i^B\}_{i=1}^{d_B}$ konveksikombinaationa. Täten, lähetettävän joukon V elementtejä käyttämällä ei voida rakentaa yhdistetyn systeemin kietoutuneita tiloja, nimittäin yhdistetyn systeemin hajotelman voidaan kertoimien kokoamisen jälkeen nähdä vastaavan esitettyä separoituvaa tilaa $\mathfrak{S}_{AB}$.

Yleisesti ottaen kvanttimekaniikassa protokollaan hyödyllisin tai tilanteeseen sopivin kloonauskone tms. valitaan ongelman asettelun, mukaan lukien lähtötilajoukon mukaan. Tässä esitetyt yleiset tulokset antavat erään menetelmän, jonka hyödyllisyyttä voidaan toki kyseenalaistaa useastakin syystä, etsiä yläraja tilanteeseen sopivimmalle kloonaajalle (tai lähetyskoneelle).

Vaihekovariantin kloonaajan kutistustekijän yhteys Tsirelsonin rajaan huomattiin viitteessä [90]. Kyseisessä viittessä todetaan (oleellisesti), että mittauksilla singlettitilalle voidaan sanoa $E = 0$ ja nähdään laatikkotason implikoima tulos (ts. similaarisesti kuin tässä). Viittessä yleisemmässä tapauksessa [94] kutistustekijäksi kutsutaan kloonin ja lähtölaatikon Bell-lausekkeiden suhteellista rikkoutumista $\eta_i' = \dfrac{B(A,B^i)}{B(A,B)}$. Tämän tarkastelun, esim. yhtälön (14) nojalla ei kuitenkaan ole itsestäänselvää, että tällä tavoin määritelty kutistustekijä voidaan yleisesti ottaen suoraan liittää kvanttimekaniikan Bloch-vektorin kutistustekijään edes CHSH-tapauksessa. Nimittäin ei ole (tai tutkielmantekijä ei näe) itsestäänselvää syytä miksi voitaisiin yleisesti vaatia $E = 0$ esim. tilanteissa joissa kloonattavien systeemien dimensioita kasvatetaan. Jokatapauksessa em. Bell-lausekkeiden suhteellinen rikkoutuminen antaa yleisen menetelmän arvioida kloonien laatua, samoin kuin CHSH-epäyhtälön suhteellinen rikkoutuminen $\dfrac{Q'}{Q}$ tai $\dfrac{Q''}{Q}$.