# Rajaamattomat lukusuoratehtävät joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamisessa

Kasvatustieteen
pro gradu -tutkielma

Laatija:
Sofia Ikonen

10.3.2025
Turku

Pro gradu -tutkielma

**Oppiaine**: Kasvatustiede, luokanopettajan tutkinto-ohjelma
**Tekijä**: Sofia Ikonen
**Otsikko**: Rajaamattomat lukusuoratehtävät joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamisessa
**Ohjaaja**: professori Jake McMullen
**Sivumäärä**: 94 sivua ja 10 liitesivua
**Päivämäärä**: 10.3.2025

Tämän tutkimuksen keskiössä oli toistaiseksi vähän tutkittu rajaamaton lukusuoratehtävä, jossa oppilasta pyydetään merkitsemään rationaaliluku lukusuoralle, jolle on jo merkitty 0 ja jokin toinen rationaaliluku. Tutkimuksen päätavoitteina oli selvittää, millaista osaamista yhdeksäsluokkalaiset osoittivat rajaamattomassa lukusuoratehtävässä, sekä tutkia rajaamattoman lukusuoratehtävän yhteyksiä muihin rationaalilukutehtäviin. Erityisesti oltiin kiinnostuneita siitä, voidaanko rajaamattoman lukusuoratehtävän avulla mitata joustavaa rationaalilukukäsitettä. Joustavalla rationaalilukukäsitteellä tarkoitetaan hyvin kehittynyttä tietoverkkoa rationaaliluvuista, niiden ominaisuuksista ja niiden välisistä suhteista, ja sen ajatellaan mahdollistavan joustavan asiantuntijuuden matematiikassa. Sekä joustavaa asiantuntijuutta että hyvää rationaalilukuosaamista pidetään matematiikan opetuksessa tärkeinä, mutta vaikeasti saavutettavina tavoitteina.

Tässä tutkimuksessa käytettiin valmista aineistoa, joka oli kerätty vuoden 2020 tammikuussa. Osallistujat olivat floridalaisia yhdeksäsluokkalaisia (N=95, 48 % naisia). Aineisto oli kerätty tehtävälomakkeella, joka koostui joustavaa rationaalilukukäsitettä mittaavista lausekkeentuottamistehtävistä, rutiiniosaamista rationaaliluvuilla mittaavista lasku-, muuntamis- ja järjestämistehtävistä sekä rajatuista ja rajaamattomista lukusuoratehtävistä. Tilastomenetelminä käytettiin aineiston kuvailuun käytettävien perusmenetelmien lisäksi varianssianalyysia, konfirmatorista faktorianalyysia ja hierarkkista regressioanalyysia.

Kun rajaamattomia lukusuoratehtäviä tarkasteltiin, huomattiin, että keskimäärin tehtävien vastaukset olivat varsin tarkkoja. Vastauksissa oli kuitenkin paljon hajontaa, ja osallistujien vastaustarkkuus vaihteli paljon tehtävästä toiseen. Rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestymisen todettiin olevan positiivisesti yhteydessä edelliseen matematiikan arvosanaan, ja korkeimman ja alimman arvosanaryhmän ryhmäkeskiarvot olivat tilastollisesti merkitsevästi toisistaan poikkeavat.

Rajaamattoman lukusuoratehtävän käyttöä joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamisessa tutkittiin konfirmatorisen faktorianalyysin avulla. Analyysin perusteella ei voida olettaa, että rajaamatonta lukusuoratehtävää voitaisiin käyttää joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiseen lausekkeentuottamistehtävien rinnalla. Lausekkeentuottamistehtävät eivät myöskään selittäneet rajaamattomien lukusuoratehtävien vastaustarkkuuden vaihtelua tilastollisesti merkitsevästi sen jälkeen, kun rutiinitehtävien vaikutus oli kontrolloitu. Rutiinitehtävistä muuntamis- ja järjestämistehtävillä oli tilastollisesti merkitsevä yhteys rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestymiseen.

Vaikka tutkimuksessa ei saatukaan tukea ajatukselle siitä, että menestys rajaamattomassa lukusuoratehtävässä olisi hyvä mittari joustavalle rationaalilukukäsitteelle, saatiin tutkimuksessa kuitenkin paljon uutta tietoa rajaamattomista lukusuoratehtävistä yleensä. Erityisesti tulos matemaattisen kompetenssin ja rajaamattoman lukusuoratehtävän yhteydestä on uusi ja viittaa siihen, että tämä lukusuoratehtävätyyppi voi olla yhtä monipuolinen matemaattisen osaamisen mittari kuin paljon tutkittu ja käytetty rajattu lukusuoratehtävä. Lisäksi tutkimustulokset vahvistavat aiempaa tietoa siitä, että joustava rationaalilukukäsite vaatii ratkaisijaltaan erilaista osaamista kuin rutiinitehtävät rationaaliluvilla.

**Avainsanat:** joustava asiantuntijuus, joustava rationaalilukukäsite, lukusuoratehtävät, rationaaliluvut

# Sisällysluettelo


1 Johdanto 5

1.1 Joustava asiantuntijuus matematiikassa 7

1.1.1 Strateginen joustavuus 8

1.1.2 Joustava asiantuntijuus 9

1.1.3 Joustava (rationaali-)lukukäsite 10

1.2 Rationaaliluvut matematiikan osaamisen avaintekijänä 12

1.2.1 Rationaalilukuosaamisen kehittyminen 14

1.2.2 Rationaalilukuosaamiseen vaikuttavia tekijöitä 15

1.2.3 Hyvin kehittyneen rationaalilukukäsitteen indikaattorit: integroitunut lukukäsite ja joustava rationaalilukukäsite 16

1.2.4 Rationaaliluvut Floridan matematiikan opetussuunnitelmassa 20

1.3 Lukusuoratehtävät matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkimuksessa 21

1.3.1 Rajatut lukusuoratehtävät 25

1.3.2 Rajaamattomat lukusuoratehtävät 26

2 Tutkimuskysymykset 29

3 Tutkimuksen toteutus 31

3.1 Osallistujat 31

3.2 Tehtävälomake ja käytetyt mittarit sekä vastausten operationalisointi 32

3.2.1 Lausekkeentuottamistehtävä 33

3.2.2 Rutiinitehtävät rationaaliluvuilla 35

3.2.3 Lukusuoratehtävät 37

3.3 Konfirmatorinen faktorianalyysi 42

3.3.1 Kofirmatorisen faktorianalyysin käytön edellytykset 44

3.3.2 Indikaattorien valinta 45

3.3.3 Faktorimallien muodostaminen 46

3.3.4 Faktorimallien spesifiointi 49

3.3.5 Estimaattorin valinta 50

3.3.6 Faktorimallin yhteensopivuustarkastelu 51

3.3.7 Konfirmatorisen faktorianalyysin tulosten tarkastelu ja tulkinta 52

3.4 Hierarkkinen regressioanalyysi 53

3.4.1 Hierarkkisen regressioanalyysin edellytykset 54

3.4.2 Hierarkkisen regressioanalyysin tulosten tulkinta 56

4 Tulokset 57

4.1 Analyyseissa käytettyjen muuttujien kuvailua ja käsittelyä 57

4.1.1 Konfirmatorisessa faktorianalyysissa käytettyjen muuttujien moniulotteinen normaalius 62

**4.2 Rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestyminen ja tehtävien keskinäinen vaikeusaste 63**

**4.3 Rajaamattoman lukusuoratehtävän ja matematiikan arvosanan välinen yhteys 66**

**4.4 Rajaamattoman lukusuoratehtävän yhteydet muihin tehtävätyyppeihin 67**

**4.5 Lausekkeentuottamistehtävissä ja rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestymisen välinen yhteys 72**

**5 Pohdinta 76**

**5.1 Tutkimuksen eettisyys ja luotettavuus 77**

**5.2 Tutkimuksen päätulokset tutkimuskysymyksittäin 79**

5.2.1 Osaaminen rajaamattomissa lukusuoratehtävissä on keskimäärin hyvää, mutta epätasaista 79

5.2.2 Rajaamattomien lukusuoratehtävien vastaustarkkuuden ja matematiikan arvosanan välillä on yhteys 81

5.2.3 Rajaamatonta lukusuoratehtävää ei voida käyttää joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiseen 83

5.2.4 Muuntamis- ja järjestämistehtävät selittävät osaamista rajaamattomissa lukusuoratehtävissä 84

**5.3 Lopuksi 85**

**Lähteet 87**

**Liitteet 96**

**Liite 1. Kaikkien analyyseissa käytettyjen muuttujien ja summamuuttujien histogrammit ja P-P-kuviot 96**

**Liite 2 Mplus-syntaksi yhden faktorin mallille 99**

**Liite 3 Indikaattorien faktorilataukset ja virhetermit sekä faktoreiden kovarianssit kaikille faktorimalleille 100**

# 1 Johdanto

Matemaattista joustavuutta ja hyviä rationaalilukutaitoja pidetään matematiikan opetuksen kannalta tärkeinä tavoitteina. Matemaattisen joustavuuden ajatellaan edistävän matematiikan hyödyntämistä myös koulun ulkopuolella, ja rationaalilukujen hallinnan on todettu ennustavan tulevaa matematiikan osaamista (Hatano, 2003; Siegler ym., 2012). Koska matemaattinen joustavuus ja rationaalilukutaidot ovat matematiikan osaamisen kannalta tärkeitä, on myös tärkeää pyrkiä ymmärtämään niiden luonteesta ja kehittymisestä mahdollisimman paljon. Tässä tutkimuksessa matemaattista joustavuutta ja rationaalilukuosaamista tarkastellaan näitä taitoja mittaavien tehtävien valossa. Erityisen kiinnostuneita ollaan rajaamattomasta lukusuoratehtävästä, sen ominaisuuksista ja sen yhteyksistä rutiini- ja joustavaan asiantuntijuuteen.

Matemaattinen joustavuus määritellään tässä tutkimuksessa joustavan asiantuntijuuden käsitteen kautta: henkilö on matemaattisesti joustava, jos hän kykenee hyödyntämään osaamistaan tutuissa tilanteissa ja soveltamaan osaamistaan joustavasti myös uusissa tilanteissa (Hatano, 2003). Tässä tutkimuksessa keskitytään matemaattisen joustavuuden alakäsitteeseen, joustavaan rationaalilukukäsitteeseen. Joustavalla rationaalilukukäsitteellä tarkoitetaan hyvin kehittynyttä tietoverkkoa rationaalilukujen ominaisuuksista ja niiden välisistä suhteista, ja sen avulla voidaan esimerkiksi löytää osaamiseroja myös sellaisten oppilaiden välillä, joilla on jo hyvät perustaidot matematiikassa (McMullen ym., 2020).

Rationaaliluvuilla tarkoitetaan kaikkia positiivisia ja negatiivisa kokonaislukuja, murtolukuja, prosenttilukuja sekä päättyviä ja sarjallisia desimaalilukuja. Rationaalilukuosaamisella viitataan tässä tutkimuksessa yleisesti rationaalilukuihin liittyviin taitoihin. Joustavan rationaalilukukäsitteen lisäksi ollaan kiinnostuneita erityisesti erilaisten rationaalilukunotaatioiden (murto- ja desimaalilukujen) välisestä osaamisesta, rationaalilukujen suuruusosaamisesta sekä rationaalilukuaritmetiikan osaamisesta. Erityisesti notaatioiden välisen osaamisen ja suuruusosaamisen on todettu olevan rationaalilukutaitojen kehittymisen kannalta tärkeitä, ja rationaalilukujen suuruusosaaminen on edellytys rationaalilukuaritmetiikan osaamiselle (Braithwaite ym., 2022; Schiller & Siegler, 2023; Van Hoof ym., 2018). Edellä mainittuja taitoja mitataan tässä tutkimuksessa omilla tehtävillään.

Rationaalilukukäsitteen kehittymistä ja murtolukuosaamisen kehittymisen tukemista käsittelevissä tutkimuksissa on käytetty paljon lukusuoratehtäviä (esim. Kim, 2024; Schneider ym., 2018). Lukusuoran vahvuutena pidetään erityisesti sitä, että sen avulla voidaan vahvistaa käsitystä siitä, että murtoluvuilla on yksikäsitteinen suuruus (Cramer ym., 2019). Lukusuorat myös mm. mahdollistavat eri notaatioisten rationaalilukujen suuruusvertailun (esim. murto- ja desimaalilukujen välinen vertailu).

Tämän tutkimuksen keskiössä on eräs lukusuoratehtävän variantti, rajaamaton lukusuoratehtävä. Tämän tyyppisten lukusuoratehtävien ratkaisemiseen tarvitaan Cramerin ja kumppaneiden (2019) mukaan lukujen ominaisuuksien ja lukujen välisten suhteiden tuntemusta (Cramer ym., 2019). Rajaamattomat lukusuoratehtävät vaativat siis ratkaisijaltaan samankaltaisia taitoja kuin joustava rationaalilukukäsite. Tämän tutkimuksen tavoitteena onkin selvittää, voitaisiinko rajaamattomia lukusuoratehtäviä käyttää joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiseen.

Sen lisäksi, että tässä tutkimuksessa selvitetään rajaamattoman lukusuoratehtävän soveltuvuutta joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiseen, halutaan tutkimuksen avulla myös saada lisää tietoa rajaamattomasta lukusuoratehtävästä tehtävätyyppinä. Rajaamatonta lukusuoratehtävää ei nimittäin ymmärrykseni mukaan ole aiemmin tarkasteltu määrällisesti tämän tutkimuksen mittakaavassa. Tämän tutkimuksen tavoitteena on tutkia rajaamatonta lukusuoratehtävää tarkemmin, ja selvittää, kuinka hyvin tehtäviin osataan vastata, ja ovatko käytetyt tehtävät vaikeusasteeltaan samankaltaisia. Lisäksi tutkitaan rajaamattoman lukusuoratehtävän ja matematiikan arvosanan välistä yhteyttä. Tutkimuksen avulla halutaan myös selvittää, kuinka hyvin joustava rationaalilukukäsite selittää rajaamattomassa lukusuoratehtävässä menestymistä sen jälkeen, kun rutiinitehtävissä menestyminen on kontrolloitu.

Tämä johdantoluku rakentuu seuraavasti: Ensimmäiseksi paneudutaan joustavaan asiantuntijuuteen matematiikassa, ja esitellään matemaattisen joustavuuden määritelmiä sekä tämän tutkimuksen ensimmäinen pääkäsite, joustava rationaalilukukäsite. Tämän jälkeen kerrotaan tarkemmin rationaalilukuosaamisesta ja sen roolista matemaattisessa osaamisessa. Lopuksi esitellään lukusuoratehtäviä osana matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkimusta, pyritään luokittelemaan lukusuoratehtäviä ja niiden tutkimusta sekä kerrotaan erityisesti tämän tutkimuksen pääasiallisena kiinnostuksen kohteena olleesta rajaamattomasta lukusuoratehtävätyypistä.

## 1.1 Joustava asiantuntijuus matematiikassa

Matemaattista joustavuutta pidetään matematiikan opetuksen kannalta tärkeänä tavoitteena muun muassa siksi, että sen ajatellaan mahdollistavan matematiikan hyödyntämisen myös koulumaailman ulkopuolella. Matemaattiselle joustavuudelle ei kuitenkaan ole yhtä vakiintunutta määritelmää, vaan eri tutkijat käyttävät käsitettä merkitsemään hieman eri asioita tutkimuksen sisällöstä riippuen. Lähtökohtaisesti joustavalla osaamisella viitataan kuitenkin toimintaan, joka on ainakin joko tilanteeseen sopivaa tai olemassa olevaa tietoa soveltavaa. (Greer, 2009; Hong ym., 2023; Nunes ym., 2016; Verschaffel ym., 2009.) Tässä luvussa matemaattista joustavuutta lähestytään seuraavasti: ensin kerrotaan strategisesta joustavuudesta, jonka tutkimus on korostuneen suuressa roolissa joustavan matematiikan kentällä, jonka jälkeen palataan matemaattisen joustavuuden käsitteen juurille joustavaan asiantuntijuuteen. Vasta viimeiseksi käsitellään tässä tutkimuksessa käytettävää matemaattisen joustavuuden määritelmää, joustavaa lukukäsitettä.

Sen lisäksi, että matemaattiselle joustavuudelle ei ole yhtä vakiintunutta määritelmää, eivät käytettävät käsitteetkään ole vakiintuneet. Englanninkielisessä tutkimuskirjallisuudessa käytetään sekä termiä ”flexible” että ”adaptive” kuvaamaan joustavuutta matematiikassa. Sanoilla saatetaan kirjoittajista riippuen tarkoittaa samaa tai eri asiaa. (Verschaffel ym., 2009.). Suomenkielisessä kirjallisuudessa taas on vakiintunut käyttöön sana ”joustava” käännöksenä molemmille edellä mainituille sanoille, vaikka sanan ”adaptive” voisi kääntää myös esimerkiksi termillä ”adaptiivinen” (Palkki (2022) käyttääkin tekstissään tätä käännöstä) tai ”sopeutuva”, jotka olisivat välillä hyvinkin kuvaavia. Tässä tutkimuksessa päädyttiin käyttämään termiä ”joustava”, ja alkuperäinen englanninkielinen termi on lisäksi mainittu tarpeen vaatiessa.

Tarkasta määritelmästä tai käytetyistä termeistä riippumatta joustavat matemaattiset taidot on laajalti hyväksytty matematiikan opetuksen tavoitteeksi (Hong ym., 2023), ja myös Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet nostaa esiin laaja-alaisen osaamisen, jota osataan soveltaa eri tilanteissa (Opetushallitus, 2014, s. 20). Kyky tietojen ja taitojen soveltamiseen nousee esiin myös opetussuunnitelman matematiikan osuuksissa sekä ala- että yläkoulussa (Opetushallitus, 2014, s. 234, 374).

### 1.1.1 Strateginen joustavuus

Matemaattisen joustavuuden synonyyminä pidetään useissa konteksteissa strategista joustavuutta (strategic flexibility), jonka Verschaffel ja kumppanit (2009) ovat määritelleet seuraavasti: ”Joustavalla strategian valinnalla tarkoitamme tilannetta, jossa yksilö tietoisesti tai tiedostamattaan valitsee ja käyttää itselleen mahdollisimman sopivaa strategiaa matemaattiseen tehtävään tai ongelmaan ottaen huomioon myös sen sosiokulttuurisen kontekstin, jossa henkilö toimii.” (Verschaffel ym., 2009, s. 343.)

Strategista joustavuutta on tutkittu paljon, ja tyypillisimmät tutkimusasetelmat selvittävät erilaisten ratkaisustrategioiden tuntemusta ja käyttöä laskutehtävien ratkaisemisessa (Hong ym., 2023). Strategisen joustavuuden tutkimuksessa tavoitteena on mm. selvittää tehtävän ja/tai ratkaisijan kannalta kaikkein tarkoituksenmukaisimpia ratkaisustrategioita ja tutkia sitä, kuinka strategisesti joustavia tutkittavat ovat (Hickendorff ym., 2022; Newton ym., 2020).

Vaikka strategisesta joustavuudesta puhutaankin joissain konteksteissa matemaattisen joustavuuden synonyymina, se ei kuitenkaan anna täyttä kuvaa joustavasta matemaattisesta osaamisesta. Esimerkiksi Hickendorff ja kumppanit (2022) kuvailevat edellä esiteltyä Verschaffelin ja kumppaneiden (2009) käyttämää matemaattisen joustavuuden määritelmää ja muita sen kaltaisia määritelmiä kapea-alaisiksi. Tällaisissa määritelmissä matemaattinen joustavuus määritellään täysin joustavan ratkaisustrategiavalinnan kautta. (Hickendorff ym., 2022.) Joustava strategiavalinta ei kuitenkaan ole ainoa tutkimuskohde matemaattisen joustavuuden alalla, ja jopa koko teoria strategiavalinnan käsitteen takana on asetettu kyseenalaiseksi (McMullen ym., 2016; Threlfall, 2009).

Strategiavalintojen lisäksi matemaattisen joustavuuden sateenvarjon alla on tutkittu esimerkiksi matemaattisten representaatioiden joustavuutta (Deliyianni ym., 2016; Heinze ym., 2009). Tämä onkin laajentanut matemaattisen joustavuuden kokonaiskuvaa (Hickendorff ym., 2022). Matemaattisen joustavuuden kokonaiskuvan laajentamiseen pyrkii myös tässä tutkimuksessa käytetty McMullenin ja kumppaneiden (2016) käyttämä matemaattisen joustavuuden määritelmä, joustava (rationaali-)lukukäsite. Ennen tämän käsitteen avaamista täytyy kuitenkin käsitellä matemaattisen joustavuuden tutkimuksen juuria hieman tarkemmin.

### 1.1.2 Joustava asiantuntijuus

Matemaattisen joustavuuden tutkimuksen juuret ovat joustavan asiantuntijuuden käsitteessä. Joustava asiantuntijuus on Hatanon alun perin vuonna 1982 esittelemä käsite, jolla tarkoitetaan kykyä ymmärtäen soveltaa opittuja toimintatapoja joustavasti ja luovasti sekä uusissa että tutuissa tilanteissa. Sen vastakohtana on rutiiniasiantuntijuus, jolla taas tarkoitetaan kykyä ratkaista tuttuja tehtäviä nopeasti ja tarkasti ilman vaatimusta ymmärtämisestä. (Hatano, 2003.) Rutiiniasiantuntijasta poiketen joustava asiantuntija siis ymmärtää käyttämänsä toimintatavat ja pystyy esimerkiksi selittämään, miten tai miksi ne toimivat. Lisäksi hän pystyy soveltamaan osaamistaan myös uusiin tilanteisiin. (Hatano, 1988; Hatano & Inagaki, 1984; McMullen ym., 2020.)

Joustavan asiantuntijuuden käsitettä on käytetty useilla eri aloilla esimerkiksi selittämään eroja alan aloittelijoiden ja eksperttien välillä (Hatano & Oura, 2003). Matematiikan kontekstissa joustavan asiantuntijuuden käsitettä on käytetty kuvaamaan matemaattista osaamista, jota osataan soveltaa eri tilanteissa joustavasti (esim. McMullen ym., 2016), ja sitä pidetään yleisesti tavoiteltavana tuloksena matematiikan opetuksessa (Hatano & Oura, 2003; Hong ym., 2023; Sievert ym., 2019). Itse pidän joustavaa matemaattista asiantuntijuutta eräänlaisena matemaattisen joustavuuden yläkäsitteenä, jonka alle muu tutkimus asettuu. Kaikki matemaattisen joustavuuden tutkimukset eivät kuitenkaan eksplisiittisesti lähesty teemaa joustavan asiantuntijuuden näkökulmasta (Hong ym., 2023).

Vaikka joustava asiantuntijuus yleisesti tunnistetaan matematiikan opetuksessa tavoiteltavaksi lopputulokseksi, sen kehittymisen tukeminen on hankalaa, vaikkakin mahdollista (Hickendorff ym., 2022). Yleisesti ottaen tutkimuksissa on myös todettu, että suurin osa oppilaista ei ole kovin matemaattisesti joustavia ainakaan sellaisilla tavoilla, joilla joustavuutta on tutkimuksissa operationalisoitu (esim. Hickendorff ym., 2022; McMullen ym., 2019; Palkki, 2022; Pittalis, 2024).

Koska joustavan asiantuntijuuden määritelmään kuuluu kyky soveltaa osaamistaan uusissakin tilanteissa, joustavaan matemaattiseen osaamiseen liittyvät läheisesti rutiini- ja ei-rutiinitehtävien käsitteet. Rutiinitehtävillä tarkoitetaan usein sellaisia tehtäviä, jotka voidaan suorittaa yksinkertaisesti käyttämällä opittuja proseduureja ilman, että osaamista täytyy soveltaa. Ei-rutiinitehtävät sen sijaan ovat sellaisia tehtäviä, joissa osaamista täytyy soveltaa. (Pólya, 1966, s. 126–127, viitattu Beghetton (2017) tekstissä) Rutiiniasiantuntija voi olla todella tehokas ratkaisemaan rutiinitehtäviä käyttämällä tuttuja proseduureja, mutta ei osaa soveltaa osaamistaan uudenlaisiin tehtäviin. Joustava asiantuntija taas osaa hyödyntää osaamistaan myös silloin, kun käsillä on ei-rutiinitehtävä, joka vaatii tietojen yhdistelemistä ja soveltamista uudessa kontekstissa. (Hatano, 1988.)

Tässä tutkimuksessa rutiinitehtäviksi kutsutaan tehtäviä, joilla on yksi selvärajainen vastaus, ja joiden kaltaisia tehtäviä oppilaat ovat oletettavasti kohdanneet jo aiemmin. Joustavaa rationaalilukukäsitettä mittaavia lausekkeenmuodostamistehtäviä kohdellaan ei-rutiinitehtävinä, ja rajaamattomien ja rajattujen lukusuoratehtävien osalta rajanvetoa ei tehdä ennen tulosten analysointia. Erottelu rutiini- ja ei-rutiinitehtäviin on kuitenkin vahvasti kontekstisidonnaista: tehtävä, joka on yhdelle oppilaalle tuttu ja jonka kaltaisia hän on harjoitellut aiemmin, saattaa toiselle oppilaalle olla uusi tai esimerkiksi vaatia taitoja, joita hänellä ei vielä ole (Jäder ym., 2017). On myös tärkeää huomata, että esimerkiksi strategisen joustavuuden tutkimus tarkastelee usein joustavia ratkaisustrategioita tehtävissä, jotka edellä kuvatun määritelmän mukaan voitaisiin nimetä rutiinitehtäviksi. Jakolinja rutiini- ja ei-rutiinitehtäviin ei siis ole selkeä, sillä ensinnäkin jakolinja on yksilö- eikä tehtäväkohtainen, ja toisaalta myös niin kutsuttuja rutiinitehtäviä voi ratkaista joustavasti.

Joustavan asiantuntijuuden käsitteen valossa on mielestäni selvää, että pelkän joustavan strategiavalinnan keinoin on vaikeaa selittää kaikkia joustavaan matemaattiseen osaamiseen liittyviä taitoja ja tavoitteita. Tämän tutkimuksen pääkäsite, joustava lukukäsite, pyrkiikin osaltaan täydentämään joustavan strategiavalinnan piirtämää kuvaa joustavasta asiantuntijuudesta.

### 1.1.3 Joustava (rationaali-)lukukäsite

Joustava lukukäsite pyrkii vastaamaan osaltaan kysymykseen siitä, mikä *mahdollistaa* tiedon soveltamisen uusissa konteksteissa ja sitä kautta joustavan matemaattisen toiminnan. Joustava lukukäsite (adaptive number knowledge, ANK; käännetty aiemmin suomeksi myös adaptiivinen numerotieto (Palkki, 2022, s. 23)) on McMullenin ja kumppaneiden (2016) kehittämä käsite, jolla tarkoitetaan hyvin kehittynyttä tietoverkostoa lukujen ominaisuuksista ja niiden välisistä suhteista (McMullen ym., 2016, s. 172). McMullenin ja kumppaneiden mukaan joustava lukukäsite on olennainen osa niitä kykyjä, joita tarvitaan strategisen joustavuuden saavuttamiseksi (McMullen ym., 2016).

Joustava lukukäsite pohjaa ajatukseen siitä, että tilannesidonnaista strategista joustavuutta selittää laskustrategioiden tuntemisen ohella rikas tietoverkosto luvuista ja niiden välisistä ominaisuuksista (McMullen ym., 2016). Threlfall esitteli jo vuonna 2009 kritiikkiä vallalla olleelle teorialle strategiavalinnoista strategisen joustavuuden taustalla. Hänen mukaansa on epäselvää, valitseeko ihminen todella ongelmanratkaisutilanteessa ratkaisustrategiansa tuntemiensa strategioiden joukosta ennen ongelmanratkaisun varsinaista aloittamista. Hän esittelikin idean vähitellen tarkentuvasta ratkaisustrategiasta, joka kyllä voidaan jälkikäteen konstruoida, mutta joka rakentuu aina tilannekohtaisesti uudelleen. Threlfallin teoria tilanteessa rakentuvista strategioista perustuu ajatukseen siitä, että käsillä olevan ongelman luvut, niiden ominaisuudet ja niiden väliset suhteet ohjaavat ongelmanratkaisuprosessia ja ratkaisustrategian rakentumista. (Threlfall, 2009.) Joustava lukukäsite istuukin hyvin Threlfallin vähitellen tarkentuvien ratkaisustrategioiden teoriaan. Se antaa määritelmän, joka auttaa selittämään yksilöiden välisiä eroja heidän kyvyissään hyödyntää lukujen ja niiden välisten suhteiden ominaisuuksia ongelmanratkaisussa.

Joustavan lukukäsitteen on todettu olevan rutiiniosaamisesta erillinen osaamisen muoto. Riittävä rutiiniosaaminen on joustavan lukukäsitteen kannalta tarpeellista, muttei yksinään riitä joustavan lukukäsitteen saavuttamiseksi. Joustavan lukukäsitteen avulla voidaan siis erotella osaamista myös niiden oppilaiden välillä, joilla on vahvat perustaidot. (McMullen ym., 2016, 2017.) Joustavan lukukäsitteen on myös todettu olevan yhteydessä esialgebrallisiin taitoihin, ja sitä on pystytty kehittämään interventioiden avulla (Brezovszky ym., 2019; McMullen ym., 2017).

Joustavaa lukukäsitettä on tutkittu tähän mennessä kohtuullisen kattavasti. McMullen ja kumppanit esittelivät käsitteen vuonna 2016, ja sen jälkeen tutkimuksissa on laajennettu käsitettä kokonaisluvuista rationaalilukuihin, ja joustava rationaalilukukäsite esiteltiin vuonna 2020 (adaptive rational number knowledge ARNK (McMullen ym., 2020)). Joustava rationaalilukukäsite sisältää siis kokonaislukujen lisäksi muut rationaaliluvut, ja heijastelee hyvin rakentunutta tietoverkkoa rationaaliluvuista, niiden ominaisuuksista ja niiden välisistä suhteista. Hyvin kehittynyt joustava rationaalilukukäsite vaatii kykyä yhdistää osaamista rationaalilukujen esitysmuodoista, rationaalilukuaritmetiikasta sekä rationaalilukujen suuruudesta osaksi yhtä yhtenäistä prosessia. (McMullen ym., 2020.) Myös rationaaliluvuilla joustavan lukukäsitteen on todettu erottelevan myös rutiinitehtävissä taitavia oppilaita toisistaan, ja joustavaa rationaalilukukäsitettä on pystytty kehittämään intervention avulla (McMullen ym., 2020, 2023).

Joustavaa rationaalilukukäsitettä, kuten joustavaa lukukäsitettäkin, on toistaiseksi operationalisoitu vain yhdellä tehtävätyypillä, lausekkeentuottamistehtävällä (arithmetic sencence production task, kts. tarkempi kuvaus luvusta 3.2.1). Peruspiirteissään tehtävän tavoitteena on muodostaa annetuista luvuista mahdollisimman monta uniikkia lauseketta, joiden arvo on sama kuin tehtävässä annettu tavoitearvo. Joustavan rationaalilukukäsitteen teorian vahvistamiseksi olisi tärkeää, että onnistuttaisiin kehittämään tai löytämään lisää tehtäviä, jotka pystyisivät erottelemaan joustavaa rationaalilukuosaamista. (McMullen ym., 2020) Tämän tutkimuksen tavoitteena onkin tutkia rajaamattoman lukusuoratehtävän yhteyksiä lausekkeentuottamistehtävään ja rutiinitehtäviin rationaaliluvuilla, ja siten täydentää joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiskeinoja ja ymmärrystä joustavasta rationaalilukukäsitteestä.

Joustavan matemaattisen asiantuntijuuden ja erityisesti joustavan rationaalilukukäsitteen lisäksi tässä tutkimuksessa keskeisessä roolissa ovat rationaalilukuosaaminen ja lukusuoratehtävät. Seuraavaksi esitellään rationaalilukuosaamista ja sen kehittymistä, sekä esitellään joustavan rationaalilukukäsitteen rinnalla toinen hyvin kehittyneen rationaalilukukäsitteen määritelmä, integroitunut lukukäsite. Tämän jälkeen kerrotaan vielä tarkemmin lukusuoratehtävistä ja niiden käytöstä oppimispsykologisessa ja kasvatustieteellisessä tutkimuksessa.

## 1.2 Rationaaliluvut matematiikan osaamisen avaintekijänä

Rationaaliluvut ovat yksi perusopetuksen tärkeimmistä ja vaikeimmista matematiikan opetussisällöistä. Rationaalilukuihin luetaan kuuluvaksi positiiviset ja negatiiviset kokonaisluvut, murtoluvut, päättyvät ja sarjalliset desimaaliluvut sekä prosenttiluvut. Rationaalilukuosaamista tarvitaan niin matematiikassa edistymisessä kuin monissa vähemmän suoraan koulumatematiikkaan liittyvissä arjen ja työelämän taidoissakin (esim. Lortie-Forgues ym., 2015; Siegler & Pyke, 2013). Rationaalilukuosaaminen on kuitenkin yleisesti heikkoa ainakin länsimaissa, ja rationaalilukutaitojen oppiminen ja opettaminen on yleisesti tunnistettu vaikeaksi (Lortie-Forgues ym., 2015).

Yhdessä rationaalilukutaitojen keskeisyys koulussa ja sen ulkopuolella sekä rationaalilukutaitojen oppimiseen liittyvät vaikeudet tekevät rationaaliluvuista kiinnostavan ja tärkeän tutkimusaiheen. Rationaalilukutaitojen osaamista ja oppimista onkin tutkittu paljon. Tutkimus on vahvistanut käsitystä rationaalilukujen tärkeästä roolista koulumatematiikassa: rationaalilukuosaamisen on esimerkiksi todettu olevan yhteydessä yleiseen matemaattiseen kompetenssiin (Lortie-Forgues ym., 2015; Schneider ym., 2018) ja ennustavan tulevaa menestystä matematiikassa (Siegler ym., 2012). Tutkimuksen avulla on myös löydetty lupaavia tuloksia siitä, että oppilaiden rationaalilukutaitojen oppimista voidaan tukea opetuksen keinoin (Yu ym., 2024).

Miksi rationaalilukuihin liittyvien sisältöjen oppiminen sitten on niin hankalaa? Artikkelissaan ”Why rational number arithmetic is so difficult” Lortie-Forgues ja kumppanit (2015) käyvät läpi tekijöitä, jotka vaikuttavat rationaalilukutaitojen oppimisen vaikeuteen. He listaavat seitsemän keskeistä syytä: 1) murto- ja desimaalilukujen merkintätavat 2) murto- ja desimaalilukujen suuruusluokkien ymmärrettävyys 3) peruslaskutoimitusten vaikeaselkoisuus murto- ja desimaaliluvuilla 4) kokonais- ja rationaalilukujen peruslaskutoimitusten välisten suhteiden kompleksisuus 5) rationaalilukujen peruslaskutoimitusten kompleksisuus suhteessa toisiinsa (vrt. esim. murtolukujen ja desimaalilukujen laskuproseduureja) 6) vastakkaissuuntaiset vaikutukset kerrottaessa ja jaettaessa positiivisilla rationaaliluvuilla jotka ovat pienempiä tai suurempia kuin yksi 7) rationaalilukujen aritmeettisten operaatioiden erillisten komponenttien kokonaismäärä. (Lortie-Forgues ym., 2015, s. 206.)

Lortie-Forguesin ja kumppaneiden tarjoama lista rationaalilukutaitojen oppimisessa vaikeista asioista ei suinkaan ole kattava (Lortie-Forgues ym., 2015), mutta se tarjoaa hyvän yleiskatsauksen niihin asioihin, jotka tekevät rationaalilukuaritmetiikan oppimisesta vaikeaa. Kantavana teemana rationaalilukutaitojen oppimisen vaikeudessa vaikuttaa olevan se, että rationaaliluvut ja niiden laskutoimitukset poikkeavat monin tavoin kokonaisluvuista. Siegler ja Pyke (2013) toteavatkin, että ainoa kaikkia reaalilukuja yhdistävä asia on se, että ne voidaan kaikki sijoittaa suuruusjärjestykseen (samalle) lukusuoralle. Rationaalilukujen oppiminen siis haastaa oppilaiden aiempia käsityksiä luvuista: luonnollisten lukujen (positiiviset kokonaisluvut) ominaisuudet eivät ole universaalisti sovellettavissa kaikkiin lukuihin. (Siegler & Pyke, 2013.)

Oppilailla on kuitenkin taipumus soveltaa luonnollisten lukujen ominaisuuksia myös muihin rationaalilukuihin. Esimerkiksi murto- tai desimaalilukujen suuruusvertailussa yleinen virhe on tehdä päätelmiä samalla tavalla kuin kokonaisluvuilla. Tällainen päätelmä voisi olla esimerkiksi, että 5/8 on suurempi kuin 3/4, koska 5 ja 8 ovat suurempia lukuja kuin 3 ja 4, tai että 0,42 on suurempi kuin 0,6 koska 42 on suurempi luku kuin 6. Tällaisiin virheisiin johtavaa ajattelua kutsutaan luonnollisten lukujen harhaksi (natural number bias), ja sitä pidetään rationaalilukujen ja niiden laskutoimitusten kompleksisen luonteen rinnalla yhtenä isoimmista syistä sille, että rationaalilukutaitojen oppiminen on niin vaikeaa. (Van Dooren ym., 2015.)

### 1.2.1 Rationaalilukuosaamisen kehittyminen

Van Hoof ja kumppanit (2018) tutkivat rationaalilukuosaamisen kehittymistä 4–6 luokkalaisilla belgialaislapsilla. He käyttivät tutkimuksessaan testiä, joka mittasi kehittymistä kolmella alueella, joilla luonnollisten lukujen harha erityisesti näkyy. Nämä alueet olivat raitionaalilukujen suuruusosaaminen, rationaalilukujen aritmetiikka sekä rationaalilukujen tiheyden ymmärtäminen. (Van Hoof ym., 2018.) Rationaalilukujen tiheyden ymmärtäminen tarkoittaa sitä, että ymmärretään rationaalilukuja olevan ääretön määrä jokaisen kahden, myös näennäisesti ”peräkkäisen” (esim. 0,71 ja 0,72), luvun välissä (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Van Hoofin ja kumppaneiden (2018) testissä oli eroteltu murto- ja desimaalilukutehtävät jokaisessa osiossa, ja kysymykset oli rakennettu niin, että käyttämällä kokonaislukujen logiikkaa tehtävästä sai väärän tuloksen. Tutkimustulokset antoivat selviä viitteitä siitä, että rationaalilukuosaaminen kehittyy suuruusosaamisesta aritmeettiseen osaamiseen ja aritmeettisesta osaamisesta tiheyden ymmärtämiseen. Lisäksi jokaisella osa-alueella desimaalilukuihin liittyvä osaaminen kehittyi ennen murtolukuihin liittyvää osaamista. (Van Hoof ym., 2018.) Rationaalilukuosaaminen vaikuttaisi siis seuraavan tietynlaisia kehitysvaiheita kaikilla oppilailla.

Toinen Van Hoofin ja kumppaneiden tutkimuksen tärkeä huomio oli, että tutkittavista oppilaista vain hyvin pieni osa saavutti matemaattisesti pätevän, rationaalilukujen tiheyden ymmärtämisen sisältävän käsityksen rationaaliluvuista tutkimuksen aikana. Tämä on huomattavaa, sillä osalla oppilaista tutkimus päättyi samana kouluvuonna, jona heidän olisi alueensa opetussuunnitelman mukaan pitänyt saavuttaa tutkimuksessa käytetyn testin suorittamiseksi riittävä rationaalilukuosaaminen. (Van Hoof ym., 2018.)

Tutkimuksissa onkin todettu, että edes aikuisilla ei välttämättä ole matemaattisesti kovin kehittynyttä rationaalilukukäsitettä tai rationaalilukutaitoja, ja että luonnollisten lukujen harha vaikuttaa myös koulutettujen aikuisten menestykseen rationaalilukutehtävissä (DeWolf & Vosniadou, 2015). Myös esimerkiksi luokanopettajaopiskelijoiden rationaalilukutaidoissa on löydetty merkittäviä puutteita (Tossavainen, 2022; Van Steenbrugge ym., 2014).

### 1.2.2 Rationaalilukuosaamiseen vaikuttavia tekijöitä

Koska rationaalilukuosaaminen on keskimäärin heikkoa, tutkimuskentällä on luonnollisesti oltu rationaalilukuosaamisen kehittymisen askelten lisäksi kiinnostuneita siitä, mitkä asiat vaikuttavat rationaalilukuosaamisen kehittymiseen. Tätä on tutkittu interventiotutkimusten lisäksi selvittämällä, mitkä taidot ennustavat myöhempää rationaalilukuosaamista. Rationaalilukuihin liittyvistä osataidoista erityisesti kahteen on kiinnitetty huomiota viime vuosina. Nämä osataidot ovat rationaalilukujen suuruusosaaminen ja notaatioidenvälinen osaaminen (Braithwaite ym., 2022; Ching ym., 2024; L. K. Schiller & Siegler, 2023; Schneider ym., 2017).

Rationaalilukujen suuruusosaamisella tarkoitetaan kykyjä hahmottaa rationaalilukujen suuruutta suhteessa toisiinsa ja (mentaalisella) lukusuoralla. Käsitettä on operationalisoitu erilaisilla rationaalilukujen vertailu- ja järjestämistehtävillä, joista jälkimmäisen tyyppinen tehtävä on käytössä myös tässä tutkimuksessa. Lisäksi rationaalilukujen suuruusosaamista on mitattu lukusuoratehtävillä, joita tässä tutkimuksessa on myös käytetty runsaasti. (Lortie-Forgues ym., 2015; Schneider ym., 2018.) Tämän tutkimuksen keskiössä onkin lukusuoratehtävävariantti rajaamaton lukusuoratehtävä ja sen yhteydet muihin rationaalilukuosaamista mittaaviin tehtäviin.

Suuruusosaamisen rinnalla toinen rationaalilukuosaamisen tutkimuksessa merkittäväksi noussut osa-alue on notaatioidenvälinen osaaminen. Rationaaliluvuille on käytössä ainakin kolme eri notaatiota: murtoluvut, desimaaliluvut ja prosenttiluvut. Notaatioidenvälistä osaamista on operationalisoitu ainakin tehtävillä, joissa vertaillaan eri notaatioilla esitettyjen rationaalilukujen suuruuksia toisiinsa (Braithwaite ym., 2022; Schiller ym., 2024). Tässä tutkimuksessa notaatioiden välistä osaamista vaaditaan useammassa tehtävässä. Oppilaiden täytyi osata muuntaa murtolukuja desimaaliluvuiksi ja toisin päin, sekä ratkaista tehtäviä, joissa käytettiin murto- ja desimaalilukuja sekaisin.

Sekä suuruus- että notaatioidenvälisen osaamisen on todettu selittävän osaamista aritmeettisissa tehtävissä rationaaliluvuilla myös muiden muuttujien vaikutuksen kontrolloinnin jälkeen (Braithwaite ym., 2022; Schiller & Siegler, 2023). Erityisen huomionarvoista on, että molempien taitojen on myös todettu olevan yhteydessä yleiseen matemaattiseen kompetenssiin (Resnick ym., 2023; Schiller ym., 2023; Schiller ym., 2024; Siegler ym., 2011; Torbeyns ym., 2015). Tämä viittaa siihen, että rationaalilukuosaamisen osataidot vaativat sellaista osaamista, joka edistää myös yleisiä matemaattisia valmiuksia.

### 1.2.3 Hyvin kehittyneen rationaalilukukäsitteen indikaattorit: integroitunut lukukäsite ja joustava rationaalilukukäsite

Rationaalilukuosaaminen ja erityisesti rationaalilukukäsitteen kehittyminen ovat osa yleisempää lukukäsitteen kehittymisen tutkimusta. Siegler ja kumppanit (2011) ovat kehittäneet numeerisen kehityksen integroidun teorian, jonka avulla pyritään hahmottamaan lukukäsitteen kehittymistä. Teoria yhdistää kokonaislukukäsitteen ja kehittyneempien lukukäsitteiden, kuten rationaalilukukäsitteen, kehittymisen osaksi samaa jatkumoa. Numeerisen kehityksen integroidun teorian keskiössä on mentaalinen lukusuora, joka numeerisen kehityksen myötä kasvaa (suuremmat positiiviset luvut ja negatiiviset luvut) ja tarkentuu (rationaaliluvut, yhä tarkempi lukujen sijoittaminen), ja suuruusosaaminen nähdään lukukäsitteen kehittymiselle hyvin olennaiseksi. (Siegler ym., 2011.)

Kun numeerisen kehityksen integroitu teoria esiteltiin vuonna 2011, se oli ainutlaatuinen juuri siksi, että se yhdisti kokonais- ja murtolukukäsitteen kehittymisen toisiinsa (Siegler ym., 2011). Sittemmin teoriaa on laajennettu koskemaan kaikkia rationaalilukuja, ja teoria lukukäsitteen kehittymisestä on syventynyt ja laajentunut (Schiller ym., 2023; Siegler, 2016; Siegler & Lortie-Forgues, 2014). Nykyisellään teoria sisältää rationaalilukujen osalta erillisten notaatioiden ymmärtämisen, sekä olennaisena osana teoriaa notaatioidenvälisen osaamisen. Schiller ja Siegler myös esittelivät vuonna 2023 käsitteen integroitunut lukukäsite (integrated number sense) kuvaamaan numeerisen kehityksen integroidun teorian mukaista hyvin kehittynyttä lukukäsitettä, joka nähdään lukukäsitteen kehityksen päätepisteenä. (Schiller & Siegler, 2023.)

Integroitunut lukukäsite määritellään kyvyksi ”sujuvasti muuntaa ja vertailla (lukujen) suuruuksia notaatioiden sisällä ja välillä”, ja siihen kuuluu kolme komponenttia: 1) Tarkkuus. Kyky esittää luvun suuruus mahdollisimman tarkasti esimerkiksi lukusuoralla riippumatta sen notaatiosta. 2) Muuntaminen (translation). Kyky ilmaista annettu luku eri tavalla samassa tai toisessa notaatiossa, tilanteesta riippuen joko tarkasti tai arvioiden. 3) Vertailu. Kyky vertailla lukujen suuruuksia keskenään riippumatta niiden notaatioista. (Schiller & Siegler, 2023, s. 2.) Schillerin ja kumppaneiden tutkimukset antavat viitteitä siitä, että isolla osalla peruskoululaisia ja yliopisto-opiskelijoita lukukäsite ei ole riittävän kehittynyt, jotta sitä voitaisiin kutsua integroituneeksi. Erityisesti notaatioidenvälinen osaaminen oli molemmilla ryhmillä heikompaa kuin notaatioiden sisäinen osaaminen. (Schiller ym., 2023; Schiller & Siegler, 2023.)

Numeerisen kehityksen integroitu teoria on siis yhtenäinen kokonais- ja rationaalilukukäsitteiden kehittymisen teoria, joka painottaa suuruusosaamisen ja notaatioidenvälisen osaamisen tärkeyttä tässä kehityksessä. Teoriassa integroitunut lukukäsite nähdään kehityksen päätepisteenä. (Schiller & Siegler, 2023.) Integroituneessa lukukäsitteessä voidaan nähdä piirteitä myös joustavasta asiantuntijuudesta: hyvin kehittynyt suuruusosaaminen esimerkiksi mahdollistaa omien ratkaisujen arvioinnin, ja notaatioidenvälinen osaaminen taas esimerkiksi joustavan siirtymisen notaatiosta toiseen, ja siten itselle sopivimman ratkaisustrategian valitsemisen.

Itse näenkin numeerisen kehityksen integroidussa teoriassa ja tässä tutkimuksessa käytetyssä joustavassa rationaalilukukäsitteessä paljon samaa. Kuten jo aiemmin on todettu, joustavalla rationaalilukukäsitteellä tarkoitetaan hyvin kehittynyttä tietoverkostoa rationaalilukujen ominaisuuksista ja niiden välisistä suhteista, ja sitä käytetään kuvailemaan oppilaiden menestystä aritmeettisessa lausekkeentuottamistehtävässä (McMullen ym., 2020).

Joustavan rationaalilukukäsitteen on todettu kykenevän erottelemaan osaamista niiden oppilaiden välillä, joilla on vahvat taidot rutiinitehtävissä rationaaliluvuilla. Vahva konseptuaalinen ja proseduraalinen rationaalilukuosaaminen ovat siis vaatimuksia joustavalle rationaalilukukäsitteelle, mutta eivät yksinään selitä variaatioita oppilaiden osaamisessa. Joustavan rationaalilukukäsitteen erityisyys löytyykin juuri tästä: se kykenee pääsemään käsiksi taitoihin, joita rutiinitehtävät eivät yksinään onnistu mittaamaan. (McMullen ym., 2020.)

Sen lisäksi, että joustava rationaalilukukäsite erottelee osaamista myös oppilailla, joilla on vahva rutiiniosaaminen rationaaliluvuilla, on sen todettu myös ennustavan myöhempää algebraosaamista. Tämä yhteys saattaa liittyä siihen, että joustava rationaalilukukäsite mahdollistaa joustavan tietojen soveltamisen ja lukujen ominaisuuksien tuntemisen. (McMullen ym., 2020.) Tulos vahvistaa käsitystä siitä, että joustavan rationaalilukukäsitteen tutkiminen ja kehittymisen tukeminen on tärkeää.

Tutkimuksessa onkin todettu, että joustavan rationaalilukukäsitteen kehittymiseen pystytään vaikuttamaan. Interventiotutkimuksessa havaittiin, että joustavaa rationaalilukukäsitettä pystytään vahvistamaan opetuspelin avulla. Rationaalilukutaitoja ja joustavaa rationaalilukukäsitettä kehittämään suunniteltua peliä pelanneet oppilaat kehittyivät rationaalilukutaidoissaan ja joustavassa rationaalilukukäsitteessään kontrolliryhmää paremmin. Lisäksi pelaamisen määrä ja laatu ennustivat taitojen kehittymistä. (McMullen ym., 2023.)

Palataan sitten takaisin joustavan rationaalilukukäsitteen ja integroituneen lukukäsitteen välisiin käsitteellisiin samankaltaisuuksiin. Joustavan rationaalilukukäsitteen ja integroituneen lukukäsitteen taustat ovat erilaiset: joustavan rationaalilukukäsitteen avulla pyritään tutkimaan joustavaa asiantuntijuutta matematiikassa, kun taas integroituneen lukukäsitteen taustat ovat lukukäsitteen kehittymisen tutkimuksessa (McMullen ym., 2020; Schiller & Siegler, 2023). Näen käsitteissä siitä huolimatta paljon samaa. Molemmat käsitteet nimittäin pyrkivät kuvaamaan pitkälle kehittynyttä rationaalilukuosaamista. Lisäksi on paljon molempiin käsitteisiin liittyviä taitoja, jotka mainitaan eksplisiittisesti vain toisen käsitteen määritelmässä, mutta joihin joko viitataan tai joita tarvitaan epäsuorasti myös toisen käsitteen mukaisessa osaamisessa. Taulukkoon 1 on koottu joustavan rationaalilukukäsitteen ja integroituneen lukukäsitteen yhtäläisyyksiä ja eroja.

Esimerkiksi rationaalilukujen suuruusosaaminen ja notaatioidenvälinen osaaminen mainitaan integroituneen lukukäsitteen määritelmässä (Schiller & Siegler, 2023), mutta taitoja vaaditaan myös kehittyneessä joustavassa rationaalilukukäsitteessä. Aritmeettisessa lausekkeentuottamistehtävässä molemmista taidoista on nimittäin hyötyä, eikä tehtävässä pysty saamaan kovin korkeita pisteitä ilman näitä taitoja (McMullen ym., 2020). Toisaalta taas tiedon yhdistyneisyyden ja lukujen ominaisuuksien tuntemisen osalta tilanne on päinvastainen: molemmat mainitaan eksplisiittisesti joustavan rationaalilukukäsitteen määritelmässä (McMullen ym., 2023), mutta taitoja vaaditaan myös integroituneessa lukukäsitteessä. Esimerkiksi suuruusosaaminen vaatii lukujen ominaisuuksien tuntemista.

Näen joustavalla rationaalilukukäsitteellä ja integroituneella lukukäsitteellä monien yhtenevien ominaisuuksien lisäksi myös kaksi olennaista eroa. Ensinnäkin vain joustavaan rationaalilukukäsitteeseen kuuluu ajatus lukujen välisten aritmeettisten suhteiden tuntemisesta. Integroituneen lukukäsitteen määritelmässä lukujen välinen vertailu nimittäin rajoittuu niiden suuruusvertailuun, kun taas joustavaan rationaalilukukäsitteeseen kuuluu olennaisesti lukujenvälisten suhteiden monipuolinen tunteminen. (McMullen ym., 2020; Schiller & Siegler, 2023.) Toinen ero joustavan rationaalilukukäsitteen ja integroituneen lukukäsitteen välillä on niiden vaatima taitotaso. Integroitunut lukukäsite vaatii kyllä monipuolista ja kehittynyttä rutiininomaista rationaalilukuosaamista, mutta joustava rationaalilukukäsite erottelee osaamista myös niiden oppilaiden välillä, joiden rutiiniosaaminen on vahvaa (McMullen ym., 2020), ja nähdäkseni saattaisi jo täyttää integroituneen lukukäsitteen määritelmän.

Näenkin tärkeänä yhdistää lukukäsitteen kehittymisen ja joustavan asiantuntijuuden tutkimuksen toisiinsa. Joustava asiantuntijuus ja kehittynyt matemaattinen osaaminen nimittäin voivat hyvinkin tukea ja täydentää toisiaan. Tutkimus antaa viitteitä siitä, että hyvä rutiiniosaaminen tukee joustavan asiantuntijuuden kehittymistä (McMullen, 2014; McMullen ym., 2020), ja toisaalta taas joustavan asiantuntijuuden kehittämiseen tähtäävät interventiot ovat kehittäneet myös osallistujien rutiiniosaamista (McMullen ym., 2023).

Taulukko 1 Integroituneen lukukäsitteen ja joustavan rationaalilukukäsitteen yhtäläisyyksiä ja eroja

<table>
<tr><td colspan="2">Lukukäsitteet</td><td>Integroitunut lukukäsite</td><td>Joustava rationaalilukukäsite</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tausta</td><td>lukukäsitteen kehittyminen</td><td>joustava asiantuntijuus</td></tr>
<tr><td colspan="2">Määritelmä</td><td>”kyky muuntaa ja vertailla lukuarvoja sujuvasti notaatioiden sisällä ja niiden välillä” (Schiller & Siegler, 2023, s. 2)</td><td>”hyvin kehittynyt tietoverkosto rationaalilukujen ominaisuuksista ja niiden välisistä aritmeettisista suhteista” (McMullen ym., 2023, s. 2)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Osataidot</td><td>suuruusosaaminen</td><td>määritelmässä</td><td>tehtävissä</td></tr>
<tr><td>notaatioidenvälinen osaaminen</td><td>määritelmässä, vahva korostus</td><td>tehtävissä</td></tr>
<tr><td>lukujen ominaisuuksien tunteminen</td><td>osittain määritelmässä (esim. arviointi- ja vertailutaito ja suuruusosaaminen), mutta vähemmän läsnä</td><td>määritelmässä</td></tr>
<tr><td>tiedon yhdistyneisyys</td><td>seuraa osittain määritelmästä, muttei suoraan ilmaistu</td><td>olennainen osa määritelmää</td></tr>
<tr><td>lukujen väliset (aritmeettiset) suhteet</td><td>puuttuu</td><td>olennainen osa määritelmää</td></tr>
<tr><td colspan="2">Taitotaso</td><td>hyvä osaaminen perustehtävissä, paino notaatioidenvälisessä osaamisessa</td><td>hyvä osaaminen perustehtävissä (mukaan lukien notaatioidenväliset tehtävät) ei riitä, erottelee hyviä rutiiniosaajia</td></tr>
</table>

Schiller ja kumppanit toteavat, että kaikki eivät suinkaan saavuta integroitunutta rationaalilukukäsitettä: kehitystä ei näytä tapahtuvan kuudennelta kahdeksannelle luokalle, ja yliopisto-opiskelijoista neljänneksellä ei vaikuttanut olevan integroitunutta rationaalilukukäsitettä (Schiller ym., 2023; Schiller & Siegler, 2023). Joustava rationaalilukukäsite voisikin mahdollisesti täydentää selitystä sille, miksi lukukäsitteen kehitys osalla pysähtyy matemaattisesti epätäydelliseen rationaalilukukäsitteeseen. On kuitenkin tärkeää muistaa myös se, että joustava asiantuntijuus ei ole taito, jota lähdetään kehittämään sen jälkeen, kun rutiiniasiantuntijuus on saavutettu. Sen sijaan joustava ja rutiiniasiantuntijuus voivat kehittyä vastavuoroisesti, ja joustavan asiantuntijuuden kehittymistä voidaan tukea jo varhaisesta vaiheesta lähtien. (Hickendorff ym., 2022)

Rationaaliluvut ovat siis erittäin tärkeitä yleisen matemaattisen kompetenssin ja arjen taitojen kannalta. Rationaalilukutaitojen oppiminen on kuitenkin monesta syystä hankalaa, ja yksi isoimmista syistä on se, että monet rationaalilukujen ominaisuudet poikkeavat merkittävästi kokonaisluvuista. (Lortie-Forgues ym., 2015; Siegler & Pyke, 2013.) Tämä johtaa monilla oppilailla ja aikuisilla luonnollisten lukujen harhaan (Van Dooren ym., 2015). Rationaalilukuosaamisen tärkeimpiä osataitoja ovat suuruusosaaminen ja notaatioidenvälinen osaaminen (Braithwaite ym., 2022; Ching ym., 2024; Schiller ym., 2023; Schneider ym., 2017). Näille kahdelle pohjautuu myös numeerisen kehityksen integroituneen teorian mukainen integroitunut lukukäsite (Schiller & Siegler, 2023). Joustava rationaalilukukäsite on integroitunutta lukukäsitettä laajempi rationaalilukuosaamisen kuvaaja, joka määritellään hyvin kehittyneeksi tietoverkoksi rationaalilukujen ominaisuuksista ja niiden välisistä suhteista (McMullen ym., 2020, 2023). Joustavaa rationaalilukukäsitettä on kuitenkin toistaiseksi operationalisoitu vain yhdellä tehtävällä (McMullen ym., 2020), ja tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, voidaanko joustavaa rationaalilukukäsitettä mitata lausekkeentuottamistehtävän lisäksi myös rajaamattoman lukusuoratehtävän avulla.

### 1.2.4 Rationaaliluvut Floridan matematiikan opetussuunnitelmassa

Tämän tutkimuksen aineisto oli kerätty Yhdysvalloissa, Floridassa. Yhdysvalloissa ei ole yhtä yhtenäistä opetussuunnitelmaa, vaan jokainen osavaltio laatii oman opetussuunnitelmansa (U.S. Department of Education, ei päivämäärää.). Maassa on olemassa myös yhteiset standardit osaamiselle matematiikassa ja englannin kielessä, nimeltään Common core standards, johon iso osa osavaltioista on sitoutunut. Florida kuuluu kuitenkin siihen pieneen osaan osavaltioita, joka ei ole sitoutunut yhteisiin opetuksen standardeihin. (“Common Core,” 2024.) Sen sijaan osavaltiolla on omat opetussuunnitelmansa. Matematiikan osalta opetussuunnitelma on nimeltään Florida’s B.E.S.T. Standards for Mathematics (Florida Department of Education, 2024).

Floridassa rationaalilukujen opetus alkaa ensimmäisellä luokalla (6–7-vuotiaat) kuvioiden osiin jakamisella ja osien nimeämisellä. Kolmannella luokalla esitellään murtolukujen kirjallinen esitystapa ja harjoitellaan samannimisten murtolukujen suuruusvertailua. Neljännellä luokalla esitellään desimaaliluvut. Tämän jälkeen eksplisiittinen rationaalilukujen opetus jatkuu vähitellen syventäen seitsemännelle luokalle (12–13-vuotiaat) asti, jolloin tavoitteena on ymmärtää murto- ja desimaalilukujen olevan rationaalilukujen esitysmuotoja ja varmistaa peruslaskutoimitusten sujuvuus rationaaliluvuilla. (*Florida's B.E.S.T. Standards: Mathematics*, ei päivämäärää.)

Tämän tutkimuksen osallistujat olivat tutkimushetkellä yhdeksäsluokkalaisia, joten eksplisiittinen opetus liittyen rationaalilukuihin oli heidän osaltaan päättynyt. Oppilailla voidaan siis olettaa olevan riittävät tiedot ja taidot tutkimuksessa käytettyjen tehtävien ratkaisemiseksi. Toisaalta kulunut aika erillisestä rationaalilukuihin liittyvästä opetuksesta saattaa osaltaan vaikuttaa siihen, että taidot ovat osalla päässeet jo unohtumaan.

Rationaaliluvut ovat tärkeä oppimistavoite myös Suomessa, ja opetussuunnitelman sisällöt ovat hyvin samankaltaisia, joskin vähemmän tarkasti määriteltyjä kuin Floridassa. Floridaan verrattuna Suomessa kuitenkin edetään sisältöjen kanssa hieman hitaammin. Esimerkiksi murtolukujen jakaminen murtoluvuilla kuuluu vasta yläasteen sisältöihin (Opetushallitus, 2014, s. 909), ja sujuvat rationaalilukujen peruslaskutoimitukset ovat osa päättöarvioinnin arvosanan 8 kriteereitä (Opetushallitus, 2014, s. 920), kun ne Floridassa asetetaan tavoitteeksi jo Suomalaisten kuudesluokkalaisten ikäisille oppilaille.

## 1.3 Lukusuoratehtävät matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkimuksessa

Lukusuoratehtäviä on käytetty paljon matematiikan oppimisen ja osaamisen tutkimuksessa (Schneider ym., 2018). Lukusuoratehtäviä pidetään tehokkaana välineenä erityisesti murtolukujen oppimisessa, sillä ne auttavat esimerkiksi vahvistamaan käsitystä murtoluvuista lukuina, joilla on yksiselitteinen suuruus. Lisäksi tehtävien ajatellaan vahvistavan ja syventävän murtolukuosaamista, sillä lukusuorat tarjoavat uuden mallin, jolle siirtää aiempaa osaamista. (Cramer ym., 2019) Tämän tutkimuksen päätavoitteena on tutkia erästä joustavan lukukäsitteen tutkimuksessa jo hieman käytettyä rajaamatonta lukusuoratehtävätyyppiä ja sen yhteyksiä joustavuutta ja rutiiniosaamista mittaaviin rationaalilukutehtäviin. Tutkimuksessa on lisäksi käytössä enemmän tutkittu rajattu lukusuoratehtävätyyppi. Ennen näiden nimenomaisten lukusuoratehtävien ja niihin liittyvän tutkimuksen tarkempaa esittelyä on tarpeen käydä läpi lukusuoratehtäviä ja niiden tutkimusta hieman yleisemmällä tasolla.

Lukusuorat ovat olennainen osa kehityspsykologista lukukäsitteen kehittymisen tutkimusta, ja esimerkiksi aiemmin käsitellyn integroidun lukukäsitteen tutkimuksessa on käytetty lukusuoratehtäviä (Schiller ym., 2024). Tämän kaltaisessa kontekstissa lukusuoratehtävien ajatellaan antavan tietoa esimerkiksi murtolukujen ymmärtämisestä ja sisäisestä lukusuorasta (Siegler & Lortie-Forgues, 2014). Lukukäsitteen kehittymisen tutkimuksen lisäksi lukusuoratehtäviä käytetään myös osana koulutuspainotteisempaa matematiikan oppimisen tutkimusta (esim. Kim, 2024). Tässä tutkimuksessa käytettäviä rajattuja lukusuoratehtäviä on aiemmin käytetty lukukäsitteen kehittymisen tutkimuksessa, kun taas rajaamattomia lukusuoratehtäviä on käytetty erityisesti opetuskokeiluissa.

Varmasti johtuen siitä, että eri tutkimussuuntaukset käyttävät lukusuoratehtäviä osittain erilaisten tavoitteiden saavuttamiseksi, on erilaisten lukusuoratehtävien määritteleminen ja keskinäinen vertailu tutkimuskentällä värikästä, eivätkä kaikki lukusuoratehtävien variaatiot mahdu samojen määritelmien sisään. Lukukäsitteen kehittymisen tutkimuksessa on käytössä jaottelu rajattuihin ja rajaamattomiin lukusuoratehtäviin. Oppimisen tukemisen näkökulmasta tehdyssä tutkimuksessa lukusuoratehtävät on taas jaoteltu esimerkiksi tehtäviin, joissa yksikkö on annettu valmiiksi ja tehtäviin, joissa yksikkö täytyy itse konstruoida. (Vrt. esim. Cramer ym., 2019; Schneider ym., 2018.)

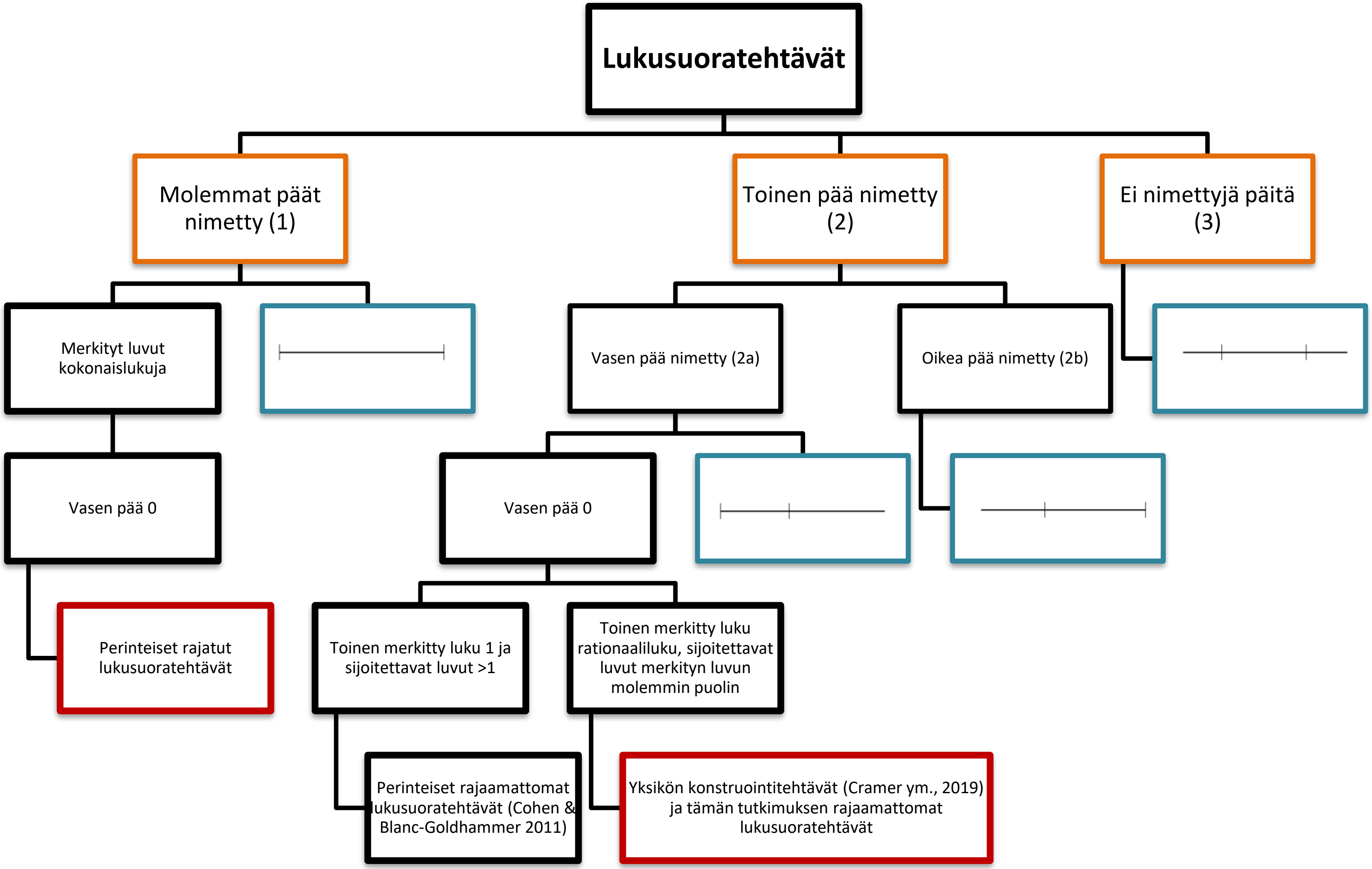
Esimerkiksi Qin ja kumppanit (2024) pyrkivät tutkimuksessaan rakentamaan kattavan lukusuoratehtävien taksonomian, joka perustuu rajattu-rajaamaton-jaotteluun ja ottaa huomioon useita muitakin lukusuoratehtävien varioitavissa olevia elementtejä (Qin ym., 2024). Tämän taksonomian sisään on kuitenkin vaikeaa sijoittaa esimerkiksi tässä tutkimuksessa käytettyä rajaamatonta lukusuoratehtävää, joten se on sellaisenaan riittämätön kaikkien tutkimuskentällä käytettävien lukusuoratehtävien määrittelyyn.

Esittelenkin seuraavaksi toisenlaisen lukusuoratehtävien perustaksonomian, joka voisi palvella laajemman tutkimuskentän tarpeita lukusuoratehtävien luokittelemisessa. Kuvassa 1 kuvattu taksonomia sisältää perustason variaation tehtävien välillä, ja siihen on lisäksi sijoitettu tarkennuksineen tässä tutkimuksessa käytetyt lukusuoratehtävät, sekä yleisesti käytössä olevan määritelmän mukaiset rajaamattomat lukusuoratehtävät.

Perustason erotteleva piirre erilaisten lukusuoratehtävien välillä on nähdäkseni lukusuoralle valmiiksi merkittyjen pisteiden sijainti. Merkittyjä pisteitä tulee olla vähintään kaksi, jotta lukusuoralla olisi mittakaava (Witherspoon, 2019), ja nämä pisteet voi sijoittaa: lukusuoran molempiin päihin (1), toisen pisteen lukusuoran päähän ja toisen muualle lukusuoralla (2), tai molemmat pisteet muualle kuin lukusuoran päihin (3). Lisäksi vaihtoehdossa (2) on mielestäni oleellisesti eri asia, onko lukusuoran päistä merkitty vasen (2a) vai oikea (2b).

Lukusuoralle valmiiksi sijoitettujen lukujen sijainnin lisäksi lukusuoratehtäviä voidaan varioida myös monin muin tavoin, esimerkiksi tehtävässä käytettyjen lukujen tyypin (kokonais-, murto- tai rationaaliluvut, symbolinen tai ei-symbolinen merkintätapa) tai ylimääräisten tuki- tai hämäysviivojen avulla. Lisäksi ainakin rajatusta lukusuoratehtävästä on kirjallisuudessa esitelty tuottamis- ja havainnointiversiot, joista ensimmäisessä pyydetään sijoittamaan annettu luku lukusuoralle, ja jälkimmäisessä sen sijaan pyydetään nimeämään lukusuoralle jo merkitty luku. (Schneider ym., 2018) Tässä tutkimuksessa käytetyt lukusuoratehtävät olivat kaikki tuottamistehtäviä, ja niissä käytettiin symbolisia rationaalilukuja. Kuvan 1 taksonomia ei sisällä kaikkia mahdollisia lukusuoratehtävien variointikeinoja, vaan lukusuoratehtävien tärkeimmät variantit.

Tässä tutkimuksessa käytettiin kahta lukusuoratehtävätyyppiä: tehtävää, jossa lukusuoran molemmat päät oli nimetty kokonaisluvuilla (rajattu lukusuoratehtävä), ja tehtävää, jossa lukusuoran vasen pää oli nimetty, ja lukusuoralle oli merkitty jokin rationaaliluku (rajaamaton lukusuoratehtävä) (kts. kuva 1). Molemmissa tehtävissä lukusuoran vasempaan laitaan merkitty luku oli 0, ja sijoitettavat luvut olivat rationaalilukuja. Seuraavaksi esitellään tässä tutkimuksessa käytetyt lukusuoratehtävät sekä niihin liittyvää tutkimusta tarkemmin.




Kuva 1 Lukusuoratehtävien taksonomia. Punaisella merkitty tässä tutkimuksessa käytetyt tehtävätyypit.

### 1.3.1 Rajatut lukusuoratehtävät

Tutkimuskirjallisuudessa runsaasti esiintyvä lukusuoratehtävätyyppi on rajattu lukusuoratehtävä, jossa lukusuoran vasempaan laitaan on merkitty 0, ja oikeaan laitaan jokin positiivinen kokonaisluku, tyypillisesti esimerkiksi 1, 5, 10, 100 tai 1000. Rajattuja lukusuoratehtäviä on viime vuosikymmeninä käytetty erityisesti lukukäsityksen kehitykseen liittyvässä tutkimuksessa, mutta myös opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Tehtävän on ajateltu mittaavan lukujen suuruuden arviointikykyä, ja siten heijastelevan lukukäsitteen kehittymistä. Tuoreemmat tutkimustulokset viittaavat kuitenkin siihen, että rajattu lukusuoratehtävä ei mittaa puhtaasti lukujen suuruuden arvioimiskykyä, vaan ennemmin monipuolisempaa valikoimaa matemaattisia taitoja. (Schneider ym., 2018.)

Kiinnostus rajattua lukusuoratehtävää kohtaan onkin kasvanut entisestään, kun siinä menestymisen on todettu heijastelevan kapea-alaisen lukujen suuruuden arvioimiskyvyn lisäksi yleistä matemaattista kompetenssia. Tätä yhteyttä on pyritty selittämään monin eri tavoin. Selityksenä on käytetty lukujen suuruuskäsityksen mittaamisen lisäksi myös ainakin suhteellisen päättelyn kykyjen mittaamista. Näiden kahden lisäksi selityksiä rajatun lukusuoratehtävän ja matemaattisen kompetenssin väliselle yhteydelle on haettu myös esimerkiksi avaruudellisesta hahmotuskyvystä, laskustrategioista ja älykkyydestä. (Schneider ym., 2018.)

Tutkimuskentällä esiintyykin tätä nykyä erilaisia mielipiteitä siitä, mitä taitoja rajattu lukusuoratehtävä heijastelee. Joka tapauksessa tehtävätyyppi vaatii suorittajaltaan ainakin taitoja pyöristämisessä, laskemisessa ja suhteellisessa päättelyssä. Koska nämä kaikki vaativat ainakin jonkinlaisia mielensisäisiä lukujen kokoluokan kuvauksia, voidaan rajatun lukusuoratehtävän edelleen ajatella mittaavan myös lukujen suuruuskäsitystä. (Schneider ym., 2018.)

Vaikka yhteyttä ei vielä osatakaan täysin selittää, viittaa rajatun lukusuoratehtävän vahva korrelaatio yleisen matemaattisen kompetenssin kanssa joka tapauksessa siihen, että tehtävän avulla päästään käsiksi ainakin johonkin matemaattisen kompetenssin keskeiseen osa-alueeseen. Tämän tutkimuksen kannalta on erityisen kiinnostavaa, että rajatun lukusuoratehtävän yhteyden matemaattiseen kompetenssiin on todettu olevan vahvempi, kun tehtävässä on pyydetty sijoittamaan lukusuoralle rationaalilukuja kokonaislukujen sijaan. (Schneider ym., 2018.)

Rajattua lukusuoratehtävää on käytetty aiemminkin myös joustavan lukukäsitteen tutkimuksessa. Tehtävää on silloin käytetty osana lukujen suuruusosaamista mittaavia rutiinitehtäviä. (Esim. McMullen ym., 2020, 2023.) Tässä tutkimuksessa rajattuja lukusuoratehtäviä käsitellään kuitenkin rutiinitehtävistä erillisenä tehtäväkategoriana, koska rajattujen lukusuoratehtävien suora yhteys matemaattiseen kompetenssiin on niin selvä. Tämä mahdollistaa myös rajattujen ja rajaamattomien lukusuoratehtävien keskinäisen vertailun.

### 1.3.2 Rajaamattomat lukusuoratehtävät

Rajattujen lukusuoratehtävien lisäksi tässä tutkimuksessa käytetään rajaamattomia lukusuoratehtäviä, joita on aiemmin käytetty osana joustavan rationaalilukukäsitteen kehittämiseen tähtäävää interventiota. Tämän tutkimuksen puitteissa tehtävää itseään ei ole tarkasteltu tarkemmin. (McMullen ym., 2023.). Lisäksi vastaavia tehtäviä esiintyy osana matematiikan oppimisen ja opettamisen tutkimusta, mutta nämä tutkimukset ovat olleet tyypillisesti laadullisia, ja niissä käytetty aineisto on ollut pieni (esim. Cramer ym., 2019; Witherspoon, 2019). Tämä tutkimus onkin tiettävästi ensimmäinen, jossa käytettyä rajaamatonta lukusuoratehtävätyyppiä tarkastellaan laajasti määrällisin menetelmin.

Tässä tutkimuksessa käytetyissä rajaamattomissa lukusuoratehtävissä lukusuoran vasempaan laitaan on merkitty 0, ja lukusuoralle merkitty jokin rationaaliluku. Lukusuoralle sijoitettava luku saattaa olla merkittyä lukua pienempi tai suurempi, ja merkitty ja sijoitettava luku ovat välillä samaa ja välillä eri notaatiota keskenään (murto- ja desimaalilukunotaatiot).

Edellä kuvattua rajaamatonta lukusuoratehtävätyyppiä on kirjallisuudessa kutsuttu myös yksikön uudelleenkonstruointitehtäväksi (reconstructing the unit task, Cramer ym., 2019; Tunç-Pekkan, 2015). Tehtävän nimi tulee sen alavariantista, jota Tunç-Pekkan ja kumppanit (2015) käyttivät. Tässä variantissa tehtävänä on aina ilmoittaa kokonaisen yksikön (numeron 1) sijainti lukusuoralla. On kuitenkin paljon tehtäviä, joissa yksikön uudelleenkonstruointi ei ole tarpeellista tehtävän suorittamiseksi (esim. eräs tehtävä tässä tutkimuksessa: annetut luvut 0 ja 2/3, sijoita 1 1/3). Tällaisia tehtäviä käyttivät myös esimerkiksi Cramer ja kumppanit (2019) sekä McMullen ja kumppanit (2023) (Cramer ym., 2019; McMullen ym., 2023). Koska tässä tutkimuksessa käytettävistä rajaamattomista lukusuoratehtävistä vain yhdessä todellisuudessa pyydetään vastaajaa uudelleenkonstruoimaan yksikkömitta, kutsutaan tehtävätyyppiä yksinkertaisesti rajaamattomaksi lukusuoratehtäväksi. Sana toimii myös selkeänä vastinparina rajatuille lukusuoratehtäville.

Tutkimuksen mukaan rajaamattomien lukusuoratehtävien ratkaisemisessa tarvitaan monenlaista osaamista. Tarvittavia taitoja ovat muun muassa yksikkömurtoluvun (1/n) löytäminen, yhtä suuriin osiin jakaminen sekä lukujen välisten suhteiden hyödyntäminen. (Cramer ym., 2019; McMullen ym., 2023.) McMullenin ja kumppaneiden (2023) tutkimuksessa myös todettiin, että matematiikkapeli, jossa käytettiin muun muassa rajaamattomia lukusuoratehtäviä, kehitti osallistujien joustavaa rationaalilukuosaamista ja rutiiniosaamista rationaaliluvuilla (McMullen ym., 2023). Koska rajaamaton lukusuoratehtävä vaatii ratkaisijaltaan samankaltaisia taitoja, joita käytetään kuvaamaan joustavaa rationaalilukukäsitettä, ja koska tehtävän on myös osaltaan todettu kehittävän joustavaa rationaalilukukäsitettä, on mahdollista, että tehtävä itse heijastelisi joustavaa rationaalilukukäsitettä. Tämän yhteyden tutkiminen onkin yksi tämän tutkimuksen päätavoitteista.

Vaikka tässä tutkimuksessa rajaamattomilla lukusuoratehtävillä tarkoitetaan kaikkia sellaisia tehtäviä, joissa lukusuoran vasempaan laitaan on merkitty 0 ja lukusuoralle jokin rationaaliluku, kirjallisuudessa rajaamattomalla lukusuoratehtävällä tarkoitetaan yleensä suppeampaa tehtävävarianttia. Cohen ja Blanc-Goldhammer esittelivät rajaamattoman lukusuoratehtävän nykyisin tunnetuimman muodon vuonna 2011. Heidän tavoitteenaan oli luoda lukusuoratehtävä, joka olisi rajattua lukusuoratehtävää parempi heijastelemaan aitoja kokonaislukujen suuruusarvioita suhteellisen arvioinnin sijaan. Tässä rajaamattomassa lukusuoratehtävässä lukusuoralla annetaan aina luku yksi yksikkömitan merkiksi, ja arvioitavat luvut ovat yhtä suurempia kokonaislukuja. (Cohen & Blanc-Goldhammer, 2011, kts. myös kuva 1)

Vuonna 2021 julkaistussa rajaamattomien lukusorien systemaattisessa kirjallisuuskatsauksessaan Reinert ja Moeller vahvistavat Cohenin ja Blanc-Goldhammerin väitteen siitä, että heidän kehittämänsä rajaamaton lukusuoratehtävä saattaa todella olla rajattua tehtäväversiota parempi arvioimaan puhtaasti lukujen suuruuden arvioimiskykyä (Reinert & Moeller, 2021). Toisin kuin rajatulla lukusuoratehtävällä, Cohenin ja Blanc-Goldhammerin rajaamattomalla lukusuoratehtävällä ei ole todettu olevan merkittävää yhteyttä yleiseen matemaattiseen kompetenssiin (Schneider ym., 2018). Tämä vahvistaa taas osaltaan teoriaa siitä, että Cohenin ja Blanc-Godlhammerin rajaamaton lukusuoratehtävä olisi rajattua versiota puhtaammin lukujen suuruusarviointia mittaava tehtävä, ja siten kapea-alaisempia matemaattisia taitoja vaativa.

On tärkeää huomata, että Cohenin ja Blanc-Goldhammerin rajaamattomassa lukusuoratehtävässä käytetään vain kokonaislukuja. Koska Schneiderin ja kumppaneiden (2018) meta-analyysi antoi viitteitä siitä, että rajatun lukusuoratehtävän murtolukuversio olisi vielä kokonaislukuversiota vahvemmassa yhteydessä yleiseen matemaattiseen kompetenssiin (Schneider ym., 2018), voidaan pitää mahdollisena, että myös rajaamattomien lukusuoratehtävien yhteys matemaattiseen kompetenssiin olisi vahvempi silloin, kun tehtävässä käytetään kokonaislukujen lisäksi myös muita rationaalilukuja.

Luvussa 1.2.2 puhuttiin siitä, kuinka viime vuosina on saatu todisteita siitä, että notaatioidenvälinen osaaminen olisi yksi vahvimmin tulevaa matematiikan osaamista ennustava tekijä (esim. Schiller & Siegler, 2023). Toisin kuin Cohenin ja Blanc-Goldhammerin rajaamaton lukusuoratehtävä, tässä tutkimuksessa käytetty lukusuoratehtäväversio mahdollistaa notaatioidenvälisen osaamisen harjoittelun ja mittaamisen, sillä lukusuoralle merkitty luku voi olla eri notaatiota kuin sijoitettava luku. McMullen ja kumppanit (2023) hyödynsivätkin tätä ominaisuutta tutkimuksessaan (McMullen ym., 2023, s. 5, Figure 1c). Notaatioidenväliseen osaamiseen liittyvät tutkimustulokset vahvistavat osaltaan teoriaa siitä, että tässä tutkimuksessa käytetty rajaamaton lukusuoratehtävä saattaa olla yhteydessä yleisempään matemaattiseen kompetenssiin.

Tässä tutkimuksessa haluttiin tutkia sitä, miten uusi rajaamaton lukusuoratehtävä sijoittuu suhteessa aritmeettiseen tuottamistehtävään (joustava rationaalilukukäsite), rutiinitehtäviin rationaaliluvuilla sekä rajattuun lukusuoratehtävään. Seuraavaksi käydään läpi tutkimuksen tutkimuskysymykset ja mahdolliset hypoteesit.

# 2 Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen keskiössä oli rajaamaton lukusuoratehtävä. Rajaamatonta lukusuoratehtävää haluttiin tutkia tarkemmin määrällisin keinoin, sillä aiempi tutkimus rajaamattomaan lukusuoratehtävään liittyen on ollut joko laadullista tai hyödyntänyt tehtävää osana interventiota. Lisäksi haluttiin selvittää rajaamattoman lukusuoratehtävän yhteyksiä muihin tutkimuksessa käytettyihin tehtävätyyppeihin ja yleiseen matemaattiseen kompetenssiin. Alta löytyviin tutkimuskysymyksiin on merkitty se, oliko kysymys eksploratiivinen vai konfirmatorinen. Konfirmatoriset tutkimuskysymykset oli ennakkorekisteröity ja samassa yhteydessä esitetty niille hypoteesit, kun taas eksploratiivisia tutkimuskysymyksiä ei oltu ennakkorekisteröity. Ennakkorekisteröinnistä kerrotaan tarkemmin seuraavan luvun alussa.

Tutkimukselle asetettiin seuraavat tutkimuskysymykset:

1. Millaista on yhdeksäsluokkalaisten osaaminen rajaamattomassa lukusuoratehtävässä, ja ovatko rajaamattomat lukusuoratehtävät keskenään samankaltaisia vaikeusasteeltaan? (eksploratiivinen kysymys)
2. Onko matematiikan arvosana yhteydessä menestykseen rajaamattomassa lukusuoratehtävässä? (eksploratiivinen kysymys)

Näihin kysymyksiin etsittiin vastauksia tilastollisten tunnuslukujen ja varianssianalyysin avulla.

3. Mittaako rajaamaton lukusuoratehtävä samoja latentteja piirteitä kuin lausekkeentuottamistehtävä? (konfirmatorinen kysymys)

Kolmatta tutkimuskysymystä tutkittiin konfirmatorisen faktorianalyysin keinoin. Hypoteesina oli, että faktorimallit, joissa rajaamattomat lukusuoratehtävät ja lausekkeentuottamistehtävät latautuivat samalle faktorille, olisivat parhaiten sopivia, sillä tehtävätyyppien oletetaan vaativan ratkaisijaltaan samantyyppisiä taitoja, kuten notaatioiden välistä osaamista, lukujen suuruusosaamista sekä lukujen välisten suhteiden osaamista (Cramer ym., 2019; McMullen ym., 2020). Tämän lisäksi oletettiin, etteivät rajatut ja rajaamattomat lukusuoratehtävät parhaiten sopivissa faktorimalleissa latautuisi samalle faktorille, sillä rajaamattoman lukusuoratehtävän oletettiin olevan rajattua versiota monipuolisempi tehtävätyyppi.

4. Selittääkö lausekkeentuottamistehtävissä menestyminen menestystä rajaamattomissa lukusuoratehtävissä sen jälkeen, kun rutiinitehtävien vaikutus on kontrolloitu? (konfirmatorinen kysymys)

Neljänteen tutkimuskysymykseen vastattiin hierarkkisen regressioanalyysin avulla. Rajaamattomien lukusuoratehtävien oletettiin vaativan vastaajaltaan rutiinitehtäviä joustavampaa matemaattista osaamista, joten hypoteesina oli, että rutiinitehtävät eivät riitä selittämään menestystä rajaamattomissa lukusuoratehtävissä. Koska lausekkeentuottamistehtävät mittaavat matemaattisen joustavuuden alakäsitettä joustavaa rationaalilukukäsitettä, epäiltiin, että niissä menestyminen saattaisi selittää rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestymistä sen jälkeen, kun rutiinitehtävien vaikutus oli kontrolloitu.

# 3 Tutkimuksen toteutus

Tämä tutkimus toteutettiin määrällisenä tutkimuksena, jossa hyödynnettiin McMullenin vuoden 2020 alussa keräämää valmista aineistoa. Aineisto koostui floridalaisten lukiolaisten vastauksista erilaisia rationaalilukutehtäviä sisältäneeseen tehtävälomakkeeseen. Aineiston analyysia varten alkuperäinen aineisto koodattiin ja tehtävistä muodostettiin summamuuttujia, joita sitten käytettiin tilastollisten analyysien perustana. Pääasiallisina analyysimenetelminä tutkimuksessa käytettiin konfirmatorista faktorianalyysia ja hierarkkista regressioanalyysia, ja tilastoanalyysit suoritettiin IBM SPSS Statistics 29 ja Mplus 8.4 tilasto-ohjelmilla.

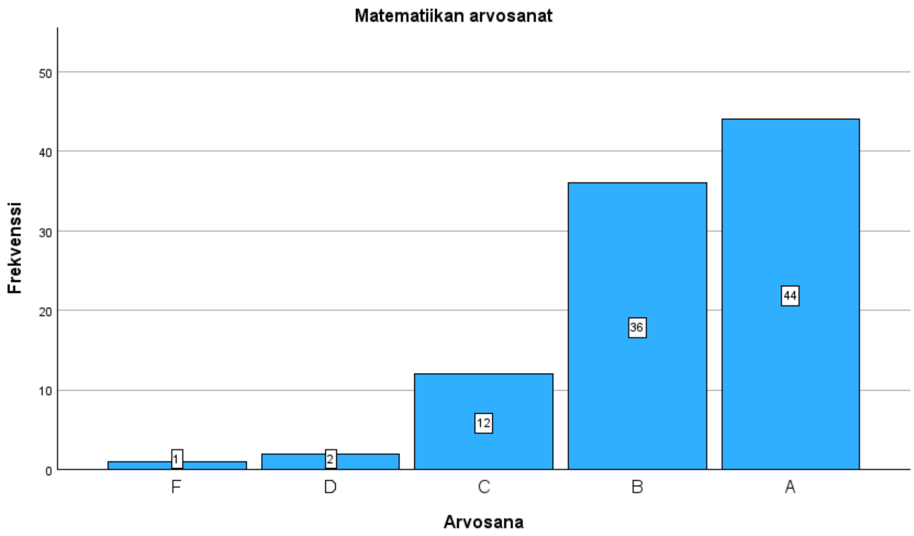
Suunnitelma tässä tutkimuksessa käytetyistä analyysimetodeista ennakkorekisteröitiin ennen aineiston analysoinnin aloittamista. Ennakkorekisteröity suunnitelma löytyy Center for Open Sciencen ylläpitämästä OSF-palvelusta osoitteesta: https://doi.org/10.17605/OSF.IO/9TWFD. Ennakkorekisteröinti on tiedeyhteisössä yleistymässä oleva tapa, jonka tavoitteena on lisätä tieteen tekemisen avoimuutta ja luotettavuutta (Nosek ym., 2018).

Tämän tutkimuksen tutkimuskysymykset on ennakkorekisteröinnin ohjeita noudattaen selkeästi merkitty konfirmatorisiksi tai eksploratiivisiksi. Konfirmatoriset tutkimuskysymykset ja niihin liittyvät suunnitellut analyysit olivat osa ennakkorekisteröintiä. Jatkossa pyritään kertomaan selkeästi suunnitellut toimintatavat ja se, jos alkuperäisestä suunnitelmasta on poikettu jollakin tavalla.

## 3.1 Osallistujat

Tämän tutkimuksen aineisto kerättiin tammikuussa 2020 Floridassa, Yhdysvalloissa. Tutkimukseen osallistui 95 floridalaista yhdeksäsluokkalaista (lukion ensimmäinen luokka Yhdysvalloissa). Tutkittavat olivat suuresta julkisesta lukiosta, jossa oli yli 2300 oppilasta. Koulun oppilaista 53 % oli valkoisia, 21 % mustia, 12 % latinoja, 7 % aasialaisia, 6 % monirotuisia ja 1 % jotain muuta. Koulu sijaitsi esikaupunkialueella, ja noin 30 %:lla koulun oppilaista oli oikeus ilmaiseen tai alennetun hintaiseen lounaaseen. Tutkimukseen osallistuneista 95 oppilaasta miespuolisia oli 48 ja naispuolisia 46. Yhden vastaajan sukupuolitieto puuttui. Osallistujat olivat iältään 13–16-vuotiaita (M=14,6; SD=0,659). Osallistujilta kerättiin taustamuuttujana myös heidän viimeisin matematiikan arvosanansa. Valtaosa osallistujista ilmoitti edellisen arvosanansa olleen A (44 %, korkein arvosana) tai B

(36 %). Arvosanojen tarkempi frekvenssijakauma löytyy kuvasta 2.




Kuva 2 Frekvenssijakauma osallistujien viimeisimmistä matematiikan arvosanoista itse ilmoitettuna. A=korkein arvosana, F=hylätty

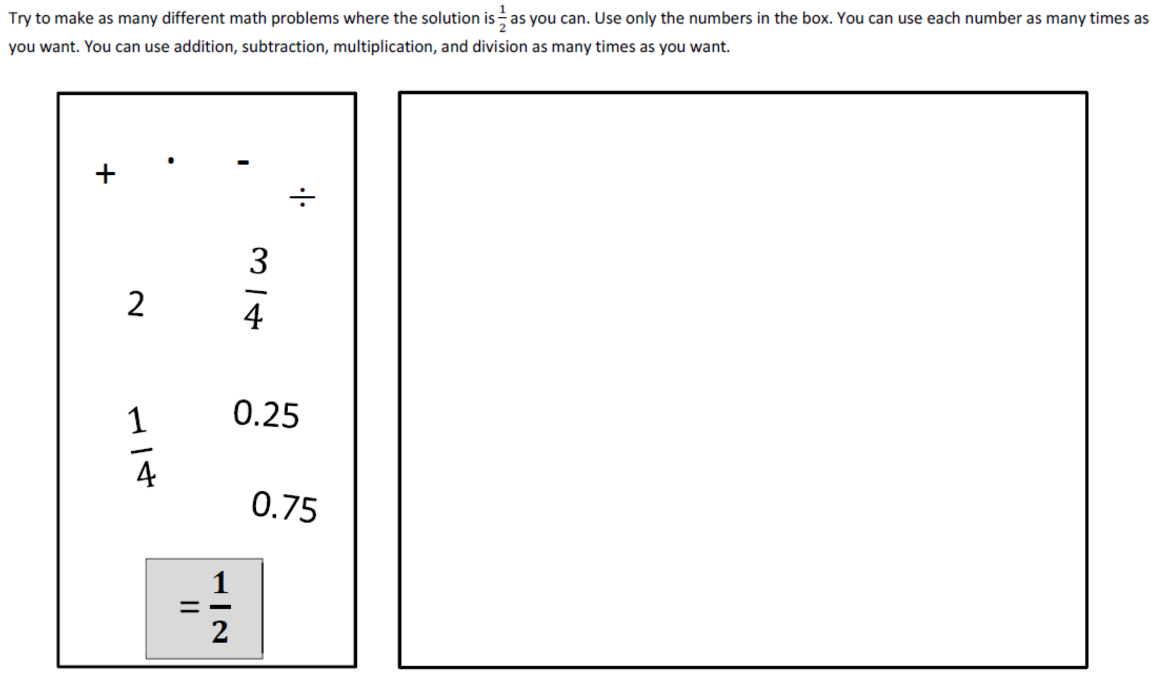
## 3.2 Tehtävälomake ja käytetyt mittarit sekä vastausten operationalisointi

Tässä tutkimuksessa käytetty tehtävälomake koostui tehtävistä, joista osaa oli käytetty aiemmissa tutkimuksissa ja hieman muokattu tätä tutkimusta varten, ja joista osa oli kehitetty tätä tutkimusta varten ilman ennakkotestausta. Erityisesti rajaamattomat lukusuoratehtävät rakennettiin tätä tutkimusta varten ilman, että vastaavia tehtäviä oli nähty käytettävän aiemmin. Testauslomake on muodostettu lyhyessä ajassa, kun tutkijalle tarjoutui toisen tutkimuksen aineistonkeruun yhteydessä mahdollisuus kerätä toinen aineisto uudesta, häntä itseään kiinnostavasta teemasta. Testauslomakkeessa esiintyy tästä syystä muutama virhe, eikä sitä ole huolellisesti suunniteltu etukäteen. Testauslomake annettiin osallistujille paperisena.

Testauslomakkeen tässä tutkimuksessa käytetyt tehtävät koostuivat kolmesta osasta: neljästä lausekkeentuottamistehtävästä, kolmesta rutiinitehtävätyypistä rationaaliluvuilla ja 16 lukusuoratehtävästä. Näiden lisäksi testauslomakkeessa oli kolme muuta tehtävätyyppiä, joita ei käytetty tämän tutkimuksen analyyseissa. Vastaajilta pyydettiin taustatietoina ikä, sukupuoli ja viimeisin matematiikan arvosana itse raportoituna. Seuraavaksi esitellään testauslomakkeen tässä tutkimuksessa käytetyt tehtävät, niiden pisteytys ja tehtävien pohjalta muodostetut summamuuttujat tarkemmin osio kerrallaan. Testauslomakkeen tässä tutkimuksessa käytetyt tehtävät löytyvät kokonaisuudessaan osoitteesta: https://osf.io/xq4vz.

### 3.2.1 Lausekkeentuottamistehtävä

Testauslomakkeessa käytettiin lausekkeentuottamistehtävää osallistujien joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiseen. Lausekkeentuottamistehtävä (arithmetic sentence production task) on McMullenin ja kumppaneiden (2016) kehittämä tehtävä, jossa tavoitteena on muodostaa mahdollisimman monta lauseketta, joiden arvo on yhtä suuri kuin tehtävässä annettu tavoiteluku. Lausekkeiden muodostamisessa saa käyttää vain tehtävässä annettuja lukuja ja peruslaskutoimituksia, mutta niitä kaikkia saa käyttää vastauksessa useita kertoja. (McMullen ym., 2016, s. 174.) Kuvassa 3 on esimerkki lausekkeentuottamistehtävästä. Lausekkeentuottamistehtävän on todettu olevan toimiva työkalu joustavan lukukäsitteen mittaamiseen sekä kokonais- että rationaaliluvuilla (McMullen ym., 2017, 2020).




Kuva 3 Esimerkki tutkimuksessa käytetystä lausekkeentuottamistehtävästä.

Tässä tutkimuksessa käytettiin neljää lausekkeentuottamistehtävää, joissa käytetyt tavoitearvot ja annetut luvut on koottu taulukkoon 2. Tuottamistehtävissä 1, 2 ja 4 annetut luvut koostuivat kahdesta rationaaliluvusta, joista annettiin sekä murtoluku- että desimaaliesitys, sekä yhdestä kokonaisluvusta. Tuottamistehtävässä 3 annettiin myös kaksi desimaali- ja kaksi murtolukua sekä yksi kokonaisluku, mutta desimaali- ja murtoluvut eivät edustaneet samoja rationaalilukuja. Kahdessa viimeisessä tuottamistehtävässä (3 ja 4) on virhe: niissä tavoitearvot toistuvat annetuissa luvuissa, jolloin oikea vastaus pystytään tuottamaan ilman lausekkeen muodostamista. Tämä ei ollut tehtävän kannalta tarkoituksenmukaista, ja se otettiin huomioon tutkimuksen luotettavuustarkastelussa.

Taulukko 2 Tutkimuksessa käytetyt lausekkeentuottamistehtävät

| tehtävänumero | tavoitearvo | annetut luvut | käytössä olevat operaattorit |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $2, \frac{3}{4};\ 0{,}75;\ \frac{1}{4};\ 0{,}25$ | $+ - \times \div$ |
| 2 | 3 | $2, \frac{3}{4};\ 0{,}75;\ \frac{3}{2}; 1{,}5$ | |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | $2;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ \frac{1}{8}, \frac{3}{4}$ | |
| 4 | 1,5 | $2, \frac{3}{4}; 0{,}75;\ \frac{3}{2}; 1{,}5$ | |

Testitilanteessa osallistujille annettiin ensin lämmittelytehtävä, jossa käytettiin kokonaislukuja, jotta tehtävän periaate tulisi osallistujille selväksi. Tämän jälkeen osallistujat saivat kysyä tarkentavia kysymyksiä tehtävästä. Lämmittelytehtävä ei ollut mukana aineiston analyyseissa. Lämmittelytehtävän jälkeen tehtiin varsinaiset tutkimustehtävät. Jokaisen tehtävän tekemiseen oli 90 sekuntia aikaa, ja tänä aikana osallistujien tavoite oli annettuja lukuja käyttäen keksiä mahdollisimman monta matemaattisesti pätevää lauseketta, jotka olivat yhtä suuria tavoitearvon kanssa.

Koodausvaiheessa aritmeettisen tuottamistehtävän vastaukset kirjattiin taulukko-ohjelmaan. Jokaisesta annetusta vastauksesta merkittiin ylös tehtävänumero, vastausnumero, annettu lauseke sekä annetun vastauksen oikeellisuus. Yhden pisteen sai, jos vastaus oli oikein. Oikeiksi vastauksiksi laskettiin myös sellaiset vastaukset, joista puuttui sulkeet (esim. $0{,}25 + 0{,}75 : 2 = \frac{1}{2}$), sillä tarkoituksena ei ollut mitata osallistujien matemaattisia merkitsemistaitoja. Vastaavaa pisteytystä on käytetty myös aiemmissa tutkimuksissa (McMullen ym., 2016). Tyhjä vastauskenttä tulkittiin merkitsemään nollaa oikeaa vastausta.

Jokaiselle neljälle lausekkeentuottamistehtävälle muodostettiin oma pistemuuttujansa, joka kertoi tehtävässä annettujen oikeiden vastausten lukumäärän. Näitä pistemuuttujia käytettiin konfirmatorisessa faktorianalyysissa. Muita analyysejä varten lausekkeentuottamistehtävistä muodostettiin yksi summamuuttuja, joka laski yhteen oikeiden vastausten määrän kaikissa neljässä tehtävässä. Tämän summamuuttujan reliabiliteetti oli hyvä ($\alpha = 0{,}804$).

### 3.2.2 Rutiinitehtävät rationaaliluvuilla

Rutiiniosaamista rationaaliluvuilla mitattiin tässä tutkimuksessa kolmella eri tehtävätyypillä: laskutehtävällä, muuntamistehtävällä ja järjestämistehtävällä. Alla esitellään käytetyt tehtävätyypit ja niistä muodostetut summamuuttujat tarkemmin.

*Laskutehtävä*

Laskutehtävä koostui kuudestatoista peruslaskutoimituksesta rationaaliluvuilla. Tehtävistä kahdeksan oli murtoluvuilla ja kahdeksan desimaaliluvuilla, ja jokaisesta peruslaskutoimituksesta oli kaksi tehtävää murto- ja kaksi desimaaliluvuilla (2x yhteenlasku, 2x vähennyslasku, 2x kertolasku ja 2x jakolasku). Erilaiset laskutehtävät ja rationaalilukunotaatiot esiintyivät sattumanvaraisessa järjestyksessä tehtävälomakkeessa. Käytetyt tehtävät olivat osittain samoja kuin McMullenin ja kumppaneiden (2020) tutkimuksessa.

Tehtävä koodattiin taulukko-ohjelmassa merkitsemällä annettu vastaus oikeaksi tai vääräksi. Oikeasta vastauksesta sai yhden pisteen. Oikeaksi vastaukseksi laskettiin kaikki mahdolliset oikean vastauksen rationaalilukuesitykset. Puuttuvia vastauksia kohdeltiin samoin kuin vääriä: niistä sai nolla pistettä.

Laskutehtävästä oli ennakkorekisteröidyn suunnitelman mukaan tarkoitus muodostaa kaksi summamuuttujaa: yksi murto- ja yksi desimaalilukujen laskutoimituksista. Desimaalilukutehtävien Cronbachin alfa oli kuitenkin riittämätön ($\alpha = 0{,}683$), joten laskutehtävistä päädyttiin muodostamaan vain yksi summamuuttuja. Tämän summamuuttujan reliabiliteetti oli hyvä ($\alpha = 0{,}828$).

*Muuntamistehtävä*

Muuntamistehtävä koostui viidestä tehtävästä, joissa pyydettiin muuttamaan desimaaliluku murtolukumuotoon ja viidestä tehtävästä, joissa pyydettiin muuttamaan murtoluku desimaalilukumuotoon. Osa tehtävistä sisälsi ”tuttuja” rationaalilukuja (esim. $0{,}75, \frac{1}{4}$), osa taas oli vieraampia (esim. $0{,}04, \frac{7}{20}$). Muuntamistehtävää on käytetty aiemminkin rationaalilukujen eri notaatioiden tuntemuksen tutkimiseen (McMullen ym., 2023), mutta tässä tutkimuksessa käytetyt nimenomaiset tehtävät luotiin tätä tutkimusta varten erikseen.

Tehtävässä sai pisteen oikeasta vastauksesta. Oikeaksi vastaukseksi laskettiin desimaaliluku murtoluvuksi -tehtävissä mikä tahansa oikean vastauksen murtolukuesitys. Murtoluku desimaaliluvuksi -tehtävässä oikean vastauksen sai oikeasta desimaaliluvusta. Kohdassa, jossa vastaus oli päättymätön desimaaliluku (2/3=0,666…) pisteen sai vain, jos oli selkeästi merkinnyt desimaaliluvun päättymättömäksi. Puuttuvia vastauksia kohdeltiin samoin kuin vääriä: niistä sai nolla pistettä.

Muuntamistehtävästä oli alun perin tarkoitus muodostaa kaksi summamuuttujaa: yksi desimaaliluvusta murtolukuun -tehtävistä ja yksi murtoluvusta desimaalilukuun -tehtävistä. Desimaaliluvusta murtolukuun -tehtävien Cronbachin alfa oli kuitenkin riittämätön ($\alpha = 0{,}601$), joten muuntamistehtävästä päädyttiin muodostamaan vain yksi summamuuttuja. Tämän summamuuttujan reliabiliteetti oli hyvä ($\alpha = 0{,}777$).

*Järjestämistehtävä*

Järjestämistehtävän osatehtävissä annettiin kolme tai neljä rationaalilukua, jotka pyydettiin järjestämään suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan (esim. 0,68; 0,29; 0,351; 0,5). Tehtävässä oli yhteensä kuusi osatehtävää, joista kahdessa oli pelkkiä murtolukuja, kahdessa pelkkiä desimaalilukuja ja kahdessa sekä murto- että desimaalilukuja. Käytetyt tehtävät oli muodostettu McMullenin ja kumppaneiden (2020) käyttämien järjestämistehtävien pohjalta osittain niitä muokaten.

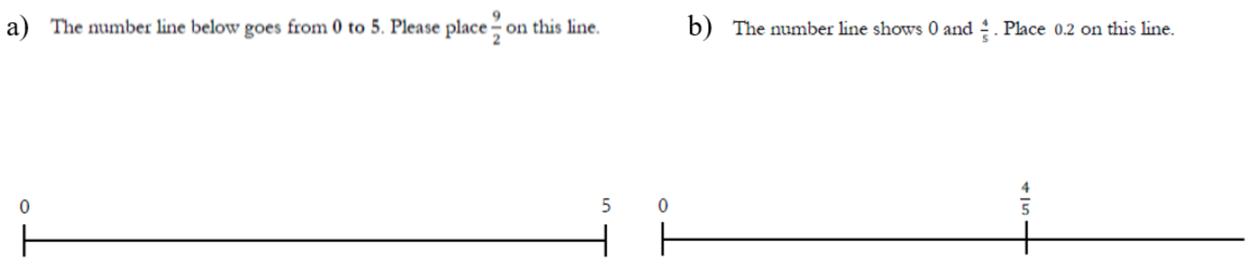
Järjestämistehtävässä annetut vastaukset koodattiin taulukko-ohjelmaan. Alun perin järjestämistehtävä oli tarkoitus pisteyttää käyttämällä parittaisia vertailuja. Tässä pisteytyksessä lukua olisi verrattu järjestyksessä seuraaviin lukuihin, ja pisteen olisi saanut jokaisesta oikein päin olevasta suuruusvertailusta. Esimerkiksi vastauksesta 7,8; 7,09; 7,71; 7,351 olisi saanut pisteitä seuraavasti: $7{,}8 > 7{,}09\ = 0\text{p};\ 7{,}8 > 7{,}71\ = 0\text{p};\ 7{,}8 > 7{,}351\ = 0\text{p};\ 7{,}09 < 7{,}71\ = 1\text{p};\ 7{,}09 < 7{,}351\ = 1\text{p};\ 7{,}71 > 7{,}351\ = 0\text{p},$ yhteensä $0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 = 2$ pistettä.

Parittaisten vertailujen pisteytysmenetelmän tarkoituksena oli, että pisteytyksen myötä ei menetettäisi informaatiota annetun vastauksen laadusta. Mitä lähempänä oikeaa järjestystä annettu vastaus olisi, sitä paremmat pisteet vastauksesta saisi. Pisteytysmenetelmä yhdistettynä yleisesti hyvään menestykseen tehtävässä (M=31,78/36 pistettä parittaisten vertailujen menetelmällä) johti kuitenkin siihen, että sekä yksittäisten tehtävien että tehtävistä muodostettujen summamuuttujien pistejakaumat olivat hyvin vahvasti oikealle vinoja ja korkeahuippuisia. Tämän tehtävät päädyttiin pisteyttämään uudelleen oikein/väärin pisteytyksellä, joka suoristi pistejakaumia hieman. Oikein/väärin -pisteytys on myös linjassa aiemman tutkimuksen kanssa (McMullen ym., 2020). Puuttuvia vastauksia käsiteltiin tehtävässä samoin kuin vääriä vastauksia: niistä sai nolla pistettä.

Järjestämistehtävästä oli alun perin tarkoitus muodostaa kolme summamuuttujaa: yksi murtolukutehtävistä, yksi desimaalilukutehtävistä ja yksi tehtävistä, joissa oli sekä murto- että desimaalilukuja. Murtolukutehtävien ja murto- ja desimaalilukutehtävien Cronbachin alfat olivat kuitenkin riittämättömät ($\alpha = 0{,}035$ ja $\alpha = 0{,}521$), joten järjestämistehtävästä päädyttiin muodostamaan vain yksi summamuuttuja. Tämänkään summamuuttujan Cronbachin alfa ei kuitenkaan ollut kovin hyvä ($\alpha = 0{,}617$). Tarkastelemalla Cronbach's Alpha if item deleted -saraketta SPSS-tulosteessa päädyttiin summamuuttujasta vielä poistamaan tehtävä 3. Tämän jälkeen summamuuttujan Cronbachin alfa oli $\alpha = 0{,}691$, mikä oli jo lähellä ennakkorekisteröinnissä asetettua $\alpha \geq 0{,}7$ rajaa. Analyyseissa käytettiin siis lopulta järjestämistehtävistä yhtä summamuuttujaa, joka sisälsi tehtävät 1, 2, 4, 5 ja 6.

### 3.2.3 Lukusuoratehtävät

Tutkimuksessa käytettiin kahdentyyppisiä lukusuoratehtäviä (jatkossa lukusuora myös LS-tehtävät): rajattuja lukusuoratehtäviä ja rajaamattomia lukusuoratehtäviä. Esimerkit molemmista tehtävätyypeistä löytyvät kuvasta 4, ja kaikki tehtävät on listattu taulukkoon 3. Kaikki LS-tehtävät annettiin omilla 8,5'' x 11'' (21,59 cm x 27,94 cm, standardikoko Yhdysvalloissa) -kokoisilla, pystysuuntaisilla paperiarkeillaan. Lukusuora oli sijoitettu suunnilleen paperin keskelle, ja sen pituus oli n. 15,3 senttimetriä. Lukusuoralle valmiiksi merkityt pisteet (alkupiste 0 vasemmassa laidassa ja toinen piste sen oikealla puolella joko lukusuoralla tai sen toisessa päätepisteessä) oli merkitty noin 0,8 senttimetrin pituisilla pystyviivoilla. Kaikkien lukusuoratehtävien olennaiset lukuarvot löytyvät taulukosta 3.




Kuva 4 Esimerkki a) rajatusta lukusuoratehtävästä ja b) rajaamattomasta lukusuoratehtävästä

Molemmat käytetyt tehtävätyypit koodattiin ensin samalla tavalla, ja vastausten oikeellisuuden arvioimiseksi käytettiin samaa mittaria. Näitä käsitellään ensin yhteisesti, jonka jälkeen tehtävätyyppien toisistaan poikkeavia sisältöjä käsitellään omissa alaluvuissaan.

Lukusuoratehtävien koodaamisessa ensimmäinen vaihe oli annettujen vastauksien ja lukusuoran alkupisteen välisen etäisyyden mittaaminen. Koska vastauslomakkeet oli skannattu sähköiseen muotoon, mittaaminen suoritettiin Adobe Acrobat Reader -ohjelmiston mittaustyökalulla, joka mittaa pdf-tiedostosta valittujen pisteiden välisen etäisyyden halutussa mittayksikössä. Kun kaikki yhden vastaajan tehtävät oli mitattu, pystyttiin mitat tuomaan yhteen taulukkoon, joka tallennettiin vastaajan ID-numerolla.

Koska testauslomakkeita ei oltu täytetty sähköisesti, ja ne oltiin sekä tulostettu että sen jälkeen skannattu, haluttiin varmistaa, että mittaustulokset eri lomakkeilla olisivat varmasti vertailukelpoisia keskenään. Tämä tehtiin mittamaalla Adobe Acrobat Readerin mittaustyökalulla myös kaikkien testauslomakkeiden kaikkien lukusuorien annettujen pisteiden välinen etäisyys. Samoin kuin vastausten etäisyysmitat, nämäkin tuotiin jokaiselta vastaajalta omaan taulukkoonsa.

Kun kaikki mittaukset oli tehty, siirrettiin arvot IBM SPSS Statistics 29 -tilasto-ohjelmaan. Varsinainen vastauksen oikeellisuutta edustava muuttuja laskettiin tilasto-ohjelmassa. Muuttujana käytettiin absoluuttista prosentuaalista virhettä (percent absolute error, PAE), joka on eniten käytetty lukusuoratehtävissä onnistumisen mittari (Reinert & Moeller, 2021; Schneider ym., 2018). Absoluuttisen prosentuaalisen virheen laskemiseen käytetty kaava oli seuraava:

$$PAE = \frac{|arvioitu\ luku\ (cm) - tavoiteluku(cm)|}{lukusuoran\ pituus\ (cm)} \times 100$$

Varsinaisen mittaamisen jälkeen annettu vastaus ja tavoiteluku eivät olleet samaa yksikköä keskenään: annettu vastaus oli ilmaistu etäisyytenä lähtöpisteestä, ja tavoiteluku pelkkänä lukuarvona, jolla ei ollut pituusmittaa. Tavoiteluvut tuli siis myös ilmaista etäisyytenä lähtöpisteestä. Tämä saavutettiin eri tehtävätyypeissä hieman eri tavoin, ja nämä tavat on eritelty tehtävien omissa alaluvuissa. Lisäksi rajaamattomassa lukusuoratehtävässä lukusuoran pituus tuli laskea erikseen, sillä sitä ei oltu mitattu. Myös tämä avataan rajaamattoman lukusuoratehtävän omassa alaluvussa. Kaikki laskut suoritettiin luomalla SPSS-ohjelmassa uusia muuttujia Compute new variable -työkalun avulla.

Molemmissa LS-tehtävätyypeissä puuttuvien arvojen ongelma ratkaistiin kahdella eri tavalla tilastollisesta menetelmästä riippuen: konfirmatorisen faktorianalyysin yhteydessä puuttuviin arvoihin käytettiin full information maximum likelihood -metodia, ja muiden analyysimenetelmien yhteydessä absoluuttisten prosentuaalisten virheiden keskiarvo laskettiin käyttäen vain tehtäviä, joihin oli vastattu:

$$keskiarvo = \frac{\Sigma \text{ PAE vastattu tehtävä}}{vastattujen\ tehtävien\ lukumäärä}$$

Taulukko 3 Tutkimuksessa käytetyt lukusuoratehtävät
N/A = ei sovellettavissa

| tehtävänro | rajattu/rajaamaton | annetut pisteet lukusuoralla | sijoitettava/t luku/luvut | notaatioidenvälisyys |
|---|---|---|---|---|
| 1–4 | rajattu | 0 ja 1 | 0,6; 1/5; 3/7; 0,42 | N/A |
| 5–8 | rajattu | 0 ja 5 | 11/7; 3,7; 9/2; 0,83 | N/A |
| 9 | rajaamaton | 0 ja 1/2 | 0,75 | kyllä |
| 10 | rajaamaton | 0 ja 2/3 | 1 1/3 | ei |
| 11 | rajaamaton | 0 ja 0,75 | ½ | kyllä |
| 12 | rajaamaton | 0 ja 1,4 | 1 | ei |
| 13 | rajaamaton | 0 ja 4/5 | 0,2 | kyllä |
| 14 | rajaamaton | 0 ja 1,5 | ¾ | kyllä |
| 15 | rajaamaton | 0 ja 3/5 | 7/12 | ei |
| 16 | rajaamaton | 0 ja 0,25 | 0,6 | ei |

*Rajatut lukusuoratehtävät*

Rajatuissa LS-tehtävissä oppilaita pyydettiin sijoittamaan tehtävänannossa annettu luku lukusuoralle. Lukusuoran alku- ja päätepisteet oli merkitty. Tehtäviä oli yhteensä kahdeksan, ja neljässä ensimmäisessä päätepisteet olivat 0 ja 1, neljässä viimeisessä taas 0 ja 5. Molemmissa tehtävätyypeissä puolet sijoitettavista luvuista oli murto- ja puolet desimaalilukuja. Tarkemmat tehtäväkohtaiset tiedot löytyvät taulukosta 3, ja esimerkkitehtävä löytyy kuvasta 4a.

Rajatuissa LS-tehtävissä sijoitettavan luvun etäisyys lähtöpisteestä laskettiin seuraavasti:

$$sijoitettava\ luku\ \ (cm) = \frac{sijoitettava\ luku\ \ (yksikkö)\ \times lukusuoran\ pituus\ (cm)}{lukusuoran\ pituus\ (yksikkö)}$$

Esimerkiksi tehtävässä 1 lukusuoran pituus oli 1 ja sijoitettava luku 0,6. Lukusuoran mitattu pituus oli eräällä tutkittavalla 14,73 cm. Tässä tapauksessa sijoitettavan luvun oikean sijainnin etäisyys lähtöpisteestä oli:

$$sijoitettava\ luku\ \ (cm) = \frac{0{,}6 \times 14{,}73cm}{1} = 8{,}838\ cm$$

Jatketaan saman tutkittavan kanssa esimerkkiin absoluuttisesta prosentuaalisesta virheestä. Tutkittava oli asettanut oman arvionsa sijoitettavan luvun sijainnista lukusuoralla 8,41 senttimetrin päähän lähtöpisteestä. Tällöin:

$$PAE = \frac{|8{,}41cm - 8{,}84cm|}{14{,}73cm} \times 100 = 2{,}92\ (\%)$$

Rajatuista lukusuoratehtävistä oli alun perin tarkoitus muodostaa konfirmatorista faktorianalyysia varten neljä summamuuttujaa ja muita analyyseja varten yksi summamuuttuja. Konfirmatorisen faktorianalyysin neljä summamuuttujaa (2 tehtävää/muuttuja) olisi ryhmitelty sijoitettavan luvun notaation ja lukusuoran pituuden perusteella: murtoluku ja 0–1, desimaaliluku ja 0–1, murtoluku ja 0–5 sekä desimaaliluku ja 0–5. Näiden summautujien reliabiliteettikertoimet olivat kuitenkin kaikki riittämättömiä ($\alpha\ \in\ [0{,}100; 0{,}582]$). Lopulta kaikissa tilastoanalyyseissa päädyttiin käyttämään vain yhtä summamuuttujaa kaikista rajatuista lukusuoratehtävistä. Tämänkään summamuuttujan Cronbachin alfa ei ollut kovin hyvä ($\alpha = 0{,}620$), mutta tähän ratkaisuun tyydyttiin tässä tutkimuksessa siitä huolimatta.

*Rajaamattomat lukusuoratehtävät*

Rajaamattomissa LS-tehtävissä lukusuoralle oli nollan lisäksi merkitty toinen luku, joka ei ollut lukusuoran oikeassa laidassa, vaan jossakin toisessa kohtaa lukusuoraa. Lukusuoralle sijoitettava luku taas saattoi olla merkittyä lukua suurempi tai pienempi. Esimerkki rajaamattomasta lukusuoratehtävästä löytyy kuvasta 4b, ja kaikki tehtävät on eritelty taulukossa 3.

Rajaamattomia LS-tehtäviä oli yhteensä kahdeksan. Tehtävistä neljässä merkitty luku ja sijoitettava luku olivat samaa notaatiota keskenään (molemmat murtolukuja tai molemmat desimaalilukuja), ja neljässä tehtävässä eri muotoa keskenään.

Rajaamattomissa lukusuoratehtävissä sijoitettavan luvun oikean sijainnin etäisyys nollasta laskettiin muuten samoin kuin rajatuissa lukusuoratehtävissä, mutta lukusuoran pituuden sijaan käytettiin lukusuoralle merkityn luvun etäisyyttä nollasta:

$$sijoitettava\ luku\ (cm) = \frac{sijoitettava\ luku\ (yksikkö) \times annettu\ luku\ (cm)}{annettu\ luku\ (yksikkö)}$$

Tämän laskun lisäksi absoluuttisen prosentuaalisen virheen selvittämiseksi tuli rajaamattomissakin LS-tehtävissä käyttää koko lukusuoran pituutta. Koska tätä ei oltu mitattu skannatuista vastauspapereista, piti se laskea erikseen. Tätä varten selvitettiin ensin, kuinka suurta osaa koko lukusuoran pituudesta matka nollasta lukusuoralle valmiiksi sijoitettuun pisteeseen edusti. Skannauksen tarkkuudesta riippumatta tämä suhdeluku olisi sama kaikissa tehtäväpapereissa. Suhdeluku laskettiin mittaamalla yhtä tehtäväpaperia käyttäen koko lukusuoran pituus ja jakamalla annetun pisteen etäisyys nollasta koko lukusuoran pituudella. Tämä mittaus tehtiin jokaisesta lukusuorasta kahdesti mittausvirheen minimoimiseksi. Suhdeluvut ja tehtävissä käytettyjen lukusuorien kokonaispituudet tehtävän mittakaavassa löytyvät taulukosta 4.

Kun suhdeluvut oli selvitetty, niitä käytettiin vastaajien lukusuorien pituuksien selvittämiseksi:

$$lukusuoran\ pituus\ (cm) = \frac{annettu\ piste\ (cm)}{suhdeluku}$$

Tämän jälkeen vastausten PAE-arvot pystyttiin laskemaan myös rajaamattomille lukusuoratehtäville käyttämällä edellä annettua kaavaa.

Taulukko 4 Rajaamattomien lukusuoratehtävien olennaiset lukuarvot tehtävien toisintamiseksi

Suhdeluvulla tarkoitetaan lukusuoralle merkityn pisteen ja nollan välisen etäisyyden suhdetta koko lukusuoran pituuteen. Lukusuoran päätepisteen arvolla tarkoitetaan lukusuoran päätepisteen edustamaa pistettä lukusuoralla.

| tehtävänumero | suhdeluku | lukusuoran päätepisteen arvo |
|---|---|---|
| 9 | 0,198 | 2,53 |
| 10 | 0,270 | 2,47 |
| 11 | 0,496 | 1,51 |
| 12 | 0,773 | 1,81 |
| 13 | 0,628 | 1,27 |
| 14 | 0,628 | 2,39 |
| 15 | 0,292 | 2,06 |
| 16 | 0,338 | 0,74 |

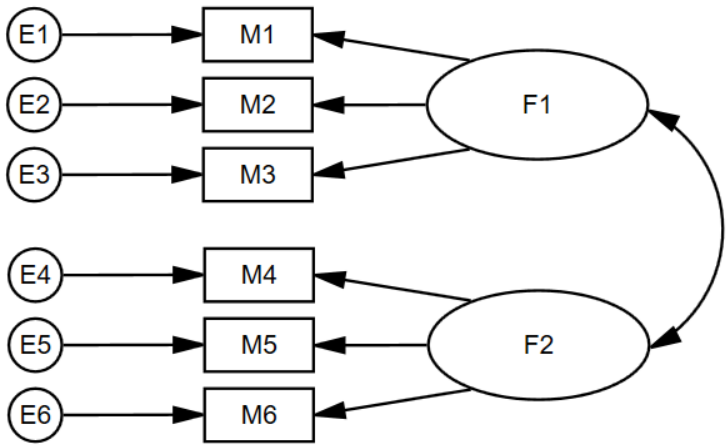
Rajattujen lukusuoratehtävien tapaan myös rajaamattomista lukusuoratehtävistä oli alun perin tarkoitus muodostaa neljä summamuuttujaa sen mukaan, mitä notaatioita sijoitettava luku ja lukusuoralle merkitty piste edustivat. Näiden summamuuttujien reliabiliteettikertoimet olivat kuitenkin huonoja ($\alpha \in [-0{,}052; 0{,}412]$), joten myös rajaamattomista lukusuoratehtävistä päädyttiin muodostamaan vain yksi summamuuttuja. Tämänkään summamuuttujan reliabiliteettikerroin ei ollut kovin hyvä ($\alpha = 0{,}617$), mutta siihen tyydyttiin tässä tutkimuksessa.

Koko tehtävälomakkeen pohjalta muodostettiin siis kuusi summamuuttujaa: lausekkeentuottamistehtävistä, laskutehtävästä, muuntamistehtävästä ja järjestämistehtävästä yksi kustakin, ja kaksi summamuuttujaa lukusuoratehtävistä. Lisäksi lausekkeentuottamistehtävistä käytettiin osassa analyyseja oikeiden vastausten lukumäärä -muuttujia jokaisesta neljästä tehtävästä erikseen.

## 3.3 Konfirmatorinen faktorianalyysi

Konfirmatorinen faktorianalyysi (confirmatory factor analysis, jatkossa myös CFA) on rakenneyhtälömallinnuksen (structural equation modeling, SEM) alle sijoittuva monimuuttujamenetelmä (Brown, 2015). Tässä tutkimuksessa CFA:n avulla tutkittiin rajaamattoman lukusuoratehtävän yhteyksiä muihin tutkimuksessa käytettyihin tehtäviin.

Yleisesti faktorianalyysin ideana on tutkia havaittujen (mitattujen) muuttujien ja piilevien (latenttien) muuttujien välisiä suhteita. Muuttujien välisistä suhteista muodostettua mallia kutsutaan faktorimalliksi. Faktorimallissa latentit muuttujat muodostavat faktoreita ja havaitut muuttujat latautuvat näille faktoreille. Konfirmatorisen faktorianalyysin lisäksi on olemassa toinen faktorianalyysin menetelmä, eksploratiivinen faktorianalyysi (exploratory factor analysis, jatkossa myös EFA). Konfirmatorisen ja eksploratiivisen faktorianalyysin suurin teoreettinen ero on siinä, että CFA:ssa faktorimalli muodostetaan etukäteen vahvojen aiempaan tutkimukseen perustuvien hypoteesien pohjalta, jonka jälkeen mallia arvioidaan tilastollisin keinoin. EFA:ssa taas faktorimallia ei muodosteta käsin, vaan se rakennetaan vähitellen tilastollisin menetelmin. Konfirmatorisessa faktorianalyysissa siis nimensä mukaisesti pyritään vahvistamaan olemassa olevaa teoria, kun taas eksploratiivisessa toimitaan aineistolähtöisesti. (Brown, 2015.)




Kuva 5 Esimerkki faktorimallista. F1-F2 faktorit, M1-M6 havaitut muuttujat, E1-E6 virhetermit. Mukaillen Nummenmaa ym., 1997, s. 265

Tässä tutkimuksessa päädyttiin käyttämään konfirmatorista faktorianalyysia selvittämään lukusuoratehtävien, erityisesti rajaamattoman LS-tehtävän, suhdetta lausekkeentuottamistehtävään ja rutiininomaisiin rationaalilukutehtäviin. CFA:han päädyttiin, sillä lausekkeentuottamistehtävien ja rutiinitehtävien latautumista eri faktoreille pidettiin aiemman tutkimuksen valossa todennäköisenä, ja tämä rajoitti mahdollisten kiinnostavien faktorimallien määrää huomattavasti. Lisäksi CFA:ta on ennenkin käytetty joustavan lukukäsitteen tutkimuksessa (McMullen ym., 2020).

Ennen konfirmatorisen faktorianalyysin käyttöä faktorimallit tulee muodostaa ja määritellä tarkasti. Ensin päätettiin, mitä indikaattoreita eli havaittuja muuttujia faktorimalleissa käytettäisiin. Sen jälkeen itse testattavat faktorimallit rakennettiin indikaattoreiden pohjalta. Esimerkki faktorimallin rakenteesta löytyy kuvasta 5. Kun faktorimallit on muodostettu, tulee ne määritellä tarkasti. Faktorimallien tarkkaan määrittelyyn kuuluvat estimoitavien parametrien määrittäminen, faktorimallien identifioituvuuden varmistaminen, käytettävän tilasto-ohjelman valitseminen, puuttuvan aineiston käsittelyn menetelmän päättäminen sekä analyyseissa käytettävän estimaattorin ja faktorimallin istuvuuden määrittelyyn käytettävien indeksien valitseminen. (Brown, 2015.)

Koska tutkimuksessa käytettiin ennakkorekisteröintiä, kaikki edellä mainitut asiat pyrittiin määrittelemään mahdollisimman tarkasti ennen faktorianalyysin aloittamista. Osaan ennakkorekisteröidyistä päätöksistä tuli kuitenkin muutoksia matkan varrella.

Ennakkorekisteröidyt päätökset ja niihin mahdollisesti tulleet muutokset käydään seuraavaksi läpi. Ne on myös eritelty taulukkoon 5.

Taulukko 5 CFA:ta varten määritellyt asiat

Ennakkorekisteröity suunnitelma ja lopulta käytetyt valinnat rinnakkain

| **määriteltävä asia** | **ennakkorekisteröity suunnitelma** | **lopullinen valinta** |
|---|---|---|
| indikaattorit | kts. taulukko 6 | indikaattoreita yhdistetty toisiinsa, katso taulukko 6 |
| faktorimallit | kts luku 3.3.3 taulukko 7 | tarkennuksia, kts luku 3.3.3 taulukko 7 |
| tilasto-ohjelma | SPSS Amos | Mplus |
| käytettävä parametrien estimaattori | ML, robustina menetelmänä MLM | ML, robustina menetelmänä MLR |
| latenttien muuttujien mitta-asteikon määrittelymenetelmä | latentin muuttujan varianssin kiinnittäminen | ei muutoksia |
| estimoitavat parametrit | indikaattorien faktorilataukset ja mittausvirheet, faktoreiden kovarianssit | ei muutoksia |
| Puuttuvan datan käsittely | direct maximum likelihood (DML) | FIML, full information maximum likelihood |
| faktorimallin sopivuuden indeksit ja raja-arvot | Khii toiseen- testi, p>0,05<br>CFI $\geq .90$<br>TLI $\geq .90$<br>RMSEA $\leq .06$<br>SRMR $\leq .08$<br>AIC pienempi parempi<br>BIC pienempi parempi | ei muutoksia |

### 3.3.1 Kofirmatorisen faktorianalyysin käytön edellytykset

Kaikkein ensimmäisenä CFA:ta käyttäessä täytyy varmistaa, että sen käytön perusedellytykset täyttyvät. Ennen analyysin tekemistä tehtävät varmistukset liittyvät erityisesti otoskokoon ja käytettävien muuttujien välisiin suhteisiin.

CFA:ssa ei ole määriteltävissä mitään tiettyä alarajaa vaadittavalle otoskoolle, vaan eri kirjoittajat ovat antaneet erilaisia ohjeita riittävän otoskoon määrittämiseksi. Nämä ohjeet antavat osviittaa esimerkiksi otoskoon ja riippumattomien muuttujien tai estimoitavien parametrien määrän välisen suhteen kokoon liittyen. Lisäksi faktorimallin tilastollisen selitysvoiman määrittämiseksi on kehitetty erilaisia metodeja. (Brown, 2015.) Tässä tutkimuksessa ei tehty otoskoon riittävyystarkasteluja ennen konfirmatorisen faktorianalyysin valitsemista analyysimetodiksi, eikä tutkimuksen otoskokoa (N=95) voida pitää kovin hyvänä konfirmatorisen faktorianalyysin käyttöä varten.

Konfirmatorisen faktorianalyysin edellytyksenä on riittävän otoskoon lisäksi, että käytettävät muuttujat ovat moniulotteisesti normaalijakautuneita ja että muuttujien väliset yhteydet ovat luonteeltaan lineaarisia (Tabachnick & Fidell, 2014). Tässä tutkimuksessa molempia vaatimuksia tarkasteltiin sirontakuviomatriisin avulla.

### 3.3.2 Indikaattorien valinta

Kofirmatorisessa faktorianalyysissa pyritään tutkimaan, vaikuttaako useamman havaintomuuttujan eli indikaattorin taustalla yksi latentti muuttuja eli faktori (Brown, 2015). Koko CFA-prosessi lähtee siis siitä, että päätetään analyysissa käytettävät havaintomuuttujat. Tässä tutkimuksessa faktorimallien havaintomuuttujat valikoituivat aineistonkeruussa käytettyjen tehtävien ja tutkimuskysymysten pohjalta. Muuttujat muodostettiin kaikkien aiemmin tässä luvussa esiteltyjen tehtävien pohjalta.

Ennakkorekisteröidyn suunnitelman mukaan muuttujina aiottiin käyttää oikeiden vastausten lukumääriä lausekkeentuottamistehtävissä (neljä muuttujaa), summamuuttujia oikeista vastauksista laskutehtävissä (kaksi muuttujaa), summamuuttujia oikeista vastauksista muuntamistehtävissä (kaksi muuttujaa), summamuuttujia pisteytetyistä vastauksista järjestämistehtävissä (kolme muuttujaa) ja keskiarvomuuttujia absoluuttisista prosentuaalisista virheistä lukusuoratehtävissä (kahdeksan muuttujaa).

Luvussa 3.2 on kuitenkin jo kerrottu, että lausekkeentuottamistehtäviä lukuun ottamatta kaikkien muiden tehtävien osalta päädyttiin käyttämään vain yhtä summamuuttujaa tehtävätyyppiä kohden, sillä muulloin summamuuttujien reliabiliteettikertoimet olisivat olleet liian pieniä. Ennakkorekisteröidyt ja lopulliset indikaattorit on koottu taulukkoon 6.

Taulukko 6 CFA:ssa käytetyt indikaattorit

| **Ennakkorekisteröidyt indikaattorit (tehtävien lukumäärä muuttujassa)** | **Lopulliset indikaattorit (tehtävien lukumäärä muuttujassa)** |
|---|---|
| Lausekkeenmuodostustehtävä 1: oikeiden lausekkeiden lukumäärä (1) | ei muutosta |
| Lausekkeenmuodostustehtävä 2: oikeiden lausekkeiden lukumäärä (1) | ei muutosta |

| **Ennakkorekisteröidyt indikaattorit (tehtävien lukumäärä muuttujassa)** | **Lopulliset indikaattorit (tehtävien lukumäärä muuttujassa)** |
|---|---|
| Lausekkeenmuodostustehtävä 3: oikeiden lausekkeiden lukumäärä (1) | ei muutosta |
| Lausekkeenmuodostustehtävä 4: oikeiden lausekkeiden lukumäärä (1) | ei muutosta |
| Laskutehtävä: oikeiden vastausten määrä desimaalilukutehtävissä (8) | Laskutehtävä: oikeiden vastausten lukumäärä kaikissa tehtävissä (16) |
| Laskutehtävä: oikeiden vastausten määrä murtolukutehtävissä (8) | |
| Muuntamistehtävä: oikeiden vastausten määrä murtoluvusta desimaaliluvuksi (5) | Muuntamistehtävä: oikeiden vastausten lukumäärä kaikissa tehtävissä (10) |
| Muuntamistehtävä: oikeiden vastausten määrä desimaaliluvusta murtoluvuksi (5) | |
| Järjestämistehtävä: desimaalilukutehtävien pistesumma (2) | Järjestämistehtävä: oikeiden vastausten lukumäärä kaikissa tehtävissä (5) |
| Järjestämistehtävä: murtolukutehtävien pistesumma (2) | |
| Järjestämistehtävä: moninotaatioisten tehtävien pistesumma (2) | |
| Rajattu lukusuoratehtävä: murtolukutehtävät lukusuoralla 0–1 (2) | Rajattu lukusuoratehtävä: annettujen vastausten PAE keskiarvo kaikista tehtävistä (8) |
| Rajattu lukusuoratehtävä: desimaalilukutehtävät lukusuoralla 0–1 (2) | |
| Rajattu lukusuoratehtävä: murtolukutehtävät lukusuoralla 0–5 (2) | |
| Rajattu lukusuoratehtävä: desimaalilukutehtävät lukusuoralla 0–5 (2) | |
| Rajaamaton lukusuoratehtävä: yksinotaatioiset murtolukutehtävät (2) | Rajaamaton lukusuoratehtävä: annettujen vastauksien PAE keskiarvo kaikista tehtävistä (8) |
| Rajaamaton lukusuoratehtävä: yksinotaatioiset desimaalilukutehtävät (2) | |
| Rajaamaton lukusuoratehtävä: moninotaatioiset tehtävät sijoita murtoluku (2) | |
| Rajaamaton lukusuoratehtävä: moninotaatioiset tehtävät sijoita desimaaliluku (2) | |

### 3.3.3 Faktorimallien muodostaminen

Kuten jo kerrottu, CFA perustuu ennalta rakennettuihin faktorimalleihin, joissa on eritelty havaintomuuttujien pohjalta muodostetut indikaattorit ja latentit muuttujat eli faktorit, joille indikaattorit latautuvat. Tässä tutkimuksessa käytetyt faktorimallit muodostettiin konfirmatorisen faktorianalyysin periaatteiden mukaisesti teorian pohjalta. Vertailtavia faktorimalleja muodostettiin yhteensä kahdeksan. Näistä yhden faktorin malleja oli yksi, kahden faktorin malleja neljä ja kolmen faktorin malleja kolme. Faktorimallit on koottu taulukkoon 7.

Aiemman tutkimuksen perusteella tiedettiin, että joustavaa rationaalilukuosaamista edustavat lausekkeenmuodostustehtävät eroavat rutiinitehtävistä (McMullen ym., 2020). Tämän takia vain yhden faktorin faktorimallissa rutiinitehtävät ja lausekkeenmuodostamistehtävät laitettiin latautumaan samalle faktorille. Kaikissa muissa malleissa lähdettiin siitä, että lausekkeenmuodostamistehtävät ja rutiinitehtävät ovat toisistaan erillisiä, ja vain lukusuoratehtävien sijoittumista vaihdeltiin mallista toiseen. Aiemmasta tutkimuksesta poiketen (esim. McMullen ym., 2020) rajattuja lukusuoratehtäviä ei automaattisesti niputettu yhteen rutiinitehtävien kanssa. Tähän valintaan päädyttiin, sillä tutkimuksessa haluttiin nimenomaan selvittää käytettyjen lukusuoratehtävätyyppien välisiä mahdollisia eroja. Lisäksi aiempi tutkimus viittaa siihen, että perinteiset lukusuoratehtävät ovat muita rutiinitehtäviksi luokiteltuja tehtäviä voimakkaammin yhteydessä esimerkiksi matemaattiseen kompetenssiin, eli ne pääsevät käsiksi johonkin, mihin rutiinitehtävät eivät pääse (Schneider ym., 2018).

Aiempaan tutkimukseen nojaten kahden ja kolmen faktorin faktorimallit rakennettiin siis siten, että lukusuoratehtävien luonne selviäisi mahdollisimman kattavasti. Kaikki käytetyt faktorimallit on merkitty taulukkoon 7 Kahden faktorin malleissa vaihtoehdot olivat: (1) molemmat LS-tehtävät ovat rutiinitehtäviä, (2) molemmat LS-tehtävät ovat joustavaa rationaalilukuosaamista mittaavia tehtäviä, (3) rajattu LS-tehtävä on rutiinitehtävä ja rajaamaton LS-tehtävä joustavaa lukukäsitettä mittaava tehtävä ja (4) rajaamaton LS-tehtävä on rutiinitehtävä ja rajattu LS-tehtävä joustavaa lukukäsitettä mittaava tehtävä. Kolmen faktorin malleissa vaihtoehtoina taas olivat: (1) LS-tehtävät muodostavat yhdessä lausekkeenmuodostamis- ja rutiinitehtävistä erillisen faktorin, (2) rajaamaton LS-tehtävä muodostaa oman faktorinsa, kun taas rajattu LS-tehtävä on rutiinitehtävä ja (3) rajattu LS-tehtävä muodostaa oman faktorinsa, kun taas rajaamaton LS-tehtävä on rutiinitehtävä. Yhden faktorin mallin rinnalla nämä kahden- ja kolmen faktorin mallit nähtiin teorian valossa kaikkein järkevimmiksi tutkia tarkemmin.

Ennakkorekisteröityyn suunnitelmaan faktorimalleista ei tehty varsinaisia muutoksia, mutta indikaattoreiden määrän muutokset vaikuttivat välillisesti myös faktorimalleihin. Koska lukusuoratehtäviin liittyvien indikaattoreiden määrä supistui kahdeksasta kahteen, tuli joidenkin kolmen faktorin mallien kohdalla tilanne, jossa yhtä faktoria olisi ollut edustamassa vain yksi indikaattori. Tämän tyyppiset faktorimallit eivät ole CFA:ssa mahdottomia (Brown, 2015), mutta ne vaativat erityishuomiota, jota ei ollut otettu huomioon ennakkorekisteröidyssä suunnitelmassa.

Lähtökohtaisesti CFA:ssa yhtä faktoria kohden on oltava useampia havaintomuuttujia. Yksittäistä indikaattoria, joka ei lataudu millekään muuttujalle, ei siis saa tulkita faktoriksi. Siitä huolimatta on mahdollista muodostaa faktorimalleja, jotka sisältävät tällaisia yksittäisiä indikaattoreita. Tällöin tulee kuitenkin ottaa huomioon se, että CFA:n keinoin ei pystytä arvioimaan tällaisten indikaattoreiden mittausvirhettä, vaan mittausvirhe on määriteltävä erikseen. (Brown, 2015.)

Tämän tutkimuksen faktorimalleista kahdessa haluttiin käyttää yksittäisiä indikaattoreita. Yksittäisinä indikaattoreina olivat molempien LS-tehtävätyyppien summamuuttujat. Brown (2015) kertoo, että yksittäisten indikaattoreiden mittausvirhe määritetään seuraavalla kaavalla:

$$\delta_x = VAR(X)(1-\rho)$$

jossa VAR(X) on yksittäisen indikaattorin otosvarianssi, ja ρ on indikaattorin luotettavuusestimaatti (Brown, 2015, s. 122–123).

Tässä tutkimuksessa käytettiin lukusuoratehtävien summamuuttujien luotettavuusestimaattina reliabiliteettikerroin Cronbachin alfaa. Jos indikaattorina olisi jokin jo aiemmin käytetty ja paljon tutkittu mittari, voitaisiin luotettavuusestimaattina käyttää myös jotain muuta aiemman tutkimuksen määrittämää arvoa (Brown, 2015). Indikaattorin tavoin käytettävien lukusuoratehtävien mittausvirheet tässä tutkimuksessa olivat siis seuraavat:

$$\delta_{rajattu\ lukusuoratehtävä} = 0{,}002 * (1 - 0{,}62) = 0{,}00076$$

$$\delta_{rajaamaton\ lukusuoratehtävä} = 0{,}003(1 - 0{,}671) = 0{,}00099$$

Taulukko 7 Lopulliset faktorimallit

| **faktoreiden lukumäärä** | **malli** | **vapausasteet** $\boldsymbol{df = a - b}$ |
|---|---|---|
| 1 | Lausekkeenmuodostustehtävät + rutiinitehtävät + rajatut LS-tehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät | $df = 45 - 18 = 27$ |
| 2 | (1) Lausekkeenmuodostustehtävät;<br>(2) kaikki muut tehtävät | $df = 45 - 19 = 26$ |
| 2 | (1) Lausekkeenmuodostustehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät;<br>(2) rutiinitehtävät + rajatut LS-tehtävät | $df = 45 - 19 = 26$ |
| 2 | (1) Lausekkeenmuodostustehtävät + rajatut LS-tehtävät;<br>(2) rutiinitehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät | $df = 45 - 19 = 26$ |

| faktoreiden lukumäärä | malli | vapausasteet $df = a - b$ |
|---|---|---|
| 2 | (1) A Lausekkeenmuodostustehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät + rajatut LS-tehtävät;<br>(2) rutiinitehtävät | $\mathrm{df} = 45 - 19 = 26$ |
| 3 | (1) Lausekkeenmuodostustehtävät;<br>(2) rutiinitehtävät;<br>(3) rajatut LS-tehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät | $\mathrm{df} = 45 - 21 = 24$ |
| 2 + yksittäinen indikaattori | (1) Lausekkeenmuodostustehtävät;<br>(2) rutiinitehtävät + rajatut LS-tehtävät;<br>rajaamattomat LS-tehtävät | $\mathrm{df} = 45 - 20 = 25$ |
| 2 + yksittäinen indikaattori | (1) Lausekkeenmuodostustehtävät;<br>(2) rutiinitehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät;<br>rajatut LS-tehtävät | $\mathrm{df} = 45 - 20 = 25$ |

### 3.3.4 Faktorimallien spesifiointi

Varsinaisten faktorimallien muodostamisen lisäksi CFA:ssa on päätettävä, mitä parametreja malleissa estimoidaan, ja minkä muuttujien sallitaan korreloida keskenään. Tähän liittyy myös latenttien muuttujien eli faktoreiden mitta-asteikon (scale) määrittäminen. (Brown, 2015.) Kaikissa tämän tutkimuksen faktorimalleissa estimoitavia parametreja olivat indikaattorien lataukset latenteille muuttujille sekä indikaattorien virhevarianssit. Virhevarianssien tai indikaattoreiden ei sallittu korreloida keskenään, mutta faktoreiden annettiin korreloida keskenään.

Latenttien muuttujien eli faktoreiden mitta-asteikko määriteltiin kiinnittämällä muuttujien varianssi luvuksi yksi. Tämä ei ole yleisin tapa, vaan yleensä latenttien muuttujien skaala määritellään kiinnittämällä yhden latenttiin muuttujaan latautuvan indikaattorin lataus yhteen (marker indicator method). Tässä tapauksessa ei kuitenkaan haluttu käyttää kyseistä metodia, sillä indikaattorien metriikat eivät olleet keskenään vertailukelpoisia, eikä indikaattoreina käytetty mittareita, joilla olisi ollut vahva olemassa oleva teoriapohja. (Brown, 2015.)

Kun faktorimallit oli muodostettu ja estimoitavat parametrit sekä latenttien muuttujien skaalat oli päätetty, varmistettiin vielä, että faktorimallit olivat yli-identifioituja. Tämä tarkoittaa sitä, että mallissa tuntemattomien (vapaasti estimoitavien) parametrien määrä on pienempi kuin tunnettujen parametrien määrä (eli mallin vapausaste on nollaa suurempi), ja sen selvittäminen tapahtuu seuraavan kaavan avulla:

$$df = a - b$$

missä $a = \frac{p*(p+1)}{2}$ tunnettujen parametrien määrä,

missä p on indikaattorien määrä ja b on vapaasti estimoitavien parametrien määrä (Brown, 2015, s. 58)

Tunnettuja parametreja oli kaikissa malleissa yhtä paljon, sillä kaikissa malleissa käytettiin samaa määrää indikaattoreita (9 indikaattoria). Tunnettujen parametrien määrä oli siis:

$$a = \frac{9*(9+1)}{2} = 45.$$

Estimoitavia parametreja taas oli yhden faktorin mallissa 18 (9 faktorilatausta ja 9 virhevarianssia), kahden faktorin malleissa 19 (9 faktorilatausta, 9 virhevarianssia ja yksi faktorien kovarianssi), kolmen faktorin mallissa 21 (9 faktorilatausta, 9 virhevarianssia ja kolme faktorien kovarianssia) ja kahden faktorin ja yksittäisen indikaattorin malleissa 20 (9 faktorilatausta, 8 virhevarianssia, yksi faktorien kovarianssi ja kaksi faktorin ja yksittäisen indikaattorin kovarianssia). Mallien vapausasteet on merkitty taulukkoon 7. Kaikki faktorimallit olivat yli-identifioituja, niin kuin niiden kuuluikin olla.

### 3.3.5 Estimaattorin valinta

Konfirmatorisessa faktorianalyysissä eniten käytetty estimaattori on maximum likelihood -estimaattori (ML). Se on oletusarvoinen estimaattori useissa CFA:ta tekevissä tilasto-ohjelmissa, kuten tässä tutkimuksessa käytetyssä Mplussassa. (Brown, 2015.) Tässä tutkimuksessa käytettiin ennakkorekisteröinnin mukaisesti lähtökohtaisesti ML-estimaattoria. ML-estimaattorin käytön vaatimuksena on datan moniulotteinen normaalijakautuneisuus, joten ennakkorekisteröinnissä päätettiin, että jos ML:n oletukset eivät täyty, käytettäisiin robustia MLM-estimaattoria. Konfirmatorista faktorianalyysia tehdessä kuitenkin huomattiin, että MLM-estimaattori ei salli puuttuvaa dataa. Sen takia lopullisissa analyyseissa käytettiin MLR-estimaattoria robustina estimaattorina. Myös se soveltuu käytettäväksi, jos ML:n oletukset eivät täyty. (Brown, 2015.)

Toinen syy sille, että robustiksi estimaattoriksi valikoitui MLR, oli se, että CFA:ssa päästiin käyttämään Mplus-tilasto-ohjelmaa. Ennakkorekisteröity tilasto-ohjelma CFA:lle oli IBM SPSS Amos, sillä se oli ennakkorekisteröinnin aikana ilmaiseksi käytössäni. Myöhemmin tuli kuitenkin mahdolliseksi käyttää Munthénin ja Munthénin Mplus-ohjelmaa, joka soveltuu erityisen hyvin rakenneyhtälömallinnukseen (Muthen, painossa), joten analyysit suoritettiin sen avulla. Mplus-ohjelma mahdollisti MLR-estimaattorin käytön.

### 3.3.6 Faktorimallin yhteensopivuustarkastelu

Kun faktorimalli on laskettu tilasto-ohjelman avulla, päästään tarkastelemaan tuloksia. Ensimmäisenä tulee tutkia sitä, kuinka hyvä faktorimalli on kuvaamaan käsillä olevaa dataa. Tätä kutsutaan yhteensopivuuden tarkasteluksi. Faktorimallin yhteensopivuustarkastelu voidaan jakaa globaalin ja lokaalin sopivuuden tarkasteluun. (Brown, 2015.) Tässä alaluvussa käydään ensin läpi globaalin yhteensopivuuden indikaattoreita, ja sen jälkeen lokaalin yhteensopivuuden tutkimisen keinoja.

CFA:ssa muodostettujen faktorimallien globaalia sopivuutta voidaan arvioida usealla eri indeksillä. Ensimmäisenä kehitetty sopivuuden indeksi on khiin neliö -testi. Sen avulla arvioidaan, kuinka hyvin havaintomatriisi ja estimoitu matriisi vastaavat toisiaan. Testin nollahypoteesi on, että havaintomatriisi ja estimoitu matriisi ovat keskenään yhtä suuret. Täten khiin neliö -testin p-arvot, jotka ovat suurempia kuin 0,05, indikoivat hyvää faktorimallin sopivuutta. Khiin neliö -testiä ei kuitenkaan suositella käytettäväksi ainoana faktorimallin sopivuuden mittarina, sillä se on hyvin herkkä mm. normaaliuden ongelmille. (Brown, 2015; Nummenmaa ym., 1997.) Tämän tutkimuksen ennakkorekisteröinnissä päätettiin, että khiin neliö -testin tulos raportoidaan, mutta sitä ei käytetä faktorimallien sopivuuden arvioinnissa. Tämä on yleinen suositus (Brown, 2015).

Khiin neliö -testin sijaan faktorimallien globaalin sopivuuden indekseinä käytettiin absoluuttisen istuvuuden indeksiä SRMR:ää (standardized root mean square residual, jossa pienempi arvo kuvaa parempaa istuvuutta), arvioitivirhe-indeksiä RMSEA:ta (root mean square error of approximation, jossa pienempi arvo kuvaa parempaa istuvuutta) sekä vertaillun istuvuuden indeksejä CFI:tä ja TLI:tä (comparative fit index, Tucker-Lewis index, mitä lähempänä yhtä arvot ovat, sen parempi istuvuus). Näille indikaattoreille on mahdotonta antaa yksiselitteisiä rajoja siitä, mitkä arvot merkitsevät hyvää istuvuutta. (Brown, 2015.) Brown (2015) antaa kuitenkin ehdotuksia riittävän hyville arvoille (Brown, 2015, s. 94–95). Tässä tutkimuksessa käytetyt rajat on merkitty taulukkoon 5, joka löytyy luvun 3.3 alusta.

Faktorimallien sopivuuden indeksien lisäksi eri faktorimallien keskinäiseen vertailuun voidaan käyttää erilaisia mittareita (Brown, 2015). Nämä olivat olennaisia tämän tutkimuksen tavoitteiden kannalta, sillä tässä tutkimuksessa haluttiin nimenomaan vertailla eri faktorimalleja keskenään. Tässä tutkimuksessa päätettiin käyttää AIC- ja BIC-indeksejä (Akaike information criterion, Bayesian information criterion), jotka ovat suosittuja tässä tarkoituksessa, ja joita on käytetty aiemminkin joustavan rationaalilukukäsitteen tutkimuksessa faktorimallien keskinäiseen vertailuun (McMullen ym., 2020). AIC:ssä ja BIC:ssä pienemmät arvot viittaavat parempaan faktorimallin yhteensopivuuteen (Brown, 2015).

Kun globaalin yhteensopivuuden tarkastelut on suoritettu, voidaan siirtyä lokaalin sopivuuden tarkasteluun. Tässä tutkimuksessa lokaalin yhteensopivuuden arviointimenetelmäksi valittiin ennakkorekisteröinnissä täysin standardoidut jäännöskovarianssit. Niiden lisäksi usein suositellaan tarkasteltavan myös modifikaatioindeksejä (Brown, 2015), mutta tässä tutkimuksessa tarkasteltiin vain täysin standardoituja jäännöskovariansseja.

Täysin standardoidut jäännöskovarianssit kertovat erotuksen mallin ennustamien indikaattorien kovarianssien ja datan sisältämien indikaattoreiden kovarianssien välillä. Mitä lähempänä nollaa standardoitujen kovarianssien erotukset ovat, sitä parempi malli on. Verrattuna yleisiin faktorimallin istuvuuden indekseihin standardoidut jäännöskovarianssit kertovat paremmin mallin eri osien istuvuudesta, sillä ne lasketaan erikseen kaikille indikaattoripareille. Täysin standardoituja jäännöskovariansseja voidaan tulkita z-arvojen tapaan siten, että itseisarvoltaan alle 1,96 (usein pyöristettynä 2, jota käytettiin myös tässä tutkimuksessa) olevat jäännöskovarianssit ovat riittävän hyviä. Negatiivinen jäännöskovarianssi tarkoittaa sitä, että faktorimalli yliarvioi indikaattoreiden välistä suhdetta, ja positiivinen jäännöskovarianssi taas sitä, että malli aliarvioi indikaattoreiden välistä suhdetta. (Brown, 2015.)

### 3.3.7 Konfirmatorisen faktorianalyysin tulosten tarkastelu ja tulkinta

Brown (2015) huomauttaa, että mallin yhteensopivuustarkastelun jälkeen konfirmatorisessa faktorianalyysissa tulee tarkastella mallin parametriestimaatteja ja varmistaa, että näiden arvot ovat hyväksyttävissä rajoissa. Tarkastelua tulee jatkaa myös parametriestimaattien suuntaan, suuruuteen ja tilastolliseen merkitsevyyteen. (Brown, 2015.) Parametriestimaattien tarkastelua ei huomioitu tämän tutkimuksen ennakkorekisteröinnissä, mutta sen huomattiin jälkikäteen olevan olennainen osa faktorimallin arviointia.

Standardoitujen parametriestimaattien hyväksyttävät arvot ovat välillä $[-1, 1]$. Negatiivisia parametriestimaatteja saattaa esiintyä, jos indikaattorit ovat suunnaltaan vastakkaisia keskenään. Sen sijaan absoluuttiselta arvoltaan yhtä suuremmat täysin standardoidut parametriestimaatit kertovat ongelmista, jotka tarkoittavat sitä, ettei mallia voida sellaisenaan käyttää. (Brown, 2015.)

Kun faktorimallin parametriestimaattien ensimmäiset suuruustarkastelut on suoritettu, voidaan tarkastella parametriestimaatteja tarkemmin. Ensinnäkin parametriestimaattien tulisi olla tilastollisesti merkitseviä ($p<0,05$). Lisäksi indikaattorien faktorilatauksien osalta standardoitujen faktorilatauksien tulisi olla sallivienkin sääntöjen mukaan 0,3 tai suurempia, jotta niitä voidaan pitää hyväksyttävinä. (Brown, 2015.)

Jos faktorimallissa jokaisen indikaattorin on sallittu latautua vain yhdelle indikaattorille (kuten CFA:ssa lähtökohtaisesti on tapana), voidaan faktorilataus tulkita latentin faktorin ja indikaattorin väliseksi korrelaatioksi. Vastaavasti faktorilatauksen neliö (Mplus-tulosteessa r2) voidaan tulkita faktorin selitysasteeksi: se ilmaisee, kuinka suuren osan indikaattorin varianssista faktori selittää. (Brown, 2015.)

Faktorilatausten lisäksi faktorimallista tarkastellaan eri faktoreiden välisiä korrelaatioita. Standardoidun korrelaatioestimaatin ollessa alle 0,8 voidaan sanoa, että faktoreiden erotteleva validiteetti on riittävän hyvä, eli faktorit ovat toisistaan aidosti erillisiä. Jos taas standardoitu korrelaatioestimaatti on yli 0,8 tai 0,85, on todennäköistä, että faktorit eivät todellisuudessa ole toisistaan erillisiä konstruktioita. (Brown, 2015.) Voi esimerkiksi olla tilanne, jossa faktorimallin istuvuuden indikaattorit ovat oikein hyvät, mutta faktoreiden välinen korrelaatio on suuri. Silloin malli ei hyvästä yhteensopivuudestaan huolimatta ole kovin hyvä.

## 3.4 Hierarkkinen regressioanalyysi

Konfimratorisen faktorianalyysin ohella tässä tutkimuksessa käytettiin hierarkkista regressioanalyysia tutkimustulosten analysointiin. Hierarkkinen regressioanalyysi on monimuuttujamenetelmä, jossa tutkitaan useamman riippumattoman muuttujan ja riippuvan muuttujan välistä regressiota. Toisin kuin tavallisessa useamman muuttujan regressioanalyysissa, hierarkkisessa regressioanalyysissa riippumattomia muuttujia lisätään malliin askel kerrallaan, yksi tai useampi muuttuja kerralla. Tällä tavoin voidaan tutkia sitä, paraneeko regressiomalli, kun siihen lisätään uusia selittäviä muuttujia. (Tabachnick & Fidell, 2014, s. 173–174.)

Kysymyksenasettelu voi hierarkkisessa regressioanalyysissa olla esimerkiksi muotoa: Kuinka paljon selitysarvoa muuttuja x lisää malliin, kun muuttujien y ja z vaihtelu on jo otettu huomioon? Tässä tutkimuksessa hierarkkisen regressioanalyysin avulla selvitettiin, lisäsivätkö joustavaa rationaalilukukäsitettä mittaavat tehtävät regressiomallin selitysarvoa rajaamattoman lukusuoratehtävän varianssille, kun rutiinitehtävät rationaaliluvuilla oli jo lisätty malliin. Hierarkkisen regressioanalyysin tulosten tulkinnan kannalta on tärkeää huomata, että sen avulla ei voida tehdä päätelmiä muuttujien välisistä kausaalisuhteista sen enempää kuin muillakaan yhden mittauspisteen menetelmillä, vaikka kysymyksenasettelu voikin ohjata ajatuksia siihen suuntaan (Tabachnick & Fidell, 2014, s. 158).

### 3.4.1 Hierarkkisen regressioanalyysin edellytykset

Hierarkkisen regressioanalyysin edellytykset ovat samat kuin monen selittäjän regressiossa muutenkin (Tabachnick & Fidell, 2014, s. 198). Vaatimukset liittyvät käytettäviin muuttujiin, otoskokoon, muuttujien välisiin suhteisiin, poikkeaviin havaintoihin sekä regressiomallin virhetermeihin.

Ensinnäkin regressioanalyysissä riippuvan muuttujan tulee olla jatkuva, ja riippumattomien muuttujien joko jatkuvia tai kahden kategorian kategorisia muuttujia. Useamman kategorian kategoristen muuttujien käyttäminen on mahdollista, mutta silloin tulee muodostaa dummy-muuttujia. (Tähtinen ym., 2020, s. 195.) Monen selittäjän regressioanalyysissa otoskoon tulee olla vähintään $\mathrm{N} >= 50 + 8\mathrm{m}$, missä m on mallissa käytettyjen riippumattomien muuttujien lukumäärä. Jotta mallin yksittäisiä muuttujia voidaan tarkastella luotettavasti, otoskoon tulisi olla $\mathrm{N} >= 104 + \mathrm{m}$. Tabachnick ja Fidell (2014) kuitenkin huomauttavat, että nämä otoskoot ovat vain suuntaa antavia. (Tabachnick & Fidell, 2014, s. 159.)

Muuttujien välisiin suhteisiin liittyen monen selittäjän regressioanalyysillä on kaksi vaatimusta. Ensinnäkin selitettävän muuttujan ja riippumattomien muuttujien välisten suhteiden tulisi olla lineaarisia (Field, 2013, s. 309). Toisekseen riippumattomien muuttujien multikollineaarisuus on kiellettyä. Tämä tarkoittaa sitä, että riippumattomien muuttujien väliset yhteydet eivät saa olla liian vahvoja. (Tähtinen ym., 2020, s. 195.)

Selitettävän ja riippumattomien muuttujien välinen lineaarisuus voidaan tarkistaa esimerkiksi visuaalisesti hajontakuvion ja siihen asetetun regressiosuoran avulla (Tähtinen ym., 2020, s. 197). Riippumattomien muuttujien välisen multikollineaarisuuden tarkasteluun taas on useampia työkaluja. Ensinnäkin tarkastellaan riippumattomien muuttujien välisiä korrelaatiokertoimia. Nämä eivät saisi olla liian suuria, ohjearvona käytetään esimerkiksi $\mathrm{r} < 0{,}8$. Tässä tutkimuksessa multikollineaarisuutta tarkasteltiin korrelaatiokertoimien lisäksi

VIF- ja toleranssiarvojen avulla. SPSS:n regressioanalyysin tulosteesta löytyvät pyydettäessä VIF- (variansce intolerance factor) ja toleranssiarvot (1/VIF). VIF-arvojen tulisi olla lähellä yhtä, ja toleranssiarvojen yli 0,2. (Field, 2013, s. 325.)

Muuttujiin ja niiden välisiin yhteyksiin sekä otoskokoon liittyvien, edellä käsiteltyjen, vaatimuksien lisäksi regressioanalyysin oletukset liittyvät myös poikkeaviin havaintoihin (outliers) ja virhetermeihin (Field, 2013, s. 304). Poikkeavat havainnot voivat vääristää regressioanalyysin tuloksia merkittävästi, joten on tärkeää, että otoksesta poistetaan liian poikkeavat tapaukset tai muuttujia muokataan siten, että havainnot ovat vähemmän poikkeavia (Field, 2013, s. 305). Poikkeavia havaintoja voidaan tarkastella monella eri tavoin. Tässä tutkimuksessa käytettiin Mahalanobin etäisyyttä ja poikkeavan suuria jäännöstermejä poikkeavien havaintojen tunnistamisessa.

Mahalanobin etäisyys kertoo etäisyyden havaintoyksiköiden ja riippumattomien muuttujien keskiarvojen välillä. Etäisyydet ovat jakautuneet khiin neliö -jakauman mukaisesti, joten tämän jakauman kriittisiä arvoja voidaan käyttää myös Mahalanobin etäisyyksien arvioinnissa. Jakauman vapausasteiden määrä on sama, kuin regressiomallin riippumattomien muuttujien määrä, ja kriittistä arvoa (halutulla todennäköisyydellä) suuremmat arvot tulkitaan liian poikkeaviksi. Tässä tutkimuksessa käytettiin 0,001:n todennäköisyyttä. (Field, 2013, s. 307.) Toisena poikkeavien arvojen havaitsemiskeinona tässä tutkimuksessa käytettiin poikkeavan suuria jäännöstermejä. Jos tapauksen standardoitu jäännöstermi poikkesi keskiarvosta yli kolmen keskihajonnan verran, se poistettiin analyysista. Tämä oli varsin salliva raja, usein suositellaan käytettäväksi esim. 95 % varmuusrajaa ± 1,96 (Field, 2013, s. 306).

Kaikkien edellä mainittujen olettamusten lisäksi regressionalyysissa tulee vielä tarkistaa, että mallin jäännöstermit ovat normaalijakautuneet, lineaariset ja homoskedastiset. Jäännöstermeillä tarkoitetaan etäisyyksiä todellisten ja mallin ennustamien arvojen välillä. Jäännöstermeihin liittyviä olettamuksia voidaan tarkastella erilaisten kuvioiden avulla: normaaliutta jäännöstermien histogrammin avulla, lineaarisuutta P-P-kuvion avulla ja homoskedastisuutta standardoitujen jäännöstermien ja ennustettujen arvojen sirontakuvion avulla. Sirontakuviosta voitiin myös visuaalisesti tarkastella poikkeavia yksilöitä, joita poistettiin tarpeen mukaan analyysista. (Tabachnick & Fidell, 2014, s. 161–163.)

### 3.4.2 Hierarkkisen regressioanalyysin tulosten tulkinta

Kun regressioanalyysin edellytykset on varmistettu, voidaan analyysin tuloksia alkaa tulkitsemaan. Hierarkkisessa regressioanalyysissa tavoitteena on selvittää, parantavatko uudet riippumattomat muuttujat mallin selitysastetta tilastollisesti merkitsevästi (Tabachnick & Fidell, 2014, s. 181). Tämän kysymyksen kannalta tärkein tarkasteltava arvo on R2-muuuttujan muutos ja siihen liittyvä F-arvo ja sen tilastollinen merkitsevyys.

R2-muuttuja kertoo, kuinka suuren osan riippuvan muuttujan varianssista regressiomalli selittää (Field, 2013, s. 302). Hierarkkisessa regressioanalyyissa SPSS-tuloste antaa R2-arvon lisäksi R2-muuttujan muutoksen suuruuden, ja arvioi tämän muutoksen tilastollista merkitsevyyttä. Jos R2-arvon muutokseen liittyvän F-testin tulos on tilastollisesti merkitsevä, voidaan sanoa, että uudet riippumattomat muuttujat paransivat regressiomallia tilastollisesti merkitsevästi. Toisin sanoen lisätyt riippumattomat muuttujat selittävät tilastollisesti merkitsevästi riippuvan muuttujan vaihtelua senkin jälkeen, kun mallin aiemmissa vaiheissa lisättyjen muuttujien aiheuttama vaihtelu on tilastollisesti kontrolloitu. (Tabachnick & Fidell, 2014, s. 214.)

Mallin selitysasteen ja sen muutosten lisäksi regressioanalyysin tuloksista voidaan tarkastella yksittäisten riippumattomien muuttujien regressiokertoimia. Erityisesti standardoitujen regressiokertoimien avulla voidaan tulkita yksittäisten riippumattomien muuttujien selitysastetta regressiomallissa. Standardoidun regressiokertoimen (myös standardoitu β) arvot vaihtelevat 0 ja 1 välillä., ja suurempi arvo kertoo suuremmasta selitysasteesta. Regressiokertoimien tilastollista merkitsevyyttä tarkastellaan t-testin avulla, ja tilastollisesti merkitsevästi nollasta poikkeavasta regressiokertoimesta kertoo haluttua merkitsevyystasoa pienempi p-arvo. (Field, 2013, s. 302–303.)

Yleisesti hierarkkisen regressioanalyysin tulosten tulkinnassa on tärkeää pitää mielessä, että järjestys, jossa riippumattomat muuttujat lisätään regressiomalliin, vaikuttaa tulosten tulkintaan. Ensimmäisessä askeleessa lisättyjen muuttujien osalta regressioanalyysin tulos kertoo näiden muuttujien kokonaisvaikutuksen riippuvaan muuttujaan. Seuraavissa askeleissa lisättyjen riippumattomien muuttujien osalta tuloste kertoo kuitenkin vain sen, kuinka paljon lisää selitysarvoa muuttujat tuovat regressiomalliin. Sitä ei siis voida tulkita enää myöhemmissä vaiheissa lisättyjen muuttujien kokonaisvaikutukseksi. Tämä voidaan selvittää muuttamalla sitä järjestystä, jossa riippumattomat muuttujat lisätään regressiomalliin. (Tabachnick & Fidell, 2014, s. 174–175.)

# 4 Tulokset

Tulososio on rakennettu seuraavasti: ensin tarkastellaan käytettyjä summamuuttujia ja muuttujien yksi- ja moniulotteista normaalijakautuneisuutta, jonka jälkeen vastataan tutkimuskysymyksiin yksi kerrallaan.

## 4.1 Analyyseissa käytettyjen muuttujien kuvailua ja käsittelyä

Ennen varsinaisiin tutkimuskysymyksiin vastaamista haluttiin tarkastella aineiston muuttujien keskilukuja ja jakaumia hieman tarkemmin. Ennakkorekisteröinnin mukaisesti haluttiin muokata muuttujien liian poikkeavia havaintoja hyväksyttävämmiksi, ja tarkastella muuttujien yksi- ja moniulotteista normaalijakautuneisuutta.

Poikkeavien havaintojen etsimiseen ja käsittelyyn on monia keinoja (Leys ym., 2019). Tässä tutkimuksessa käytettiin yksittäisten muuttujien poikkeavien havaintojen etsimiseen ja käsittelyyn keskiarvoon ja keskihajontaan perustuvaa keinoa, jossa kaikki muuttujan havaintoarvot muutetaan korkeintaan kolmen keskihajonnan etäisyydelle keskiarvosta (Leys ym., 2013). Monimuuttujamenetelmissä poikkeavia havaintoja tutkittiin myös mm. visuaalisesti, ja näistä keinoista kerrotaan monimuuttujamenetelmien omissa osioissa tarkemmin.

Edellä kuvatun määritelmän mukaisia poikkeavan suuria havaintoja löytyi kaikista lausekkeenmuodostustehtävien muuttujista sekä molempien lukusuoratehtävien muuttujista. Poikkeavat arvot muutettiin alkuperäisiä arvoja käyttäen korkeintaan kolme keskihajontaa muuttujan keskiarvoa suuremmiksi. Tämä tehtiin käyttäen SPSS-ohjelman Recode into different variables -toimintoa. Kun poikkeavat havainnot oli käsitelty, tarkasteltiin tutkimuksessa käytettävien muuttujien keskilukuja ja jakaumia. Jakaumien tarkastelussa käytettiin vinous- ja huipukkuusarvoja ja Kolmogrov-Smirnovin testiä sekä histogrammien ja P-P-kuvioiden visuaalista tarkastelua. Muuttujien tilastolliset tunnusluvut on koottu taulukkoon 8, ja histogrammit ja P-P-kuviot löytyvät liitteestä 1. Taulukkoon 9 taas on koottu muuttujien väliset korrelaatiot.

**Lausekkeenmuodostustehtävissä** keskimääräinen muodostettujen oikeiden lausekkeiden määrä tehtävää kohden vaihteli 2,8 ja 4,5 lausekkeen välillä. Kaikkien lausekkeenmuodostustehtävistä muodostettujen muuttujien jakaumat olivat vinoudeltaan ja huipukkuudeltaan sallituissa rajoissa (vinous ja huipukkuus itseisarvoltaan alle yksi, Tähtinen ym., 2020, s. 104). Sen sijaan jakauman normaaliutta testaavan Kolmogrov-Smirnovin testin mukaan mikään muuttujista ei ollut normaalijakautunut. Kolmogrov-Smirnovin testiä ei kuitenkaan suositella käytettäväksi ainoana keinona normaalijakauman tarkasteluun (Tähtinen ym., 2020, s. 105), eikä sitä ennakkorekisteröityjä päätöksiä noudattaen haluttu käyttää normaalijakautuneisuutta yksin määrittävänä testinä. Lisäksi lausekkeenmuodostustehtävien histogrammit ja P-P-kuviot (kts. liite 1) näyttivät varsin hyvin normaalijakaumaan viittaavilta.

**Laskutehtävät-muuttuja** laski yhteen kuudestatoista laskutehtävästä oikeiden vastausten määrän. Keskimäärin oikein oli vastattu 7,81 tehtävään, eli hieman alle puoliin kaikista tehtävistä. Laskutehtävät oli rationaalilukujen rutiiniosaamista mittaavista tehtävistä parhaiten normaalijakautunut: sen vinous ja huipukkuus olivat hyväksyttäviä, ja lisäksi Kolmogrov-Smirnovin testi viittasi normaalijakautuneisuuteen. Myös histogrammi ja P-P-kuvio näyttivät laskutehtävien osalta hyvältä.

**Muuntamistehtävät-muuttuja** laski yhteen kymmenen murto- ja desimaalilukujen välistä muuntamistehtävää. Keskimäärin oikein oli vastattu 6,44 tehtävään, eli jonkin verran yli puoliin tehtävistä. Histogrammia tarkastellessa huomattiin myös, että ylivoimaisesti eniten aineistossa oli vastaajia, jotka olivat vastanneet oikein seitsemään kymmenestä tehtävästä (21,3 % vastaajista). Histogrammin muoto oli erikoinen: 0–6 tehtävää oikein osanneet muodostivat ikään kuin oman pienen normaalijakaumansa, mutta valtaosa oli vastannut oikein 7–10 tehtävään. Ero kuuden ja seitsemän oikean vastauksen frekvenssien välillä suuri: 17,6 prosenttiyksikköä. Jakauman visuaalisesta erikoisuudesta huolimatta muuntamistehtävät-muuttujan vinous- ja huipukkuusarvot olivat sallituissa rajoissa. Sen sijaan Kolmogrov-Smirnovin testi ei tukenut normaalisuushypoteesia, ja muuttujan P-P-kuvio ei näyttänyt normaalijakautuneelta.

**Järjestämistehtävistä** muodostettu muuttuja oli rutiiniosaamista mittaavista tehtävistä kaikkein vinoin (vinous -0,779), ja siinä näkyi selvä kattoefekti, eli vastaajista valtaosa oli osannut tehtävän hyvin. Tutkimuksessa käytetyistä viidestä järjestämistehtävän osatehtävästä saatiin keskimäärin 3,4 pistettä, eli reilusti yli puolet saatavilla olleista viidestä pisteestä. Muuttujan vinous- ja huipukkuusarvot olivat sallituissa rajoissa, mutta Kolmogrov-Smirnovin testi ei tukenut normaalijakautuneisuushypoteesia. Toisaalta järjestämistehtävät-muuttujan P-P-kuvio näytti kohtuullisen hyvältä.

**Molemmista lukusuoratehtävistä** muodostetut muuttujat olivat huomattavan vasemmalle vinoja ja huipukkaita, ja niiden vinous- ja huipukkuusarvot olivat yli sallittujen rajojen. LS-tehtävien histogrammit ja P-P-kuviot muistuttivat myös vahvasti toisiaan. Rajatuissa LS-tehtävissä absoluuttisen prosentuaalisen virheen keskiarvo oli vastaajilla keskimäärin 6,54 % ja rajaamattomissa tehtävissä 7,11 %. Jompaankumpaan suuntaan vinojen jakaumien kohdalla keskiarvoa informatiivisempi keskiluku voi olla mediaani (Tähtinen ym., 2020, s. 102). Rajattujen lukusuoratehtävien PAE-keskiarvojen mediaani oli rajatuilla tehtävillä 5,78 % ja rajaamattomilla tehtävillä 5,33 %. Kumpaakaan lukusuoratehtävää ei voitu pitää normaalijakautuneena. Liian suurten vinous- ja huipukkuusarvojen lisäksi Kolmogrov-Smirnovin testi ei tukenut hypoteesia normaalijakautuneisuudesta, ja kummankaan muuttujan histogrammi ja P-P-kuvio ei muistuttanut normaalijakautunutta muuttujaa.

Taulukko 8 Analyyseissa käytettyjen (summa-)muuttujien keskeisiä tunnuslukuja

ARNK = adaptive rational number knowledge, lausekkeentuottamistehtävät. *=p≤0,05; **=p≤0,001

| | ARNK1 | ARNK2 | ARNK3 | ARNK4 | ARNK kaikki | Laskutehtävät | Muuntamistehtävät | Järjestämistehtävät | Rajatut lukusuoratehtävät | Rajaamattomat lukusuoratehtävät |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 95 | 95 | 95 | 95 | 95 | 94 | 95 | 95 | 95 | 94 |
| keskiarvo | 4,5053 | 3,0632 | 2,8 | 3,7579 | 14,13 | 7,81 | 6,44 | 3,4 | 0,0654 | 0,0711 |
| keskihajonta | 1,79167 | 2,12288 | 1,82535 | 2,40441 | 6,478 | 3,844 | 2,513 | 1,43956 | 0,0445 | 0,05173 |
| vinous | 0,008 | 0,658 | 0,357 | 0,606 | 0,323 | 0,12 | -0,635 | -0,779 | 1,617 | 1,629 |
| huipukkuus | -0,452 | 0,1 | -0,298 | -0,145 | -0,267 | -0,743 | -0,536 | -0,113 | 3,038 | 2,483 |
| minimi | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,01 | 0,01 |
| maksimi | 9 | 9 | 8 | 11 | 33 | 16 | 10 | 5 | 0,24 | 0,23 |
| Kolmogrov-Smirnovin testi | D(95)= 0,135** | D(95)= 0,164** | D(95)= 0,122* | D(95)= 0,15** | D(95)= 0,095* | D(94)= 0,085 | D(95)= 0,23** | D(95)= 0,219** | D(95)= 0,15** | D(94)= 0,167** |
| Cronbachin alfa | N/A | N/A | N/A | N/A | 0,804 | 0,828 | 0,777 | 0,691 | 0,62 | 0,617 |

Taulukko 9 Tutkimuksessa käytettyjen muuttujien väliset korrelaatiot

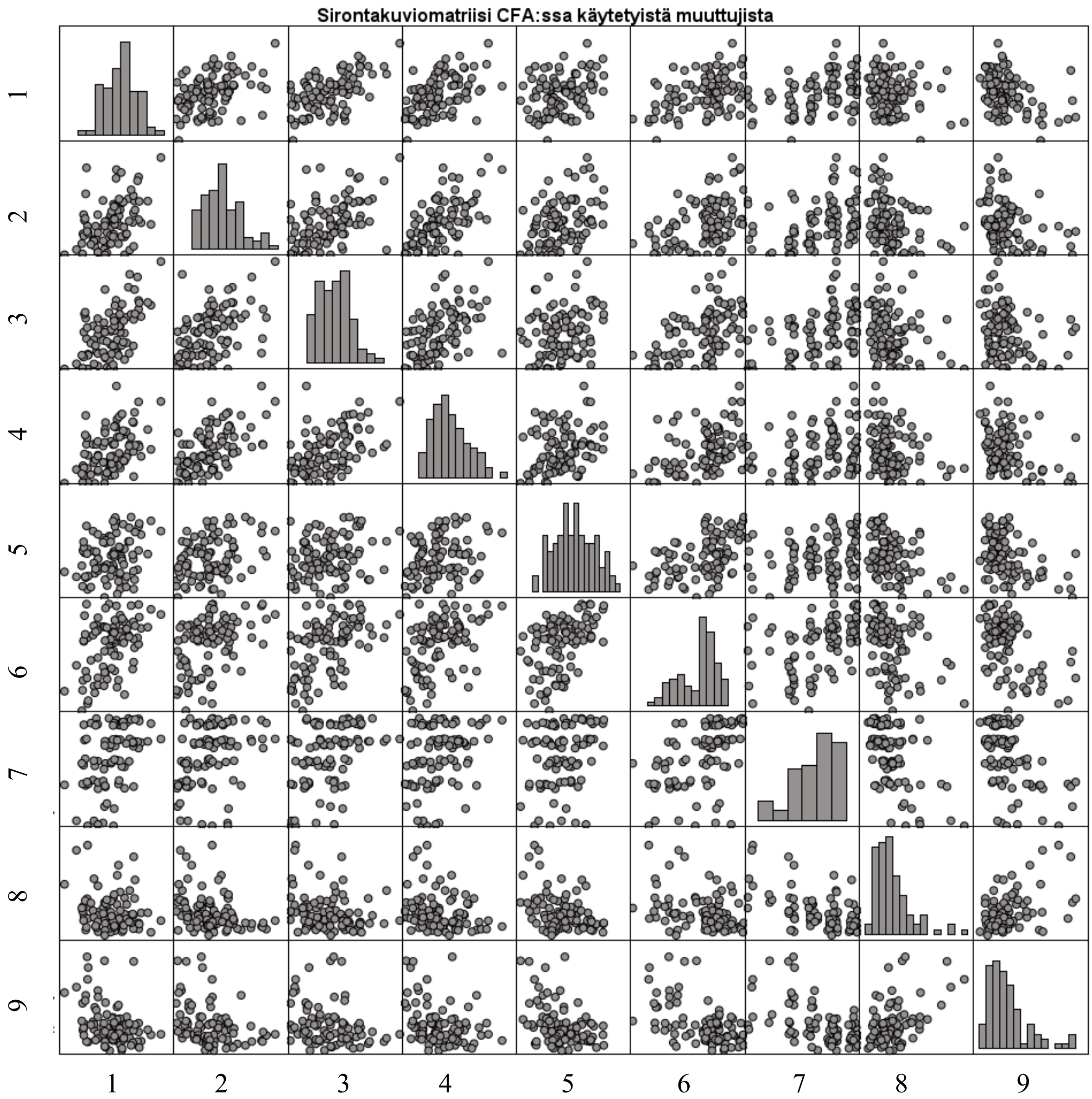
* p<=0,05; ** p<=0,01

| | ARNK 1 | ARNK 2 | ARNK 3 | ARNK 4 | ARNK summamuuttuja | Laskutehtävät | Muuntamistehtävät | Järjestämistehtävät | Rajatut lukusuoratehtävät (vastausten keskiarvo) | Rajaamattomat lukusuoratehtävät (vastausten keskiarvo) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ARNK 1 | 1 | | | | | | | | | |
| ARNK 2 | ,433** | 1 | | | | | | | | |
| ARNK | ,584** | ,478** | 1 | | | | | | | |
| ARNK 4 | ,468** | ,612** | ,498** | 1 | | | | | | |
| ARNK summamuuttuja | ,754** | ,806** | ,782** | ,838** | 1 | | | | | |
| Laskutehtävät | ,282** | ,359** | ,240* | ,292** | ,371** | 1 | | | | |
| Muuntamistehtävät | ,453** | ,459** | ,507** | ,478** | ,593** | ,479** | 1 | | | |
| Järjestämistehtävät | ,420** | ,350** | ,448** | ,314** | ,472** | ,248* | ,486** | 1 | | |
| Rajatut lukusuoratehtävät (vastausten keskiarvo) | -,215* | -,359** | -,284** | -,318** | -,373** | -,440** | -,411** | -,541** | 1 | |
| Rajaamattomat lukusuoratehtävät (vastausten keskiarvo) | -,409** | -,359** | -,275** | -,353** | -,440** | -,444** | -,552** | -,480** | ,530** | 1 |

### 4.1.1 Konfirmatorisessa faktorianalyysissa käytettyjen muuttujien moniulotteinen normaalius

Konfirmatorista faktorianalyysia varten tarkasteltiin käytettävien muuttujien välistä moniulotteista normaalijakaumaa. Moniulotteisen normaalijakauman tarkastelu ei ole yhtä suoraviivaista kuin yksiulotteisen normaalijakauman, ja esimerkiksi SPSS ei tarjoa siihen valmiita työkaluja (Field, 2013, s. 643). Tarkastelu suositellaan aloitettavaksi tarkastelemalla käytettävien muuttujien kahdenvälisiä normaalijakaumia esimerkiksi sirontakuviomatriisin avulla. Jos jo kahdenvälisissä normaalijakaumissa on ongelmia, ei moniulotteista normaalijakautuneisuutta voida olettaa. Kahdenvälisen normaalijakautuneisuuden merkkinä voidaan pitää ellipsoidin muotoista sirontakuviota. (Oppong & Agbedra, 2016.)

Konfirmatorisessa faktorianalyysissa käytettyjen muuttujien sirontakuviomatriisi löytyy kuvasta 6. Sirontakuvioita tarkastellessa huomataan, että esimerkiksi muuntamistehtävien ja eri lausekkeenmuodostustehtävien väliset sirontakuviot muistuttavat ellipsoidien sijaan ennemmin kolmioita. Muutenkin useimmissa sirontakuvioissa esiintyy paljon kaksiulotteisia poikkeavia havaintoja, jotka eivät tue normaalijakaumaolettamusta. Sirontakuviomatriisin perusteella epäiltiin, että CFA:ssa käytettävät muuttujat eivät olleet moniulotteisesti normaalijakautuneita, ja CFA:ssa päädyttiin käyttämään moniulotteisesti normaalijakautumattomille muuttujille sopivia robusteja menetelmiä.




Kuva 6 Sirontakuviomatriisi konfirmatorisessa faktorianalyysissa käytetyistä muuttujista

1= ARNK1; 2= ANRK2; 3= ARNK3; 4= ANRK4; 5= laskutehtävät; 6=muuntamistehtävät; 7= järjestämistehtävät; 8= rajatut lukusuoratehtävät; 9= rajaamattomat lukusuoratehtävät

## 4.2 Rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestyminen ja tehtävien keskinäinen vaikeusaste

Tässä tutkimuksessa oltiin erityisen kiinnostuneita rajaamattomista lukusuoratehtävistä. Tämän vuoksi rajaamattomia lukusuoratehtäviä haluttiin tarkastella muita tehtäviä tarkemmin, ja tutkia sitä, miten tehtäviin oli vastattu, ja olivatko tehtävät vaikeusasteeltaan toistensa kaltaisia

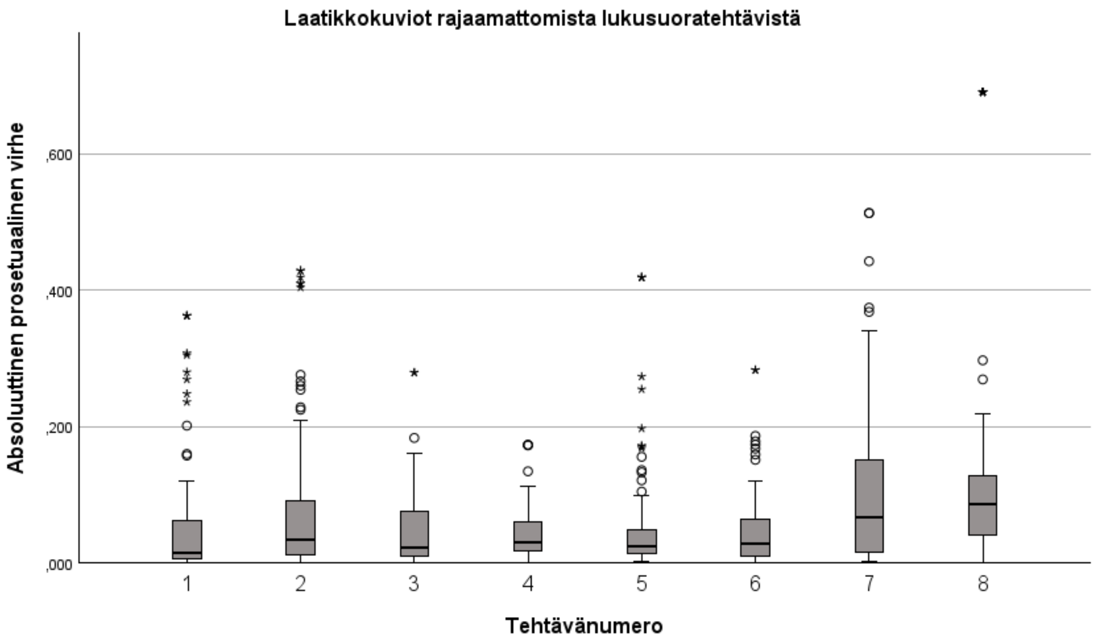
Taulukkoon 10 on koottu rajaamattomien lukusuoratehtävien keskeisiä tunnuslukuja. Taulukosta nähdään, että tehtäväkohtaiset absoluuttisten prosentuaalisten virheiden keskiarvot vaihtelivat välillä $[0{,}045;\ 0{,}132]$. Neljän prosentin virhe tarkoitti käytännössä annetun arvion ja oikean vastauksen välistä noin 0,6 senttimetrin etäisyyttä, 13 prosentin virhe taas noin kahden senttimetrin etäisyyttä (tehtävälomakkeessa käytetyllä noin 15 cm pitkällä lukusuoralla).

Kaikkien rajaamattomien LS-tehtävien jakaumat olivat voimakkaasti vasemmalle vinoja, ja tämä heijastui myös siihen, että kaikkien tehtävien mediaanit olivat keskiarvoja pienempiä. Vinossa jakaumassa mediaani voi olla keskiarvoa informatiivisempi keskiluku, sillä se on vähemmän herkkä poikkeaville arvoille. Rajaamattomien lukusuoratehtävien mediaanit vaihtelivat välillä $[0{,}021;\ 0{,}086]$.

Kuva 7 sisältää laatikko-janakuviot kaikista kahdeksasta rajaamattomasta lukusuoratehtävästä. Kuviota tarkastelemalla nähdään, että tehtävät 7 ja 8 erottuvat muista tehtävistä muita suuremmilla virhekeskiarvoilla ja keskihajonnoilla. Lisäksi näistä tehtävistä löytyvät suurimmat poikkeavat havainnot. Myös taulukon 10 keskilukuja tarkastelemalla voidaan havaita, että tehtävät 7 ja 8 eroavat muista tehtävistä

Taulukko 10 Rajaamattomien lukusuoratehtävien keskeisiä tunnuslukuja

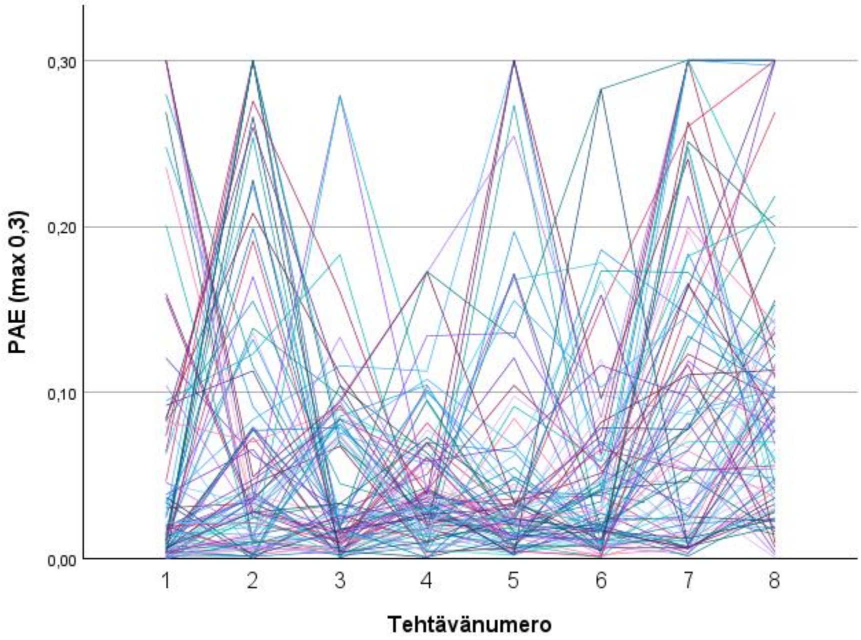
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Kaikki rajaamattomat tehtävät (ka) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Annettu luku | ½ | 2/3 | 0,75 | 1,4 | 4/5 | 1,5 | 3/5 | 0,25 | N/A |
| Sijoitettava luku | 0,75 | 1 1/3 | 1/2 | 1 | 0,2 | 3/4 | 7/12 | 0,6 | N/A |
| N | 95 | 94 | 93 | 93 | 92 | 92 | 89 | 89 | 94 |
| Keskiarvo (PAE) | 0,065 | 0,082 | 0,045 | 0,042 | 0,056 | 0,048 | 0,106 | 0,132 | 0,071 |
| Mediaani | 0,053 | 0,034 | 0,021 | 0,029 | 0,024 | 0,028 | 0,067 | 0,086 | 0,058 |
| Keskihajonta | 0,045 | 0,112 | 0,054 | 0,038 | 0,086 | 0,057 | 0,116 | 0,174 | 0,052 |
| Vinous | 1,617 | 1,945 | 2,224 | 1,647 | 2,942 | 2,199 | 1,665 | 2,613 | 1,629 |
| Huipukkuus | 3,038 | 3,027 | 6,554 | 2,817 | 9,117 | 5,585 | 2,715 | 5,976 | 2,483 |
| Minimi | 0,01 | 0 | 0 | 0 | 0,002 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,01 |
| Maksimi | 0,24 | 0,428 | 0,279 | 0,173 | 0,418 | 0,283 | 0,513 | 0,69 | 0,23 |




Kuva 7 Rajaamattomien lukusuoratehtävien laatikko-janakuviot

Kuvasta 8 nähdään, että valtaosa osallistujista vastasi kohtuullisen tarkasti kaikkiin rajaamattomiin LS-tehtäviin. Osalla osallistujista vastaustarkkuus rajaamattomissa LS-tehtävissä vaihteli kuitenkin paljon tehtävästä toiseen. Tässä vaihtelussa kiinnostavaa on se, että epätarkat vastaukset eivät ole kasaantuneet vain joihinkin tehtäviin, ja että vastaustarkkuuden vaihtelu tehtävästä toiseen on erilaista eri osallistujista. Lisäksi kuvasta ei erotu vastaajia, jotka olisivat vastanneet kaikkiin tehtäviin hyvin epätarkasti.

Kun kuvasta 8 tarkasteltiin tehtäväkohtaisia eroja, huomattiin mm., että tehtävissä 1, 3, 5 ja 6 tarkkojen vastausten määrä vaikutti suuremmalta kuin muissa tehtävissä. Lisäksi kuvasta erottuu vastausten suuri hajonta erityisesti tehtävissä 2, 7 ja 8, ja toisaalta tehtävän 4 vastausten pieni hajonta.




Kuva 8 Vastaajakohtaiset absoluuttiset prosentuaaliset virheet (PAE) rajaamattomissa lukusuoratehtävissä viivakuviona

PAE on rajattu maksimissaan 0,3:een.

## 4.3 Rajaamattoman lukusuoratehtävän ja matematiikan arvosanan välinen yhteys

Rajaamattoman lukusuoratehtävän ja matematiikan arvosanan välisiä yhteyksiä tutkittiin yksisuuntaisella varianssianalyysilla (ANOVA). Selitettävänä muuttujana varianssianalyysissa käytettiin rajaamattomissa lukusuoratehtävissä annettujen vastausten keskiarvoa, ja selittävänä muuttujana itse raportoitua edellistä matematiikan arvosanaa.

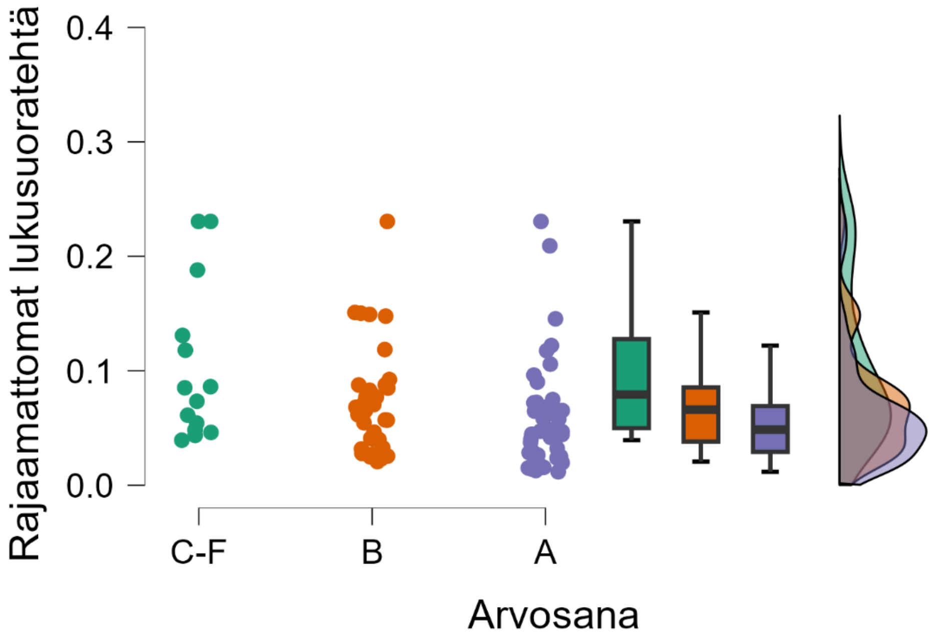
Matematiikan arvosana -muuttuja muutettiin varianssianalyysia varten kolmiluokkaiseksi (A, B ja muut), sillä F-, D- ja C-arvosanoja oli raportoitu vain vähän (yhteensä n=14). Kolmen arvosanaryhmän vastaajamäärät ja keskiarvot rajaamattomissa lukusuoratehtävissä on koottu taulukkoon 11. Levenen testin mukaan eri matematiikan arvosanaryhmien pisteet rajaamattomissa lukusuoratehtävissä voitiin olettaa varianssiltaan homogeenisiksi ($\mathrm{F}(2, 91) = 2{,}692;\ \mathrm{p} = 0{,}073$).

Taulukko 11 Rajaamattoman lukusuoratehtävän keskiarvot ja keskihajonnat arvosanaryhmittäin

| Arvosana | N | Rajaamattoman LS-tehtävän keskiarvo | Rajaamattoman LS-tehtävän keskihajonta |
|---|---|---|---|
| A | 44 | 0,060 | 0,060 |

| Arvosana | N | Rajaamattoman LS-tehtävän keskiarvo | Rajaamattoman LS-tehtävän keskihajonta |
|---|---|---|---|
| B | 36 | 0,072 | 0,072 |
| muut | 14 | 0,103 | 0,068 |

Varianssianalyysin tulosten mukaan eri ryhmien välillä oli tilastollisesti merkitsevä ero rajaamattomien lukusuoratehtävien pistekeskiarvoissa ($F(2) = 3{,}746;\ p = 0{,}027;\ \eta^2 = 0{,}076$). Post hoc -tarkastelut kertoivat tarkemmin, että A-arvosanaryhmän pistekeskiarvo erosi tilastollisesti merkitsevästi muut arvosanat -ryhmän pistekeskiarvosta (Tukeyn HSD-testi p=0,02). Sen sijaan A- ja B-arvosanaryhmien ja B- ja muut arvosanat -ryhmien pistekeskiarvot eivät poikenneet toisistaan tilastollisesti merkitsevästi. Kuva 9 näyttää eri arvosanaryhmien PAE-keskiarvot rajaamattomissa lukusuoratehtävissä.




Kuva 9 Rajaamattomien lukusuoratehtävien PAE:n keskiarvojen jakautuminen eri arvosanaluokissa

### 4.4 Rajaamattoman lukusuoratehtävän yhteydet muihin tehtävätyyppeihin

Tutkimuskysymykseen: Mittaako rajaamaton lukusuoratehtävä samoja latentteja piirteitä kuin lausekkeentuottamistehtävä? lähdettiin vastaamaan konfirmatorisen faktorianalyysin keinoin. Faktorimallit ja niiden spesifiointi on kuvattu luvussa 3.3. Konfirmatorinen faktorianalyysi suoritettiin Mplus-tilasto-ohjelmalla (versio 8.4). Liitteessä 2 on esimerkki käytetystä syntaksista yhden faktorin mallille. Koska tutkimuksessa käytettävä data ei ollut moniulotteisesti normaalia, käytettiin konfirmatorisessa faktorianalyysissa moniulotteisesti ei-normaalille datalle paremmin soveltuvaa robustia MLR-estimaattoria.

Kun tutkittavat faktorimallit oli rakennettu Mplus-ohjelmassa, tarkasteltiin ensin niiden globaalin yhteensopivuuden indeksejä. Taulukosta 12 nähdään, että neljällä faktorimallilla CFI, TLI ja SRMR-arvot ovat tässä tutkimuksessa hyväksytyissä rajoissa. Näissä neljässä mallissa myös khiin neliö -testin p-arvo ja RMSEA-arvo ovat muita malleja lähempänä hyväksyttävän rajoja (khiin neliö -testissä $p>0{,}001$ ja RMSEA $<0{,}1$.

Parhaiten yhteensopivat faktorimallit olivat: (1) kahden faktorin malli, jossa ensimmäiselle faktorille latautuivat vain lausekkeentuottamistehtävät, ja toiselle faktorille kaikki muut tehtävät; (2) kolmen faktorin malli, jossa ensimmäiselle faktorille latautuivat lausekkeentuottamistehtävät, toiselle rutiinitehtävät ja kolmannelle molemmat LS-tehtävät.; (3) kahden faktorin ja yhden indikaattorin malli, jossa faktoreina lausekkeentuottamistehtävät sekä rutiinitehtävät ja rajattu LS-tehtävä ja yksittäisenä indikaattorina rajaamaton LS-tehtävä; ja (4) kahden faktorin ja yhden indikaattorin malli, jossa faktoreina lausekkeentuottamistehtävät sekä rutiinitehtävät ja rajaamaton LS-tehtävä ja yksittäisenä indikaattorina rajattu LS-tehtävä.

Kaikista faktorimalleista matalin Akaiken informaatiokriteeri (AIC=2059,902) oli kolmen faktorin mallilla (2) ja matalin Bayes-informaatiokriteeri (BIC=2133,658) kahden faktorin mallilla (1). Tällä perusteella jompaakumpaa näistä malleista saatettiin epäillä parhaiten istuvaksi faktorimalliksi.

Kun ensimmäiset faktorimallien istuvuustarkastelut oli tehty, jatkettiin faktorimallien tarkastelua parametriestimaattien tarkastelulla. Kaikkien faktorimallien parametriestimaatit löytyvät liitteestä 3. Kaikkien mallien kaikki parametriestimaatit olivat tilastollisesti merkitseviä.

Edellä listatuista parhaiten istuvista faktorimalleista (3) ja (4) löydettiin standardoitu faktorikorrelaatio, joka oli itseisarvoltaan yhtä suurempi. Mallissa (3) faktoreiden kaksi ja kolme (faktori 2: rutiinitehtävät ja rajattu LS-tehtävä, faktori 3: rajaamaton LS-tehtävä) välinen korrelaatio oli -1,279, ja mallissa (4) faktoreiden kaksi ja kolme (faktori 2: rutiinitehtävät ja rajaamaton LS-tehtävä, faktori 3: rajattu LS-tehtävä) välinen korrelaatio oli -1,123. Mallit (3) ja (4) eivät siis olleet hyväksyttäviä, ja niitä ei tarkasteltu enempää.

Tämä jätti jäljelle mallit (1) ja (2). Mallissa (2) kuitenkin faktoreiden kaksi ja kolme (rutiinitehtävät ja LS-tehtävät) välinen korrelaatio oli -0,984, joka oli reilusti yli erottelevan validiteetin $r < |0{,}85|$ rajan, vaikkei ollutkaan yhtä suurempi. Jäljelle jäi siis enää malli (1), eli kahden faktorin malli, jossa lausekkeentuottamistehtävät muodostivat yhden faktorin ja kaikki muut tehtävät toisen.

Tämän kahden faktorin mallin tarkastelua jatkettiin vielä tutkimalla mallin indikaattoreiden täysin standardoituja jäännöskovariansseja, jotka kertovat faktorimallin lokaalista yhteensopivuudesta. Mallin (1) standardoitu jäännöskovarianssimatriisi löytyy taulukosta 13. Taulukosta huomataan, että mallin jäännöskovariansseissa oli useampi sallitun rajan (2,0 itseisarvo) ylittävä arvo. Näitä arvoja löytyy laskutehtävää lukuun ottamatta kaikkien faktori 2:n indikaattoreiden jäännöskovariansseista. Kahta suuremmat jäännoskovarianssit viittaavat siihen, että malli ei pysty toisintamaan alkuperäisessä datassa olevia indikaattoreiden välisiä yhteyksiä täysin tarkasti.

Tarkastellaan kuitenkin vielä kahden faktorin mallin parametriestimaatteja, jotka löytyvät liitteestä 3. Lausekkeentuottamistehtävät latautuvat faktorille yksi arvoilla, jotka vaihtelevat välillä 0,688–0,736, ja muut tehtävät latautuvat faktorille kaksi arvoilla, jotka asettuvat välille $|0{,}576| - |0{,}761|$. Nämä ovat hyväksyttäviä faktorilatauksia. Mallin selitysaste indikaattoreiden varianssille vaihtelee 0,332 ja 0,579 välillä, ja faktoreiden keskinäinen korrelaatio on -0,750, joka on korkeahko, mutta hyväksyttävissä rajoissa. Mallin selitysaste ja erotteleva validiteetti näyttäisivät siis olevan kohtuulliset, ja standardoituihin jäännöskovariansseihin liittyviä huomioon ottamatta tämä kahden faktorin malli selittää aineiston sisältämää vaihtelua hyvin.

Taulukko 12 Faktorimallien globaalin yhteensopivuuden indikaattorit. Harmaalla pohjalla tekstissä käsiteltävät mallit.

| Faktoreiden määrä | malli | Khiin neliö -testi | | | CFI (>0,9) | TLI (>0,9) | SRMR (<0,08) | RMSEA (<0,06) | AIC | BIC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | arvo | df | p (>0,05) | | | | | | |
| 1 | ARNK-tehtävät + rutiinitehtävät + rajatut LS-tehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät | 73,312 | 27 | 0 | 0,843 | 0,791 | 0,072 | 0,134 | 2085,812 | 2154,767 |
| 2 | (1) ARNK-tehtävät; (2) kaikki muut tehtävät | 47,022 | 26 | 0,007 | 0,929 | 0,902 | 0,053 | 0,092 | 2062,15 | **2133,658** |
| 2 | (1) ARNK-tehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät; (2) rutiinitehtävät + rajatut LS-tehtävät | 68,766 | 26 | 0 | 0,855 | 0,8 | 0,071 | 0,132 | 2082,741 | 2154,249 |
| 2 | (1) ARNK-tehtävät + rajatut LS-tehtävät; (2) rutiinitehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät | 65,832 | 26 | 0 | 0,865 | 0,814 | 0,073 | 0,127 | 2079,749 | 2151,258 |
| 2 | (1) ARNK-tehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät + rajatut LS-tehtävät; (2) rutiinitehtävät | 75,336 | 26 | 0 | 0,833 | 0,769 | 0,072 | 0,141 | 2087,622 | 2159,13 |
| 3 | (1) ARNK-tehtävät; (2) rutiinitehtävät; (3) rajatut LS-tehtävät+ rajaamattomat LS-tehtävät | 40,912 | 24 | 0,017 | 0,943 | 0,914 | 0,047 | 0,086 | **2059,902** | 2136,518 |
| 2 + yksittäinen indikaattori | (1) ARNK-tehtävät; (2) rutiinitehtävät + rajatut LS-tehtävät; rajaamattomat LS-tehtävät | 44,97 | 25 | 0,0084 | 0,932 | 0,903 | 0,052 | 0,092 | 2062,184 | 2136,247 |
| 2 + yksittäinen indikaattori | (1) ARNK-tehtävät; (2) rutiinitehtävät + rajaamattomat LS-tehtävät; rajatut LS-tehtävät | 43,432 | 25 | 0,0125 | 0,938 | 0,91 | 0,05 | 0,088 | 2061,123 | 2135,186 |

Taulukko 13 Kahden faktorin mallin (lausekkeenmuodostustehtävät – muut tehtävät) standardoitu jäännöskovarianssimatriisi

| | | Faktori 1 | | | | Faktori 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ARNK1 | ARNK2 | ANRK3 | ANRK4 | Lasku-tehtävä | Muuntamis-tehtävä | Järjestämis-tehtävä | Rajattu LS | Rajaamaton LS |
| Faktori 1 | ARNK1 | 0 | | | | | | | | |
| | ARNK2 | -1,224 | 0 | | | | | | | |
| | ARNK3 | 999,0 | -0,598 | 0 | | | | | | |
| | ARNK4 | -1,210 | 999,0 | -0,705 | 0 | | | | | |
| Faktori 2 | Laskutehtävä | -0,172 | 0,753 | -0,901 | -0,321 | 999 | | | | |
| | Muuntamistehtävä | **3,726** | 1,656 | 999,0 | 1,056 | 999,0 | 0 | | | |
| | Järjestämistehtävä | **2,837** | -0,173 | 2,430 | -0,921 | **-2,220** | -0,595 | 0 | | |
| | Rajattu LS | 1,566 | 999,0 | 1,238 | **4,597** | **-2,159** | **5,091** | **-2,189** | 0 | |
| | Rajaamaton LS | -0,442 | 1,060 | **3,111** | 0,682 | -0,543 | 0,159 | 0,339 | 0,780 | 0 |

## 4.5 Lausekkeentuottamistehtävissä ja rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestymisen välinen yhteys

Tutkimuskysymykseen: Selittääkö lausekkeenmuodostustehtävissä menestyminen menestystä rajaamattomissa lukusuoratehtävissä sen jälkeen, kun rutiinitehtävien vaikutus on kontrolloitu? vastattiin hierarkkisen regressioanalyysin avulla. Hierarkkinen regressioanalyysi suoritettiin kahdessa vaiheessa: ensimmäisessä vaiheessa selittävinä muuttujina olivat rutiinitehtävistä muodostetut summamuuttujat laskutehtäville, muuntamistehtäville ja järjestämistehtäville, ja selitettävänä muuttujana oli rajaamattomista LS-tehtävistä muodostettu summamuuttuja. Toisessa vaiheessa selittäviin muuttujiin lisättiin lausekkeentuottamistehtävistä muodostettu summamuuttuja. Kaikki käytetyt muuttujat olivat jatkuvia.

Ennen tulosten analysointia varmistettiin, että moniulotteisen regressioanalyysin olettamukset olivat voimassa. Ensimmäisellä analyysikierroksella aineistosta poistettiin kaksi tapausta, joiden standardoidut jäännöstermit poikkesivat jäännöstermien keskiarvosta enemmän kuin sallitun kolmen keskihajonnan verran. Toisella kierroksella tapausten standardoiduissa jäännöstermeissä ei ollut ongelmia, mutta standardoitujen jäännöstermien ja ennustettujen arvojen sirontakuviota tarkastellessa huomattiin, että kolmen tapauksen sijoittuminen sirontakuviossa oli muista poikkeavaa. Nämä kolme tapausta poistettiin analyysistä, ja regressioanalyysi suoritettiin kolmannen kerran. Kolmannella analyysikierroksella ei enää havaittu poikkeavia havaintoja. Standardoidut jäännöstermit olivat sallituissa rajoissa ja sirontakuviota tarkastelemalla ei havaittu poikkeavia arvoja. Lisäksi tarkasteltiin tapausten Mahalanobin etäisyyksiä, jotka vaihtelivat välillä $[0{,}457;\ 12{,}464]$. Suurin sallittu arvo 99 % varmuudella oli $\chi^2\ (4) = 18{,}467$, joten kaikki arvot olivat riittävän pieniä.

Lopulta regressioanalyysi suoritettiin 88 tapauksella, sillä kaksi tapausta jäi pois jo ensimmäisestä analyysista puuttuvien muuttujien arvojen takia. Seitsemän tapauksen poistamisen jälkeen regressioanalyysin otoskoko oli edelleen riittävä, $\mathrm{n} = 95 - 2 - 5 = 88 > 50 + 8 \cdot 4 = 84$. Otoskoon lisäksi tarkasteltiin vielä muuttujien välisiä yhteyksiä sekä standardoitujen jäännöstermien normaaliutta, lineaarisuutta ja homoskedastisuutta.

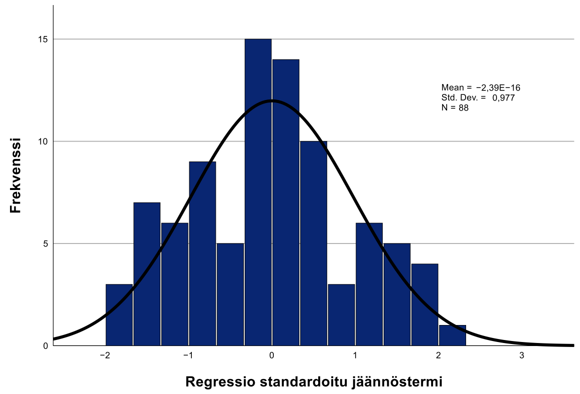
Riippuvan muuttujan eli rajaamattoman LS-tehtävän yhteydet riippuviin muuttujiin olivat lineaariset. Rajaamattoman LS-tehtävän korrelaatiokertoimet muihin muuttujiin olivat kohtuullisia ja tilastollisesti merkitseviä, $\mathrm{r} \in [-0{,}588;\ -0{,}400]$ (kts taulukko 9).

Riippumattomien muuttujien väliset korrelaatiokertoimet, VIF- arvot ja toleranssit olivat sellaisissa rajoissa, ettei multikollineaarisuutta ollut syytä epäillä. Riippumattomien muuttujien keskinäiset korrelaatiokertoimet vaihtelivat välillä $0{,}187 \leq r \leq 0{,}561$, ja olivat kaikki alle sallitun r<0,8 rajan. Muuttujien VIF-arvot vaihtelivat välillä $[1{,}303;\ 1{,}575]$ ja toleranssit välillä $[0{,}550;\ 0{,}804]$. Kaikki arvot olivat hyväksyttäviä.

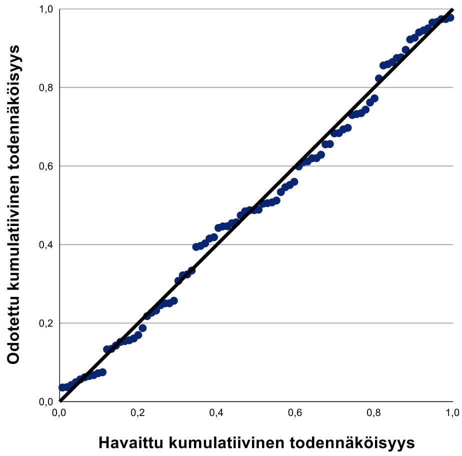
Hierarkkisen regressioanalayysin jäännöstermien normaalijakautuneisuus tarkistettiin visuaalisesti jäännöstermien histogrammin ja jäännöstermien ja ennustettujen arvojen sirontakuvion avulla (kuvat 10 ja 12). Visuaalisesti tarkasteltuna regressioanalyysin jäännöstermit vaikuttivat riittävän normaalijakautuneilta: histogrammi muistutti normaalijakaumaa ja sirontakuviossa jäännöstermit olivat jakautuneet tasaisesti nollan molemmin puolin.

Jäännöstermien lineaarisuutta tarkasteltiin P-P-kuvion avulla (kuva 11). Havaittu ja odotettu kumulatiivinen todennäköisyys eivät olleet täysin yhtä suuret, mutta havaintojen ja odotusten väliset erot eivät olleet myöskään kovin suuria.

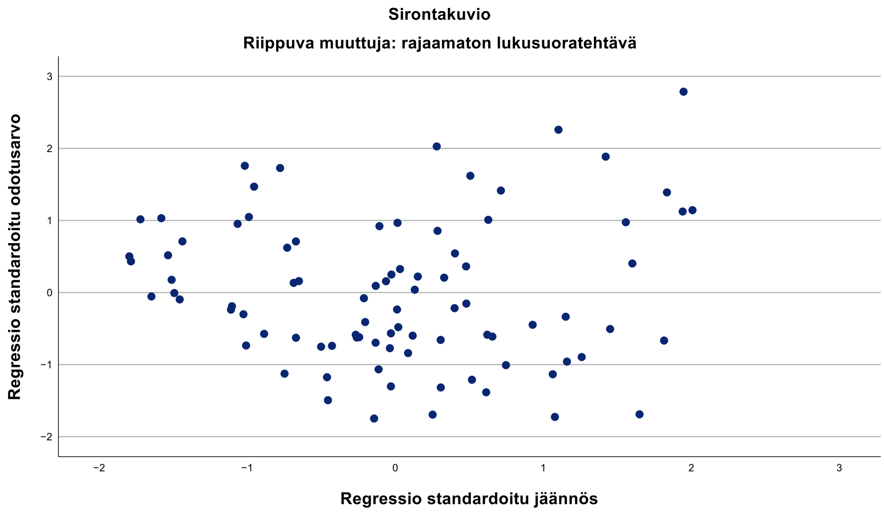
Jäännöstermien homoskedastisuutta tutkittiin jäännöstermien ja ennustettujen arvojen sirontakuvion avulla (kuva 12). Havainnot vaikuttivat jakautuvan varsin tasaisesti molempien akseleiden nollan ympärille pilvimuodostelmaan. Jäännöstermit todettiin riittävän homoskedastisiksi.




Kuva 10 Hierarkkisen regressioanalyysin standardoitujen jäännöstermien frekvenssijakauma




Kuva 11 Hierarkkisen regressioanalyysin standardoitujen jäännöstermien havaitun ja odotetun kumulatiivisen todennäköisyyden P-P-kuvio




Kuva 12 Hierarkkisen regressioanalyysin standardoitujen jäännöstermien ja odotusarvojen sirontakuvio

Kun hierarkkisen regressioanalyysin edellytykset oli varmistettu, päästiin etenemään tulosten tarkasteluun. Regressioanalyysin olennaiset luvut on koottu taulukkoon 14. Regressioanalyysin ensimmäisessä vaiheessa malliin lisättiin laskutehtävät, muuntamistehtävät ja järjestämistehtävät. Ensimmäisessä vaiheessa mallin selitysastetta kuvaava parametri R2 oli 0,460, joka oli tilastollisesti merkitsevä 0,001 merkitsevyystasolla. Toisessa vaiheessa malliin lisättiin lausekkeenmuodostamistehtävät. Ne nostivat mallin selitysastetta hyvin vähän. R2 muutos oli 0,006, mikä ei ollut tilastollisesti merkitsevä tulos. Lausekkeenmuodostamistehtävät eivät siis parantaneet regressiomallin selitysastetta tilastollisesti merkitsevästi.

Lopullisen mallin selittävien muuttujien standardoidut regressiokertoimet vaihtelivat välillä $standardoitu\ \beta \in [-0{,}321;\ -0{,}097]$ (kts. taulukko 14). Näistä muuntamis- ja järjestämistehtävien kertoimet olivat tilastollisesti merkitseviä 0,05 merkitsevyystasolla. Lausekkeenmuodostamistehtävien ja laskutehtävien regressiokertoimet taas eivät olleet tilastollisesti merkitseviä.

Taulukko 14 Hierarkkisen regressioanalyysin tulokset

**=p<0.001

| | Muuttuja | Mallin selitysaste ja sen muutos | | | Muuttujien regressiokertoimet | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | R2 | R2 muutos | F-muutos | Standardoitu $\beta$ | p |
| Malli 1 | | 0,460** | 0,460 | F(3, 84)=23,888** | N/A | |
| | Laskutehtävät | | | | | |
| | Muuntamistehtävät | | | | | |
| | Järjestämistehtävät | | | | | |
| Malli 2 | | 0,466** | 0,006 | F(1, 83)=0,925 | | |
| | Laskutehtävät | | | | -0,158 | 0,088 |
| | Muuntamistehtävät | | | | -0,317 | **0,004** |
| | Järjestämistehtävät | | | | -0,321 | **<0,001** |
| | ARNK-tehtävät | | | | -0,097 | 0,339 |

# 5 Pohdinta

Matemaattinen joustavuus on yleisesti hyväksytty matematiikan opetuksen tavoitteeksi niin Suomessa kuin maailmallakin (Hong ym., 2023; Opetushallitus, 2014). Eri tahot määrittelevät matemaattisen joustavuuden kuitenkin eri tavoin, eikä yhtä yhteistä määritelmää matemaattiselle joustavuudelle ole olemassa (Hickendorff ym., 2022). Tässä tutkimuksessa matemaattinen joustavuus määriteltiin Hatanon luoman joustavan asiantuntijuuden käsitteen kautta (Hatano, 2003). Erityisesti oltiin kiinnostuneita joustavasta lukukäsitteestä, McMullenin ja kumppaneiden nimeämästä taidosta, jonka avulla pyritään selittämään sitä, minkälainen osaaminen ylipäätään mahdollistaa joustavan asiantuntijuuden (koulu-)matematiikassa (McMullen ym., 2016).

Joustava lukukäsite määritellään kattavaksi tietoverkoksi lukujen ominaisuuksista ja niiden välisistä suhteista, ja tämän tietoverkon ajatellaan mahdollistavan joustavan matemaattisen toiminnan ongelmanratkaisutilanteissa (McMullen ym., 2017). Tässä tutkimuksessa keskityttiin joustavaan rationaalilukukäsitteeseen, joka on joustavan lukukäsitteen alakäsite. Se sisältää kokonaislukujen lisäksi myös muut rationaaliluvut, ja sen on joustavan lukukäsitteen tavoin todettu mm. todettu ennustavan tulevaa algebraosaamista. (McMullen ym., 2017, 2020) Joustavaa rationaalilukukäsitettä on tähän mennessä mitattu yhdellä mittarilla, lausekkeentuottamistehtävällä (McMullen ym., 2019, 2020). Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, voitaisiinko toista tehtävätyyppiä, rajaamatonta lukusuoratehtävää, käyttää joustavan lukukäsitteen mittaamisessa lausekkeentuottamistehtävän rinnalla.

Tutkimusten mukaan joustava rationaalilukukäsite, vahva rationaalilukuosaaminen ja hyvä suoriutuminen rajatuissa lukusuoratehtävissä ovat kaikki kolme yhteydessä yleiseen matemaattiseen kompetenssiin (Lortie-Forgues ym., 2015; Schneider ym., 2018). Uudempi tutkimus rationaalilukuosaamisen osalta on lisäksi antanut vahvoja viitteitä siitä, että erityisesti erilaisten rationaalilukunotaatioiden välinen osaaminen on tärkeää niin rationaalilukuosaamisen kuin yleisen matemaattisen kompetenssin kannalta (Schiller ym., 2023).

Nimenomaan rajaamattomien lukusuoratehtävien ei ole aiemmissa tutkimuksissa todettu olevan yhteydessä yleiseen matemaattiseen kompetenssiin (Schneider ym., 2018), mutta näissä tutkimuksissa käytetty rajaamattoman LS-tehtävän muoto poikkesi merkittävästi tässä tutkimuksessa käytetystä versiosta. Tässä tutkimuksessa käytettyjen rajaamattomien lukusuoratehtävien ratkaisemisessa arvioitiin tarvittavan lukujen suuruusosaamisen lisäksi ainakin rationaalilukutaitoja ja erityisesti notaatioiden välistä osaamista, sekä ymmärrystä lukujen välisistä suhteista, jotta annettu luku voidaan sijoittaa oikeaan kohtaan suhteessa lukusuoralle jo merkittyyn lukuun. Tämän arvion perusteella pidettiin todennäköisenä, että rajaamaton lukusuoratehtävä olisi yhteydessä yleiseen matemaattiseen kompetenssiin, ja mahdollisena, että rajaamattomien lukusuoratehtävien ratkaisemisessa vaadittaisiin myös joustavaa rationaalilukukäsitettä.

Tässä tutkimuksessa havaittiinkin ensimmäistä kertaa rajaamattoman lukusuoratehtävän ja matemaattisen kompetenssin välillä positiivinen yhteys. Sen sijaan faktorianalyysin tulokset antoivat viitteitä siitä, että rajaamaton lukusuoratehtävä ja joustavaa rationaalilukukäsitettä mittaava lausekkeenmuodostustehtävä eivät ilmentäisi keskenään samoja taitoja. Faktorianalyysin tulokset kuitenkin vahvistivat osaltaan aiempaa tulosta siitä, että joustava rationaalilukukäsite ja rutiininomaisemmat taidot rationaaliluvuilla ovat toisistaan erillisiä käsitteitä.

Seuraavaksi käydään läpi lyhyesti tutkimuksen eettisyyttä ja luotettavuutta, jonka jälkeen jokaista tutkimuskysymystä käsitellään vielä erikseen. Lopuksi vedetään yhteen tutkimuksen tuloksia ja niiden merkitystä kasvatustieteelliselle tutkimukselle, sekä esitetään jatkotutkimusideoita.

## 5.1 Tutkimuksen eettisyys ja luotettavuus

Tutkimuksen tekemisessä tutkimuksen eettisyys ja luotettavuus nivoutuvat vahvasti yhteen: ei ole toista ilman toista. Tutkijan tulee tutkimusta tehdessään sitoutua eettisiin ohjeisiin, ja osana näitä eettisiä ohjeita tutkija sitoutuu pyrkimään mahdollisimman hyvään luotettavuuteen. Suomessa tutkimuseettisiä kysymyksiä ohjaa Tutkimuseettinen neuvottelukunta, joka on julkaissut ohjeet hyvästä tieteellisestä käytännöstä (jatkossa myös HTK). Hyvän tieteellisen käytännön perusperiaatteet ovat luotettavuus, rehellisyys, arvostus ja vastuunkanto (Keiski ym., 2023). Nämä perusperiaatteet kuvaavat hyvin eettisten ja luotettavuusnäkökulmien yhteen nivoutumista.

Tämä tutkimus pyrittiin toteuttamaan noudattaen Tutkimuseettisen neuvottelukunnan ohjeita hyvästä tieteellisestä käytännöstä. Tutkimuksen aineisto oli valmiiksi kerätty aineisto, jonka keräämisessä ja säilyttämisessä oli noudatettu Turun yliopiston ohjeistusta. Tutkittavia ja heidän vanhempiaan oli informoitu riittävästi tutkimuksesta ja sen tarkoituksista, ja heiltä oli pyydetty suostumus tutkimukseen osallistumiselle. Tutkittaville oli myös kerrottu, että heitä ei velvoiteta osallistumaan tutkimukseen, ja että tutkimukseen osallistumisen pystyy keskeyttämään milloin tahansa.

Tutkimuksessa käytettyä valmiiksi kerättyä aineistoa ei ollut aiemmin hyödynnetty tutkimustarkoituksiin. Aineiston käyttäminen tässä tutkimuksessa siis tarkoittaa, että tutkimukseen osallistujien työpanos ei valunut hukkaan vaan heidän työtään hyödynnettiin tutkimustarkoituksiin. Lisäksi kerätty aineisto on tämän tutkimuksen myötä kirjattu muotoon, jossa sitä voidaan hyödyntää helpommin myös jatkossa. Tämä on linjassa HTK:n perusperiaatteiden kanssa, sillä se osoittaa arvostusta tutkimukseen osallistuneita kohtaan (Keiski ym., 2023).

Suunnitelma tässä tutkimuksessa käytettävistä analyysimetodeista rekisteröitiin ennakkoon ennen aineiston analysointia. Ennakkorekisteröinnin avulla voidaan parantaa tutkimuksen luotettavuutta ja eettisyyttä. Ennakkorekisteröimällä tutkimussuunnitelmansa tutkija sitoutuu noudattamaan rekisteröityä suunnitelmaa ja ilmoittamaan mahdollisista poikkeuksista suunnitelmaansa. Näin toimiminen saattaa myös parantaa tutkimuksen toisinnettavuutta. (Nosek ym., 2018.) Tutkimus toteutettiin mahdollisimman hyvin ennakkorekisteröityä suunnitelmaa noudattaen, ja ennakkorekisteröinnistä poikkeavat toimintatavat on raportoitu selkeästi.

Tutkimuksen luotettavuuteen vaikuttavat monet asiat aina tutkijan ja osallistujien vireystilasta käytettyihin tilastomenetelmiin. Tässä tutkimuksessa luotettavuuteen heikentävästi vaikuttavat kysymykset liittyivät erityisesti käytettyyn tehtävälomakkeeseen, otoskokoon sekä tehtävälomakkeeseen aineistonkeruumenetelmänä.

Tutkimuksen luotettavuuteen vaikutti erityisesti se tapa, jolla käytetty tehtävälomake oli koottu. Tehtävälomaketta ei ollut rakennettu huolella, vaan lyhyessä ajassa käyttäen osittain olemassa olevia ja osittain uusia tehtäviä. Tämän seurauksena tehtävälomakkeessa oli muutama tarkoitukseton virhe, jotka on kuvailtu Tutkimuksen toteutus -luvussa. Tehtävälomaketta ei myöskään ennakkotestattu, mikä näkyi esimerkiksi useiden tehtävätyyppien vain hädin tuskin hyväksyttävissä ($\alpha \in 0{,}6 – 0{,}69$, Cohen ym., 2018) reliabiliteettikertoimissa.

Tehtävälomakkeen asettamissa rajoissa tutkimus pyrittiin kuitenkin toteuttamaan niin luotettavasti kuin mahdollista. Tutkimukseen kuuluvat analyysit on raportoitu mahdollisimman kattavasti, ja analyysimetodien ennakko-oletukset on pyritty varmistamaan. Lisäksi tulosten tulkinnassa on seurattu metodikirjallisuuden ohjeita.

Erityisesti konfirmatorisen faktorianalyysin tulosten luotettavuuteen vaikuttaa kuitenkin tutkimuksen otoskoko. Tutkimuksessa oli 95 osallistujaa, joista 94:n vastauksia käytettiin CFA:ssa. Vaikka konfirmatoriselle faktorianalyysille ei voidakaan antaa mitään tiettyä otoskoon alarajaa, pidetään 100 osallistujan otosta yleisesti vielä pienenä. Paras tapa lähestyä riittävän otoskoon määrittämistä CFA:ssa olisi Brownin (2015) mukaan suorittaa jokin tilastollisen voiman analyysi ennen varsinaisia analyyseja. (Brown, 2015.) Tällaista analyysia ei tehty tässä tutkimuksessa, eikä siitä olisi valmista aineistoa käytettäessä ollut varsinaista hyötyäkään, sillä otoskokoon ei voitu jälkikäteen vaikuttaa.

Tutkimuksessa käytetyn tehtävälomakkeen ja otoskoon ongelmien lisäksi tutkimuksen luotettavuuteen vaikuttaa myös tehtävälomake tiedonkeruumenetelmänä. Erityisesti herää kysymys siitä, voidaanko olla varmoja, että oppilaat ovat todella yrittäneet parhaansa. On mahdollista, että kaikki osallistujat eivät esimerkiksi ole olleet motivoituneita vastaamaan tehtäviin parhaansa mukaan (Ayiro, 2012; Cohen ym., 2018). On myös esimerkiksi mahdollista, että osallistujat ovat kopioineet vastauksia toisiltaan, tai olleet epärehellisiä taustatietoja raportoidessaan. Tiedonkeruutilanteeseen liittyvien kysymyksien lisäksi tehtävälomakkeeseen perustuvassa tutkimuksessa on tärkeää pitää mielessä myös tehtävien validiteetti: mitä tehtävien ajatellaan mittaavan ja mittaavatko tehtävät todella näitä asioita (Cohen ym., 2018).

## 5.2 Tutkimuksen päätulokset tutkimuskysymyksittäin

### 5.2.1 Osaaminen rajaamattomissa lukusuoratehtävissä on keskimäärin hyvää, mutta epätasaista

Tämä tutkimus on tiettävästi ensimmäinen, jossa rajaamatonta lukusuoratehtävää tarkastellaan määrällisesti tässä mittakaavassa. Ensimmäiseksi haluttiinkin tutkia rajaamattomia lukusuoratehtäviä hieman tarkemmin ja selvittää, millaista rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestyminen oli, ja olivatko käytetyt tehtävät vaikeusasteeltaan toistensa kaltaisia (tutkimuskysymys 1).

Keskimäärin rajaamattomien lukusuoratehtävien vastaukset olivat varsin tarkkoja, ja kaikkien tehtävien absoluuttisten virheiden keskiarvo oli 0,071. Vastauksissa oli kuitenkin paljon hajontaa, ja yksittäisten osallistujien vastaukset saattoivat vaihdella hyvin tarkasta hyvin epätarkkaan eri tehtävien välillä.

Torbeynsin ja kumppaneiden (2015) tutkimuksessa tarkasteltiin belgialaisia, yhdysvaltalaisia ja kiinalaisia kuudes- ja kahdeksasluokkalaisia, ja osana tutkimusta oppilaat myös tekivät rajattuja lukusuoratehtäviä murtoluvuilla. Yhdysvaltalaisten kahdeksasluokkalaisten vastauksien absoluuttisten virheiden ryhmäkeskiarvot olivat lukusuoralla 0–1 0,149 ja lukusuoralla 0–5 0,180. (Torbeyns ym., 2015.) Tämän tutkimuksen osallistujat olivat vain vuotta vanhempia kuin Torbeynsin ja kumppaneiden tutkimuksen kahdeksasluokkalaiset, ja heidän keskimääräinen menestyksensä rajaamattomissa lukusuoratehtävissä oli merkittävästi parempaa kuin Torbeynsin ja kumppaneiden tutkimuksen yhdysvaltalaisosallistujien menestys lukusuoratehtävän rajatussa versiossa. (Vertailun vuoksi) tämän tutkimuksen rajattujen lukusuoratehtävien absoluuttisten prosentuaalisten virheiden keskiarvo oli 0,065, joka sekin oli alhaisempi kuin Torbeynsin ja kumppaneiden verrokki.

Keskilukujen vertailun ja visuaalisen tarkastelun sekä kaikkien vastausten viivadiagrammin perusteella kaksi viimeistä rajaamatonta lukusuoratehtävää (7 ja 8) erottuivat muista poikkeavina. Näiden tehtävien vastaustarkkuus oli muita huonompi, ja keskihajonta muita tehtäviä suurempi. Tehtävien 7 ja 8 lisäksi tehtävä 2 erottui muista tehtävistä samansuuntaisesti, mutta ero muihin tehtäviin ei ollut yhtä selkeä.

Mahdollisia selityksiä sille, miksi juuri nämä tehtävät erottuivat muiden joukossa vastausten tarkkuuden suhteen, on paljon. Koska vähiten tarkat vastaukset keskittyivät juuri viimeiseen kahteen tehtävään, on mahdollista, että oppilaiden keskittyminen ja motivaatio olivat jo alkaneet vähentyä. Rajaamattomat lukusuoratehtävät olivat myös koko tehtävälomakkeen viimeiset tehtävät.

Toisaalta itse tehtävien sisällölläkin saattaa olla vaikutusta. Tehtävässä seitsemän lukusuoralle sijoitettava luku oli $\frac{7}{12}$ ja lukusuoralle oli ennestään merkitty luku $\frac{3}{5}$. Näiden lukujen välillä ei ole helposti havaittavaa multiplikatiivista suhdetta, kuten useiden muiden tehtävien luvuilla. Sen sijaan tehtävän saattoi ratkaista esimerkiksi arvioimalla lukujen suuruutta desimaalilukuina (0,58333… ja 0,6) tai etsimällä ensin luvun yksi sijainnin käyttämällä lukusuoralle merkittyä lukua $\frac{3}{5}$ apuna ja sen jälkeen arvioimalla, missä $\frac{7}{12}$ sijaitsee suhteessa lukuun yksi. Myöskään tehtävässä kahdeksan annettujen lukujen välillä ei ollut helppoa multiplikatiivista suhdetta, vaan tehtävä oli ratkaistava jollakin muulla tapaa. Olisikin kiinnostavaa selvittää tarkemmin, mitkä tehtävien sisäiset tai testaustilanteeseen liittyvät tekijät vaikuttavat siihen, kuinka hyvin rajaamattomissa lukusuruoratehtävissä keskimäärin menestytään.

Huomionarvoista rajaamattomista lukusuoratehtävistä ryhmänä oli se, että tehtävien sisäinen reliabiliteetti ei ollut kovin hyvä ($\alpha = 0{,}617$). Nimenomaisesti tässä tutkimuksessa käytetyt rajaamattomat lukusuoratehtävät eivät siis vaikuta olevan vaikeusasteeltaan täysin samankaltaisia tai mittaavan keskenään täysin samoja taitoja. Toisaalta Edelsbrunner ja kummpanit (2025) esittävät, että tietoa tai osaamista mittaavissa tehtäväpattereissa alhainen reliabiliteettikerroin saattaa kertoa tehtävien epäyhtenäisyyden sijaan vastaajien tiedon heterogeenisesta luonteesta (Edelsbrunner ym., 2025), joten alhaiset reliabiliteettikertoimet eivät välttämättä johtuneet yksinomaan tehtävien sisällöstä.

Jatkossa olisikin kiinnostavaa selvittää, miksi rajaamattomien lukusuoratehtävien reliabiliteettikerroin oli tässä tutkimuksessa niin matala. Onko syy todella siinä, että vastaajien osaamisen heterogeeninen luonne johtaa huonoon reliabiliteettikertoimeen, vai onko syynä esimerkiksi huonosti suunniteltu tehtäväpatteri? Jos syy on ensimmäinen, voitaisiin esimerkiksi epäillä, että vahva joustava rationaalilukukäsite johtaisi homogeenisemmin hyviin tuloksiin rajaamattomissa lukusuoratehtävissä, sillä joustava rationaalilukukäsite viittaa nimenomaan hyvin yhdistyneeseen tietoverkkoon luvuista ja niiden ominaisuuksista (McMullen ym., 2020). Toisaalta taas paremmin suunniteltu tehtäväpatteri voisi itsessään johtaa parempaan reliabiliteettikertoimeen

### 5.2.2 Rajaamattomien lukusuoratehtävien vastaustarkkuuden ja matematiikan arvosanan välillä on yhteys

Rajaamattomien lukusuoratehtävien yleisemmän tarkastelun jälkeen haluttiin selvittää, onko rajaamattoman lukusuoratehtävän ja yleisen matemaattisen kompetenssin välillä yhteys. Kysymystä tarkasteltiin varianssianalyysin avulla. Matemaattisen kompetenssin mittarina käytettiin itse raportoitua edellistä matematiikan arvosanaa, ja rajaamattomista lukusuoratehtävistä käytettiin annettujen vastausten keskiarvoa.

Varianssianalyysissa matematiikan arvosanan ja rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestymisen välillä havaittiin tilastollisesti merkitsevä yhteys. Post hoc tarkastelut näyttivät, että arvosanan A saaneiden ja arvosanan C tai sitä heikomman saaneiden oppilaiden rajaamattomien lukusuoratehtävien PAE-keskiarvot poikkesivat toisistaan tilastollisesti merkitsevästi. PAE-keskiarvo oli arvosanan A saaneilla pienempi kuin arvosanan C tai alempi saaneilla.

Varianssianalyysin tulosten tulkinnan luotettavuutta heikentää se, että matemaattisen kompetenssin mittarina käytettiin itseraportoitua edellistä matematiikan arvosanaa. Tällöin matematiikan arvosana voi olla muistettu tai tahallisesti kerrottu väärin. Lisäksi oppilailta tai heidän opettajiltaan ei kysytty tiedonkeruun yhteydessä, mihin matematiikan sisältöihin edellinen arvosana liittyi, jolloin on mahdollista, että edes oikein muistettu edellinen arvosana ei heijastele yleistä matemaattista kompetenssia.

Jos oletetaan, että itseraportoitu edellinen matematiikan arvosana on hyvä mittari matemaattiselle kompetenssille, varianssianalyysin tuloksia voidaan pitää varsin luotettavina. Vaikka eri arvosanaryhmät olivat varsin erikokoisia, viittasi Levenen testin tulos siihen, että ryhmien varianssit olisivat keskenään samankaltaiset. Fieldin (2013) mukaan ryhmäkojen poikkeavuudella ei tällöin ole suurta väliä varianssianalyysin tulosten kannalta. Varianssianalyysin efektikoko oli lisäksi keskisuuri (0,076>0,05). (Field, 2013.)

Parempi vastaustarkkuus rajaamattomissa lukusuoratehtävissä vaikuttaisi siis olevan yhteydessä parempaan matematiikan arvosanaan. Tämä tulos poikkeaa aiempien tutkimusten tuloksista rajaamattomaan lukusuoratehtävään liittyen. Aiemmissa tutkimuksissa on selvitetty Cohenin ja Blanc-Goldhammerin rajaamattoman lukusuoratehtävän ja matemaattisen kompetenssin välistä yhteyttä, ja tälle tehtävätyypille yhteyttä ei ole havaittu. Toisaalta rajattujen lukusuoratehtävien ja matemaattisen kompetenssin välillä on todettu olevan yhteys, joka vahvistuu, kun tehtävässä on käytetty murtolukuja. (Schneider ym., 2018) Tämä tutkimus siis osaltaan vahvistaa aiempaa tulosta murtolukuja käyttävien lukusuoratehtävien ja matemaattisen kompetenssin välisestä yhteydestä, ja toisaalta osoittaa, että myös rajaamattomilla lukusuoratehtävillä voi olla aiemmista tutkimustuloksista poiketen yhteys matemaattiseen kompetenssiin. Tämän tuloksen perusteella voidaan olettaa, että tässä tutkimuksessa käytetty rajaamaton lukusuoratehtävä vaatii ratkaisijaltaan monia erilaisia matemaattisia taitoja. Tehtävätyyppi voisi siis esimerkiksi olla hyödyllinen opetuksen sekä osaamisen mittaamisen väline.

### 5.2.3 Rajaamatonta lukusuoratehtävää ei voida käyttää joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiseen

Yksi tämän tutkimuksen päätavoitteista oli tutkia sitä, mittaavatko rajaamattomat lukusuoratehtävät ja lausekkeentuottamistehtävät keskenään samankaltaisia taitoja. Hypoteesina oli, että rajaamattomia lukusuoratehtäviä voitaisiin käyttää joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiseen lausekkeentuottamistehtävien rinnalla.

Rajaamattoman lukusuoratehtävän ja muiden tutkimuksessa käytettyjen tehtävien välisiä yhteyksiä tutkittiin konfirmatorisen faktorianalyysin keinoin. Tutkimuksessa tarkasteltiin ja vertailtiin kahdeksaa erilaista faktorimallia. Puolet malleista hylättiin suoraan CFA:n globaalien yhteensopivuusindeksien perusteella. Jäljelle jäävät faktorimallit olivat kaikki sellaisia, joissa joustavaa rationaalilukukäsitettä mittaavat lausekkeentuottamistehtävät muodostivat yhden faktorin ja loput tehtävät yhden tai kaksi muuta faktoria.

Kaikkein parhaiten datan kanssa yhteensopiva faktorimalli oli malli, jossa lausekkeentuottamistehtävät muodostivat yhden faktorin, ja kaikki muut tehtävät toisen faktorin. Tällä mallilla myös Bayes-informaatiokriteeri oli kaikkein matalin. On kuitenkin huomattava, että edes parhaiten datan kanssa yhteensopiva faktorimalli ei täyttänyt kaikkia CFA:lle asetettuja globaalin ja lokaalin yhteensopivuuden kriteereitä.

Konfirmatorisen faktorianalyysin tulosten perusteella rajaamaton lukusuoratehtävä vaikuttaisi siis heijastelevan ennemmin samanaista osaamista rutiinitehtävien ja rajattujen lukusuoratehtävien, kuin joustavan rationaalilukukäsitteen kanssa. Tulosten tulkinnan kannalta on kuitenkin huomioitava, että tutkimuksen osallistujamäärä oli konfirmatorisen faktorianalyysin kannalta luultavasti riittämätön. CFA:n tuloksista ei siis välttämättä voida vetää vahvoja johtopäätöksiä. Joka tapauksessa vaikuttaisi kuitenkin siltä, että rajaamattomat lukusuoratehtävät olisivat ennemmin joko rutiinitehtävien tai rajattujen lukusuoratehtävien kuin lausekkeentuottamistehtävien kaltaisia.

Vaikka rajaamattomat lukusuoratehtävät eivät tämän tutkimuksen perusteella mittaakaan joustavaa rationaalilukukäsitettä, vahvistaa CFA:n tulos kuitenkin sitä tietoa, että lausekkeentuottamistehtävät heijastelevat erilaisia taitoja kuin rutiinitehtävät rationaaliluvuilla (McMullen ym., 2020). Tämän tutkimuksen faktorimalleista datan kanssa parhaiten yhteensopivia olivat sellaiset mallit, joissa lausekkeenmuodostamistehtävät muodostivat oman faktorinsa, riippumatta siitä, muodostivatko loput tehtävät yhden vai kaksi faktoria. Joustava rationaalilukukäsite vaikuttaisi siis tämänkin tutkimuksen perusteella olevan taito, jota rutiinitehtävissä menestymiseen ei tarvita.

### 5.2.4 Muuntamis- ja järjestämistehtävät selittävät osaamista rajaamattomissa lukusuoratehtävissä

Tutkimuksen viimeinen tutkimuskysymys keskittyi siihen, selittivätkö lausekkeenmuodostustehtävät tilastollisesti merkitsevästi rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestymistä sen jälkeen, kun rutiinitehtävien vaikutus on kontrolloitu. Kysymykseen pyrittiin vastaamaan ennakkorekisteröinnin mukaisesti, vaikka faktorianalyysin tulokset viittasivatkin jo siihen, että rajaamattomat LS-tehtävät ja lausekkeentuottamistehtävät vaativat keskenään erilaista osaamista.

Hierarkkisen regressioanalyysin tulokset eivät tukeneet hypoteesia siitä, että ARNK-tehtävillä olisi selitysarvoa rajaamattomissa lukusuoratehtävissä menestymiselle rutiinitehtävien kontrolloimisen jälkeen. Regressiomallin selitysaste ei kasvanut tilastollisesti merkitsevästi, kun lausekkeentuottamistehtävät lisättiin malliin. Lisäksi lausekkeentuottamistehtävien regressiokerroin oli pieni ja ei tilastollisesti merkitsevä.

Hierarkkisen regressioanalyysin tulosten mukaan rutiinitehtävät rationaaliluvuilla (laskutehtävät, muuntamistehtävät ja järjestämistehtävät) selittivät n. 46 % rajaamattomien lukusuoratehtävien pisteiden vaihtelusta (R2=0,466). Kun yksittäisten tehtävien regressiokertoimia tarkastellaan, huomataan, että laskutehtävien regressiokerroin ei ollut tilastollisesti merkitsevä, kun taas muuntamis- ja järjestämistehtävien regressiokertoimet olivat. Tämä viittaa siihen, että rajaamaton lukusuoratehtävä vaatii ratkaisijaltaan osaamista erityisesti notaatioiden välillä liikkumisessa sekä lukujen suuruusvertailussa.

Hieman yli puolet rajaamattoman lukusuoratehtävän vastausten vaihtelusta selittyy kuitenkin muilla kuin rutiinitehtävillä. Rajaamattomissa lukusuoratehtävissä tarvitaan siis myös muita taitoja kuin niitä, joita tutkimuksessa käytetyt rutiinitehtävät mittasivat. Tämä ajatus yhdessä tässä tutkimuksessa havaitun matemaattisen kompetenssin ja rajaamattoman lukusuoratehtävän välisen yhteyden kanssa tukee ajatusta siitä, että rajaamattomat lukusuoratehtävät ovat rajattujen lukusuoratehtävien lailla (Schneider ym., 2018) hyvinkin monipuolinen tehtävätyyppi.

## 5.3 Lopuksi

Tämä tutkimus antaa arvokasta tietoa ennen vähän tarkastellusta rajaamattomasta lukusuoratehtävästä. Tutkimuksen perusteella rajaamatonta lukusuoratehtävää voidaan pitää monipuolisena tehtävänä, joka vaatii ratkaisijaltaan monia erilaisia rationaalilukutaitoja. Koska rationaalilukutaidot ovat sekä käytännön elämän että tulevan matemaattisen kompetenssin kannalta tärkeitä (Lortie-Forgues ym., 2015; Siegler & Pyke, 2013), on rationaalilukutaitojen oppimisen ymmärtäminen ja tukeminen todella tärkeää. Tämä tutkimus antaa tärkeää tietoa rationaalilukuosaamisen luonteesta ja korostaa erilaisten lukusuoratehtävien monipuolisuutta. Lisäksi tutkimus herättää useita jatkotutkimusideoita.

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli tutkia aiemmin määrällisen tutkimuksen keinoin vähän tarkasteltua rajaamatonta lukusuoratehtävää ja selvittää, voitaisiinko sitä käyttää joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiseen. Tutkimuksessa havaittiin, että floridalaiset yhdeksäsluokkalaiset ovat rajaamattomissa lukusuoratehtävissä varsin tarkkoja, mutta että osallistujien vastaustarkkuus vaihteli paljon tehtävästä toiseen. Lisäksi havaittiin yhteys rajaamattomien lukusuoratehtävien ja yleisen matemaattisen kompetenssin välillä. Tutkimustulokset eivät antaneet viitteitä siitä, että rajaamatonta lukusuoratehtävää voitaisiin käyttää joustavan rationaalilukukäsitteen mittaamiseen, mutta aiempi tulos joustavasta rationaalilukukäsitteestä rutiinitaidoista erillisenä osaamisen muotona vahvistui.

Lukusuoratehtäviä on käytetty onnistuneesti osana erilaisia interventiotutkimuksia (esim. McMullen ym., 2023; Pearn & Stephens, 2007; Saxe ym., 2010). Esimerkiksi Saxe ja kumppanit (2010) käyttivät erilaisia lukusuoratehtäviä (rajattuja, askelmerkillisiä, toisesta tai molemmista päistä rajaamattomia jne.) pohjana interventiolleen, jossa heikosti lukusuoratehtävien ennakkotestissä menestyneet oppilaat harjoittelivat tutorin tukemana lukusuoratehtävien avulla matemaattisten aksioomien tai ”sopimusten” hyödyntämistä tehtävien ratkaisemisessa ja tutorin kanssa yhteisymmärrykseen pääsemisessä. Interventioon osallistuneet oppilaat kehittyivät intervention aikana merkittävästi enemmän kuin verrokit, ja useimmat saivat oivalluksia matemaattiseen ajatteluun liittyen. (Saxe ym., 2010.) McMullenin ja kumppaneiden (2023) interventiotutkimuksessa osallistujien joustava rationaalilukukäsite taas kehittyi lukusuoratehtäviä hyödyntävässä pelipohjaisessa oppimisympäristössä, jossa harjoittelu tapahtui yksinään (McMullen ym., 2023). Lukusuoratehtäviä voidaan siis hyödyntää monipuolisesti erilaisissa harjoittelutilanteissa kehittämään laajempia matemaattisia valmiuksia.

Koska erilaisten lukusuoratehtävien tarjoamat mahdollisuudet matemaattisten taitojen kehittämiseen vaikuttavat olevan moninaiset, on tärkeää jatkaa myös erilaisten lukusuoratehtävien perustutkimusta. Esimerkiksi tämän tutkimuksen tulosten perusteella rajaamaton lukusuoratehtävä on rajatun lukusuoratehtävän tavoin monipuolinen tehtävätyyppi, joka vaatii ratkaisijaltaan monipuolisempaa osaamista kuin rutiinitehtävät. Olisi kiinnostavaa selvittää, ovatko muutkin erilaiset lukusuoratehtävätyypit yhtä monipuolisia. Tässä tutkimuksessa käytettyä moninotaatioista rajaamattoman lukusuoratehtävän tyyppiä olisi myös kiinnostavaa soveltaa erilaisiin lukusuoriin. Tätä ideaa tukevat myös viimeaikaiset tutkimustulokset, jotka viittaavat siihen, että juuri notaatioiden välinen osaaminen olisi rationaalilukuosaamisen avaintekijöistä (esim. Braithwaite ym., 2022).

Tällä hetkellä tutkimuskenttä vaikuttaa jakautuneen lukusuoratehtävien suhteen kahteen keskenään kommunikoimattomaan osaan: a) yksinkertaisten lukusuoratehtävien (kuten perinteisen rajatun lukusuoratehtävän ja Cohenin ja Blanc-Goldhammerin rajaamattoman lukusuoratehtävän kaltaiset tehtävät) määrälliseen tutkimukseen osana matemaattisen ajattelun kehittymisen tutkimusta ja b) monimuotoisempien lukusuoratehtävien (kuten tämän tutkimuksen rajaamattomat lukusuoratehtävät tai muuten poikkeavasti rajatut tehtävät) laadulliseen (interventio-)tutkimukseen. Jotta lukusuoratehtävien moninaiset mahdollisuudet saataisiin hyödynnettyä mahdollisimman hyvin, olisikin mielestäni erittäin tärkeää, että nämä kaksi maailmaa kohtaisivat toisensa aiempaa paremmin. Tässä tutkimuksessa on erilaisten lukusuoratehtävätyyppien lisäksi tuotu keskustelun osaksi myös matemaattinen joustavuus ja joustava lukukäsite. Vaikka rajaamattomat lukusuoratehtävät eivät tämän tutkimuksen perusteella vaikutakaan suoraan mittaavan joustavaa lukukäsitettä, vaikuttaa siltä, että lukusuoratehtäviä voidaan käyttää osana matemaattisen joustavuuden kehittämistä. Tässä työssä olisi varmasti tärkeää, että erilaisia lukusuoratehtäviä ja niiden tuomia mahdollisuuksia hyödynnettäisiin mahdollisimman monipuolisesti.

## Lähteet


Ayiro, L. (2012). *A Functional Approach to Educational Research Methods and Statistics Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (1st ed.). The Edwin Mellen Press.

Beghetto, R. A. (2017). Lesson unplanning: Toward transforming routine tasks into non-routine problems. *ZDM*, *49*(7), 987–993. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0885-1

Braithwaite, D. W., McMullen, J., & Hurst, M. A. (2022). Cross-notation knowledge of fractions and decimals. *Journal of Experimental Child Psychology*, *213*, 105210. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105210

Brezovszky, B., McMullen, J., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M. M., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Laakkonen, E., & Lehtinen, E. (2019). Effects of a mathematics game-based learning environment on primary school students' adaptive number knowledge. *Computers & Education*, *128*, 63–74. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.09.011

Brown, T., A. (2015). *Confirmatory Factor Analysis for Applied Research: Vol. Second edition*. The Guilford Press. https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=nlebk&AN=831411&site=ehost-live&scope=site

Ching, B. H.-H., Li, X. Y., & Chen, T. T. (2024). Cross-notation knowledge of rational numbers predicts fraction arithmetic. *British Journal of Educational Psychology*, *94*(3), 717–737. https://doi.org/10.1111/bjep.12674

Cohen, D. J., & Blanc-Goldhammer, D. (2011). Numerical bias in bounded and unbounded number line tasks. *Psychonomic Bulletin & Review*, *18*(2), 331–338.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (Eighth edition). Routledge.

Common Core. (2024). *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Common_Core&oldid=1261091186. Luettu 14.2.2025.

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Wyberg, T., Pettis, C., & Fagerlund, C. (2019). Reconstructing the unit on the number line: Tasks to extend fourth graders' fraction understandings. *Investigations in Mathematics Learning*, *11*(3), 180–194. https://doi.org/10.1080/19477503.2018.1434594

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., & Panaoura, A. (2016). Representational Flexibility and Problem-Solving Ability in Fraction and Decimal Number Addition: A Structural Model. *International Journal of Science & Mathematics Education*, *14*, 397–417. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9625-6

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39–49. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002

Edelsbrunner, P. A., Simonsmeier, B. A., & Schneider, M. (2025). The Cronbach's Alpha of Domain-Specific Knowledge Tests Before and After Learning: A Meta-Analysis of Published Studies. *Educational Psychology Review*, *37*(1), 4. https://doi.org/10.1007/s10648-024-09982-y

Field, A. (2013). *Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics* (4th ed.). Sage.

Florida Department of Education. (2024). Mathematics & Science. https://www.fldoe.org/academics/standards/subject-areas/math-science/mathematics/. Luettu 7.10.2024

*Florida's B.E.S.T. Standards: Mathematics*. (ei päivämäärää). https://cpalmsmediaprod.blob.core.windows.net/uploads/docs/standards/best/ma/mathbeststandardsfinal.pdf. Luettu 7.10.2024

Greer, B. (2009). Representational flexibility and mathematical expertise. *ZDM*, *41*(5), 697–702. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0211-7

Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New Directions for Child and Adolescent Development*, *1988*(41), 55–70. https://doi.org/10.1002/cd.23219884105

Hatano, G. (2003). Foreword. Teoksessa A. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (pp. xi–xiii). Routledge.

Hatano, G., & Inagaki, K. (1984). TWO COURSES OF EXPERTISE. In *Child development and education in Japan* (pp. 262–272). W. H. Freeman & Co.

Hatano, G., & Oura, Y. (2003). Commentary: Reconceptualizing School Learning Using Insight From Expertise Research. *Educational Researcher*, *32*(8), 26–29.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM*, *41*(5), 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Hickendorff, M., McMullen, J., & Verschaffel, L. (2022). Mathematical Flexibility: Theoretical, Methodological, and Educational Considerations. *Journal of Numerical Cognition*, *8*(3), 326–334. https://doi.org/10.5964/jnc.10085

Hong, W., Star, J. R., Liu, R.-D., Jiang, R., & Fu, X. (2023). A Systematic Review of Mathematical Flexibility: Concepts, Measurements, and Related Research. *Educational Psychology Review*, *35*(4), 104. https://doi.org/10.1007/s10648-023-09825-2

Jäder, J., Sidenvall, J., & Sumpter, L. (2017). Students' Mathematical Reasoning and Beliefs in Non-routine Task Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(4), 759–776. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9712-3

Keiski, R., Hämäläinen, K., Karhunen, M., Löfström, E., Näreaho, S., Varantola, K., Spoof, S.-K., Tarkiainen, T., Kaila, E., & Aittasalo, M. (2023). *Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsitteleminen Suomessa*. https://tenk.fi/sites/default/files/2023-03/HTK-ohje_2023.pdf

Kim, J. (2024). Profiles of young students' understanding of fractions on number lines. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *20*(5), em2444. https://doi.org/10.29333/ejmste/14469

Leys, C., Delacre, M., Mora, Y. L., Lakens, D., & Ley, C. (2019). How to classify, detect, and manage univariate and multivariate outliers, with emphasis on pre-registration. *INTERNATIONAL REVIEW OF SOCIAL PSYCHOLOGY*, *32*(1), Article 1. https://doi.org/10.5334/irsp.289

Leys, C., Ley, C., Klein, O., Bernard, P., & Licata, L. (2013). Detecting outliers: Do not use standard deviation around the mean, use absolute deviation around the median. *Journal of Experimental Social Psychology*, *49*(4), 764–766. https://doi.org/10.1016/j.jesp.2013.03.013

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38*, 201–221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

McMullen, J. (2014). *Spontaneous Focusing on Quantitative Relations and the Development of Rational Number Conceptual Knowledge.* Turun yliopisto. https://www.utupub.fi/handle/10024/164504

McMullen, J., Brezovszky, B., Hannula-Sormunen, M. M., Veermans, K., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., & Lehtinen, E. (2017). Adaptive number knowledge and its relation to arithmetic and pre-algebra knowledge. *Learning and Instruction*, *49*, 178–187. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.02.001

McMullen, J., Brezovszky, B., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2016). Adaptive number knowledge: Exploring the foundations of adaptivity with whole-number arithmetic. *Learning and Individual Differences*, *47*, 172–181. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.02.007

McMullen, J., Hannula-Sormunen, M. M., Lehtinen, E., & Siegler, R. S. (2020). Distinguishing adaptive from routine expertise with rational number arithmetic. *Learning and Instruction*, *68*, 101347. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101347

McMullen, J., Kanerva, K., Lehtinen, E., Hannula-Sormunen, M. M., & Kiuru, N. (2019). Adaptive Number Knowledge in Secondary School Students: Profiles and Antecedents. *Journal of Numerical Cognition*, *5*(3), 283–300. https://doi.org/10.5964/jnc.v5i3.201

McMullen, J., Koskinen, A., Kärki, T., Lindstedt, A., Määttä, S., Halme, H., Lehtinen, E., Hannula-Sormunen, M. M., & Kiili, K. (2023). A game-based approach to promoting adaptive rational number knowledge. *Mathematical Thinking and Learning*, *0*(0), 1–17. https://doi.org/10.1080/10986065.2023.2177818

Muthen, B. (painossa). Mplus: A Brief Overview of its Unique Analysis Capabilities. Teoksessa *The Cambridge Handbook of Research Methods and Statistics for the Social and Behavioral Sciences: Volume Three*. https://www.statmodel.com/download/CUP.pdf

Newton, K. J., Lange, K., & Booth, J. L. (2020). Mathematical Flexibility: Aspects of a Continuum and the Role of Prior Knowledge. *Journal of Experimental Education*, *88*(4), 503–515. https://doi.org/10.1080/00220973.2019.1586629

Nosek, B. A., Ebersole, C. R., DeHaven, A. C., & Mellor, D. T. (2018). The preregistration revolution. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *115*(11), 2600–2606. https://doi.org/10.1073/pnas.1708274114

Nummenmaa, T., Konttinen, R., Kuusinen, J., & Leskinen, E. (1997). *Tutkimusaineiston analyysi* (1. painos). WSOY.

Nunes, T., Dorneles, B. V., Lin, P.-J., & Rathgeb-Schnierer, E. (2016). Teaching and Learning About Whole Numbers in Primary School. Teoksessa T. Nunes, B. V. Dorneles, P.-J. Lin, & E. Rathgeb-Schnierer (Eds.), *Teaching and Learning About Whole Numbers in Primary School* (s. 1–50). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45113-8_1

Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. https://eperusteet.opintopolku.fi/eperusteet-service/api/dokumentit/9217998

Oppong, F. B., & Agbedra, S. Y. (2016). *Assessing Univariate and Multivariate Normality, A Guide For Non-Statisticians*.

Palkki, R. (2022). *Vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet: Erilaisia ratkaisutapoja tarkastelemalla kohti joustavaa matematiikan osaamista* [Väitöskirja, University of Oulu]. https://oulurepo.oulu.fi/handle/10024/36862

Pearn, C., & Stephens, M. (2007). Whole number knowledge and and number lines help to develop fraction concepts. *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Austrailia*, 601–610. https://www.researchgate.net/publication/236661903_Whole_number_knowledge_and_and_number_lines_help_to_develop_fraction_concepts

Pittalis, M. (2024). An empirically validated rational number sense framework. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-024-00484-2

Qin, J., Kim, D., & Opfer, J. E. (2024). Varieties of Number-Line Estimation: Systematic Review, Models, and Data. *Developmental Review*, *74*, 101161. https://doi.org/10.1016/j.dr.2024.101161

Reinert, R. M., & Moeller, K. (2021). The new unbounded number line estimation task: A systematic literature review. *Acta Psychologica*, *219*, 1–9. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2021.103366

Resnick, I., Newcombe, N., & Goldwater, M. (2023). Reasoning About Fraction and Decimal Magnitudes, Reasoning Proportionally, and Mathematics Achievement in Australia and the United States. *Journal of Numerical Cognition*, *9*(1), 222–239. https://doi.org/10.5964/jnc.8249

Saxe, G. B., Earnest, D., Sitabkhan, Y., Haldar, L. C., Lewis, K. E., & Zheng, Y. (2010). Supporting Generative Thinking About the Integer Number Line in Elementary Mathematics. *Cognition and Instruction*, *28*(4), 433–474.

Schiller, L., Abreu-Mendoza, R. A., Fitzsimmons, C., Siegler, R., Thompson, C. A., & Rosenberg-Lee, M. (2023). *Lack of integrated number sense among college students: Evidence from rational number cross-notation comparison*. OSF. https://doi.org/10.31234/osf.io/p7fdx

Schiller, L. K., Abreu-Mendoza, R. A., Siegler, R. S., Rosenberg-Lee, M., & Thompson, C. A. (2024). Building integrated number sense in adults and children: Comparing fractions-only training with cross-notation number line training. *Journal of Experimental Child Psychology*, *246*, 106017. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.106017

Schiller, L. K., & Siegler, R. S. (2023). Integrated knowledge of rational number notations predicts children's math achievement and understanding of numerical magnitudes. *Cognitive Development*, *68*, 101380. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2023.101380

Schneider, M., Beeres, K., Coban, L., Merz, S., Susan Schmidt, S., Stricker, J., & De Smedt, B. (2017). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: A meta-analysis. *Developmental Science*, *20*(3), e12372. https://doi.org/10.1111/desc.12372

Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of Number Line Estimation With Mathematical Competence: A Meta-analysis. *Child Development*, *89*(5), 1467–1484. https://doi.org/10.1111/cdev.13068

Siegler, R. S. (2016). Magnitude knowledge: The common core of numerical development. *Developmental Science*, *19*(3), 341–361. https://doi.org/10.1111/desc.12395

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, *23*(7), 691–697. https://doi.org/10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An Integrative Theory of Numerical Development. *Child Development Perspectives*, *8*(3), 144–150. https://doi.org/10.1111/cdep.12077

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*(10), 1994–2004. https://doi.org/10.1037/a0031200

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Sievert, H., van den Ham, A.-K., Niedermeyer, I., & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences*, *74*, 101716. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2019.02.006

Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (2014). *Using Multivariate Statistics* (6th ed.). Pearson.

Tähtinen, J., Laakkonen, E., & Broberg, M. (2020). *Tilastollisen aineiston käsittelyn ja tulkinnan perusteita* (2.). Turun yliopiston kasvatustieteiden laitos.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, *41*(5), 541–555. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0195-3

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, *37*, 5–13. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002

Tossavainen, A. (2022). Student teachers’ common content knowledge for solving routine fraction tasks. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *10*(2), Article 2. https://doi.org/10.31129/LUMAT.10.2.1656

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children’s fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 419–441. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9606-2

U.S. Department of Education. (ei päivämäärää). *Federal Role in Education | U.S. Department of Education*. Retrieved February 14, 2025, from http://www.ed.gov/about/ed-overview/federal-role-in-education

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students’ Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181–209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1–4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, *61*, 99–108. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.010

Van Steenbrugge, H., Lesage, E., Valcke, M., & Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers’ knowledge of fractions: A mirror of students’ knowledge? *Journal of Curriculum Studies*, *46*(1), 138–161. https://doi.org/10.1080/00220272.2013.839003

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335–359.

Witherspoon, T. F. (2019). Fifth graders’ understanding of fractions on the number line. *School Science and Mathematics*, *119*(6), 340–352. https://doi.org/10.1111/ssm.12358

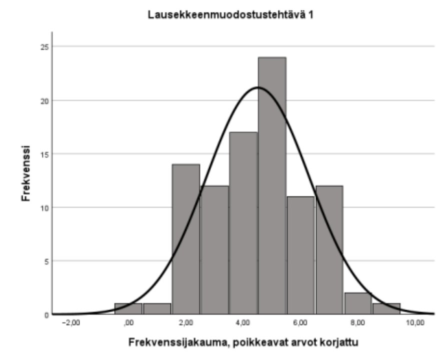
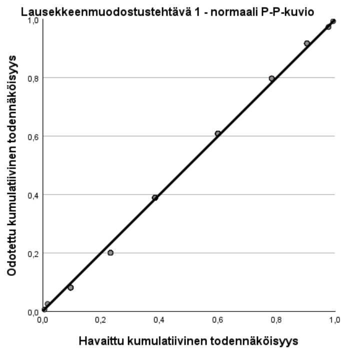
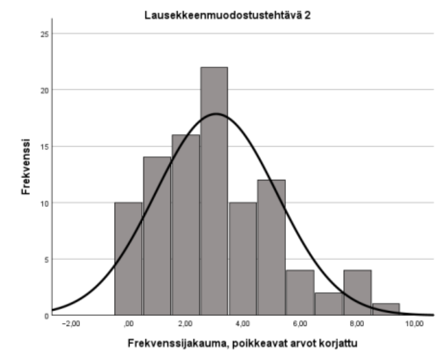
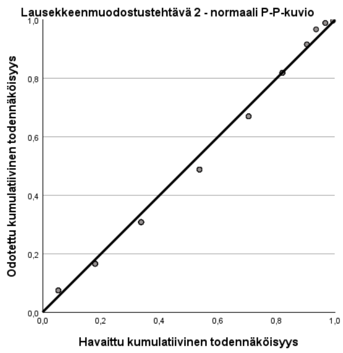
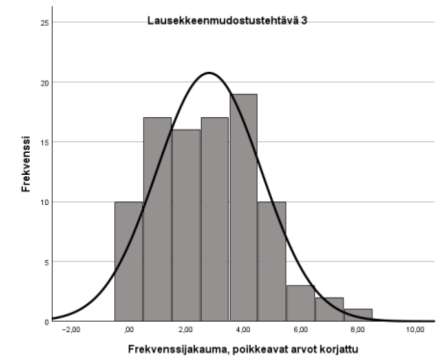
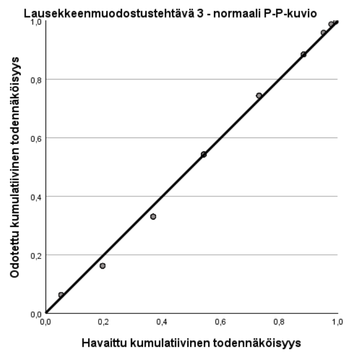
Yu, S., Sidney, P., Kim, D., Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2024). From integers to fractions: The role of analogy in transfer and long-term learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, *243*, 105918. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.105918

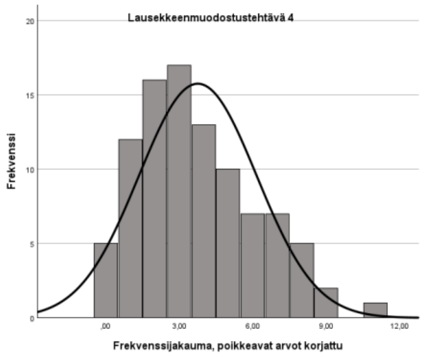
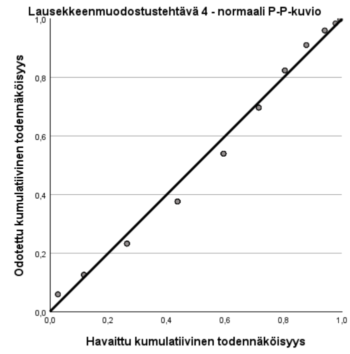
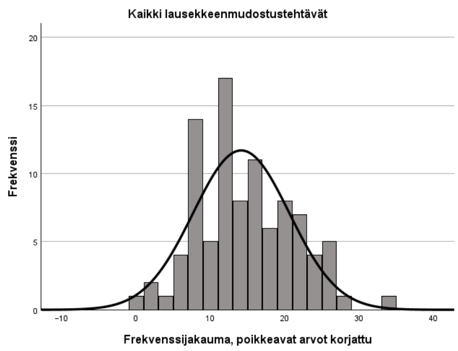
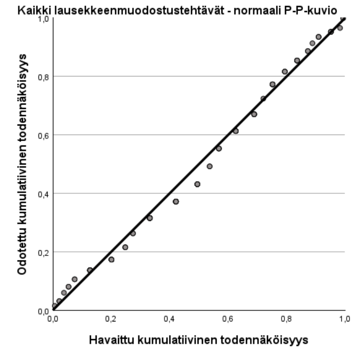
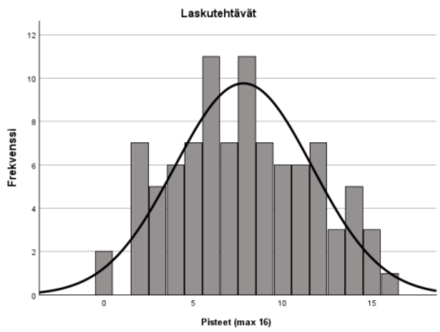
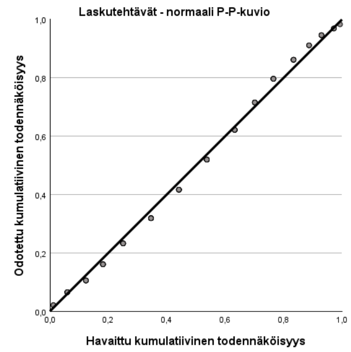
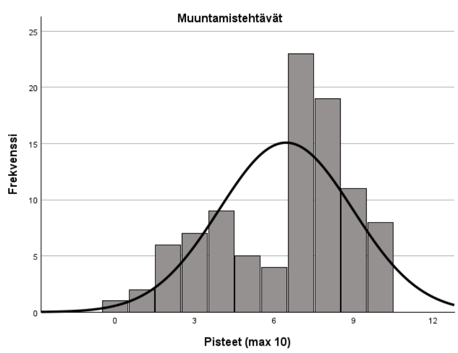
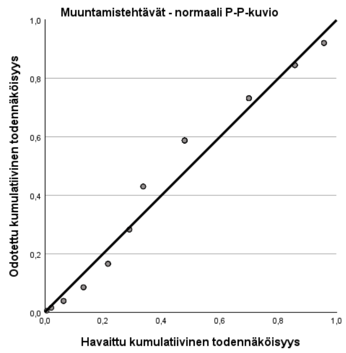
# Liitteet

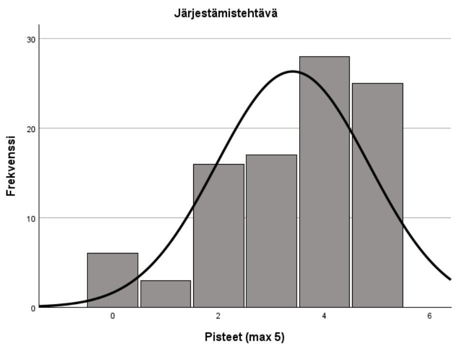
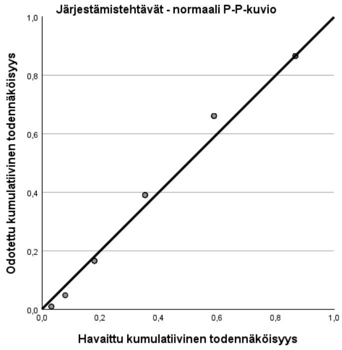
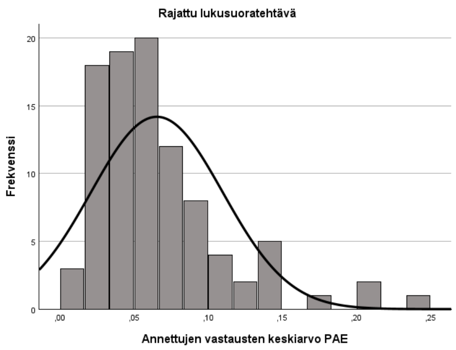
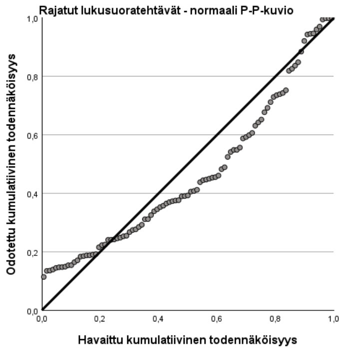
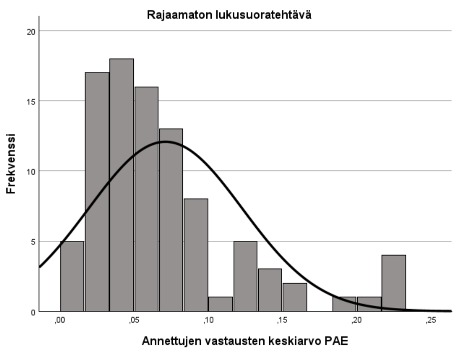
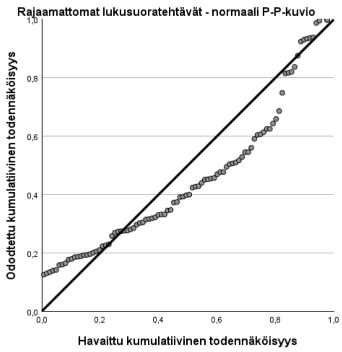
Liitteiden pääotsikkoa ei numeroida. Liitteissä käytetään samoja tyylejä kuin tekstiluvuissa.

## Liite 1. Kaikkien analyyseissa käytettyjen muuttujien ja summamuuttujien histogrammit ja P-P-kuviot

Taulukko 15 Analyyseissa käytettyjen muuttujien ja summamuuttujien histogrammit ja P-P-kuviot

| Muuttuja | Histogrammi | P-P-kuvio |
|---|---|---|
| Lausekkeentuottamistehtävä 1 |  |  |
| Lausekkeentuottamistehtävä 2 |  |  |
| Lausekkeentuottamistehtävä 3 |  |  |

| Muuttuja | Histogrammi | P-P-kuvio |
|---|---|---|
| Lausekkeentuottamistehtävä 4 |  |  |
| Kaikki lausekkeentuottamistehtävät |  |  |
| Laskutehtävät |  |  |
| Muuntamistehtävät |  |  |

| Muuttuja | Histogrammi | P-P-kuvio |
|---|---|---|
| Järjestämistehtävät |   |   |
| Rajatut lukusuoratehtävät |   |   |
| Rajaamattomat lukusuoratehtävät |   |   |

### Liite 2 Mplus-syntaksi yhden faktorin mallille

```
TITLE:
    160824 NL=PAE means of ans; MLR
    #YKSI FAKTORI
DATA:
    FILE IS "C:/Users/siikon/Documents/SPSS/Mplussaan 120824_2.dat";
VARIABLE:
    NAMES ARE
    ID ARNK_1 ARNK_2 ARNK_3 ARNK_4 ArProced Conv_All Ord_all NL_boMe
NL_unMe;
    USEVARIABLES ARE
    ARNK_1 ARNK_2 ARNK_3 ARNK_4 ArProced Conv_All Ord_all NL_boMe
NL_unMe;
    MISSING ARE ALL (999);
MODEL: factor1 BY ARNK_1* ARNK_2 ARNK_3 ARNK_4 ArProced
       Conv_All Ord_All NL_boMe NL_unMe; factor1@1;
ANALYSIS: Estimator=MLR;
OUTPUT: STDYX MODINDICES (.5) RESIDUAL;
```

## Liite 3 Indikaattorien faktorilataukset ja virhetermit sekä faktoreiden kovarianssit kaikille faktorimalleille

Taulukko 16Yhden faktorin malli

| **indikaattorit** | **faktori 1** | | |
|---|---|---|---|
| | **lataus** | **r2** | **virhe** |
| ARNK1 | 0,643* | 0,414* | 0,586* |
| ANRK2 | 0,665* | 0,442* | 0,558* |
| ARNK3 | 0,658* | 0,433* | 0,567* |
| ARNK4 | 0,658* | 0,433* | 0,567* |
| laskutehtävä | 0,535* | 0,286* | 0,714* |
| muuntamistehtävä | 0,756* | 0,571* | 0,429* |
| järjestämistehtävä | 0,635* | 0,404* | 0,596* |
| rajattu lukusuoratehtävä | -0,584* | 0,341* | 0,659* |
| rajaamaton lukusuoratehtävä | -0,658* | 0,433* | 0,567* |
| **faktorien kovarianssit** | 1 | | |
| 1 | 1,000 | | |

Taulukko 17 Kahden faktorin malli 1

| **indikaattorit** | **faktori 1** | | | **faktori 2** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **lataus** | **r2** | **virhe** | **lataus** | **r2** | **virhe** |
| ARNK1 | 0,688* | 0,473* | 0,527* | | | |
| ANRK2 | 0,724* | 0,524* | 0,476* | | | |
| ARNK3 | 0,717* | 0,514* | 0,486* | | | |
| ARNK4 | 0,736* | 0,542* | 0,458* | | | |
| laskutehtävä | | | | -0,576* | 0,332* | 0,668* |
| muuntamistehtävä | | | | -0,761* | 0,579* | 0,421* |
| järjestämistehtävä | | | | -0,662* | 0,438* | 0,562* |
| rajattu lukusuoratehtävä | | | | 0,661* | 0,438* | 0,562* |
| rajaamaton lukusuoratehtävä | | | | 0,733* | 0,537* | 0,463* |
| **faktorien kovarianssit** | **1** | | | **2** | | |
| **1** | 1 | | | * | | |
| **2** | -0,750* | | | 1 | | |

Taulukko 18 Kahden faktorin malli 2

| indikaattorit | faktori 1 | | | faktori 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **lataus** | **r2** | **virhe** | **lataus** | **r2** | **virhe** |
| ARNK1 | 0,648* | 0,420* | 0,580* | | | |
| ANRK2 | 0,672* | 0,451* | 0,549* | | | |
| ARNK3 | 0,663* | 0,440* | 0,560* | | | |
| ARNK4 | 0,667* | 0,445* | 0,555* | | | |
| laskutehtävä | | | | 0,541* | 0,293* | 0,707* |
| muuntamistehtävä | | | | 0,771* | 0,595* | 0,405* |
| järjestämistehtävä | | | | 0,637* | 0,405* | 0,595* |
| rajattu lukusuoratehtävä | -0,576* | 0,332* | 0,668* | | | |
| rajaamaton lukusuoratehtävä | -0,651* | 0,424* | 0,576* | | | |
| **faktorien kovarianssit** | **1** | | | **2** | | |
| **1** | 1 | | | * | | |
| **2** | 0,972* | | | 1 | | |

Taulukko 19 Kahden faktorin malli 3

| indikaattorit | faktori 1 | | | faktori 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **lataus** | **r2** | **virhe** | **lataus** | **r2** | **virhe** |
| ARNK1 | 0,677* | 0,459* | 0,541* | | | |
| ANRK2 | 0,700* | 0,490* | 0,510* | | | |
| ARNK3 | 0,690* | 0,477* | 0,523* | | | |
| ARNK4 | 0,703* | 0,494* | 0,506* | | | |
| laskutehtävä | | | | 0,560* | 0,313* | 0,687* |
| muuntamistehtävä | | | | 0,778* | 0,605* | 0,395* |
| järjestämistehtävä | | | | 0,656* | 0,431* | 0,569* |
| rajattu lukusuoratehtävä | | | | -0,617* | 0,381* | 0,619* |
| rajaamaton lukusuoratehtävä | -0,606* | 0,368* | 0,632* | | | |
| **faktorien varianssit ja kovarianssit** | **1** | | | **2** | | |
| **1** | 1 | | | * | | |
| **2** | 0,877* | | | 1 | | |

Taulukko 20 Kahden faktorin malli 4

| **indikaattorit** | **faktori 1** | | | **faktori 2** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **lataus** | **r2** | **virhe** | **lataus** | **r2** | **virhe** |
| ARNK1 | 0,671* | 0,451* | 0,549* | | | |
| ANRK2 | 0,712* | 0,508* | 0,492* | | | |
| ARNK3 | 0,701* | 0,492* | 0,508* | | | |
| ARNK4 | 0,717* | 0,514* | 0,486* | | | |
| laskutehtävä | | | | 0,561* | 0,314* | 0,686* |
| muuntamistehtävä | | | | 0,804* | 0,647* | 0,353* |
| järjestämistehtävä | | | | 0631* | 0,398* | 0,602* |
| rajattu lukusuoratehtävä | -0,516* | 0,266* | 0,734* | | | |
| rajaamaton lukusuoratehtävä | | | | -0,695* | 0,484* | 0,516* |
| **faktorien kovarianssit** | **1** | | | **2** | | |
| **1** | 1 | | | * | | |
| **2** | 0,847* | | | 1 | | |

Taulukko 21 Kolmen faktorin malli 1

| **indikaattorit** | **faktori 1** | | | **faktori 2** | | | **faktori 3** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **lataus** | **r2** | **virhe** | **lataus** | **r2** | **virhe** | **lataus** | **r2** | **virhe** |
| ARNK1 | 0,695* | 0,483* | 0,517* | | | | | | |
| ANRK2 | 0,711* | 0,506* | 0,494* | | | | | | |
| ARNK3 | 0,735* | 0,540* | 0,460* | | | | | | |
| ARNK4 | 0,723* | 0,523* | 0,477* | | | | | | |
| laskutehtävä | | | | 0,553* | 0,306* | 0,694* | | | |
| muuntamistehtävä | | | | 0,732* | 0,536* | 0,464* | | | |
| järjestämistehtävä | | | | 0,655* | 0,429* | 0,571* | | | |
| rajattu lukusuoratehtävä | | | | | | | 0,700* | 0,490* | 0,510* |
| rajaamaton lukusuoratehtävä | | | | | | | 0,768* | 0,590* | 0,410* |
| **faktorien varianssit ja kovarianssit** | **1** | | | **2** | | | **3** | | |
| **1** | 1 | | | * | | | * | | |
| **2** | 0,846* | | | 1 | | | * | | |
| **3** | -0,618* | | | -0,984* | | | 1 | | |

Taulukko 22 Kolmen faktorin malli 2

| **indikaattorit** | **faktori 1** | | | **faktori 2** | | | **faktori 3** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **lataus** | **r2** | **virhe** | **lataus** | **r2** | **virhe** | **lataus** | **r2** | **virhe** |
| ARNK1 | 0,683* | 0,467* | 0,533* | | | | | | |
| ANRK2 | 0,722* | 0,522* | 0,478* | | | | | | |
| ARNK3 | 0,725* | 0,526* | 0,474* | | | | | | |
| ARNK4 | 0,733* | 0,538* | 0,462* | | | | | | |
| laskutehtävä | | | | 0,567* | 0,322* | 0,678* | | | |
| muuntamistehtävä | | | | 0,758* | 0,574* | 0,426* | | | |
| järjestämistehtävä | | | | 0,653* | 0,427* | 0,573* | | | |
| rajattu lukusuoratehtävä | | | | - 0,647* | 0,419* | 0,581* | | | |
| rajaamaton lukusuoratehtävä | | | | | | | 0,594* | 0,352* | 0,648* |
| **faktorien varianssit ja kovarianssit** | **1** | | | **2** | | | **3** | | |
| **1** | 1 | | | * | | | * | | |
| **2** | 0,788* | | | 1 | | | * | | |
| **3** | -0,827* | | | -1,279* | | | 1 | | |

Taulukko 23 Kolmen faktorin malli 3

| **indikaattorit** | **faktori 1** | | | **faktori 2** | | | **faktori 3** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **lataus** | **r2** | **virhe** | **lataus** | **r2** | **virhe** | **lataus** | **r2** | **virhe** |
| ARNK1 | 0,703* | 0,494* | 0,506* | | | | | | |
| ANRK2 | 0,712* | 0,508* | 0,492* | | | | | | |
| ARNK3 | 0,722* | 0,521* | 0,479* | | | | | | |
| ARNK4 | 0,727* | 0,529* | 0,471* | | | | | | |
| laskutehtävä | | | | 0,569* | 0,324* | 0,676* | | | |
| muuntamistehtävä | | | | 0,742* | 0,550* | 0,450* | | | |
| järjestämistehtävä | | | | 0,671* | 0,451* | 0,549* | | | |
| rajattu lukusuoratehtävä | | | | | | | 0,623* | 0,388* | 0,612* |
| rajaamaton lukusuoratehtävä | | | | - 0,718* | 0,516* | 0,484* | | | |
| **faktorien varianssit ja kovarianssit** | **1** | | | **2** | | | **3** | | |
| **1** | 1 | | | * | | | * | | |
| **2** | 0,787* | | | 1 | | | * | | |
| **3** | -0,661* | | | -1,123* | | | 1 | | |