



MATEMATIIKAN PERUSTAIKOT YLIOPIILASKIRJOITUKSISSA

Nicklas Hellbom

Pro gradu -tutkielma  
Joulukuu 2025

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

**Tarkastajat:**

Prof. Vesa Halava

Dos. Kalle Parvinen

Turun yliopiston laatu järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

NICKLAS HELLBOM: Matematiikan perustaidot ylioppilaskirjoituksissa  
Pro gradu -tutkielma, 52 s.  
Matematiikka  
Joulukuu 2025

---

Tässä tutkielmassa tarkastellaan, millaisia ovat lukion päättävän lyhyen matematiikan opiskelijan matematiikan perustaidot, sekä mitä tyypillisiä virheitä ja virhekäsityksiä heillä esiintyy perustaitoja vaativien ylioppilastehtävien ratkaisuisissa. Perustaitoina pidetään tässä tutkielmassa yläasteella opittuja taitoja, kuten esimerkiksi pinta-alan ja tilavuuden laskemista. Muita taitoja ovat muun muassa prosenttiosuuksien laskeminen ja yhtälönratkaisutaidot. Matematiikan oppiminen on luonteeltaan kumulatiivista, jossa uusi tieto rakentuu vanhan tiedon päälle. Perustaitojen heikko osaaminen vaikeuttaa myöhempää matematiikan oppimista. Lisäksi matematiikan oppimista voi hankaloittaa erilaiset virhekäsitykset.

Tutkimus perustuu kuuteen perustaitoja mittaavaan lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen tehtävään vuosilta 2019-2021. Tutkimuksessa käsiteltävä aineisto on Ylioppilastutkintolautakunnalta tutkimuskäyttöön saatu korpusaineisto, joka sisältää 100 satunaisesti valittua ratkaisua kustakin kuudesta tehtävästä. Lisäksi aineistossa on esitettynä tehtävistä jaetut pistemäärät. Tavoitteena on selvittää kokelaiden perustaitojen taso, sekä tunnistaa ratkaisuisista tyypillisimmät virheet ja virhekäsitykset.

Tutkimuksen perusteella geometriaan liittyvät perustaidot ovat kohtalaisen hyvällä tasolla. Yleisiä virhetyyppejä geometrian tehtävissä olivat muun muassa kolmion korkeusjanan tunnistamiseen liittyvät virheet, sekä monikulmioisen särmiön ja pyramidin tilavuuteen liittyvät virheet. Prosenttiosuuksien laskemisessa osaamistaso oli yleisesti erittäin hyvää, mutta prosentin ja prosenttiyksikön eroa ei laajalti tunnistettu. Tämä olikin yleisin virhetyyppi toisessa tutkielmassa käsiteltävässä prosenttilaskennan tehtävässä. Yhtälönratkaisutaidoissa ilmeni valtaosalla kokelaista puutteita etenkin useamman muuttujan yhtälöissä. Näissä yhtenä virhetyyppinä oli esimerkiksi se, että kerrointermi vähennettiin pois yhtälöstä.

Asiasanat: Perustaidot, matematiikan oppiminen, geometria, prosenttilaskenta, algebra, virhe, virhekäsitys, matematiikan ylioppilaskoe.



# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Matematiikan perustaidot</b>	<b>3</b>
2.1	Matematiikan perustaidot perusopetuksen opetussuunnitelmassa . . . . .	3
2.2	Matematiikan perustaidot lukion opetussuunnitelmassa . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Matematiikan oppiminen ja opetus</b>	<b>6</b>
3.1	Oppilaan asenne ja matikkakuva . . . . .	7
3.2	Van Hielin teoria . . . . .	8
3.3	Oppimisvaikeudet . . . . .	9
3.4	Opettajan merkitys . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Virheet ja virhekäsitykset</b>	<b>11</b>
4.1	Virhekäsitykset geometriassa . . . . .	12
4.2	Virhekäsitykset algebrassa . . . . .	12
4.3	Virhekäsitykset prosenttilaskennassa . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Tutkimuksen toteutus</b>	<b>14</b>
5.1	Tutkimusaineisto ja tutkimuskysymykset . . . . .	14
5.2	Analyysiprosessin kuvaus . . . . .	14
5.3	Tehtävänannot, hyvän vastauksen piirteet ja malliratkaisut . . . . .	15
5.3.1	2019 kevät, matematiikka lyhyt oppimäärä, tehtävä 3. Värikäs lippu . . . . .	15
5.3.2	2019 kevät, matematiikka lyhyt oppimäärä, tehtävä 5. Paljonko tölkkissä on ilmaa? . . . . .	17
5.3.3	2019 kevät, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Mikko vaihtaa rahaa . . . . .	18
5.3.4	Kevät 2020, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Suklaarasia . . . . .	19
5.3.5	Syksy 2020, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 5. Maankäytön muutos . . . . .	22
5.3.6	Kevät 2021, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 3. Kaavoja . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Tutkimustulokset</b>	<b>26</b>
6.1	2019 kevät, matematiikka lyhyt oppimäärä, tehtävä 3. Värikäs lippu . . . . .	26
6.2	2019 kevät, matematiikka lyhyt oppimäärä, tehtävä 5. Paljonko tölkkissä on ilmaa? . . . . .	29
6.3	2019 kevät, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Mikko vaihtaa rahaa . . . . .	32
6.4	Kevät 2020, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Suklaarasia . . . . .	35
6.5	Syksy 2020, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 5. Maankäytön muutos . . . . .	39
6.6	Kevät 2021, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 3. Kaavoja . . . . .	42

<b>7 Pohdinta</b>	<b>47</b>
7.1 Tutkimuksen luotettavuuden arviointi . . . . .	47
7.2 Tutkimustulosten tarkastelu ja pohdinta . . . . .	47
7.3 Johtopäätökset . . . . .	51
<b>Lähteet</b>	<b>52</b>

# 1 Johdanto

Matematiikan merkitys lukio-opinnoissa on kasvanut. Vuoden 2020 korkeakoulu-uudistuksen myötä korkeakoulujen hakuprosessissa ylioppilaskirjoitusten arvosanan merkitys korostui. Vähintään puolet korkeakoulujen hakijoista valitaan lukion tai ammattikoulun päättötodistuksen arvosanojen perusteella. Uudistuksen myötä matematiikan merkitys on kasvanut opiskelijoiden jatko-opintoja ajatellen. Moniin korkeakoulupaikkoihin pitkän matematiikan arvosanasta saa toiseksi eniten valintapisteitä heti äidinkielen arvosanan jälkeen. Myös ylioppilastutkinnon rakenteessa korostuu matematiikan tärkeä asema. Aiemmin opiskelijan oli suoritettava neljä ainetta, joista äidinkieli oli pakollinen ja lisäksi opiskelijan oli valittava vähintään kolme ainetta toisen kotimaisen kielen, matematiikan, vieraan kielen ja reaaliaineen väliltä. Ylioppilastutkinnon rakenne uudistui vuonna 2022 siten, että kirjoitettavia aineita on oltava vähintään viisi, joista yksi on äidinkieli ja lisäksi opiskelijan on valittava vähintään neljä kirjoitettavaa ainetta vähintään kolmesta ryhmästä, jotka ovat toinen kotimainen kieli, matematiikka, vieras kieli ja reaaliaine. (Ylioppilastutkintolautakunta) Matematiikan osaamisen tarve on siis suuri niin lukio-opinnoissa kuin myös opiskelijan jatko-opintoja ajatellen. Matematiikan taitojen tärkeys ei kuitenkaan rajoitu pelkästään koulumaailmaan, vaan myös yleisesti yhteiskunnassa matematiikalla ja luonnontieteillä on tärkeä merkitys. Esimerkiksi työelämän kehitysnäkymät ja menestyminen eri elinkeinoelämän aloilla edellyttävät matematiikan osaamista. (Joutsenlahti, Räsänen, Silfverberg 2018) Lisäksi matematiikan osaamista tarvitaan ja hyödynnetään yleisesti arkielämän tilanteissa (Van den Heuvel-Panhuizen 2003). Kuitenkin esimerkiksi Iso-Britanniassa vuonna 1993 tehdyn tutkimuksen mukaan jopa neljännes aikuisista ei omannut sellaisia matemaattisia taitoja, joita vaaditaan perusarjessa ja yleisesti työelämässä. (Atkinson, Spilsbury, Williams 1993) Huolestuttavana ilmiönä voidaan nähdä se, että samaan aikaan kun matematiikan merkitys opinnoissa ja sitä kautta yhteiskunnassa on kasvanut, on suomalaisten koululaisten matemaattinen osaaminen uusimpien eli vuoden 2022 Pisa-tulosten mukaan heikentynyt (Opetus ja kulttuuriministeriö).

Matematiikka mielletään usein luonteeltaan hierarkkiseksi ja kumulatiiviseksi, missä uudet tiedot ja taidot rakentuvat aiemmin opittujen taitojen päälle. Peruskäsitteiden ja taitojen oppiminen tarjoaa pohjan monimutkaisempien taitojen ja tehtävien osaamiselle. (Joutsenlahti ym. 2018) Matematiikan kumulatiivinen ja hierarkkinen luonne, sekä sen merkitys yhteiskunnassa korostaa ennen kaikkea matematiikan perustaitojen tärkeyttä.

Matematiikan opetuksella on keskeinen rooli opiskelijoiden yleisesti matemaattisten taitojen sekä matemaattisten perustaitojen kehittämisessä. Oppilaiden riittävien pohjataitojen varmistaminen edesauttaa heidän myöhempää matemaattista oppimista. Lisähaasteita opettamiseen tuovat muun muassa oppimisvaikeudet, erilaiset oppilaiden virhekesitykset ja niiden aikainen havaitseminen.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan lukiolaisten matematiikan perustaitoja, joita heille on peruskoulussa opetettu. Nämä perustaidot ovat yhtälönratkaisutaidot, kuvien ja kappaleiden geometria sekä prosenttilaskenta. Tutkimuksen tarkoituksena ja tavoitteena on selvittää, millaiset ovat lukion lyhyen matematiikan opiskelijoiden matematiikan perustaidot, ja mitä tyypillisiä virheitä ja virhekesityksiä esiintyy hei-

dän perustaitoja vaativien ylioppilastehtävien ratkaisuisa. Tutkimusaineisto koostuu kuuden lyhyen matematiikan ylioppilastehtävän ratkaisuisa, mitkä perustuvat kokonaan tai osittain matematiikan perustaitoihin. Tehtävät ovat vuosien 2019-2021 sähköisistä ylioppilaskokeista ja aineisto on saatu ylioppilastutkintolautakunnalta. Aineisto on tutkimuskäyttöön tarkoitettu korpusaineisto, joka sisältää 100 satunnaisesti valittua ratkaisua kustakin tässä tutkielmassa käsiteltävästä tehtävästä. Jokainen tutkimusaineistossa oleva ratkaisu on anonymi eli ratkaisun laatijaa ei aineistosta selviä. Aineiston ylioppilastehtävien sisällöt ja aiheet perustuvat vuoden 2015 lukion perusopetussuunnitelmaan.

Tutkielman luvussa 2 tutustutaan tarkemmin matematiikan perustaitoihin. Lisäksi tarkastellaan, millä tavalla perustaidot näkyvät niin peruskoulun kuin lukion opetussuunnitelmissa. Kolmannessa luvussa tarkastellaan teoriaa matematiikan ja oppimisen ja opetuksen taustalla. Luvussa perehdytään hieman matematiikan oppimiseen vaikuttaviin tekijöihin ja lisäksi tarkastellaan matematiikan oppimista oppimisvaikeuksien kautta. Neljännessä luvussa käsitellään virheitä ja ennen kaikkea virhekäsityksiä sekä niiden vaikutusta matematiikan oppimiseen. Teoriaosuuden jälkeen tutkielman viidennessä luvussa esitetään tämän tutkielman tutkimuskysymykset sekä kuvaillaan tarkemmin tutkimuksen aineistoa ja toteutusta. Kuudennessa luvussa esitellään tutkimuksen tuloksia ja seitsemännessä luvussa pohditaan tulosten merkittävyyttä ja sitä, kuinka tuloksia voidaan hyödyntää opetuksen suunnittelussa ja toteutuksessa.

## 2 Matematiikan perustaidot

Matematiikan hierarkkisen luonteen johdosta matematiikan perustaitojen merkitys korostuu. Yleisesti matematiikan perustaidoiksi mielletään alakoulussa opittuja matematiikan perustaitoja. Näitä matematiikan perustaitoja ovat muun muassa aritmeettiset perustaidot eli yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut (ThinkMath). Lisäksi matematiikan perustaitoihin kuuluvia käsitteitä ovat muun muassa muotojen, kuvioiden, murtolukujen, desimaalilukujen, prosenttilukujen, eksponenttien, suhdelukujen, tieteellisen merkintätapojen ja kaavojen oppiminen (Centre Point Schools). Aritmeettisiä perustaitoja harjoitellaan jo alakoulun ensimmäisillä luokilla ja ne luovat pohjaa myöhemmälle matemaattiselle oppimiselle ja osaamiselle (Geary 2011). Harjoittelulla on tärkeä merkitys aritmeettisten taitojen kehityksessä ja lopulta harjoittelun ja toistomäärien kautta peruslaskutoimitukset automatisoituvat ja näin vapauttavat työmuistin resursseja ongelmanratkaisujen haastavampiin prosesseihin (Joutsenlahti ym. 2018).

Tässä tutkielmassa perustaitoja tarkastellaan peruslaskutaitojen sijaan yläkoulussa opiskeltujen sisältöjen pohjalta. Perustaitoja ei siis mielletä tässä tutkielmassa yksikäsitteisiksi, vaan perustaidot voidaan ajatella olevan sidoksissa opiskelijan ikään ja opiskelutaustaan. Esimerkiksi alakoulun loppupuolella olevan opiskelijan perustaidoiksi voidaan mieltää peruslaskutaidot, mutta lukion päättävän opiskelijan perustaidot voidaan nähdä kehittyneempinä taitoina. Tällaisia taitoja ovat muun muassa tämän tutkielman kiinnostuksen ja tarkkailun kohteena olevat taidot eli yhtälöneratkaisutaidot, tasojen ja kappaleiden geometria, prosenttilaskenta sekä murto- ja desimaalilukujen hallitseminen. Näitä taitoja harjoitellaan varsinkin yläkoulussa jo melko runsaasti, jolloin lukion päättävällä opiskelijalla on useamman vuoden kokemus esimerkiksi yhtälöistä ja niiden ratkaisemisesta, minkä vuoksi yhtälöneratkaisutaidot voidaan mieltää lukiolaisen perustaidoksi. Seuraavaksi tarkastellaan näitä yläkoulussa opettuja matematiikan perustaitoja sekä perusopetuksen että lukion opetussuunnitelman näkökulmasta. Alaluvussa 2.1 käsitellään matematiikan perustaitoja perusopetuksen opetussuunnitelmassa ja pääasiallisena lähteenä toimii vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelma. Alaluvussa 2.2 taas käsitellään matematiikan perustaitoja lukion opetussuunnitelmassa ja pääasiallisena lähteenä toimii vuoden 2015 lukion opetussuunnitelma.

### 2.1 Matematiikan perustaidot perusopetuksen opetussuunnitelmassa

Perustaitoja tarkastellaan tässä luvussa uusimman eli vuonna 2014 käyttöön otetun perusopetuksen opetussuunnitelman pohjalta. Matemaattiset perustaidot näkyvät niin opetussuunnitelman tavoitteissa kuin sisällöissä. Matematiikan kumulatiivista luonnetta painotetaan perusopetussuunnitelmassa. Perusasioiden hallinta mainitaan välttämättömänä edellytyksenä uusien aiheiden oppimiselle. (POPS 2014)

Ensimmäisen ja toisen luokan opiskelijoiden oppimistavoitteina mainitaan muun muassa oppilaan perehdyttäminen peruslaskutoimitusten periaatteisiin ja tutustuttaminen niiden ominaisuuksiin (T7) sekä oppilaan ohjaaminen kehittämään sujuvaa peruslaskutaitoa luonnollisilla luvuilla ja käyttämään erilaisia päässä-laskustrategioi-

ta (T8). (POPS 2014) Ensimmäisten luokkien kohdalla korostuu erityisesti peruslaskutaidon kehittäminen, jolla luodaan pohjaa myöhempiin matematiikan opintoihin.

3-6 luokkalaisten tavoitteissa mainitaan muun muassa peruslaskutaidon päässä harjaannuttaminen. Lisäksi tavoitteena on kehittää yhteen-, vähennys- ja kertolaskualgoritmeja ja varmistaa niiden osaaminen. Myös jakolaskuja harjoitellaan ja samalla pyritään sisäistämään eri laskutoimitusten välisiä yhteyksiä. 3-6 luokan aikana laajennetaan myös lukualuetta, aluksi negatiivisilla kokonaisluvuilla ja lopulta mukaan tulevat murtoluvut ja desimaaliluvut. Murtolukujen ja desimaalilukujen jälkeen perehdytään prosenttien käsitteeseen ja hyödynnetään näiden välisiä yhteyksiä. Edellä mainitut sisällöt ja tavoitteet korostuvat perusopetus suunnitelman tavoitteissa T9 ja T10. Tavoitteeksi T9 mainitaan oppilaan lukukäsitteen kehittyminen positiivisiin rationaalilukuihin ja negatiivisiin kokonaislukuihin. Tavoitteeksi T10 mainitaan oppilaan päässä laskutaidon kehittäminen ja laskutoimitusten ominaisuuksien kirjallinen hyödyntäminen. (POPS 2014)

Vuosiluokkien 7-9 tavoitteissa mainitaan muun muassa laskutaidon kehittäminen ja vahvistaminen erityisesti negatiivisilla luvuilla sekä murto- ja desimaaliluvuilla. Lisäksi tavoitteena on varmistaa prosenttien käsitteen ymmärtäminen. Tässä kohtaa tutustutaan polynomin käsitteeseen ja harjoitellaan eri laskutoimituksia polynomeilla. Lisäksi harjoitellaan muodostamaan lausekkeita ja sieventämään niitä ja ratkaisemaan ensimmäisen asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä. Geometrian saralla tavoitteena on oppia käyttämään Pythagoraan lausetta, Pythagoraan käänteislausetta sekä trigonometrisia funktioita. Lisäksi tärkeänä osa-alueena ja tavoitteena mainitaan monikulmioiden pinta-alojen ja piirien laskeminen. Myös kolmiulotteisten kappaleiden kuten pallon, lieriön ja kartion pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen mainitaan perusopetus suunnitelman keskeisissä tavoitteissa, kuten myös yksikkömuunnosten hallitseminen. Nämä sisällöt ja tavoitteet korostuvat erityisesti tavoitteiden T10, T11, T13, T14 ja T17 kohdalla. Tavoitteessa T10 mainitaan päättely- ja päässä laskutaidon kehittäminen. Tavoite T11 on kehittää kykyä laskea peruslaskutoimituksia rationaaliluvuilla. Tavoitteeksi T13 luetaan oppilaan prosenttilaskennan ymmärtämisen ja sen kehittämisen tukeminen. Tavoitteessa T14 mainitaan tuntemattoman käsitteen ymmärtäminen ja yhtälönratkaisutaitojen kehittäminen. Tavoitteessa T17 mainitaan oppilaan suorakulmaisen kolmion ja ympyrään liittyvien ominaisuuksien ymmärtäminen ja hyödyntäminen. Tavoitteessa T18 mainitaan pinta-alojen ja tilavuuksien laskemisessa kehittyminen. (POPS 2014)

Vuosiluokkien 7-9 tavoitteissa ilmenee vahvasti myös tässä tutkielmassa käsiteltävät taidot eli yhtälönratkaisutaidot, kuvioiden ja kappaleiden geometria ja prosenttilaskenta. Vaikka esimerkiksi prosenttilaskentaan onkin jo perehdytty jo alakoulussa (POPS 2014), voidaan nämä käsiteltävät taidot nähdä yläkoulussa opiskeltaviksi uusiksi aiheiksi ja sisällöiksi.

## 2.2 Matematiikan perustaidot lukion opetus suunnitelmassa

Tässä osiossa tarkastellaan lukion opetus suunnitelman perusteita tämän tutkielman aineiston takia pelkästään lyhyen oppimäärän kurssien tavoitteiden ja sisältöjen pohjalta. Lukion opetus suunnitelmasta on löydettävissä runsaasti mainintoja lukiolaisen perustaidoiksi luokiteltavista taidoista.

MAY1-kurssin yhdeksi tavoitteeksi mainitaan, että opiskelija "kertaa ja täydentää lukualueet, kertaa peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskennan periaatteet". Keskeisiksi sisällöiksi mainitaan muun muassa reaalityöt, peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskenta, jotka ovat tuttuja aiheita jo peruskoulusta. Lausekkeita ja yhtälöitä käsittelevä MAB2-kurssi taas mainitsee yhden tavoitteen osana, että opiskelija "vahvistaa yhtälöiden ratkaisemisen taitojaan". Geometrian kurssin MAB3 tavoitteina mainitaan muun muassa, että opiskelija harjaantuu tekemään havaintoja ja päätelmiä kuvien ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista sekä vahvistaa tasokuvien ja kolmiulotteisten kappaleiden kuvien piirtämisen taitojaan. Keskeisinä sisältöinä ovat muun muassa suorakulmaisen kolmion trigonometria, Pythagoraan lause ja Pythagoraan lauseen käänteislause, sekä kuvien ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrittäminen. Kukin edellä mainituista keskeisistä sisällöistä ovat mainittuna myös perusopetuksen opetussuunnitelmassa. Talousmatematiikan kurssin MAB6 yhdeksi tavoitteeksi mainitaan, että opiskelija syventää prosenttilaskennan taitojaan. (LOPS 2015)

Perustaidot siis näyttäytyvät keskeisinä sisältöinä niin perusopetuksen kuin lukion opetussuunnitelmissa.

<b>SOVELTAVA MATEMATIIKAN TAITO</b>	Lukukäsitteen sovellukset	aritmetiikan sovellukset	algebran sovellukset	geometrian sovellukset
<b>LASKUTOIMITUSTEN TOTEUTTAMINEN</b>	lukujonossa liikkuminen	luvuilla Laskeminen	kirjaimilla laskeminen	mittaaminen
<b>YMMÄRTÄMINEN</b>	lukukäsite	aritmetiikan käsitteet	algebran käsitteet	geometrian käsitteet
<b>VARHAISET TAIDOT</b>	<b>luvut ja lukujonot</b>	<b>aritmetiikan taito</b>	<b>algebran taito</b>	<b>geometrian taito</b>

Kuva 1: Matematiikan taitojen tasot, Taipale 2009

### 3 Matematiikan oppiminen ja opetus

Tässä luvussa tarkastellaan matematiikan oppimista ja opetusta tarkemmin. Aluksi tarkastellaan matematiikan oppimisen kumulatiivista luonnetta yleisellä tasolla. Alaluvussa 3.1 tarkastellaan oppilaiden asenteiden ja motivaation vaikutusta matematiikan oppimiseen ja tutustutaan oppilaan matikkakuvan muodostumiseen. Alaluvussa 3.2 tarkastellaan matematiikan kumulatiivista luonnetta hyvin havainnollistavaa Van Hielin teoriaa, joka luonnehtii geometrian taitojen kehittymisen hierarkiaa. Matematiikan oppimisen haasteita tarkastellaan tarkemmin alaluvussa 3.3. Alaluvussa 3.4 pohditaan opettajan roolia oppijan motivoijana ja oppimisen tutkijana. Alalukua 3.2 lukuunottamatta tämän luvun pääasiallisena lähteenä toimii Joutsenlahden, Silfverbergin ja Räsänen teos Matematiikan opetus ja oppiminen.

Matematiikan perustaitoja ja niiden kehittymistä on järkevää tarkastella matematiikan oppimisen ja opetuksen kautta. Matematiikan oppiminen on luonteeltaan hierarkkista, jossa uusi tieto rakentuu kumulatiivisesti vanhan tiedon päälle. Matematiikan osa-alueiden taitotasoa ja hierarkioita havainnollistetaan kuvassa 1, joka havainnoi, kuinka käsitteen ymmärtäminen mahdollistaa laskutoimitusten toteuttamisen ja tämän jälkeen erilaisten matematiikan taitojen soveltamisen (Taipale 2009). Matematiikan hierarkkisen luonteen takia onkin mielekästä tarkastella matematiikan oppimista ja matemaattisten perustaitojen kehitystä aivan ensimmäisistä kouluvuosista lähtien. Hyvät matemaattiset valmiudet koulupolun alussa luovat vankan pohjan matematiikan oppimiselle myöhemmin opinnoissa. Samaan aikaan heikot matemaattiset valmiudet hankaloittavat myöhempää matemaattisten taitojen kehittymistä. Kumulatiivisen luonteen seurauksena tasoerot matematiikassa kasvavat opintojen edetessä, toisin kuin esimerkiksi lukutaidossa, jossa tasoerot koulunkäynnin alussa tasoittuvat myöhemmin opintojen edetessä. Toisaalta erityisesti koulupolun alussa esiintyvät matematiikan oppimisen ongelmat esiintyvät usein myös päällekkäin lukutaitoon liittyvien ongelmien kanssa. Vaikka pohjatietojen ja -taitojen merkitys matematiikassa onkin melko suuri, on matematiikassa kehittymisen esitetty vaativan myös runsaasti toistoihin perustuvaa harjoittelua. (Joutsenlahti 2018)

Matematiikan oppimisen kumulatiivisen luonteen seurauksena lukiolaisen haasteet matematiikassa sekä lukion päättävien kirjoittajien keskuudessa ilmenevät ongelmat matematiikan perustaidoissa voivat juontaa juurensa jo yläkoulun opintoihin edeltäviin opintoihin. Alakoulussa ilmenneet haasteet matematiikassa voivat kasaantua yläkouluun siirtyessä ja tällöin uusien aiheiden ja sisältöjen oppiminen yläkoulussa voi muodostua hankalaksi.

### 3.1 Oppilaan asenne ja matikkakuva

Oppilaan motivaatiolla ja asenteella on merkittävä vaikutus matemaattiseen oppimiseen ja samaan aikaan hyvien matemaattisten valmiuksien esimerkiksi esiopetuksen alussa ennustetaan lisäävän kiinnostusta matematiikkaa kohtaan opintojen edetessä. Motivaation merkitys oppimisessa sekä matematiikan hierarkkinen luonne nostavat esiin opettajan merkityksen ja roolin oppilaan oppimisen tukena. (Joutsenlahti ym. 2018)

Motivaatio ja asenne matematiikkaa kohtaan vaihtelee suuresti oppilaiden keskuudessa. Lisäksi oppilaiden minäkuva matematiikan oppijana eli matikkakuva voi erota suuresti saman taitotasoistenkin oppilaiden välillä. Pahimmillaan kielteinen asenne matematiikkaa kohtaan voi kulminoitua matematiikka-ahdistuksena. Tällä taas on suora negatiivinen vaikutus oppilaan matemaattiseen suoriutumiseen. (Joutsenlahti ym. 2018)

Ylipäätään tunteet ovat olennainen osa matemaattisessa ongelmanratkaisussa. Tunteet ja asenne vaikuttavat konkreettisesti esimerkiksi siihen, kuinka sinnikkäästi ja määrätietoisesti oppilas on valmis työstämään tehtävää, joka on haastava ja monivaiheinen. Oppilaan matikkakuvalla taas on vaikutusta siihen, kuinka paljon negatiiviset tunteet ottavat valtaa ja miten se konkretisoituu ongelmanratkaisutilanteessa. Oppilas, jolla on kielteinen matikkakuva voi luovuttaa tehtävän suhteen kokonaan pientenkin vastoinkäymisten ja negatiivisten tunnekokemusten jälkeen, kun taas hyvän matikkakuvan omaava oppilas voi saada lisämotivaatiota pienten vastoinkäymisten jälkeen. (Joutsenlahti ym. 2018)

Matikkakuva voidaan jakaa kolmeen osatekijään, jotka ovat uskomukset, tunteet ja motivaatio. Uskomukset voivat liittyä itsessään matematiikkaan, sen oppimiseen tai henkilökohtaiseen kokemukseen itsestään matematiikan oppijana. Yksi esimerkki uskonnuksesta liittyen matematiikan oppimiseen ja henkilökohtaiseen kokemukseen oppijana on se, että matematiikan taidot tavataan nähdä vahvasti synnynnäisenä lahjakkuuteena, jossa ihmisellä joko on "matikkapäättä" tai ei ole. Tämä uskomus on haitallinen opiskelulle, oli kyseessä sitten lahjakas opiskelija tai ei. Lahjakas opiskelijaa voi tuudittautua siihen ja kokea, ettei hän tarvitse harjoitusta ja työn tekoa matematiikan oppimisessa. Heikommalla matematiikan oppijalla tämä uskomus taas vaikuttaa esimerkiksi motivaation siten, että ei koeta mahdollisena, että omat taidot voisivat kunnolla kehittyä matematiikan saralla. (Joutsenlahti ym. 2018)

Vaikka matematiikkaa pidetään yleisesti loogisimpana ja järkipäisimpänä oppiaineena, on oppilaiden suhde matematiikkaan kuitenkin tunneperäinen. Matematiikan opiskelussa tunteet ovat voimakkaasti läsnä. Onnistumisen ja epäonnistumisen tunteet ovat yleisiä oppimistilanteissa ja riskinä on, että esimerkiksi toistuvat epäonnistumisen tunteet jäävät pysyviksi kokemuksiksi ja niistä voi olla myöhemmin vaikea päästä eroon. Epäonnistumiset ja epävarmuus omista kyvyistään voi aiheuttaa matematiikka-ahdistusta oppilaassa. Toisaalta onnistumisen tunteet nostavat oppilaan uskoa omiin matemaattisiin kykyihin. (Joutsenlahti ym. 2018)

Motivaatio muodostaa ehkäpä jopa tärkeimmän osan oppijan matikkakuvan kehittymisessä. Motivaatio voidaan jakaa ulkoiseen ja sisäiseen motivaatioon. Oppilas, jolla on sisäinen motivaatio oppimiseen kokee tehtävän tai aiheen aidosti kiinnostavaksi ja juuri kiinnostus ja innostus uuden oppimisesta ajaa häntä eteenpäin. Ulkoista motivaatiota omaavaa opiskelijaa taas opiskelussa motivoi ulkoinen palkkio,

kuten esimerkiksi hyvä arvosana. Sisäiseen motivaatioon perustuva opiskelu tuottaa tutkimusten valossa parempia oppimistuloksia, kuin ulkoiseen motivaatioon perustuva opiskelu. (Joutsenlahti ym. 2018)

## 3.2 Van Hielen teoria

Tarkastellaan seuraavaksi Dina van Hiele-Geldofin ja Pierre van Hielen vuonna 1957 esittämään geometrisen oppimisen malliin, joka tunnetaan van Hielen teoriana. Se pyrkii kuvaamaan geometrista oppimista ja käsitteen muodostumista. Vaikka van Hielen teoria keskittyykin nimenomaan geometriaan, on se tämän tutkimuksen tueksi varsin sopiva kahdestakin syystä. Ensinnäkin se havainnollistaa hyvin matematiikan oppimisen hierarkkisuuutta geometriassa ja toisaalta se antaa hyvää taustaa geometrian oppimiselle ja geometriassa esiintyville virheille ja virhekäsityksille. Tähän tutkielmaan valituista kuudesta tehtävästä kolme on miltein kokonaan geometrian osaamista mittaavia tehtäviä, joten geometrian oppimisen mallin ja teorian käsittely antaa tärkeää taustaa tähän tutkielmaan.

Van Hielen teorian mukaan geometrinen käsitteiden muodostuminen on oppijalla hierarkkista. Teoria kuvaa geometrisen ajattelun etenevän viidellä eri tasolla. Teorian mukaan geometriset käsitteet muodostuvat viiden oppimistason kautta hierarkkisesti, uusi tieto vanhan tiedon päälle, eikä uuden tason asiaa voi oppia osaamatta edellistä tasoa (Clements, Battista 1992). Van Hielen teoriassa ensimmäisessä oppimisen tasossa oppija osaa visualisoida, nimetä ja vertailla erilaisia geometrisia peruskuvioita. Toisella tasolla eli kuvailemisen ja analysoinnin tasolla oppija osaa tunnistaa erilaisia geometrisia peruskuvioita niiden ominaisuuksien perusteella. Tässä kohtaa on myös hyvä huomioda, että alakouluikäisten oppijoiden geometrinen taidot painottuvat ensimmäiselle ja toiselle Van Hielen tasoille (Korkatti 2016). Kolmannella Van Hielen tasolla eli järjestämisen tasolla oppija osaa tunnistaa kuvioiden välisiä hierarkioita ja osaa perustellusti luokitella kuvioita niiden ominaisuuksien perusteella. Yläkouluikäiset oppilaat jakautuvat pääasiassa van Hielen tasoille 1, 2 ja 3 (Korkatti 2016). Neljännellä Van Hielen tasolla eli päättämisen tasolla oppija osaa lauseiden ja aksioomien perusteella todistaa geometrisia lauseita. Viidennellä ja ylimmällä Van Hielen tasolla eli täsmällisyyden tasolla oppija kykenee itsenäisesti täsmälliseen matemaattiseen päättelyyn ja osaa vertailla ja arvioida eri aksioomajärjestelmiä (esim. Clements, Battista 1992; Korkatti 2016).

Näiden viiden tason lisäksi Clements ja Battista (1992) esittävät teoksessaan Van Hielen oppimisen tason 0 eli esitunnistamisen tason. Clementsin ja Battistan mukaan ”nollataso” kuvaa geometrisen havainnoinnin tasoa, jossa oppija kykenee, mahdollisesti havainnontikyvyn puutteellisuuden takia, tunnistamaan vain joitain osia kuvioista ja muodoista. He voivat esimerkiksi erottaa kaarevia ja suoraviivaisia muotoja toisistaan ja voivat esimerkiksi tunnistaa ja erottaa ympyrän ja neliön toisistaan, mutta eivät erota neliötä ja kolmiota toisistaan.

Van Hielen malli on myös saanut osakseen kritiikkiä nimenomaan tasojen hierarkkisyyden johdosta. Tasot eivät näyttäyty kaikilla niin suoraviivaisesti, vaan oppilas saattaa sijoittua ja edetä eri Van Hielen tasoilla riippuen siitä, minkä geometrian käsitteen yhteydessä tasoa mitataan (Mayberry 1983). Lisäksi tasojen diskreettisyttä on kritisoitu, kun on havaittu joidenkin oppilaiden sijoittuvan usealle eri

tasoille tai eri tasojen väleille (Burger, Shaughnessy 1986).

Van Hielen teoria korostaa virhekäsitysten merkitystä. Jos oppilaalla esiintyy jollain oppimisen tasolla virhekäsitys tai useita virhekäsityksiä, ei hän teorian mukaan pysty kehittymään uudelle tasolle. Oppilaan oppimisen kannalta olisikin elintärkeää päästä virhekäsityksistä eroon ennen uuden tason asiaan tai aiheeseen siirtymistä. Opettajalla on suuri rooli oppilaan virhekäsityksestä pois johdattamisessa (Ryan, Williams 2007).

### 3.3 Oppimisvaikeudet

Matematiikan opetusta ja oppimista laajemmin tarkastellessa on järkevää huomioida erilaiset oppimisvaikeudet, jotka vaikuttavat oppilaan matematiikan oppimiseen. Dyskalkulia on yleisesti käytössä oleva termi kuvaamaan matemaattista oppimisvaikeutta. Se määritellään matematiikassa kehittymisen vaikeudeksi. Akalkulia taas on matematiikan oppimisvaikeus, jossa henkilö on menettänyt laskutaitonsa esimerkiksi aivovamman seurauksena (Light, DeFries 1995). Nykytutkimukset ovat osoittaneet dyskalkulian olevan aivoperäinen oppimisvaikeus, vaikkakin heikkolaatuisella opetuksella, kasvu ja -kehitysympäristöllä sekä älykkyystasolla voi myös olla vaikutusta oppimisvaikeuden syntyyn. (Taipale 2009)

Matemaattiset oppimisvaikeudet ovat tutkimusten valossa yhtä yleisiä kuin lukemiseen ja kirjoittamiseen liittyvät oppimivaikeudet (Räsänen, Koponen 2015). Matematiikan oppimisvaikeudet voivat myös olla yhteydessä dysleksiaan eli lukihäiriöön. Erilaisista oppimisvaikeuksista käsittelevistä tutkimuksista on tullut vahvaa näyttöä siitä, että suurella osalla lukihäiriön omaavista oppilaista on myös vaikeuksia matematiikan oppimisessa (Light, DeFries 1995). Esimerkiksi viidesluokkalaisten oppimisvaikeuksista kärsivien oppilaiden keskuudessa vain yhdellä prosentilla oli erityisesti lukemiseen liittyviä vaikeuksia, 18 prosentilla oli nimenomaan matematiikan oppimisvaikeuksia ja jopa kahdeksallakymmenellä yhdellä prosentilla oppilasita oli sekä lukemiseen että matematiikan oppimiseen liittyviä vaikeuksia (Fletcher, Loveland 1986).

Matematiikan oppimisvaikeudet eivät välttämättä koske kaikkea matematiikkaa, vaan ne voivat myös kohdistua eri aihealueisiin, kuten numeeriseen ja algebralliseen tai geometriseen osa-alueeseen. Esimerkiksi geometrian opiskelussa ja oppimisessa erilaisten käsitteiden ja niiden hierarkioiden ymmärtäminen on oleellista. Opittavia ja muistettavia käsitteitä ja sääntöjä on paljon, joten niiden pelkkä muistaminen vaatii jo paljon työmuistilta. Lisäksi esimerkiksi visuaalisen prosessointiin liittyvät ongelmat tuovat lisää haasteita oppilaan oppimiseen. (Joutsenlahti 2018)

### 3.4 Opettajan merkitys

Opettajan rooli ja merkitys on suuri kaikenikäisiä oppilaita ja heidän matemaatiikan oppimista tarkastellessa. Oppimisvaikeuksien ja toisaalta myös esimerkiksi matematiikan perustaitojen osaamisen näkökulmasta opettajien välisellä tiedonkululla on suuri merkitys, erityisesti opiskelujen nivelvaiheessa esimerkiksi yläasteelta lukioon siirtyessä, jotta tuen tarpeet tulevat tietoon ja siten täytettyä. Tutkimusten valossa juuri ensimmäisen ja toisen asteen nivelvaiheessa noin kaksi kolmasosaa oppilaista,

jotka saivat eristyistä tukea peruskoulussa, eivät sitä enää saaneet toisella asteella. (Joutsenlahti 2018)

Opettajan ja oppilaan välisellä laadukkaalla vuorovaikutuksella on tärkeä rooli oppilaan motivaatiossa oppia matematiikkaa. Osallistavalla opetuksella, jossa oppilaat pyritään ottamaan aktiivisesti mukaan opetustilanteeseen, kannustetaan oppilaita luovaan ajatteluun ja löytämään yhteyksiä erilaisten matemaattisten käsitteiden välillä (Mursalin 2025). Tehokkain tapa motivoida oppilaita ja täten myös vähentää oppilaiden matematiikka-ahdistusta olisi opettajana luoda kannustava ja avoin oppimisympäristö, jossa oppilaat eivät pelkää virheitä ja epäonnistumisia (Agbata 2024).

Oppilaalla voi muodostua matematiikan taitojen kehittyessä erilaisia virhekäsityksiä eri matemaattisia käsitteitä koskien. Opettajalla on oppilaan virhekäsitystenkin suhteen tärkeä rooli virhekäsityksistä pois oppimiseen (Ojose 2015). Matematiikan kumulatiivisen luonteen johdosta virhekäsitykset voivat hankaloittaa matematiikan perustaitojen kehittymistä. Seuraavassa luvussa tarkastellaan virhekäsityksiä syvemmin ja myös opettajan ja opetuksen merkitystä virhekäsityksiin liittyen.

## 4 Virheet ja virhekäsitykset

Tässä luvussa perehdytään hieman virhekäsityksiin, niiden syntymiseen sekä pohditaan virhekäsitysten tuomia haasteita niin oppimisessa kuin opetuksessa. Luvun loppuun tarkastellaan vielä, mitä yleisiä virhekäsityksiä esiintyy tiettyjen matematiikan osa-alueiden kohdalla. Osa-alueista valikoitiin tarkastelun alle tässä tutkielmassa käsiteltävät aiheet eli geometria, algebra ja prosenttilaskenta.

Virhekäsitys on väärä tai virheellinen ymmärrys asiasta, joka pohjautuu alun alkaen virheellisesti tehtyyn päättelyyn tai ajatteluun (Welder 2012). Virhekäsityksen omaava oppilas ei tunnista omia osaamisen puutteita tai päättelyvirheitä. Oppija on voinut esimerkiksi pohjata ajattelunsa väärin olettamuksiin tai virheellisiin teorioihin, jotka estävät rationaalisen päättelyn. (Ojose 2015)

Virhekäsitysten syntymisellä oppijan ajatteluketjussa voi olla useita juurisyitä. Syynä voi olla esimerkiksi jonkin säännön ulkoaopetteleminen, mitä saatetaan käyttää väärässä tilanteessa, mikä taas johtaa virheisiin ja jopa uusien virhekäsitysten syntymiseen. Matematiikka on oppiaineena altis virhekäsityksille, sillä esimerkiksi jotkin säännöt vaihtelevat käsitteiden tai operaatioiden välillä (Ojose 2015).

Opetustilanteessa ja esimerkiksi koetilanteessa esiintyvien virheiden tunnistaminen aidoksi virhekäsitykseksi voi olla haastavaa. Virhekäsitykset tekee haastavaksi niiden tunnistamisen lisäksi niiden moniulotteiset syyt, jotka voivat olla lähtöisin pitkänkin ajan takaa. Virheen ja virhekäsityksen erottaminen voi olla hankalaa, eikä niitä tule sekoittaa osaamattomuuteen (Kadarisma 2020). Yleisesti ottaen, jos virhekuviot ovat ratkaisuihin systemaattisia ja toistuvia, voidaan ne nähdä olevan seurausta virhekäsityksestä (Sarawadi 2014).

Väärin opittu asia on saattanut olla pitkän aikaa osa oppilaan ajatusprosessia, minkä myötä virhekäsityksistä ulosoppiminen voi olla hankalaa. Käsitteen tai aiheen todellinen oppiminen vaatii, että ensin opitaan pois vanhasta ja virheellisestä päättelmästä. Oppijalla on voinut kehittyä ajatteluun tietyt yksinkertaistukset, jonka avulla hän on ratkaissut tehtäviä tähän mennessä ja esimerkiksi alakoulun aikana virhekäsitykset eivät ole välttämättä näkyneet suoraan tuloksissa, mutta suurena riskinä on, että vaikeudet ja ongelmat ilmenevät myöhemmin opinnoissa myös tulosten muodossa. Lisähaastetta virhekäsityksestä pois kasvamiseen tuo myös se, että väärin opittu päättely voi joskus tuottaa myös oikean vastauksen. Matematiikan luonteen johdosta virhekäsityksiä tulee aina olemaan ja opettajan näkökulmasta on myös tärkeää ottaa huomioon se, että vaikka oppilaalla olisikin virhekäsitys tai -käsityksiä, ei se kerro välttämättä hänen oppimiskyvyistään mitään. (Ojose 2015)

Virhekäsitykset voivat pysyä pitkäänkin oppilaan matemaattisessa päättelyssä, joten niiden tarpeeksi aikainen havaitseminen ja puuttuminen on erityisen tärkeää. Opettajan rooli on merkittävä niin virhekäsityksen havaitsemisessa, kuin niistä ulosopettelusta. Oppikirjoissa ei erilaisiin virhekäsityksiin aina pureuduta tarkemmin, jolloin vastuu virhekäsitysten "diagnosoinnista" ja poisoppimisesta jää opettajalle. (Ojose 2015)

Seuraavissa alaluvuissa tutustutaan erilaisiin yleisiin virhekäsityksiin, joita ilmenee eri matematiikan osa-alueilla. Käsiteltävät osa-alueet on valittu tämän tutkielman tutkimusaineistoon valittujen tehtävien perusteella ja nämä osa-alueet ovat geometria, algebra ja prosenttilaskenta.

## 4.1 Virhekäsitykset geometriassa

Geometrian käsitteisiin liittyvien hierarkioiden johdosta geometriassa esiintyvät virhekäsitykset ovat Van Hielen teoriaan nojaten erityisen haastavia myöhempää oppimista ajatellen. Oppilaan geometrisen käsitteen muodostumisella on tärkeä merkitys virhekäsityksen muodostumisessa geometriassa.

Clements ja Battista (1992) mainitsevat, että muun muassa seuraavia tyypillisiä virhekäsityksiä esiintyy geometriassa:

- neliö ei ole neliö, jos sen kanta ei ole vaakasuora
- kolmio on aina tasasivuinen
- jos kuviolla on neljä sivua, on se neliö
- kolmion pinta-alaa laskettaessa kolmion korkeus on aina kannan viereinen sivu
- jana ei ole halkaisija, mikäli se on pysty- tai vaakasuora
- kulmalla on oltava vaakasuora kylki
- nelikulmion kulmien summa on sama kuin kuvion pinta-ala
- neliön pinta-ala voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla

## 4.2 Virhekäsitykset algebrassa

Opiskelijalla voi usein olla valmiiksi erilaisia virhekäsityksiä, kun opinnot algebran parissa alkavat. Algebraan liittyy uudenlaisten symboleiden ja lausekkeiden käsittelyä, mikä eroaa yksinkertaisista artimeettisista menetelmistä. Virhekäsitykset aiheuttavat merkittäviä haasteita monimutkaisempien matematiikan käsitteiden ja menetelmien oppimisessa. Algebran opiskelu sisältää esimerkiksi yhtälöiden, epäyhtälöiden ja erilaisten lausekkeiden käsittelyä. (Ojose 2015)

Tyypillisistä algebraan liittyvistä virhekäsityksistä Ojose mainitsee muun muassa

- erinimiset termit summataan keskenään esim.  $2x + 4 + 3x = 9x$
- samanimisten termien yhteenlaskussa mahdolliset eksponentit lasketaan myös yhteen esim.  $x^2 + x^2 = x^4$  tai  $x^2 + x^2 = 2x^4$
- yhtälönratkaisussa termi siirretään toiselle puolelle ilman merkin vaihtoa esim.  $x - 7 = -7 \implies x = -14$
- rationaalilauseke sievennetään ilman tekijöihin jakoa esim.  $\frac{5-x}{5} = x$
- epäyhtälön jakaminen negatiivisella ei vaikuta tuloksen merkkiin esim.  $-5x < 10 \implies x < -2$

Tärkeä osa algebran taitojen kehityksessä on kirjainmuuttajan ymmärtäminen. Küchemann (1981) käsittelee teoksessaan kirjainmuuttujan ymmärryksen eri muotoja ja tasoja. Teoksessa esitetään mallia, joka sisältää kuusi erilaista muotoa ja tasoa kirjainmuuttujan ymmärtämisessä. Näitä ymmärryksen muotoja esitetään taulukossa 1.

Ymmärryksen muoto	Muuttujan merkitys oppilaalle
Kirjaimen arviointi	kirjain on tehtävän vastaus ja sille annetaan numeerinen arvo
Kirjaimen poisjättäminen	kirjain jätetään kokonaan huomioimatta laskua tehdessä
kirjaimen yhdistäminen objektiin	kirjain kuvaa tai on lyhenne jostain konkreettisesta objektista
kirjain kuvastaa tuntematonta lukua	muuttuja voidaan ratkaista, mutta kirjain nähdään kuvaavan yhtä tiettyä tuntematonta lukua
kirjain voi kuvata useampaa lukua	muuttujan ratkaisu voi olla useampi, kuin yksi luku
kirjain ymmärretään muuttujana	muuttujan arvot riippuvat muuttujien välisestä systemaattisesta suhteesta

Taulukko 1: muuttujakäsitteen ymmärtämisen taso Küchemann (1981)

### 4.3 Virhekäsitykset prosenttilaskennassa

Prosenttilaskenta kytkeytyy vahvasti aritmetiikkaan. Aritmetiikan perustaidot eli yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskutaidot ovat kiinteä osa prosenttilaskentaa. Murtolukujen ja desimaalilukujen hahmottaminen ja näiden parissa tapahtuvien laskuoperaatioiden hallitseminen on merkittävän tärkeää. Monet prosenttilaskennassa esiintyvistä virhekäsityksistä voivatkin olla seurausta virhekäsityksistä liittyen murtolukuihin ja desimaalilukuihin. Ojose mainitsee teoksessaan murtolukuihin, desimaalilukuihin ja suoraan prosenttilaskentaan liittyvistä virhekäsityksistä muun muassa

- murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskussa osoittajaa ja nimittäjää käsitellään erillisinä lukuina esim.  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$
- Murtoluku, jolla on suurempi nimittäjä on suurempi esim.  $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$
- Kokonaislukua jaettaessa murtoluvulla osamäärä muutetaan tuloksi, mutta murtolukua ei muuteta sen käänteisluvuksi esim.  $9 : \frac{1}{3} = 9 \cdot \frac{1}{3}$
- Luku, jolla on enemmän desimaaleja on suurempi esim.  $1,12 > 1,2$
- Kerrottaessa desimaalilukua kymmenluvulla lisätään nolla, mutta ei siirretä pilkkua esim.  $2,4 \cdot 10 = 2,40$
- desimaalilukujen tulossa pilkun merkitystä paikkajärjestelmään ei tunnusteta esim.  $0,1 \cdot 0,1 = 0,1$
- Desimaalia muunnettaessa prosenttiluvuksi pilkkua siirretään väärään suuntaan esim.  $0,25 = 0,0025\%$

## 5 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa esitetään tutkimuksen aineisto ja tutkimuskysymykset (luku 5.1), tutkimuksen analyysiprosessin vaiheet (luku 5.2) sekä tutkimuksessa hyödynnettyjen ylioppilastehtävien tehtävänannot sekä niiden malliratkaisut ja YTL:n esittämät hyvän vastaukset piirteet (luku 5.3). Malliratkaisut on tehty erikseen juuri tätä tutkielmaa varten.

### 5.1 Tutkimusaineisto ja tutkimuskysymykset

Tässä tutkimuksessa on tarkoituksena tarkastella ja selvittää lukion lyhyen matematiikan opiskelijoiden matemaattisia perustaitoja ja löytää yleisiä virheitä ja virhekäsityksiä liittyen perustaitoja vaativiin tehtäviin. Tutkielman tutkimuskysymykset ovat:

- Millaiset ovat lukion päättävien lyhyen matematiikan opiskelijoiden matematiikan perustaidot?
- Mitä virheitä ja virhekäsityksiä esiintyy perustaitoja vaativien ylioppilastehtävien ratkaisuisissa?

Tutkimuksen aineistona toimii kuusi lyhyen oppimäärän matematiikan sähköistä ylioppilastehtävää vuosilta 2019-2021. Aineisto koostuu Ylioppilastutkintolautakunnalta saadusta tutkimuskäyttöön tarkoitettusta korpusaineistosta, joka koostuu sadasta anonyymistä ratkaisusta kutakin käsiteltävää tehtävää kohden. Ratkaisujen lisäksi myös niiden tehtäväkohtaiset pistemäärät ovat aineistossa mukana. Pistemääristä kertovat aineistot on jaettu kahteen osaan, joista toinen sisältää tehtävän anonyymien ratkaisujen pistemäärät ja toinen sisältää kaikkien kyseisen tehtävän tehneiden kokelaiden pistemäärät.

Kaikki kuusi tutkimuksessa käsiteltävää tehtävää ovat matematiikan lyhyen oppimäärän tehtäviä. Tehtävistä kaksi (kevään 2019 tehtävä 3 ja kevään 2021 tehtävä 3) on valittu A-osiosta ja loput neljä tehtävää ovat kaikki valittu B1-osiosta. Tutkimukseen valikoidut tehtävät valittiin sen perusteella, kuinka kattavasti kyseinen tehtävä mittaa nimenomaan matematiikan perustaitoja. Kukin tehtävä on täysin ratkaistavissa matematiikan perustaitoja hyödyntämällä, pois lukien kevään 2021 tehtävä 3, joka sisältää osittain perustaitoja kehittyneempiä taitoja vaativia tehtävänosia. Tästä syystä tämän tehtävän kohtaa 6 ei käsitellä tässä tutkielmassa lainkaan.

### 5.2 Analyysiprosessin kuvaus

Analyysiprosessi aloitettiin käymällä yksityiskohtaisesti läpi opiskelijoiden ratkaisuja tehtävä kerrallaan. Ensimmäisenä tarkasteltiin tehtävän ratkaisun yleistä luonnetta eli onko oppilas ymmärtänyt tehtävän ja onko hänellä ollut tarvittavat taidot tehtävän oikean ratkaisun saavuttamiseksi. Mikäli opiskelija ei ollut onnistunut ratkaisemaan tehtävää oikein, kirjattiin tämä ylös ja kuvailtiin sanallisesti samalla kyseisen ratkaisun virheen tai virheiden laatu. Ensimmäisellä analysointikerralla virhetyypit kuvailtiin tarkasti kyseisen ratkaisun pohjalta.

Kaikkien ratkaisujen läpikäymisen jälkeen, analyysiprosessin seuraavassa vaiheessa pyrittiin ratkaisujen virheet luokittelemaan eri virhetyyppeihin, kuten esimerkiksi

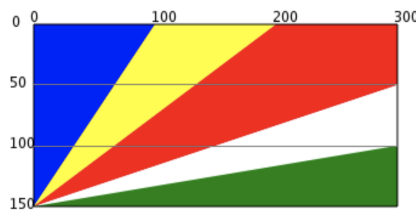
"virhe kolmion korkeusjanan tulkinnassa" tai "virhe prosenttimuunnoksessa." Kun erilaiset virhetyypit kunkin tehtävän ratkaisuille oli löydetty ja määritelty, kuhunkin virhetyyppiin sopivien ratkaisujen esiintyvyydet laskettiin ja taulukoitiin. Virhetyyppejä tarkasteltiin mahdollisuuksien mukaan myös laajemmin, mihin matematiikan osa-alueeseen virheet voidaan sijoittaa eli esimerkiksi liittyikö virhe geometriseen tulkintaan vai oliko kyseessä esimerkiksi laskennallinen virhe.

Lisäksi tutkimusaineistoa analysoitiin tehtävän pisteytysten mukaan ja tarkasteltiin, millaisella tasolla opiskelijoiden osaaminen oli pisteiden valossa erityyppisten tehtävien kohdalla. Tutkimusaineiston ratkaisujen pistemäärien esiintyvyyksiä verrattiin lopulta myös kaikkien ratkaisujen pistemääriin ja arvioitiin kuinka hyvin nämä 100 ratkaisua edustivat koko kyseisen tehtävän tehneiden kirjoittajien joukkoa.

### 5.3 Tehtävänannot, hyvän vastauksen piirteet ja malliratkaisut

#### 5.3.1 2019 kevät, matematiikka lyhyt oppimäärä, tehtävä 3. Värikäs lippu

Seychellien lipussa (kuva 2) on viisi eri väriä kuvan mukaisesti. Kuinka monta prosenttia kukin väri peittää koko lipun pinta-alasta?



Kuva 2: Seychellien lippu, YTL 2019 Lähde: Prog Zoo.

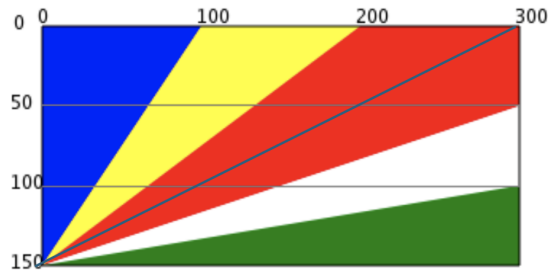
Jaetaan punainen alue kahtia lipun lävistäjän avulla.	1
Sinisen, keltaisen ja ylemmän punaisen kolmion korkeus on 150 ja kanta 100, eli kunkin pinta-ala 7 500.	3
Vihreän, valkoisen ja alemman punaisen kolmion korkeus on 300 ja kanta 50, eli pinta-ala 7 500.	3
Koko lipun pinta-ala on $300 \cdot 150 = 45\,000$ .	1
Punaisen suhteellinen osuus on siten $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ,	1
$\approx 33\%$	1
ja neljän muun värin osuus on $\frac{1}{6}$	1
$\approx 17\%$ .	1

Kuva 3: Hyvän vastauksen piirteet, YTL

#### Malliratkaisu

Koko lipun pinta-ala lasketaan suorakulmion pinta-alan kaavaa hyödyntäen:

$$A_{\text{lippu}} = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = 300 \cdot 150 = 45\,000.$$



Kuva 4: Kuva malliratkaisun tueksi. Lippu on halkaistu siten, että punainen osuus koostuu kahdesta kolmiosta.

Sinisen kolmion pinta-ala lasketaan kolmion pinta-alan kaavan avulla:

$$A_s = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{(100 \cdot 150)}{2} = 7500.$$

Sinisen osuus koko pinta-alasta:

$$\frac{7500}{45000} = \frac{1}{6} \approx 17\%.$$

Vihreän kolmion pinta-ala:

$$A_{vi} = \frac{(150 - 100) \cdot 300}{2} = \frac{15000}{2} = 7500.$$

Vihreän osuus koko pinta-alasta:

$$\frac{7500}{45000} = 1/6 \approx 17\%.$$

Keltaisen kolmion pinta-ala:

$$A_k = \frac{(200 - 100) \cdot 150}{2} = \frac{15000}{2} = 7500.$$

Keltaisen osuus koko pinta-alasta:

$$\frac{7500}{45000} = \frac{1}{6} \approx 17\%.$$

Valkoisen kolmion pinta-ala:

$$A_{va} = \frac{(100 - 50) \cdot 300}{2} = 7500.$$

Valkoisen osuus koko pinta-alasta:

$$\frac{7500}{45000} = 1/6 \approx 17\%.$$

Punainen osa koostuu kahdesta kolmiosta, joiden pinta-alat yhteen laskemalla saadaan ratkaistua punaisen osan pinta-ala:

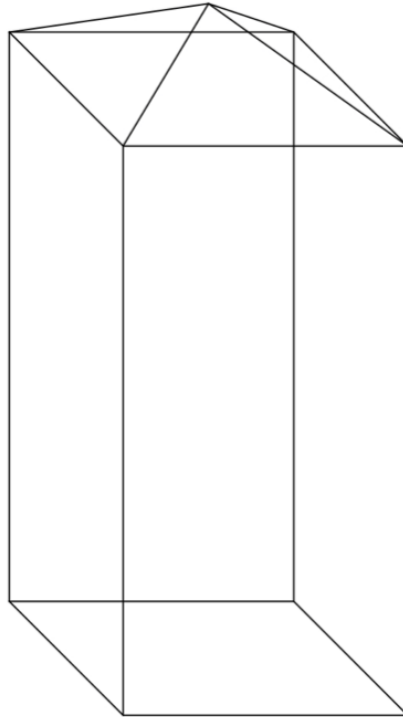
$$A_p = ((300 - 200) \cdot 150)/2 + (50 \cdot 300)/2 = 15000.$$

Punaisen osan osuus lipun pinta-alasta:

$$\frac{15000}{45000} = \frac{1}{3} \approx 33\%.$$

### 5.3.2 2019 kevät, matematiikka lyhyt oppimäärä, tehtävä 5. Paljonko tölkissä on ilmaa?

Maitotölkki (kuva 5) sisältää 1,75 litraa maitoa. Tölkkin pohja on neliö, jonka sivun pituus on 9,25 cm. Tölkkin sisäosan kokonaiskorkeus on 23,0 cm, ja sen alaosa koostuu suorakulmaisesta särmiöstä, jonka korkeus on 20,0 cm. Tölkkin yläosa muodostuu pyramidista. Kuinka paljon ilmaa on avaamattomassa maitotölkissä?



Kuva 5: Maitotölkki, YTL

Koska yksi litra vastaa yhtä kuutiodesimetriä, niin tölkissä on 1750 kuutiodesimetriä maitoa.	2
Särmiön tilavuus on $(9,25)^2 \cdot 20 = 1711,25$ .	2
Pyramidin tilavuus on $\frac{1}{3}(9,25)^2(23 - 20) = 85,5625$ .	4
Tölkkin tilavuus on siten noin 1797 kuutiodesimetriä,	2
joten ilmaa on täydessä maitotölkissä 47 kuutiodesimetriä.	2

Kuva 6: Hyvän vastauksen piirteet, YTL

### Malliratkaisu

Maitotölkissä 1,75 litraa maitoa, mikä on SI-järjestelmässä  $1,75 \text{ dm}^3 = 1750 \text{ cm}^3$ . Tölkki muodostuu suorakulmaisesta särmiöstä ja neliöpohjaisesta pyramidista. Särmiön tilavuus saadaan laskettua kertomalla pohjan pinta-ala särmiön korkeudella:

$$V_s = 9,25 \text{ cm} \cdot 9,25 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 1711,25 \text{ cm}^3$$

Maitotölkin pyramidiosan tilavuus saadaan laskettua pyramidin kaavan avulla:

$$V_p = \frac{1}{3} A \cdot h, \text{ jossa } A \text{ on pyramidin pohjan pinta-ala ja } h \text{ on pyramidin korkeus.}$$

Pyramidin korkeus saadaan vähentämällä tölkin kokonaiskorkeudesta sen särmiöosan korkeus. Näin ollen pyramidin tilavuudeksi saadaan:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 9,25 \text{ cm} \cdot 9,25 \text{ cm} \cdot (23 \text{ cm} - 20 \text{ cm}) = 85,5625 \text{ cm}^3$$

Tölkin kokonaistilavuus saadaan laskemalla yhteen särmiöosan ja pyramidiosan tilavuudet:

$$V_{kok} = V_s + V_p = 1711,25 \text{ cm}^3 + 85,5625 \text{ cm}^3 = 1796,8125 \text{ cm}^3 \approx 1797 \text{ cm}^3$$

Täydessä maitotölkissä on ilmaa tölkin kokonaistilavuuden ja maidon tilavuuden erotuksen verran eli

$$1796,8125 \text{ cm}^3 - 1750 \text{ cm}^3 = 46,8125 \text{ cm}^3 \approx 47 \text{ cm}^3.$$

### 5.3.3 2019 kevät, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Mikko vaihtaa rahaa

Mikko lähtee matkalle Varsovaan ja Prahaan. Hän joutuu vaihtamaan rahaa useita kertoja ennen matkaa ja matkan aikana. Jokaisessa vaihdossa hän menettää vaihtotappiona 5 prosenttia rahan arvosta. Hän vaihtaa 300 euroa Puolan zlotyiksi ja 200 euroa Tšekin korunoiksi. Hän ei muista, millä kurssilla vaihto suoritettiin, mutta pitää kirjaa siitä, kuinka suuri osuus rahoista tulee käytettyä.

Puolassa hän huomaa, että kolmasosa zloiteista on jäänyt käyttämättä, ja hän vaihtaa ne lähtiessään Tšekin korunoiksi. Kotiin tullessaan hänellä on vielä viidesosa kaikista korunoista jäljellä, ja hän vaihtaa ne takaisin euroiksi.

Kuinka monta euroa hän saa takaisin? Anna vastaus euron tarkkuudella.

#### Malliratkaisu

Jokaisella vaihdolla Mikko menettää vaihtotappiona 5 % rahan arvosta eli hänelle jää vaihdosta 95 % rahan alkuperäisestä arvosta. Alkutilanteessa Mikko vaihtaa 300 euroa Puolan Zlotyiksi ja 200 euroa Tšekin korunoiksi.

Ensimmäisen vaihdon jälkeen hänellä jää  $(1 - 0,05) \cdot 300 \text{ e} = 285$  euron arvosta zlotyjä ja  $(1 - 0,05) \cdot 200 \text{ e} = 190$  euron arvosta korunoita.

Puolasta lähtiessään hänellä on kolmasosa zlotyistä jäljellä eli  $\frac{285}{3} = 95$  euron arvosta zlotyjä ja hän vaihtaa ne korunoiksi, jolloin hänelle jää  $95 \cdot 0,95 = 90,25$  euron arvosta korunoita. Tšekkeihin päästyään hänellä siis on yhteensä  $190 + 90,25$

Lasketaan eri valuuttojen arvot euroissa eri vaihtohjen jälkeen.	1
Ensimmäisen vaihdon jälkeen zlotėja on 285 e ja korunoita 190 e	3
Puolen osuuden jälkeen jäljellä on $285/3 = 95$ euron arvosta zlotėja, jotka vaihdon jälkeen ovat 90,25 euron arvosta korunoita.	3
Yhteensä korunoita on siis 280,25 euron arvosta.	2
Tsekkin osuuden jälkeen jäljellä on $280,25/5 = 56,05$ euron arvosta zlotėja.	2
Vaihtotappion jälkeen Mikolle jää noin $56,05 \cdot 0,95 = 53,25$ euroa.	1
<b>TAI</b>	
Tehtävässä osa rahoista vaihdetaan kolme kertaa, osa kaksi kertaa.	2
Euroista zlotyjjen ja korunien kautta takaisin euroiksi tulee vaihdettua $300 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = 20$ euroa,	2
eli kolmen vaihdon seurauksena Mikko saa takaisin $20 \cdot (0,95)^3 = 17,15$ euroa.	2
Euroista korunien kautta takaisin euroiksi tulee vaihdettua $200 \cdot \frac{1}{5} = 40$ euroa,	2
eli kahden vaihdon seurauksena hän saa takaisin $40 \cdot (0,95)^2 = 36,10$ euroa.	2
Yhteensä hän saa takaisin noin 53,25 euroa.	2
Vastaukseksi kelpaa myös 53 euroa.	

Kuva 7: Hyvän vastauksen piirteet, YTL

= 280,25 euron arvosta korunoita, kun lasketaan mukaan ensimmäisestä vaihdosta saadut korunat.

Kotiin tullessaan on hänellä viidesosa korunoista jäljellä eli  $\frac{280,25}{5} = 56,05$  euron arvosta korunoita ja hän vaihtaa ne takaisin euroiksi, jolloin hän saa takaisin  $56,05 \cdot 0,95 = 53,2475 \approx 53$  euroa.

#### 5.3.4 Kevät 2020, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Suklaarasia

Suklaakonvehtirasia (kuva 8) on muodoltaan särmiö, jonka pohja on säännöllinen kahdeksankulmio. Kahdeksankulmion sivun pituus on 4,2 cm ja rasian korkeus 6,6 cm. Laske rasian tilavuus.



Kuva 8: Suklaarasia, YTL

Tehtävän välivaiheet voi laskea myös desimaaliluvuilla.	
Kahdeksankulmio saadaan neliöstä poistamalla jokaisesta kulmasta suorakulmainen kolmio.	(1)
Tällaisen kolmion kateetin pituus on $\frac{4,2}{\sqrt{2}}$	2
ja pinta-ala $\frac{4,2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$ .	2
Neliön pinta-ala on $(4,2 + 2 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}})^2$ .	2
Kahdeksankulmion pinta-ala siis $(4,2 + 2 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}})^2 - 2 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}}$ .	2
$\Rightarrow$ Tilavuus on pohjan pinta-ala kertaa korkeus, eli n. 560 cm <sup>3</sup> .	3
TAI	
Kahdeksankulmio muodostuu kahdeksasta tasakylkisestä kolmiosta.	(1)
Kärkikulma on $360^\circ/8 = 45^\circ$ .	(1)
Puolet kärkikulmasta on siis $22,5^\circ$	(1)
ja kolmion korkeus $r = \frac{1}{2 \tan(22,5^\circ)}$ .	2
Kolmion ala on siis $\frac{1}{2 \tan(22,5^\circ)} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$ .	2
Kahdeksankulmion pinta-ala on $8 \cdot \frac{1}{2 \tan(22,5^\circ)} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$ .	2
$\Rightarrow$ Tilavuus on pohjan pinta-ala kertaa korkeus, eli n. 560 cm <sup>3</sup> .	3
TAI	
Käytetty GeoGebran pinta-ala tai tilavuus -toimintoa riittäväillä selityksillä.	

Kuva 9: Hyvän vastauksen piirteet, YTL

### Malliratkaisu

Särmiön tilavuus saadaan laskettua kertomalla särmiön pohjan pinta-ala särmiön korkeudella eli kaavalla  $V=Ah$ . Suklaarasian pohja on säännöllinen kahdeksankulmio, jonka sivun pituus 4,2 cm. Kahdeksankulmion pinta-ala voidaan laskea kuvan mukaisesti neliön avulla, jonka kustakin kulmista on poistettu suorakulmainen tasakylkinen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on 4,2 cm. Kolmion pinta-ala saadaan laskettua ratkaisemalla ensin kateettien pituudet Pythagoraan lauseen avulla:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Koska kateetit ovat yhtä pitkät eli  $a = b$ , voidaan Pythagoraan lauseen kaavaa yksinkertaistaa:

$$a^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow 2a^2 = c^2.$$

Sijoitetaan kaavaan hypotenuusan pituus ja ratkaistaan kateettien a pituus:

$$\begin{aligned} 2a^2 &= 4,2^2 \quad || : 2 \\ a^2 &= \frac{4,2^2}{2} \quad || \sqrt{\phantom{x}} \\ a &= \frac{4,2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

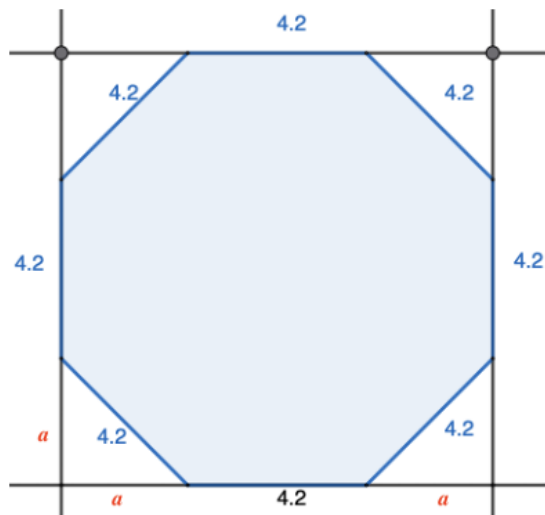
Yhden kolmion pinta-ala voidaan nyt ratkaista:

$$A_{kolmio} = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4,2^2}{2} = \frac{4,2^2}{4}.$$

Neliöstä on poistettu neljä kolmiota ja näiden kolmioiden yhteispinta-ala on  $4 \cdot \frac{4,2^2}{4} = 4,2^2$ .

Neliön yhden sivun pituudeksi saadaan:

$$4,2 + \frac{4,2}{\sqrt{2}} + \frac{4,2}{\sqrt{2}} = 4,2 + 2 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}}.$$



Kuva 10: Malliratkaisun tueksi GeoGebralla hahmoteltu kuva.

Näin ollen neliön pinta-alaksi saadaan:

$$A_{\text{neliö}} = \left(4,2 + 2 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Särmiön pohjan pinta-ala saadaan laskettua vähentämällä neljän kolmioiden yhteispinta-ala neliön pinta-alasta:

$$A_{8\text{-kulmio}} = \left(4,2 + 2 \cdot \frac{4,2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4,2^2 \approx 85,2 \text{ cm}^2$$

Suklaarasian tilavuus ratkaistaan kertomalla pohjan ala särmiön korkeudella:

$$V_{\text{särmiö}} = 85,2 \text{ cm}^2 \cdot 6,6 \text{ cm} \approx 562 \text{ cm}^3$$

### 5.3.5 Syksy 2020, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 5. Maankäytön muutos

Hallitustenvälisen ilmastopaneelin (IPCC) vuoden 2019 raportissa hyödynnettiin maankäytön tilastoja vuodelta 2015 (11). Niiden mukaan jäättömästä maanpinnasta on ihmisen käytössä 72 % ja loput 28 % on käyttämättä. Oletetaan, että maankäyttö muuttuu vuosien 2015 ja 2030 välillä seuraavilla tavoilla: Kasvispitoisempaan ruokavaliioon siirtyminen vähentää laidunmaan pinta-alaa kymmenellä prosentilla. Tämä pinta-ala muuttuu viljelysmaaksi. Viisi prosenttia käyttämättömästä osasta otetaan käyttöön talousmetsänä. Laske näiden oletusten perusteella eri maankäyttötapojen prosentiosuudet vuonna 2030.

## 5. Maankäytön muutos

### 5. A Taulukko: Maankäyttö vuonna 2015

Käyttämättä: 28 %  
Käytössä: 72 %  
- rakennetut alueet: 1 %  
- viljelysmaa: 12 %  
- laidunmaa: 37 %  
- talousmetsä: 22 %

Lähde: Intergovernmental Panel on Climate Change. <https://www.ipcc.ch/report/srccl/>. Viitattu: 25.9.2019.

Kuva 11: Aineisto maankäytön muutos-tehtävään

Käyttämätön maa: $0,28 \cdot (1 - 0,05) \approx 27\%$ .	2
Asutusalueen osuus pysyy ennallaan.	1
Laidunmaa: $0,37 \cdot (1 - 0,1) \approx 33\%$	2
Viljelysmaa: $0,12 + 0,1 \cdot 0,37 \approx 16\%$	3
Talousmetsä: $0,22 + 0,05 \cdot 0,28 \approx 23\%$	3
Käytössä olevan maan osuus: $0,72 + 0,05 \cdot 0,28 \approx 73\%$	1

Kuva 12: Hyvän vastauksen piirteet, YTL

## Malliratkaisu

Vuonna 2015 laidunmaan osuus maanpinnasta on 37 %. Kasvipitoisempaan ruokavaliioon siirtyminen vähentää vuoteen 2030 mennessä laidunmaan pinta-alaa kymmenellä prosentilla eli vuonna 2030 laidunmaan pinta-ala on 90 % vuoden 2015 laidunmaan pinta-alasta. Näin ollen vuonna 2030 laidunmaan pinta-ala on:

$$0,37 \cdot (1 - 0,1) = 0,37 \cdot 0,9 = 0,333 \approx 33\%.$$

Laidunmaan pinta-alasta vähennetty 10 % siirtyy viljelysmaaksi, jolloin viljelysmaan pinta-alan uusi osuus saadaan lisäämällä vuoden 2015 viljelysmaan pinta-alan osuuteen laidunmaan pinta-alasta vähennetty 10 % osuus. Näin ollen vuonna 2030 viljelysmaan pinta-alan osuus on:

$$0,12 + 0,1 \cdot 0,37 = 0,157 \approx 16\%.$$

Vuoteen 2030 mennessä 5 % käyttämättömän maan pinta-alan osuudesta otetaan käyttöön talousmetsänä, joten käyttämättömän maan pinta-alan osuus vuonna 2030 on:

$$0,28 \cdot (1 - 0,05) = 0,28 \cdot 0,95 = 0,266 \approx 27\%.$$

Vuonna 2030 talousmetsän osuus maapinta-alasta saadaan lisäämällä käyttämättömän maan pinta-alasta poistettu osuus vuoden 2015 talousmetsän pinta-alaan. Vuonna 2030 talousmetsän pinta-alan osuus on:

$$0,22 + 0,05 \cdot 0,28 = 0,234 \approx 23\%.$$

Käyttämättömän pinta-alan osuudesta poistettu 5 % siirtyy siis käytössä olevaan maapinta-alaan eli vuonna 2030 käytössä olevan pinta-alan osuus saadaan lisäämällä tämä osa vuonna 2015 käytössä olevan pinta-alan osuuteen. Siis vuonna 2030 maanpinnasta ihmisen käytössä on:

$$0,72 + 0,05 \cdot 0,28 = 0,734 \approx 73\%.$$

Rakennettujen alueiden osuus ei muutu vuosien 2015 ja 2030 välillä. Maankäyttötapojen prosenttiosuudet ovat siis vuonna 2030:

- Käyttämättä: 27 %
- Käytössä: 73 %
- Rakennetut alueet: 1 %
- Viljelysmaa: 16 %
- Laidunmaa: 33 %
- Talousmetsä: 23 %

### 5.3.6 Kevät 2021, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 3. Kaavoja

Matematiikan sovelluksissa käytetään erilaisia kaavoja. Tässä tehtävänä on joko ratkaista kysytty suure kaavasta (kohdat 1–4) tai laskea sen lukuarvo (kohdat 5 ja 6). Jokaisesta osatehtävästä voi saada 2 pistettä.

1. Ratkaise aika  $t$  :  $v = v_0 + at$ .
2. Ratkaise moolimassa  $M$  :  $n = \frac{m}{M}$ .
3. Ratkaise nopeus  $v$  :  $E = \frac{1}{2}mv^2$ .
4. Ratkaise kateetin pituus  $a$  :  $a^2 + b^2 = c^2$ .
5. Laske säde  $r$  :  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ , kun  $V = 2$ .
6. Laske aika  $t$  :  $K = k(1 + \frac{p}{100})^t$ , kun  $K = 1000$ ,  $k = 500$  ja  $p = 2$ . [h]

$v - v_0 = at$ TAI $\frac{v}{a} = \frac{v_0}{a} + t$	(1)
$t = \frac{v - v_0}{a}$ TAI $t = \frac{v - v_0}{a}$ TAI $t = \frac{v}{a} - \frac{v_0}{a}$	1
Merkkivirhe, esim. $t = \frac{v_0 - v}{a}$ .	1
$Mn = m$	(1)
$M = \frac{m}{n}$	1
$v^2 = \frac{2E}{m}$ TAI $v^2 = \frac{E}{\frac{1}{2}m}$	(1)
$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ , $v = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}$ tai $v = \sqrt{\frac{E}{\frac{1}{2}m}}$	1
Jakolaskut sieventämättä, esim. $v = \sqrt{\frac{E}{\frac{1}{2}m}}$ .	1
$a^2 = c^2 - b^2$	(1)
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ .	1
$a = \pm \sqrt{c^2 - b^2}$ tai $a = -\sqrt{c^2 - b^2}$ vastauksena	-1
• V:n sijoitus oikein [ $2 = \frac{4m^3}{3}$ , $r^3 = \frac{6}{4\pi}$ tai $r^3 = 0,477464\dots$ ].	1
• Ratkaistu r oikein [ $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ , $r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$ , $r = \sqrt[3]{\frac{6}{4\pi}}$ tai $r \approx 0,781592\dots$ ].	1
Virhe sijoituksessa, ei muuta tehtävän luonnetta [ $2 = \frac{4m^3}{3}$ ].	max1
• Sijoitukset oikein [ $1000 = 500(1 + \frac{2}{100})^t$ TAI $1000 = 500(1,02)^t$ ].	1
• Ratkaistu t oikeaoppisesti [ $t = \frac{\log 2}{\log 1,02} = \log_{1,02} 2 \approx 35,002\dots$ ].	1
$1000 = 500(1 + \frac{2}{100})^t$ , $1000 = 500(1 + \frac{2}{100})^t$ tms. vakava virhe sijoituksessa; vrt. laskettu sulkeilla, joita ei kirjoitettu näkyviin.	0
Virhe sijoituksessa, ei muuta tehtävän luonnetta [ $500 = 1000(1 + \frac{2}{100})^t$ ].	max1
Perusteltu kokeiluratkaisu käy (todettu monotonisuus sekä 34,5 liian pieni, 35,5 liian iso), pelkkä 35 testaus ei riitä.	max1
Kahdessa viimeisessä kohdassa vastaus voi olla tarkkana arvona tai likiarvona. Kaikki tarkkuudet käyvät.	
Kahdessa viimeisessä kohdassa vastauksessa tarkka arvo oikein ja likiarvo väärin.	-0

Kuva 13: Hyvän vastauksen piirteet

## Malliratkaisu

1.

$$v = v_0 + at \quad || - v_0$$

$$v - v_0 = at \quad || : a$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

2.

$$n = \frac{m}{M} \quad || \cdot M$$

$$nM = m \quad || : n$$

$$M = \frac{m}{n}$$

3.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad || \cdot 2$$

$$2E = mv^2 \quad || : m$$

$$\frac{2E}{m} = v^2 \quad || \sqrt{\quad}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

4.

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad || - b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad || \sqrt{\quad}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

5.

$$\begin{aligned}V &= \frac{4\pi r^3}{3}, \quad V = 2 \\ \frac{4\pi r^3}{3} &= 2 \quad || \cdot 3 \\ 4\pi r^3 &= 6 \quad || : 4\pi \\ r^3 &= \frac{6}{4\pi} \quad || \sqrt[3]{\phantom{x}} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{6}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}} \approx 0,782\end{aligned}$$

Tehtävän 6. kohtaa ei tässä tutkielmassa käsitellä.

## 6 Tutkimustulokset

### 6.1 2019 kevät, matematiikka lyhyt oppimäärä, tehtävä 3. Värikäs lippu

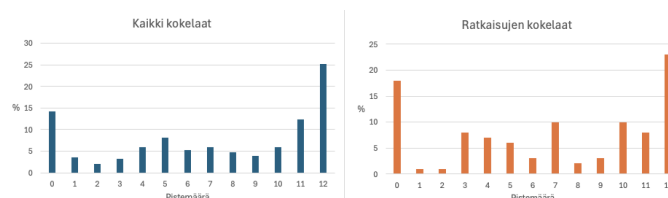
Tässä tehtävässä oli tarkoituksena laskea Seychellien lipusta kunkin värin osuudet lipun kokonaispinta-alasta. Vastauksen tuli olla annettuna prosenttimuodossa. Tehtävässä kuinkin värin pinta-alan osuudet pystyttiin ratkaisemaan kolmion pinta-alan sääntöjen ja kaavan avulla. Tehtävä kuuluu A-osioon eli tehtävä ei ole ollut valinnainen kenellekään kokelaalle.

Tehtävästä oli jaossa 12 pistettä. Tässä tutkielmassa tarkasteltujen ratkaisujen pistekeskisarvo oli 6,8 pistettä. Yleisin pistemäärä tehtävästä oli täydet 12 pistettä (23 kpl) ja toiseksi yleisin oli 0 pistettä (18 kpl). Kaikkien pistemäärien jakaantuminen on esitettyinä taulukossa 2. Lisäksi tarkasteltavien ratkaisujen pistemäärien jakaumaa verrattaan koko kokelasjoukon pistemäärien jakaumaan kuvassa 14.

Pisteiden jakaumat ratkaisujen kokelaiden ja kaikkien kokeeseen osallistuneiden kokelaiden välillä olivat pitkälti samanlaiset. Keskimäärin ratkaisujen kokelaat suoriutuivat hieman heikommin verrattuna koko kokelasjoukkoon (keskiarvo 7,2 pistettä).

Pistemäärä	Esiintyvyys (kpl)
0	18
1	1
2	1
3	8
4	7
5	6
6	3
7	10
8	2
9	3
10	10
11	8
12	23

Taulukko 2: Ratkaisujen pistemäärät ja niiden esiintyvyydet (N=100).



Kuva 14: Ratkaisujen kokelaiden sekä kaikkien kokelaiden pistemäärien osuuksien jakautuminen.

Virheitä tai virhekäsityksiä esiintyi kokonaisuudessaan 60 oppilaalla. Virheet olivat luonteeltaan ja laadultaan kirjavia. Osa virheistä oli suoraan tunnistettavasti virhekäsityksistä johtuvia käsitteellisiä virheitä ja osa taas huolimattomuudesta mahdollisesti johtuvia merkintä- tai muotoiluvirheitä, kuten esimerkiksi lopullisen ratkaisun antaminen ei-pyydetyssä muodossa.

Ratkaisuista löytyi seitsemää eri virhetyyppiä, joista kaksi liittyy suoraan geometrian osaamiseen, neljä laskennallisiin virheisiin ja yksi prosenttilaskennan osaamiseen. Virhetyypit ja näiden esiintyvyydet ovat esitettynä taulukossa 3. Yhteensä erilaisia virhetyyppejä löytyi kokonaisuudessaan 77 kappaletta 60 eri oppilaalla. Näistä 17 oppilaalla esiintyi useampaa kuin yhtä virhetyyppiä.

<b>Virhetyyppi</b>	<b>esiintyvyyys (kpl)</b>
virhe kolmion korkeusjanan tulkinnessa	27
Kolmion pinta-alan kaava	4
Virhe prosenttimuunnoksessa	3
puutteelliset kirjaukset laskuissa	13
Laskuvirhe	18
Vastausta ei ole annettu pyydetyssä muodossa	5
Ei taitoja ratkaista tehtävää	7
<b>Yhteensä</b>	<b>77</b>

Taulukko 3: Virhetyypit ja niiden esiintyvyydet.

Yleisin virhetyyppi liittyi virhekäsitykseen kolmion korkeuden määrittämisessä. Tämä virhetyyppi ilmeni 29 vastauksessa. Korkeusjanan ymmärtämiseen liittyvät virheet näkyivät ratkaisussa pääasiassa kahdella tavalla.

Toinen korkeusjanaan liittyvä puutteellinen tieto liittyy virhekäsitykseen, että kolmion korkeus on kannan viereinen jana. Tämä ilmeni muun muassa kuvan 15 tapaisesti. Kokelas on ratkaissut puuttuvan sivun pituuden Pythagoraan lauseen avulla ja käyttänyt sitä virheellisesti kolmion korkeutena.

Toinen korkeusjanan puutteellisen ymmärtämisen ilmenemismuoto oli kuvan 16 mukainen tilanne, jossa kokelas on osannut ratkaista suorakulmaisten kolmioiden (vihreä ja sininen kolmio) pinta-alat, mutta muiden kolmioiden pinta-aloja ei ole edes yritetty ratkaista.

Toiseksi yleisin virhetyyppi oli lasku- tai huolimattomuusvirhe tehtävässä. Näissä tapauksissa tehtävä oli ymmärretty, tehtävää oltiin lähdetty ratkaisemaan oikealla tavalla ja oikeaa pinta-alan kaavaa käyttäen, mutta ratkaisu oli laskuissa tapahtuneiden virheiden takia puutteellinen. Laskuvirheitä esiintyi 18 oppilaan ratkaisussa. Laskuvirheet olivat pääasiassa huolimattomia merkintävirheitä laskuissa, mitkä vaikuttivat lopputulokseen. Myös pyöristämisen kanssa oli ongelmia ja sitä esiintyi ajoittain laskujen keskellä.

Kolmanneksi yleisin virhetyyppi oli laskujen puutteelliset kirjaamiset. Tätä virhetyyppiä esiintyi viidellätoista oppilaalla. Tämä virhetyyppi näkyi ratkaisussa pelkän vastauksen muodossa ilman minkäänlaista selitystä, kuinka ratkaisuun on päädytty tai miten se on laskettu. Vastaukset olivat osittain tai jopa kokonaan oikein, mutta selitysten täydellinen puuttuminen ei tuonut tehtävästä pisteitä. Tätä virhetyyppiä esiintyi neljällätoista oppilaalla.

koko lipun pinta-ala  $150 \cdot 300 = 45000$

sininen= suorakulmisen kolmion pinta-ala  $\frac{100 \cdot 150}{2} = 7500$  prosentti osuus=  $\frac{7500}{45000} = 16.666\% = 17\%$

keltainen= lasketaan korkeus h pythagoran lauseella hyödyntäen sinistä kolmiota

$$100^2 + 150^2 = x^2 = 10000 + 22500 = x^2$$

$$x^2 = 32500$$

$$\sqrt{32500} = 180.27756\dots$$

keltaisen alueen pinta-ala=  $\frac{100 \cdot 180.27756}{2} = 9013,878$  prosentti osuus=  $\frac{9013,878}{45000} = 0,20030\dots = 20\%$

valkoinen= hyödynnetään vihreää kolmiota ja lasketaan valkoisen kolmion kanta pythagoran lauseella=

$$300^2 + 50^2 = x^2 = 90\,000 + 2500 = x^2$$

$$x = \sqrt{92500} = 304.13812\dots$$

valkoisen kolmion korkeus on 50. pinta-ala=  $\frac{304.13812 \cdot 50}{2} = 7603,453$  prosentti osuus=  $\frac{7603,453}{45\,000} = 0,168965 = 17\%$

vihreä=pinta-ala=  $\frac{50 \cdot 300}{2} = 7500$  prosentti osuus=  $\frac{7500}{45000} = 16.666\% = 17\%$

punaisen prosentti osuus on jäljelle jäävä osa=  $17 + 20 + 17 + 17 = 71$

$$100 - 71 = 29 = 29\%$$

V= prosentti osuudet ovat= sininen 17%, keltainen 20%, valkoinen 17%, vihreä 17%, punainen 29%.

Kuva 15: Kokelaalla virhekäsitys, että kolmion korkeus määräytyy kannan viereisestä sivusta.

Lipun kokonaispinta-ala  $A = 300 \cdot 150 = 45\,000$

$$45\,000 / 100 = 450 = 1\%$$

$$A = \frac{1}{2}ah$$

Kolmion pinta-ala

a = kolmion kanta

h = kolmion korkeus

Sinisen osuuden pinta-ala =  $(100 \cdot 150) : 2 = 7500$

Pinta-ala prosentteina kokonaispinta-alasta:  $7500 / 450 = 16,666\dots\%$

Vihreän osuuden pinta-ala =  $(50 \cdot 300) : 2 = 7500$

Pinta-ala prosentteina kokonaispinta-alasta:  $7500 / 450 = 16,666\dots\%$

Keltaisen osuuden pinta-ala =

Punaisen osuuden pinta-ala =

Valkoisen osuuden pinta-ala =

Kuva 16: Kokelas osannut ratkaista suorakulmaiset kolmiot, mutta ei muuta.

Lipun kokonais pinta-ala prosentteina on 100% ,joten uskoisin että "lajittelu väreittäin" prosenttimäärällisesti meni näin:  
sininen= 20% | koska se on teräväkulmainen kaistale  
keltainen= 18% | hieman pienempi kuin sininen kaistale  
punainen= 35% | ylivoimaisesti suurin pinta-alaltaan oleva väri  
valkoinen= 15% | pieni kaistale, mutta suurempi kuin valkoinen  
tummanvihreä= 12% | pienimmän pinta-alan omaava väri

$$20\% + 18\% + 35\% + 15\% + 12\% = 100\%$$

Kuva 17: Vastaus, jossa oikean ratkaisun piirteet puuttuvat.

Seitsemän oppilaan vastauksessa ei ollut mitään oikean ratkaisumallin piirteitä ja kokelailta puuttuvat taidot tehtävän ratkaisemiseksi. Osassa näissä vastauksissa laskuja ei ole kirjattu näkyville vaan vastaukseksi on annettu arviot kunkin värin prosenttiosuuksista koko lipusta. Esimerkkinä tällaisesta vastauksesta on esitettyinä kuvassa 17. Kahdessa ratkaisussa on joitain laskuja kirjattuna, mutta ne ovat virheellisiä sisällöltään. Näiden kokelaiden vastauksissa ei ole osoitettu minkäänlaista osaamista kolmion pinta-alaan ja prosenttiosuuksien laskemiseen liittyen. Ratkaisun selitysten puuttellisuuden johdosta näiden kokelaiden kohdalla ei pystytä tarkentamaan, mitä mahdollisia virhekäsityksiä heillä esiintyy, eikä näin ollen kokelaiden ratkaisuja ole huomioitu muissa virhetyypeissä.

Viiden kokelaan ratkaisussa virhetyyppinä on vastauksen antaminen väärässä muodossa. Tehtävänannossa pyydetään antamaan vastaus prosenttiosuutena, mutta näissä ratkaisuissa vastaukset on annettu pinta-alana eikä niiden suhteena lipun kokonaispinta-alaan. Näistä kokelaista neljällä oli myös jokin toinen virhetyyppi ratkaisuissa.

Neljän kokelaan ratkaisussa on virhetyyppinä se, että kolmion pinta-alan kaava ei ole tiedetty tai ymmärretty käyttää. Näissä ratkaisuissa on kuitenkin osoitettu yleisesti ymmärrystä tehtävän luonteesta.

Kolmen kokelaan ratkaisussa esiintyy selkeitä puutteita prosenttiosuuksien laskeamisessa ja ymmärtämisessä. Jokaisessa näiden kolmen kokelaan ratkaisussa oli myös jokin toinen virhetyyppi, mutta ratkaisu sisälsi myös oikean ratkaisumallin piirteitä.

## 6.2 2019 kevät, matematiikka lyhyt oppimäärä, tehtävä 5. Paljonko tölkin tilavuus on ilmaa?

Tehtävässä on tarkoituksena laskea, minkä tilavuuden verran ilmaa täydessä maitopurkissa on. Maidon tilavuus ja tölkin mitat on tehtävässä annettu. Tölkki koostuu alaosan särmiöstä ja yläosan pyramidista, joten tehtävä mittaa kokelaiden kykyä laskea särmiön ja pyramidin tilavuuksia. Myös yksikkömuunnosten hallitseminen on tehtävässä keskeisessä osassa.

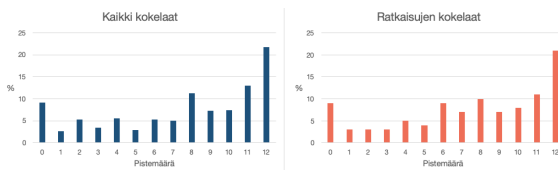
Tehtävästä oli jaossa 12 pistettä. Tässä tutkielmassa tarkasteltujen ratkaisujen pistekeskiarvo tehtävässä oli 7,6 pistettä. Yleisin pistemäärä tehtävästä oli täydet 12 pistettä (21 kpl) ja toiseksi yleisin oli 11 pistettä (11 kpl). Nolla pistettä tehtävästä sai yhdeksän oppilasta. Kaikkien pistemäärien jakaantuminen on esitettyinä taulukossa 4. Lisäksi tarkasteltavien ratkaisujen pistemäärien jakaumaa verrataan koko kokelasjoukon pistemäärien jakaumaan kuvassa 18.

Pisteiden jakaumat ratkaisujen kokelaiden ja kaikkien kokeeseen osallistuneiden kokelaiden välillä olivat pitkälti samanlaiset pisteiden keskiarvon ollessa kaikkien

kokelaiden keskuudessa myös noin 7,6 pistettä.

Pistemäärä	Esiintyvyys (kpl)
0	9
1	3
2	3
3	3
4	5
5	4
6	9
7	7
8	10
9	7
10	8
11	11
12	21

Taulukko 4: Ratkaisujen pistemäärät ja niiden esiintyvyydet (N=100).



Kuva 18: Ratkaisujen kokelaiden sekä kaikkien kokelaiden pistemäärien osuuksien jakautuminen.

Virheitä tai virhekäsityksiä esiintyi tehtävän ratkaisussa 66 oppilaalla. Kymmenen kokelaan ratkaisussa oli useampi kuin yksi virhetyyppi. Virheiden laatu ja vakavuus vaihtelee suuresti, mitä kuvastaa hyvin se, että virhetyyppejä kirjattiin kaikille, jotka saivat 0-10 pistettä tehtävästä. Kokeilaiden taitotasot ja virheiden vakavuudet eroavat merkittävästi, kun verrataan 0 pistettä saaneita kokelaita 10 pistettä saaneisiin kokelaisiin.

virhetyyppi	Esiintyvyys (kpl)
Virhe pyramidin tilavuudessa	49
Virhe särmiön tilavuudessa	2
Virhe yksikkömuunnoksessa	3
Laskut/selitykset puuttuvat	1
Lopputulos ei vastaa tehtävänantoon	6
Tehtävää ei ole osattu/ymmärretty	10
<b>Yhteensä</b>	<b>71</b>

Taulukko 5: Virhetyypit ja niiden esiintyvyydet (N=100).

Virhetyyppejä oli yhteensä kuusi, joista kolme liittyi geometrian osaamiseen, tarkemmin särmiön ja pyramidin tilavuuteen sekä yksikkömuunnoksiin. Virhetyypit ja niiden esiintyvyydet ovat esitettyinä taulukossa 5. Virheistä selkeästi yleisin oli, että kappaleen pyramidin muotoisen osan tilavuutta ei osattu laskea oikein. Pyramidin tilavuuden laskemiseen liittyviä virheitä esiintyi 49 kokelaan ratkaisussa. Ylivoimaisesti merkittävän syy pyramidin tilavuuden laskemiseen liittyviin haasteisiin johtui siitä, että pyramidin tilavuuden kaavaa ei tunnettu. Näitä esiintyi 48 tapauksessa. Kokelaat käyttivät tilavuuden ratkaisemiseksi muun muassa säännöllisestä oktaedristä johdettua kaavaa, kuten kuvan 19 kokelas. Tässä tavassa kokelas on tulkinnut virheellisesti, että tehtävän pyramidi olisi puolikas oktaedri ja näen olleen tehnyt kappaleen mittojen sijoitukset oktaedrin tilavuuden kaavaan ja jakanut sen lopulta kahdella. Pyramidin tilavuuden virheellisesti laskeneista 49 kokelaasta kahdella oli pyramidin tilavuuden kaava oikein, mutta laskussa oli käytetty väärin sivujen mittoja.

Tölkin mahtuu ilman pyramiidiä päätä 1,71L maitoa  
Tämä saadaan laskemalla suorakulmisen särmiön tilavuuden kaavalla  $V = abc$   
 $V = 20,0 \cdot 9,25 \cdot 9,25 = 1711,25$   
Vastaus muutetaan litroiksi  
 $1711,25 \approx 1,71$

Lasketaan pyramiidiin tilavuus kaavalla  $V = \frac{a^2 \sqrt{2}}{6}$   
 $V = \frac{9,25^2 \sqrt{2}}{6} = 186,547 \approx 0,19L$   
Muutetaan pyramiidiin tilavuus litroiksi

Suorakulmisen särmiön ja pyramiidiin tilavuudet yhteensä näyttävät kuinka monta litraa tölkkiin mahtuu  
 $0,19 + 1,71 = 1,9$

$1,9 - 1,75 = 0,15$   
Tästä voidaan laskea että avaamattomassa maitotölkissä on 0,15L ilmaa

Kuva 19: Kokelas laskenut pyramidin tilavuuden säännöllisestä oktaedristä johdettua kaavasta.

Toinen useammin ilmenevä tapa oli laskea pyramidi puolikkaana särmiönä, kuten kokelas kuvassa 20. Tässä tavassa mitat ja laskut ovat sinällään oikein, mutta on tehty väärä tulkinta, että pyramidi olisi kahtiajaettu särmiö.

Ensin lasketaan maitotölkkiin suorakulmisen särmiön tilavuus  $V$ , joka saadaan kertomalla sen korkeus, syvyys ja leveys.  
Korkeus: 20,0 cm  
Leveys: 9,25 cm  
Syvyys: 9,25 cm  
 $V = 20,0 \text{ cm} \cdot 9,25 \text{ cm} \cdot 9,25 \text{ cm} = 1711,25 \text{ cm}^3$

Sitten lasketaan maitopurkin yläpäässä olevan pyramidin tilavuus. Se saadaan kertomalla sen korkeus, leveys ja syvyys yhteen ja lopuksi jakamalla se kahtia.  
Korkeus: 3,0 cm  
Leveys: 9,25 cm  
Syvyys: 9,25 cm  
 $V = \frac{3,0 \text{ cm} \cdot 9,25 \text{ cm} \cdot 9,25 \text{ cm}}{2} = 128,343... \text{ cm}^3$

Sitten lasketaan suorakulmisen särmiön ja pyramidin tilavuudet yhteen niin saadaan koko maitopurkin tilavuus.  
 $1711,25 \text{ cm}^3 + 128,343... \text{ cm}^3 = 1967,9375 \text{ cm}^3$   
Muunnetaan vielä tulos oikeaan muotoon eli litroiksi  
 $\frac{1967,9375 \text{ cm}^3}{1000} = 1,96 \text{ l}$

Lopuksi lasketaan paljonko ilmaa avaamattomassa tölkissä on ja sen saa kun vähentää maidon määrän purkin tilavuudesta. Jäljelle jäävä osuus on ilman määrä tölkissä.  
 $1,96 \text{ l} - 1,75 \text{ l} = 0,21 \text{ l}$

vastaus: Avaamattomassa maitopurkissa on 0,21 litraa ilmaa.

Kuva 20: Kokelas tulkinnut pyramidin puolikkaan särmiönä.

Tutkielmaa varten tarkastelluista ratkaisuksista kymmenellä ei ollut tehtävän sisäistämistä osoittavia havaintoja, joten nämä tulkittiin niin, että kyseisillä kokelaila ei ollut ymmärrystä ja osaamista tehtävän ratkaisemiseksi. Tehtävän pääteemana oli tilavuus-käsitteen ymmärtäminen ja tilavuuden laskeminen, ja näiden taitojen voidaan nähdä puuttuvan kyseisiltä kokelailta. Ratkaisujen selitysten puuttellisuuk-

Lasketaan koko maitotölkkin tilavuus:  
 Annettujen mittojen mukaan lasketaan ensimmäisenä tölkin alaosan suorakulmisen särmiön tilavuus:  
 Väärin  
 $9,25 \cdot 9,25 \cdot 20$   
 $= 1711,25$   
 Tämän jälkeen lasketaan tölkin yläosan pyramidin tilavuus. Pyramidi on kartio, jonka pohjan pinta-ala on sama kuin alaosan suorakulmisen särmiön pohjan:  
 $\frac{1}{3} \cdot (9,25 \cdot 9,25) \cdot 3$   
 $= 85,5625$   
 summaamalla suorakulmisen särmiön ja pyramidin tilavuuden saadaan koko maitotölkkin tilavuus:  
 $85,5625 + 1711,25$   
 $= 1796,8125$

Kuva 21: Kokelaan ratkaisumenetelmät oikeita, mutta pyydettyä lopputulosta ei ole annettu.

sien johdosta näiden kokelaiden kohdalla ei pystytä tarkentamaan, mitä mahdollisia virhekäsityksiä heillä esiintyy.

Kahden kokelaan ratkaisussa oli tapahtunut virheitä särmiön tilavuuden laskeamisessa. Toisessa tapauksessa kokelaalla oli tullut väärän sivun mitta tilavuuden kaavaan ja toisessa tapauksessa kokelas oli tilavuuden sijaan laskenut särmiön kokonaispinta-alan.

Kolmella kokelaalla esiintyi virhe yksikkömuunnoksessa. Kuitenkin yksikkömuunnokset tapahtuivat laskujen loppupuolella, joten pelkän yksikkömuunnoksen merkitys ratkaisun pisteissä oli vähäinen.

Yhden kokelaan vastauksessa on esitetty lopputulos, mutta ei selityksiä ja laskuja miten siihen ollaan päädytty. Lopputulos ei ole oikein. Kokelas oli laskenut särmiön tilavuuden oikein, mutta mitään muuta ei ole kirjattuna särmiön tilavuuden ja lopputuloksen lisäksi.

Kuuden kokelaan kohdalla annettu lopputulos ei vastaa tehtävänantoa. Näissä ratkaisuisissa vastauksen lopputuloksena annettiin maitotölkkin kokonaistilavuus, eikä maitotölkissä olevan ilman tilavuutta. Näistä kokelaista kaksi olivat jopa laskeneet pyramidin ja särmiön tilavuudet oikein, mutta unohtaneet tehtävänannon kysymyksen, kuten kuvan 21 kokelaan vastauksesta ilmenee.

Kaiken kaikkiaan kokeilaiden ratkaisujen virheistä erottuu kaksi useammin toistuvaa virhekäsitystä. Toinen virhekäsitys on, että pyramidi on puolikas säännöllinen oktaedri ja toinen se, että pyramidi on puolikas särmiö.

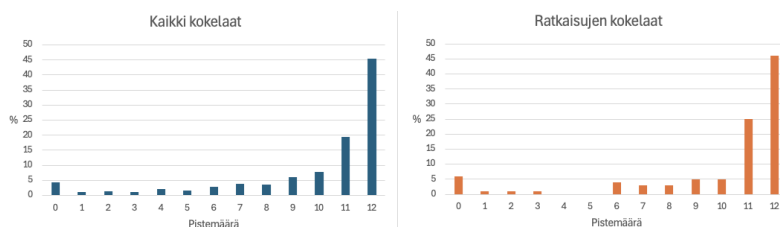
### 6.3 2019 kevät, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Mikko vaihtaa rahaa

Tässä tehtävässä on tarkoitus laskea Mikolle reissusta jäljelle jäänyt rahasumma. Tehtävässä mitataan kokelaan prosenttilaskennan osaamista. Murto- ja desimaalilukujen hallitseminen korostuu tässä tehtävässä. Merkittänä erona aiempiin tehtäviin on se, että tämä tehtävä kuului B-osioon eli se on ollut kokelaille valinnainen tehtävä.

Tehtävästä oli jaossa 12 pistettä. Tutkielmassa käsiteltävistä sadasta ratkaisusta yleisin pistemäärä oli täydet 12 pistettä. Ratkaisuiista jaettujen pisteiden keskiarvo kokelasta kohden oli 9,97. Täydet pisteet sai kokonaisuudessaan 46 kokelasta. Toiseksi yleisin pistemäärä oli 11 pistettä, jonka sai 25 kokelasta. Nolla pistettä tehtävästä sai kuusi opiskelijaa. Tehtävästä saadut pistemäärät ja niiden esiintyvyydet ovat esitettynä taulukossa 6. Lisäksi tarkasteltavien ratkaisujen pistemäärien jakaumaa verrataan koko kokelasjoukon pistemäärien jakaumaan kuvassa 22.

Pistemäärä	Esiintyvyys (kpl)
0	6
1	1
2	1
3	1
4	0
5	0
6	4
7	3
8	3
9	5
10	5
11	25
12	46

Taulukko 6: Tehtävän ratkaisujen pistemäärät ja niiden esiintyvyydet (N=100).



Kuva 22: Ratkaisujen kokelaiden sekä kaikkien kokelaiden pistemäärien osuukien jakautuminen.

Pisteiden jakaumat ratkaisujen kokelaiden ja kaikkien kokeeseen osallistuneiden kokelaiden välillä olivat pitkälti samanlaiset pisteiden keskiarvon ollessa kaikkien kokelaiden keskuudessa myös noin 9,8 pistettä.

Tehtävän ratkaisuisa esiintyi neljää eri virhetyyppiä 25 kokelaalla. Nämä virhetyypit ja niiden esiintyvyydet on esitetty taulukossa 7.

Virhetyyppi	Esiintyvyys (kpl)
Huolimattomuusvirhe	18
Virhekäsitys prosenteissa	4
Tehtävää ei ole osattu tai ymmärretty	2
Selitykset ja laskut puuttuvat	1

Taulukko 7: Ratkaisuisa esiintyneet virhetyypit ja niiden esiintyvyydet.

300e Puolan zlotyiksi :  
 $300e \cdot 0,05 = 15e$   
 $300e - 15e = 285e$

200e Tšekin korunoiksi :  
 $200e \cdot 0,05 = 10e$   
 $200e - 10e = 190e$

Kolmasosa zloeteista on jäänyt käyttämättä, vaihto Tšekin korunoiksi :  
 $\frac{285e}{3} = 95e$   
 $95e \cdot 0,05 = 4,75e$   
 $95e - 4,75e = 90,25e$

Viidesosa kaikista korunoista jäljellä, ja vaihtaa ne takaisin euroiksi :  
 $\frac{90,25e}{5} = 18,05e$   
 $18,05e \cdot 0,05 = 0,90e$   
 $18,05e - 0,90e = 17,15e \approx 17e$

VASTAUS :  
Mikko saa 17e takaisin

Kuva 23: Kokelas unohtanut huomioida alussa vaihdetut korunat jäljelle jääneitä korunoita laskettaessa.

300€ Puolan zlotyiksi:  $300 \cdot 0,05 = 15$ .  
 $300 - 15 = 285$   
285 zlotya

200€ Tšekin korunoiksi:  $200 \cdot 0,05 = 10$ .  
 $200 - 10 = 190$   
190 korunaa

Puolassa huomaa, että kolmasosa zloeteista jäänyt käyttämättä:  $\frac{1}{3} \cdot 285 = 95$   
190 zlotya jäänyt käyttämättä

Vaihtaa zlotyt sitten korunoiksi:  $95 \cdot 0,05 = 4,75$   
 $95 - 4,75 = 90,25$   
90,25 korunaa

Kotiin tullessaan hänellä on  $90,25 + 190 = 280,25$  korunaa  
Vaihtaa korunat euroiksi:  $280,25 \cdot 0,05 = 14,0125$   
 $280,25 - 14,0125 = 266,238 = 266€$

**Vastaus: Mikko saa 266€ takaisin**

Kuva 24: Kokelas on unohtanut, että kaikista korunoista on lopulta  $\frac{1}{5}$  jäljellä.

Yleisin virhetyyppi oli jossain kohtaa laskua tapahtunut huolimattomuusvirhe. Näitä esiintyi kokonaisuudessaan 18 kokelaalla. Yleisin huolimattomuusvirhe oli, että kokelas oli tehtävän loppuvaiheessa unohtanut summata Zlotyistä vaihdetut korunat reissun alussa olleiden korunoiden kanssa, kuten kuvan 23 kokelaan tapauksessa. Toinen useammin esiintyvä huolimattomuusvirhe oli se, että vaihtotappio oli jäänyt jossain kohtaa tehtävää huomioimatta, kuten kuvan 24 kokelaalla. Lisäksi muutamien kokelaan ratkaisun lopussa ei muistettu, että kaikkiaan korunoista jäi viidesosa jäljelle.

Toiseksi yleisin virhetyyppi oli virheellinen ymmärrys prosentteista ja miten prosentteja käsitellään laskuissa. Näitä esiintyi neljän kokelaan kohdalla. Prosentteja ja prosenttiosuuksia käytettiin laskuissa eurojen kanssa sekaisin ja muun muassa kahdella kokelaalla ilmeni virhekäsitys, että prosentti ja sentti ovat sama asia. Kukin kokelas oli yrittänyt ratkaista tehtävää, mutta prosenttilaskentaan liittyvät vaikeudet johtivat siihen, että vain yksi kokelas neljästä sai yhden pisteen tehtävästä muiden jäädessä pisteittä.

Kahden kokelaan kohdalla vastuksessa ei ilmennyt mitään oikean vastauksen piirteitä eikä tehtävää ollut varsinaisesti edes yritetty ratkaista, joten heidät luo-

kiteltiin kokelaiksi, joilla ei ollut tarvittavia taitoja tehtävän ratkaisemiseksi. Ratkaisun selitysten puuttellisuuden johdosta näiden kokelaiden kohdalla ei pystytty tarkentamaan, mitä mahdollisia virhekesityksiä heillä esiintyy.

Yhdellä kokelaalla lopputulos on likimain oikein, mutta laskuja ei ole lainkaan näkyvissä ja näin ollen kokelas on jäänyt kokonaan pisteittä tehtävässä.

## 6.4 Kevät 2020, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 7. Suklaarasia

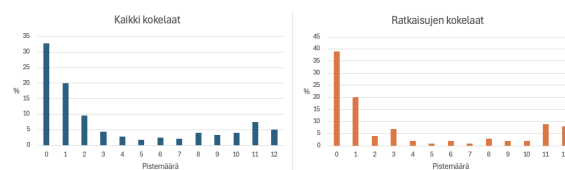
Tässä tehtävässä kokelaiden tehtävänä on laskea tilavuus särmiölle, jonka pohja on säännöllinen kahdeksankulmio.

Tehtävästä oli jaossa 12 pistettä. Yleisin pistemäärä tästä tehtävästä oli 0 pistettä ja tämän sai 39 kokelasta. Toiseksi yleisin pistemäärä oli 1 piste, jonka sai 20 oppilasta. Tässä tutkielmassa käsiteltyjen ratkaisujen tehneiden kokelaiden saamien pistemäärien keskiarvo oli 3,38 pistettä. Kaikki pistemäärät ja niiden esiintyvyydet ovat esitettyinä taulukossa 8. Lisäksi tarkasteltavien ratkaisujen pistemäärien jakaumaa verrataan koko kokelasjoukon pistemäärien jakaumaan kuvassa 25.

Pisteiden jakaumat ratkaisujen kokelaiden ja kaikkien kokeeseen osallistuneiden kokelaiden välillä olivat pitkälti samanlaiset pisteiden keskiarvon ollessa kaikkien kokelaiden keskuudessa myös noin 3,5 pistettä.

Pistemäärä	Esiintyvyys (kpl)
0	39
1	20
2	4
3	7
4	2
5	1
6	2
7	1
8	3
9	2
10	2
11	9
12	8

Taulukko 8: Ratkaisujen pistemäärät ja niiden esiintyvyydet (N=100).



Kuva 25: Ratkaisujen kokelaiden sekä kaikkien kokelaiden pistemäärien osuuksien jakautuminen.

Virhetyyppi	Esiintyvyys (kpl)
Kappale hahmoteltu väärin	44
Tehtävää ei ole osattu tai ymmärretty	39
Perustelut tai laskut puutteelliset tai virheelliset	10
Kolmion pinta-ala	8
Ei ole ymmärretty tilavuuden käsitettä	8

Taulukko 9: Ratkaisujen virhetyypit ja niiden esiintyvyydet.

Erilaisia selkeitä virheitä ja virhetyyppejä esiintyi ratkaisuisissa 77 kokelaan kohdalla. Yhteensä ratkaisuisista löytyi erilaisia virhetyyppejä viisi kappaletta. Kolme virhetyyppeä liittyy geometrisiin taitoihin, yksi virhetyyppi liittyy laskennallisiin taitoihin. Lisäksi tehtävän osaamattomuus ja tietotaidon merkittävä puute on laskettu yhdeksi virhetyypiksi. Virhetyypit ja niiden esiintyvyydet on esitettyinä taulukossa 9. Useampaa kuin yhtä virhetyyppeä esiintyi 31 kokelaan ratkaisussa.

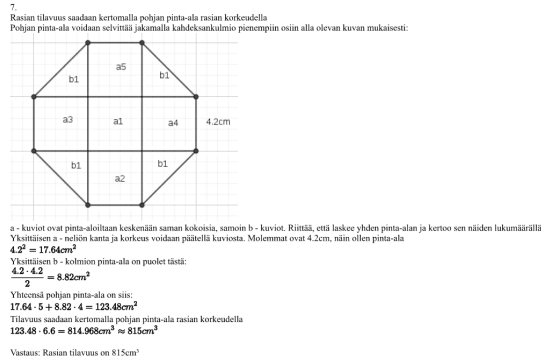
Yleisin virhetyyppi kokelaisten ratkaisuisissa oli, että kappale oli hahmoteltu tai hahmotettu väärin. Tämä virhetyyppi esiintyi 44 kokelaan kohdalla. 28 kokelaan ratkaisussa virheenä oli, että kappale oli hahmoteltu esimerkiksi suorakulmaisena särmiönä tai ympyrälieriönä. Lisäksi esiintyi useampi ratkaisu, jossa säännöllisen kahdeksankulmion kaava on yritetty päätellä säännöllisen kuusikulmion kaavan avulla, kuten kuva 26 kokelas.

Pohja on säännöllinen kahdeksankulmio ja pohjan sivun pituus on 4,2cm  
 Jos säännöllisen kuusikulmion pinta-alan kaava maolin mukaan on  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$   
 kahdeksankulmion pinta-alan kaava on  $\frac{4 \cdot a^2 \cdot \sqrt{4}}{2}$   
 a on sivun pituus eli a=4,2  
 $\frac{4 \cdot (4,2)^2 \cdot \sqrt{4}}{2} = 70,56$   
 Kahdeksankulmion pinta-ala eli A on siis  $70,56 \text{ cm}^2$   
 $V = Ah$   
 $A = 70,56$   
 $h = 6,6$   
 $70,56 \cdot 6,6 = 465,696$   
 Särmiön tilavuus on siis  $465,696 \text{ cm}^3$

Kuva 26: Kokelas yrittänyt päätellä säännöllisen kahdeksankulmion kaavan kuusikulmion kaavasta.

Toinen yleinen kappaleen hahmotteluun liittyvä virhe liittyi säännöllisen kahdeksankulmion ominaisuuksiin. Tätä esiintyi 22 kokelaan ratkaisussa. Tässä virheenä oli, että kappaleen kahdeksankulmioinen pohja hahmoteltiin monesti kuvassa 27 esitetyn kokelaan ratkaisun tapaisesti, jossa kahdeksankulmio on virheellisesti jaettu viiteen neliöön ja neljään tasakylkiseen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kannat ovat yhtäpitkät neliön sivujen kanssa. Tässä tavassa ei ole ymmärretty tai muistettu, että säännöllisessä kahdeksankulmiossa kaikkien sivujen pituudet ovat yhtä suuret.

39 kokelaan ratkaisussa ei ollut yhtään pisteen arvoista havaintoa tai laskua, joten nämä on tulkittu siten, että kyseisillä kokelailla ei ollut tarvittavia tietotaitoja ja oikeita ratkaisutapoja tehtävän ratkaisemiseksi. 19 kokelaan ratkaisut sisältävät varsin suppeasti selityksiä ja laskuja, minkä johdosta näistä ratkaisuisista ei pystynyt tunnistamaan ja luokittelemaan erityisiä virhekäsityksiä. 20 kokelaan ratkaisusta on



Kuva 27: Kokelas hahmotellut säännöllisen kahdeksankulmion väärin.

$$\begin{aligned} \text{Tilavuus } V \\ V &= abc \\ V &= 4,2\text{cm} \cdot 4,2\text{cm} \cdot 6,6\text{cm} = 116,424\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Kuva 28: Kokelaalla sijoittanut tunnetut mitat suorakulmaisen särmiön kaavaan.

tunnistettavissa muita virhetyyppejä tai -käsityksiä. Yleisin virhe näiden kokelaiden kohdalla liittyi kappaleen hahmottamiseen ja tätä esiintyi neljäntoista kokelaan ratkaisussa. Yleisin virhe oli, että kappaleen tilavuus oli yritetty laskea sijoittamalla tunnetut mitat suorakulmaisen särmiön kaavaan. Esimerkki tällaisesta ratkaisusta esitettynä kuvassa 28.

Kymmenen kokelaan ratkaisussa virhetyyppinä on virheellinen tai puutteellinen laskentaprosessi. Kahden kokelaan ratkaisussa ilmeni matemaattista epätarkkutta ja esimerkiksi joitain mittoja oli arvioitu silmämääräisesti. Kaksi kokelasta ovat pyöristäneet kesken laskun. Näistä kymmenestä kokelaasta vain kahdella kokelaalla ei ollut muita virhetyyppejä. Toinen heistä oli saanut oikean lopputuloksen, mutta laskuja ei ole kirjattu näkyviin ja toinen taas on jättänyt tehtävän kesken.

Kahdeksan kokelaan ratkaisussa ilmenee virhekäsitys liittyen kolmion pinta-alan laskemiseen. Kappaleen pohja on jaettu osiin, mutta kolmion pinta-alassa on käytetty väärää korkeutta, kuten esimerkiksi kuvan 29 kokelas. Tässä tavassa kokelas on jakanut pohjan oikein, mutta virheellisesti ratkaissut kolmion hypotenuusan pituuden ja käyttänyt sitä kolmion korkeutena pinta-alaa laskettaessa.

Kahdeksan kokelaan ratkaisusta voidaan tunnistaa selkeitä puutteita tilavuuskäsitteen ymmärtämisessä. Tilavuuden luonnetta ei ole ymmärretty eikä tilavuuden laskukaavaa ole tiedetty. Tilavuus yritettiin johtaa jollain lailla pinta-alan kaavaa hyödyntämällä. Osa ymmärsi tilavuuden samana asiana, kuin kappaleen kokonaispinta-alan, kuten kuvan 30 kokelas.

Särmion pohja muodostuu 8 kolmioista. Yhden kolmion kulma on siis  $\frac{360}{8} = 45$ .

Jaetaan kolmion kahteen osaan, jotta siitä saadaan suorakulmainen. Suorakulmisen kolmion terävä kulma on  $\frac{45}{2} = 22.5$

Selvitetään hypotenuusan pituus:  $\text{solve}\left(\sin(22.5) = \frac{2.1}{x}\right) \rightarrow x = 5.48756$

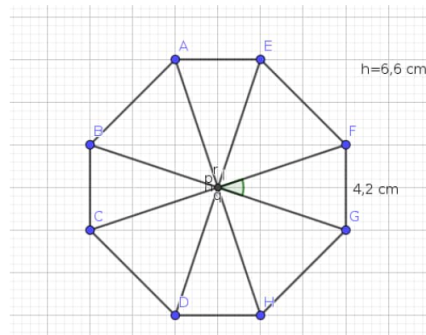
Kolmion pinta-ala:  $\frac{ab}{2} = \frac{2.1 \cdot 5.48756}{2} = 5.76194$

Koko kolmion pinta-ala:  $5.76194 \cdot 2 = 11.5239$

Koko rasian pohjan pinta-ala:  $11.5239 \cdot 8 = 92.1912$

Lasketaan rasian tilavuus:  $92.1912 \cdot 6.6 = 608.462$

!



Kuva 29: Kokelaalla oikea ratkaisutapa, mutta käyttänyt kolmion pinta-alaan väärää korkeutta.

kaikki sivut yhteensä =  $8 \cdot 4,2 \text{ cm} = 33,6 \text{ cm}$   
 kahdeksankulmion muotoinen pohja muodostaa kahdestan tasasivuista kolmiota.

lasketaan sen pinta-ala

$$\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{4,2^3 \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{128,32418}{4}$$

$$= 32,0810 \text{ cm}^2$$

Kerrotaan pohjan pinta-ala kahdella, sillä suklaarasiassa kahdeksankulmio on pohja ja kansi.

$$2 \cdot 32,0810 = 64,162 \text{ cm}^2$$

suklaarasiassa sivuja on 8 kappaletta.

sivu ja korkeus kerrotaan keskenään.

$$4,2 \text{ cm} \cdot 6,6 \text{ cm} = 27,72 \text{ cm}^2$$

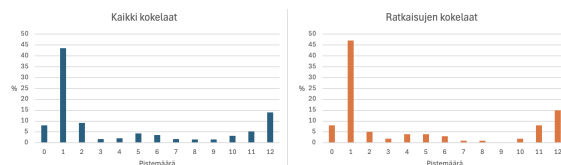
tämä kerrotaan kahdeksalla, sillä sivuja on kahdeksan.

$$8 \cdot 27,72 \text{ cm}^2 = 221,76 \text{ cm}^2$$

nyt lasketaan pohja ja sivut yhteen.

$$64,162 \text{ cm}^2 + 221,76 \text{ cm}^2 = 285,922 \text{ cm}^2$$

Kuva 30: Kokelas sekoittanut tilavuuden kappaleen kokonaispinta-alaan.



Kuva 31: Ratkaisujen kokelaiden sekä kaikkien kokelaiden pistemäärien osuuksien jakautuminen.

## 6.5 Syksy 2020, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 5. Maankäytön muutos

Tässä tehtävässä käsitellään prosenttiosuuksia ja niiden muutosta. Tehtävä on B1-osion valinnainen tehtävä ja siitä oli jaossa 12 pistettä. Tutkielmassa käsitellyistä sadasta ratkaisusta yleisin pistemäärä oli 1 piste ja pistemäärien keskiarvo oli 4,2 pistettä. Kahdeksan kokelasta sai tehtävästä 0 pistettä ja täydet 12 pistettä sai 15 opiskelijaa. Pistemäärät ja niiden esiintyvyydet on esitettyinä taulukossa 10. Lisäksi tarkasteltavien ratkaisujen pistemäärien jakaumaa verrataan koko kokelasjoukon pistemäärien jakaumaan kuvassa 31.

Pisteiden jakaumat ratkaisujen kokelaiden ja kaikkien kokeeseen osallistuneiden kokelaiden välillä olivat pitkälti samanlaiset pisteiden keskiarvon ollessa kaikkien kokelaiden keskuudessa noin 4,15 pistettä.

Pistemäärä	Esiintyvyys (kpl)
0	8
1	47
2	5
3	2
4	4
5	4
6	3
7	1
8	1
9	0
10	2
11	8
12	15

Taulukko 10: Ratkaisujen pistemäärät ja niiden esiintyvyydet (N=100).

Tehtävän ratkaisusta löytyi kokonaisuudessaan viittä eri virhetyyppiä. Jälleen yhteen virhetyyppiin on luokiteltu kokelaiden ratkaisut, joista ei ilmene mitään oikean ratkaisun piirteitä ja näin ollen voidaan ajatella, ettei heillä ole osaamista eikä tarvittavia taitoja ja tietoja tehtävän ymmärtämiseksi. Muut virhetyypit liittyvät laskennallisiin virheisiin, joista osa on tulkittu huolimattomuusvirheiksi ja osa prosenttilaskentaan liittyviksi väärinkäsityksiksi. Virhetyypit ja niiden esiintyvyydet ovat esitettyinä taulukossa 11.

Virhetyyppi	Esiintyvyys (kpl)
Prosentin ja prosenttiyksikön eroa ei ymmärretty	52
Selitykset tai laskut puutteelliset	11
Prosentit laskettu väärästä osuudesta	10
Tehtävää ei osattu tai ymmärretty	7
Huolimattomuusvirhe	6

Taulukko 11: Ratkaisuisissa esiintyneet virhetyypit ja näiden esiintyvyydet.

Koska vuoden 2015 tilausten mukaan 72% on käytössä seuraavasti  
- Rakennetut alueet 1%  
- viljelysmaa: 12 %  
- laidunmaa: 37 %  
- talousmetsä: 22 %

Siirtymien kasvipeitteen ruokavaliota vähentää laidunmaan pinta-alaa 10%:lla eli  
37%-10%=27%  
Tämä 10% lisääntyy taas viljelysmaaksi, jolloin viljelysmaata on käytössä 12%+10%=22%

Käyttämättömästä 28%:sta otetaan käyttöön 5% talousmetsinä, jolloin talousmetsän käyttö on 27% ja käyttämättä jää 23% maanpinnasta

Vuonna 2030 maankäyttötapojen prosentiosuudet tulevat olemaan seuraavanlaiset:  
Käyttämättä: 23 %

Käytössä: 77 %  
- rakennetut alueet: 1 %  
- viljelysmaa: 22 %  
- laidunmaa: 27 %  
- talousmetsä: 27 %

Kuva 32: Kokelas ei erota prosenttien ja prosenttiyksikön eroa.

Selkeästi yleisimmässä virhetyypissä kokelas ei ole erottanut prosenttien ja prosenttiyksikön eroa. Tätä virhetyyppiä esiintyi peräti 52 kokelaalla. Tässä virhetyypissä kokelas on tulkinut tehtävää esimerkiksi kuvan 32 tapaisesti. Tehtävässä laidunmaan pinta-alan osuus vähenee kymmenellä prosentilla. Kuvan 32 kokelas on virheellisesti ymmärtänyt, että pinta-alan osuuden vähentyminen kymmenellä prosentilla tarkoittaa samaa asiaa, kuin pinta-alan osuus vähenisi kymmenen prosenttiyksikön verran.

Toiseksi yleisin virhetyyppi oli, että kokelaan ratkaisun selitykset tai laskut ovat puutteelliset. Tätä virhetyyppiä esiintyi 11 kokelaan ratkaisussa. Hyvänä esimerkkinä tästä virhetyypistä on kuvassa 33 esitetyn kokelaan ratkaisu, jossa lopputulokset ovat täysin oikein. Selityksiä tai laskuja ei kuitenkaan lopputulosten lisäksi ole kirjattu, joten kokelas sai vain yhden pisteen ratkaisustaan.

Kymmenellä kokelaalla virhetyypinä oli, että prosenttiosuuden muutos on laskettu väärää alkuperäistä osuutta hyödyntämällä. Esimerkiksi kuvan 34 kokelas on laskenut aivan oikein laidunmaan uuden pinta-alan osuuden, mutta sitten laskenut virheellisesti viljelysmaan pinta-alan osuuden. Hän on kasvattanut viljelysmaata kymmenellä prosentilla, mutta hänen olisi kuulunut lisätä viljelysmaan pinta-alan osuuteen laidunmaasta poistetun pinta-alan osuus.

V= Maankäyttötapojen prosentti osuudet vuonna 2030 ovat:  
Käyttämättä 26,6%  
Käytössä 73,4%  
- Rakennettu 1%  
- Viljelysmaa 15,7%  
- Laidunmaa 33,3%  
- Talousmetsä 23,4%

Kuva 33: Lopputulokset oikein, mutta selitykset ja laskut puuttuvat.

Laidunmaa: 33,3%  
 Koska:  $37\% \cdot 0,9 = 33,3\%$   
 Viljelysmaa kasvaa kymmenellä prosentilla eli  
 $12\% \cdot 1,10 = 13,2\%$   
 Talousmetsä:  $22\% \cdot 1,05 = 23,1\%$

Käyttämätöntä: 26,6%  
 koska:  $28\% \cdot 0,05 = 1,4$   
 $28 - 1,4 = 26,6$

Kuva 34: Prosenttiosuus laskettu väärää alkuperäistä osuutta hyödyntäen.

Käyttämättä: 28 %  
 Käytössä: 72 %  
 - rakennetut alueet: 1 %  
 - viljelysmaa: 12 %  
 - laidunmaa: 37 %  
 - talousmetsä: 22 %

2015:  
 28% käyttämättä  
 72% käytössä (1% rakennetut alueet, 12% viljelysmaa, 37% laidunmaa, 22% talousmetsä.)

2030:  
 Käyttämättömän maan osuus laskee prosenttiyksiköissä 28% ----> 23%. Prosentteina tämä on  $\frac{23}{28} \cdot 100 = 82,142...% - 100\% \approx -18\%$

Näin ollen  $100\% - 22\% = 78\%$  eli v.2030 78% maasta on käytössä.

Laidunta vähentyy kymmenen prosenttiyksikköä eli  $\frac{27}{37} \cdot 100 = 72,972...% - 100\% \approx -27\%$

Viljelysmaa lisääntyy kymmenellä prosenttiyksiköllä eli  $\frac{22}{12} \cdot 100 = 183,333...% - 100\% \approx 83\%$

Talousmetsä lisääntyy viidellä prosenttiyksiköllä eli  $\frac{27}{22} \cdot 100 = 122,727...% - 100\% \approx 23\%$

Kuva 35: Kokelaalla selkeitä puutteita prosenttilaskennan taidoissa.

Seitsemän kokelasta ei osoita ratkaisussaan minkäänlaista prosenttilaskennan osaamista. Näistä tapauksista kolmessa annettu ratkaisu on sen verran suppea, ettei tunnistettavia virhekäsityksiä löytynyt. Neljän kokelaan ratkaisussa laskuja on sen verran esillä, että niistä voidaan tunnistaa joitain virhekäsityksiä. Näiden kokelaiden ratkaisuista ilmenee selkeitä käsitteellisiä virheitä prosenttiosuuksiin liittyen. Esimerkiksi kuvan 35 kokelas on uutta prosenttiosuutta laskeessaan muodostanut prosenttimuutosta kuvaavan murtoluvun, jossa nimittäjänä on alkuperäinen prosenttiosuus ja osoittajana on esimerkiksi kymmenen prosenttiyksikköä pienempi ns uusi prosenttiosuus. Tässä tavassa kokelaalla on siis lisäksi sekoittunut prosentin ja prosenttiyksikön ero.

Kuuden kokelaan ratkaisussa esiintyy huolimattomuusvirhe. Huolimattomuusvirheeksi luokiteltiin ratkaisu, jossa esimerkiksi tehtävä on muuten ratkaistu oikein, mutta jossakin vaiheessa esimerkiksi prosentit ja prosenttisouudet ovat menneet sekaisin. Esimerkki tällaisesta tapauksesta on kuvassa 36, jossa kokelas on aivan oikein laskenut talousmetsän, käyttämättömän ja käytössä olevan maa-alan osuudet, mutta laidunmaan ja viljelysmaan kohdalla prosentit ja prosenttisouudet ovatkin menneet sekaisin.

	Ennen (%)	Jälkeen (%)
Käyttämättä	28	28 - 0,95 = 26,6
Käytössä	72	72 + 1,4 = 73,4
Rakennettu	1	1
Viljelys	12	12 + 10 = 22
Laidun	37	37 - 10 = 27
Talous	22	22 + 1,4 = 23,4

Käyttämättä olevasta maasta vähentyi siis 1,4%, joka siirrettiin talousmetsään, jolloin myös käytössä olevan maan osuus lisääntyi 1,4%.

Ja laidunmaan osuus pieneni 10% ja siirtyi viljelysmaaksi.

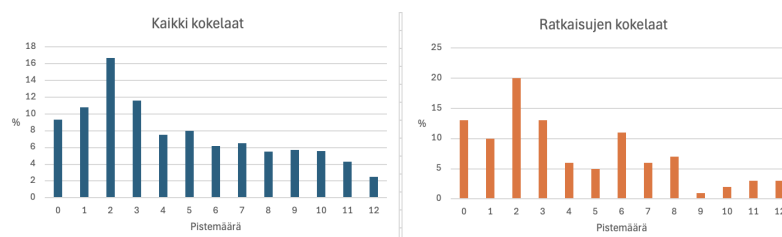
Vastaus: Käyttämättä 26,6%, käytössä 73,4%, rakennetut alueet 1%, viljelysmaa 22%, laidunmaa 27% ja talousmetsä 23,4%

Kuva 36: Kokelaalla huolimattomuusvirhe laidunmaan ja viljelysmaan osuuksien laskuissa.

## 6.6 Kevät 2021, matematiikan lyhyt oppimäärä, tehtävä 3. Kaavoja

Tämä tehtävä mittaa kokelaan yhtälönratkaisutaitoja ja tehtävässä tarkoituksena ratkaista pyydetty termi annetusta kaavasta. Kussakin kaavassa esiintyy useampi tuntematon termi. Tehtävästä oli jaossa 12 pistettä. Tässä tutkielmassa tarkasteltavien matematiikan perustaitojen näkökulmasta tehtävän kuudes kohta on kuitenkin sen verran kehittyneempää matematiikkaa, että hyvät matematiikan perustaidot eivät takaa tässä kohdassa pärjäämistä. Tehtävän kuudetta osaa ei siis ratkaisuja tarkastellessa huomioitu eli tarkastelun alla on kohdat 1-5.

Tutkielmassa tarkasteltujen ratkaisujen yleisin pistemäärä oli 2 pistettä ja tämän määrän sai 20 kokelasta. Pistemäärien keskiarvo oli 4 pistettä. 13 kokelasta sai tehtävästä 0 pistettä ja täydet 12 pistettä sai yhteensä 3 kokelasta. Tehtävästä jaetut pistemäärät ja niiden esiintyvyydet on esitettyinä taulukossa 12. Lisäksi tarkasteltavien ratkaisujen pistemäärien jakaumaa verrataan koko kokelasjoukon pistemäärien jakaumaan kuvassa 37.



Kuva 37: Ratkaisujen kokelaiden sekä kaikkien kokelaiden pistemäärien osuuksien jakautuminen.

Pisteiden jakaumat ratkaisujen kokelaiden ja kaikkien kokeeseen osallistuneiden kokelaiden välillä olivat pitkälti samanlaiset pisteiden, joskin kaikkien kokelaiden keskiarvo 4,6 oli hieman parempi. Kaikkien kokelaiden mediaani oli myös yhden pisteen verran parempi (4 pistettä).

Pistemäärä	Esiintyvyys (kpl)
0	13
1	10
2	20
3	13
4	6
5	5
6	11
7	6
8	7
9	1
10	2
11	3
12	3

Taulukko 12: Ratkaisujen pistemäärät ja niiden esiintyvyydet (N=100).

Tunnistettavia virhetyyppejä tai virhekäsityksiä esiintyi 91 kokelaan ratkaisussa. 57 kokelaalla oli merkittäviä puutteita yhtälönratkaisutaidoissa. Enemmistöstä näiden kokelaiden ratkaisuihin ei ole tunnistettavissa erityisiä virhekäsityksiä ratkaisun virheellisyyden tai puutteellisuuden johdosta. Muita virhetyyppejä löytyi yhteensä kolmea eri muotoa. Virhetyypit ja niiden esiintyvyydet ovat esitettynä taulukossa 13.

Yleisin virhetyyppi oli, että kokelaan yhtälönratkaisutaidoissa oli merkittäviä puutteita. Tämä esiintyi 57 kokelaan kohdalla. Näistä kokelaista 11 kohdalla tunnistettiin jokin yhtälönratkaisuun liittyvä virhekäsitys. Kahdeksan kokelaan ratkaisussa ratkaistava muuttuja on mielivaltaisesti siirretty yhtälön toiselle puolelle ja vastaavasti muut termit toiselle, kuten kuvan 38 kokelaan tapauksessa. Neljän kokelaan ratkaisussa esiintyi virhe, jossa kerrointermi on virheellisesti vähennetty pois yhtälöstä. Kahdella kokelaalla esiintyi molempia edellä mainituista virheistä. Yhden kokelaan ratkaisussa yhtälön laskuoperaatioita ei ole toteutettu yhtäsuuruusmerkin molemminpuolin.

Vaikka näillä 57 esiintyi merkittäviä puutteita yhtälönratkaisutaidoissa, esiintyi joidenkin kokelaiden ratkaisussa myös oikeita havaintoja ja laskuja. Näistä kokelaista 13 osasi ratkaista kateetin  $a$  pituuden Pythagoraan lauseesta. Seitsemän kokelaasta onnistui sijoittamaan numeroarvon tuntemattomaan termiin ja näin osoittivat jonkinlaista ymmärrystä muuttujakäsitteeseen liittyen. Kahden kokelaan kohdalla ratkaisussa esiintyi merkittäviä virheitä, mutta tehtävän viidennessä kohdassa pallon säde on osattu ratkaista pallon tilavuuden kaavasta.

Virhetyyppi	Esiintyvyys (kpl)
Tehtävää ei ole osattu tai ymmärretty	57
Huolimattomuusvirhe	25
Pythagoraan lauseen ratkaisussa virhe ( $\sqrt{c^2 - b^2} = c - b$ )	11
Kerrointermi vähennetty pois yhtälöstä	10

Taulukko 13: Ratkaisussa esiintyneet virhetyypit ja näiden esiintyvyydet

$$1. v = v_0 + at$$

$$\rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$2. n = \frac{m}{M}$$

$$\rightarrow M = n \cdot m$$

$$3. E = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{2E}{m}$$

$$4. a^2 + b^2 = c^2$$

$$\rightarrow a^2 = c^2 - b^2$$

$$5. V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\rightarrow r^3 = V \cdot \frac{3}{4\pi}$$

$$r^3 = 2 \cdot \frac{4\pi}{3} = 8,37758... \approx 8,3776$$

$$r = \sqrt[3]{8,3776}$$

Kuva 38: Kokelaalla suuria puutteita yhtälönratkaisutaidoissa. Kokelas on siirtänyt mielivaltaisesti ratkaistavan termin toiselle puolelle ja muut termit toiselle.

Huolimattomuusvirheitä esiintyi 25 kokelaan ratkaisussa. Nämä kokelaat osoittavat ratkaisuisaan, että heidän ratkaisuisaan ilmeni hyviä yhtälöratkaisutaitoja, mutta heillä on esimerkiksi yhdessä tehtävän kohdassa sattunut virhe ratkaisussa. Esimerkiksi kuvassa 39 kokelas on tehtävän ensimmäisessä kohdassa jakanut yhtälön termillä  $a$ , mutta ei ole muistanut tehdä tätä jokaiselle termille.

11 kokelaalla esiintyi virhekäsitys Pythagoraan lauseen kateetin ratkaisemisessa. Kokelailla oli virhekäsitys neliöjuuren käyttöön liittyen. Kokelaat eivät ottaneet huomioon laskujärjestyksen tärkeyttä vaan he ovat tulkinneet niin, että ei ole väliä laskeeko neliöjuurten erotuksen vai erotuksen neliöjuuren eli he ovat ajatelleet, että  $\sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{c^2} - \sqrt{b^2} = c - b$ . Esimerkki tällaisesta ratkaisusta on esitettyä kuvassa 40, jossa kokelas on laskenut täysin oikein muut osat paitsi Pythagoraan lauseen.

$$\begin{aligned}
& 1. v = v_0 + at \quad | :a \\
& \frac{v}{a} = v_0 + t \\
& \frac{v}{a} - v_0 = t \\
& t = \frac{v}{a} - v_0 \\
& 2. \\
& n = \frac{m}{M} \quad | \cdot M \\
& Mn = m \quad | : n \\
& M = \frac{m}{n} \\
& 3. E = \frac{1}{2}mv^2 \quad | : \frac{1}{2}m \\
& \frac{E}{\frac{1}{2}m} = v^2 \quad | \sqrt{\phantom{x}} \\
& \sqrt{\frac{E}{\frac{1}{2}m}} = v \\
& v = \sqrt{\frac{E}{\frac{1}{2}m}} \\
& 4. a^2 + b^2 = c^2 \quad | -b^2 \\
& a^2 = c^2 - b^2 \quad | \sqrt{\phantom{x}} \\
& a = \sqrt{c^2 - b^2} \\
& 5. 2 = \frac{4\pi r^3}{3} \quad | \cdot 3 \\
& 6 = 4\pi r^3 \quad | : 4 \\
& \frac{6}{4} = \pi r^3 \quad | : \pi \\
& \frac{1.5}{\pi} = 0,47746482927568600731 \\
& 0,47746482927568600731 = r^3 \quad | \sqrt[3]{\phantom{x}} \\
& \sqrt[3]{0,47746482927568600731} = r
\end{aligned}$$

Kuva 39: Kokelaalla tapahtunut huolimattomuusvirhe tehtävän ensimmäisessä osassa. Muut osat kokelas on ratkaissut oikein.

$$\begin{aligned}
& 4. \\
& a^2 + b^2 = c^2 && \parallel -b^2 \\
& a^2 = c^2 - b^2 && \parallel \sqrt{\phantom{x}} \\
& a = \sqrt{c^2 - b^2} \\
& a = c - b \\
& \vee: a = c - b
\end{aligned}$$

Kuva 40: Kokelaalla virhekäsitys, jossa ei tunnista erotuksen neliöjuuren ja neliöjuurten erotuksen välistä eroa.

Kymmenen kokelaan kohdalla ilmeni virhekäsitys siitä miten kerrointermistä pääsee eroon yhtälönratkaisussa. Näissä tapauksissa kerrointermi on poistettu yhtälöstä vähennyslaskulla, kuten kokelas kuvassa 41. Näistä kokelaista neljällä oli myös muita merkittäviä puutteita yhtälönratkaisutaidoissa, joten taulukossa 13 heidät on laskettu kuuluvan molempiin virhetyyppisiin.

$$\begin{aligned} 1. \text{ ratkaise } t \quad & v = v_0 + at \\ ta + v_0 &= v \\ t = v - a - v_0 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ ratkaise } M \quad & n = \frac{m}{M} \\ \frac{m}{M} &= n \\ M = \frac{m}{n} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ ratkaise } v \quad & E = \frac{1}{2}mv^2 \\ v^2 m \frac{1}{2} &= E \\ v^2 = E - \frac{1}{2}m & \quad | : \sqrt{\quad} \\ v = \sqrt{E - \frac{1}{2}m} & \end{aligned}$$

Kuva 41: Kokelas poistanut kerrointermin vähennyslaskua käyttäen kohdissa 1 ja 3.

## 7 Pohdinta

### 7.1 Tutkimuksen luotettavuuden arviointi

Tutkimuksen luotettavuutta arvioidessa on tärkeää huomioida, että kutakin tehtävää tarkasteltiin sadan satunnaisesti valitun, anonyymien vastauksen pohjalta. Suuria johtopäätöksiä ei siis voida tehdä kaikkien lukion päättävien opiskelijoiden matemaattisista perustaidoista. Toisaalta lopputuloksissa esitetyillä pistejakaumien eroilla ratkaisujen kokelaiden ja kaikkien kokelaiden välillä on pyritty parantamaan sitä, kuinka hyvin ratkaisuisissa esiintyvää osaamista ja niissä esiintyviä virhetyyppejä voidaan yleistää suurempaan joukkoon.

Tässä tutkielmassa tarkasteltavien tehtävien ratkaisuisissa esiintyvien virhetyyppien määrittelyn ja luokittelun on tehnyt yksi henkilö, mikä voidaan nähdä tutkimuksen luotettavuutta heikentävänä asiana. Käsiteltäviä ratkaisuja oli runsaasti ja joidenkin kokelaiden ratkaisuisista oli vaikeaa tunnistaa erityisiä virhekäsityksiä tai virhetyyppejä. Tästä syystä jokaisen tehtävän kohdalla yhtenä virheluokkana toimii tehtävän osaamattomuus tai merkittävät puutteet tehtävän ratkaisemiseen vaadittavissa tiedoissa. Tässä erityisenä haasteena oli esimerkiksi tilanne, jossa kokelaalla on useampi virhetyyppi ja hänet olisi jopa perusteltua luokitella kyvyttömäksi ratkaista tehtävää, mutta vastaus sisältää kuitenkin myös oikeaa ymmärrystä tehtävään liittyen. Yhden henkilön subjektiivisten havaintojen pohjalta määrittämien virhetyyppien ja ratkaisujen luokittelu näihin virhetyyppeihin jättää mahdollisuuden virheiden esiintymiselle. Tätä on pyritty ehkäisemään sillä, että ratkaisuja tarkasteltiin useamman kerran, jolloin mahdollisia vääriä tulkintoja pystyttiin myös havaitsemaan ja korjaamaan.

Omaa haastettaan tuloksista tehtäviin johtopäätöksiin tuo se, että osa tehtävistä ovat valinnaisia tehtäviä ja osa kaikille pakollisia. On siis hyvin mahdollista, että tehtävän tehneiden kokelaiden osaamistaso vaihtelee pakollisten ja valinnaisten tehtävien välillä. On myös huomioitava se, että tutkielmassa käsiteltävät tehtävät ovat eri vuosilta ja sekä keväältä että syksyltä, joten kokelasjoukkokin poikkeaa toisistaan muutamien tehtävien kohdalla.

Tutkielman luotettavuutta vahvistaa muun muassa se, että tutkielmassa käsiteltiin useampaa tehtävää. Esimerkiksi geometria-aiheisia tehtäviä käsiteltiin kolmeen otteeseen, mikä osaltaan laajentaa tutkimusaineistoa esimerkiksi geometrian virhekäsityksiin liittyen. Myös prosenttilaskentaa esiintyi kolmessa tehtävässä. Yksi tehtävä painottui yhtälönratkaisutaitojen mittaamiseen, mutta yhtälönratkaisutaitoja tarvitaan myös esimerkiksi suklaarasian tilaavuden määrittämisessä. Tutkimusaineiston ratkaisut tehneet kokelaat edustavat kunkin tehtävän kohdalla monipuolisesti eri taitotason opiskelijoita ja jokaisen tehtävän ratkaisuisissa oli joukossa kokeilaita kaikista ylioppilaskirjoitusten arvosanaluokista. Tutkimusaineiston kokelailla arvosanat B, C ja M olivat yleisimpiä. Kahdessa tehtävässä arvosanan A saaneita opiskelijoita oli enemmän kuin arvosanan M saaneita opiskelijoita.

### 7.2 Tutkimustulosten tarkastelu ja pohdinta

Tässä tutkimuksessa oli tavoitteena selvittää, kuinka hyvin lukion päättävät lyhyen matematiikan opiskelijat hallitsevat matematiikan perustaitoja ja mitä virhekäsityk-

siä heillä esiintyy perustaitoja vaativien tehtävien ratkaisuisa. Virhetyypit vaihtelivat tehtäväkohtaisesti, mutta myös samoja virhetyyppejä ja virhekäsityksiä esiintyi eri tehtävien välillä. Muun muassa huolimattomuusvirheet sekä puutteelliset selitykset ja laskut esiintyivät miltein jokaisessa tehtävässä.

Geometrian perustaidot ovat ratkaisujen ja pistemäärien perusteella yleisesti kohtalaisen hyvät lukion päättävillä ylioppilaskokelailla. Toisaalta kolmion pinta-alan laskemista vaativissa tehtävissä ilmeni noin kahdeksalla prosentilla merkittäviä puutteita osaamisessa. Myös tilavuuden käsittämässä ilmeni merkittäviä puutteita, esimerkiksi maitotökin tilavuuden laskemisessa kymmenellä prosentilla kokelaista ei ollut tarvittavia taitoja tehtävän ratkaisemiseksi.

Prosenttilaskentaan liittyvien perustaitojen kohdalla tulokset vaihtelivat tehtävien välillä. Yksinkertaisten prosenttiosuuksien laskemisessa lukion päättävien opiskelijoiden taidot vaikuttavat olevan erittäin hyviä. Toisaalta tehtävässä, jossa käsiteltiin maankäytön muutosta, yli puolet kokelaista ei tunnistanut prosentin ja prosenttiyksikön eroa. Tämä olikin yleisin virhe prosenttilaskuja käsittelevistä tehtävistä.

Tarkastellaan seuraavaksi tehtäväkohtaisesti tutkimustuloksia eli mikä oli kokeilaiden yleinen osaamistaso perustaitoja vaativan tehtävän aihepiirissä ja mitä virhekäsityksiä heidän ratkaisuisaan esiintyy. Tarkastelun yhteydessä pohditaan myös virhetyypin tai virhekäsityksen syitä ja toisaalta syitä kokeilaiden hyvään tai heikkoon suoriutumiseen tehtävässä.

Kevään 2019 kokeen tehtävä 3 käsitteli kolmioiden pinta-aloja ja niiden osuuksia koko lipun pinta-alasta. Yleisesti osaamistaso oli kohtalaisen hyvä ja tehtävästä jaettujen pisteiden keskiarvo aineiston kokeilaiden keskuudessa oli 6,8. Positiivinen huomio lopputuloksissa oli, että täydet 12 pistettä oli yleisin arvosana kokeilaiden keskuudessa. Toisaalta kahdeksantoista oppilasta sai tehtävästä 0 pistettä, vaikka tehtävä kuului ylioppilaskokeen A-osioon eli se ei ollut valinnainen tehtävä. Kuitenkin enemmistöllä 0 pistettä saaneista oppilaista oli jonkinlainen ymmärrys tehtävän luonteesta, mutta virheet esimerkiksi laskuissa johtivat pisteiden puuttumiseen. Seitsemällä kokeilaalla ilmeni huomattavia puutteita geometrian perustaidossa, joka oli tässä tehtävässä kolmion pinta-alan laskeminen.

Tämän tehtävän ratkaisuisa yleisin virhetyyppi oli, että kolmion korkeusjanaa ei osattu tulkita oikein kuvasta. Tämä näkyi muun muassa siten, että kokelas oli laske-  
nut pinta-alan ottamalla laskussa käytettävän korkeuden kannan viereisestä sivusta. Tämä virhekäsitys oli mainittu myös aiemmissa tutkimuksissa (esim. Clements, Battista 1992). Kolmion pinta-aloja käsitellään viimeistään kahdeksannella luokalla, joten kokeilaan kokemukset kolmion pinta-alan laskemisesta ulottuu useamman vuoden taakse. Ottaen tämä huomioon, kolmion korkeusjanan määrittämiseen liittyvän virhekäsityksen yleisyys oli melko suuri. Yläkoululaiset sijoittuvat van Hielen tasoihin 1, 2 ja 3 (Korkatti 2016), joten hyvät geometrian perustaidot omaava lukion päättävä opiskelija voidaan sijoittaa vähintään van Hielen tasolle 3. Kokeilaat, joilla ilmeni merkittäviä haasteita kolmion pinta-alan laskemisessa, sijoittuisivat korkeintaan tasolle 2, mutta ratkaisujen vähäisten merkintöjen johdosta tarkempaa luokittelua ei pystytä tekemään.

Kohtalaisen yleisiä virheitä olivat myös mahdollisesti huolimattomuudesta johtuvat lasku- ja muotoiluvirheet. Esimerkiksi kunnolliset laskut ja selitykset puuttuivat

kolmentoista kokelaan vastauksesta. Vastaus saattoi olla oikein, mistä voidaan tehdä kevyt johtopäätös, että tehtävä on ymmärretty, mutta laskujen täydellinen puuttuminen ei tuonut pisteitä. Laskujen ja välivaiheiden kirjaamisesta muistutellaan jo matematiikan opintojen alusta lähtien, joten tämän virhetyypin yleisyys oli myös yllättävän suuri.

Kevään 2019 kokeen tehtävä 5 mittasi kokelaan taitoja kolmiulotteisen kappaleen tilavuuden laskemisessa. Tässä tehtävässä yleinen osaamistaso oli hyvää, aineiston ratkaisuihin jaettujen pisteiden keskiarvon ollessa 7,6 pistettä. Selkeästi yleisin pistemäärä tehtävästä oli täydet 12 pistettä ja tämän sai yli viidesosa sadan kokelaan otoksesta. Saman tyyppinen arvosanojen jakautuminen esiintyi myös kaikkien tehtävän tehneiden kokelaiden kohdalla.

Selkeästi yleisin virhetyppi tässä tehtävässä oli, että pyramidin tilavuutta ei osattu laskea. Suurimpana syynä tähän vaikutti olevan se, että monella pyramidin tilavuuden kaava ei ollut tiedossa, vaikka kaava olisi ollut löydettävissä kokeessa käytössä olevasta taulukkokirjasta. Useampi kokelas oli hyödyntänyt myös taulukkokirjasta löytyvää säännöllisen oktaedrin kaavaa pyramidin tilavuuden laskemiseksi.

Tehtävässä tarkasteltava perustaito eli kolmiulotteisen kappaleen tilavuuden laskeminen oli pääasiassa hyvin hallussa kokelaiden keskuudessa. Kymmenellä kokelaalla oli ratkaisun perusteella vakavia puutteita geometrian osaamisessa ja tehtävän perustaidossa eli tilavuuden laskemisessa. Tämän lisäksi kaksi kokelasta osoitti ratkaisuihinsa jonkinlaisia geometrian ymmärtämistä, mutta tilavuuden laskemiseen vaadittavat perustaidot puuttuivat heiltäkin.

Kevään 2019 kokeen tehtävä 7 mittasi kokelaan kykyjä prosenttilaskennan parissa. Tutkimusaineiston kokelaiden osaamistaso tässä tehtävässä oli todella hyvää. Pisteiden keskiarvo oli peräti 9,97 ja melkein puolet oppilaista saivat tehtävästä täydet 12 pistettä. Yleisesti kokelailla vaikuttaisi olevan erinomaiset valmiudet suorittaa tämän kaltaista prosenttilaskenta-aiheista tehtävää. Yksi syy tehtävän korkeaan tasoon voi olla toki se, että tehtävä on B-osion tehtävä eli kokelaat ovat saaneet valita tekevätkö he tämän tehtävän vai eivät. Tämä luonnollisesti saattaa karsia kokelaat, joilla ei ole välttämättä taitoja ratkaista tehtävää. Toisaalta tehtävän ratkaisujen korkean laadun osasyynä voi myös olla tehtävän teema eli rahan vaihtaminen, joka hyvin arkinen ja tunnistettava aihe.

Tehtävä on matemaattiselta luonteeltaan melko suoraviivainen prosenttilaskentatehtävä, mutta toisaalta tehtävänanto on pitkä ja se sisältää melko paljon tekstiä suhteessa laskuissa tarvittaviin numeroarvoihin. Lukihäiriö ja matemaattinen oppimisvaikeus voivat usein olla yhteydessä toisiinsa (Light, DeFries 1995), jolloin luonnollisesti tehtävän ratkaiseminen tuottaa haasteita. Toisaalta oppilalle, jolla on vain lukihäiriö eikä matemaattista oppimisvaikeutta, tehtävä on myös voinut olla haastava tehtävänannossa olevan tekstin runsauden johdosta.

Virheluokkia esiintyi tässä tehtävässä neljää eri tyyppiä. Ylivoimaisesti yleisin oli huolimattomuusvirhe, jota esiintyi kahdeksantoista kokelaan vastauksessa. Näissä vastauksissa ratkaisumenetelmät ovat täysin oikeita, mutta tehtävän aikana kokelas oli saattanut esimerkiksi huomioida lopputuloksessa aivan tehtävän alussa tehdyt valuuttojen vaihdot. Kahden kokelaan ratkaisusta ilmenee, ettei heillä ole valmiuksia tehtävän ratkaisemiseksi. Neljällä kokelaalla esiintyi erilaisia virhekesityksiä prosentin merkityksestä. Näiden kahden virhetyypin kokelailla ilmeni siis huomattavia

puutteita prosenttilaskennan perustaidoissa. Yleisesti prosenttilaskennan perustaidot ovat kuitenkin hyvin hallussa tällä kokelasjoukolla.

Kevään 2020 tehtävä 7 mittaa jälleen kokelaan kykyä ratkaista kolmiulotteisten kappaleiden tilavuuksia. Tällä kertaa kyseessä on särmiö, jonka pohja on muodoltaan säännöllinen kahdeksankulmio. Tehtävä on huomattavasti monivaiheisempi, kuin aiemmat tässä tukielmassa käsiteltävät geometrian tehtävät, mutta tämänkin tehtävän ratkaisemiseksi riittäisi matematiikan perustaitojen vahva hallitseminen.

Tämä osoittautui kokelaiden ratkaisuja tarkastellessa selkeästi vaikeaksi. Kokeilaiden pisteiden keskiarvo oli vain 3,38 pistettä ja yleisin arvosana oli 0 pistettä, jonka sai peräti 39 opiskelijaa. Näistä opiskelijoista suurimmalla osalla on kuitenkin jonkinlaista ymmärrystä tilavuuden käsitteestä. Vakavia puutteita tilavuuden laskemisen perustaidossa esiintyi kahdeksan kokelaan kohdalla.

Tämän tehtävän kohdalla on hyvä pohtia motivaation ja asenteen merkitystä ratkaisuisissa. Monivaiheiset tehtävät vaativat oppilaalta sinnikkyyttä ja määrätietoisuutta. Mikäli oppilaalla on kielteinen matikkakuva, voi hän herkemmin luovuttaa tehtävän suhteen. (Joutsenlahti 2018) Tämä tehtävä on monivaiheinen ja siten on hyvin mahdollista, että kokelas on saattanut luovuttaa kesken tehtävän tai hän ei ole edes yrittänyt nähdä vaivaa tehtävän osien ratkaisemiseksi. Monesta ratkaisusta käy ilmi, että tehtävää ollaan pyritty ratkaisemaan yhden tietyn kappaleen tilavuuden kaavan avulla, johon on sitten sijoitettu suoraan tunnettuja arvoja. Tämänkaltaista ratkaisusta voidaan tulkita, että tehtävän monivaiheisuus ei ole motivoinut kokelasta etenemään tehtävässä vaihe kerrallaan, vaan kokelas on pyrkinyt löytämään helpon ja nopean ratkaisumallin.

Erilaisia virheluokkia esiintyi tehtävässä viittä eri tyyppiä. Yleisin ongelma tehtävässä oli, että kappale ja erityisesti sen pohja oli hahmoteltu väärin. Tämä voidaan nähdä viittavan siihen, ettei näillä kokelailla ole ymmärrystä ja tuntemusta, mitä säännöllisellä kahdeksankulmiolla tarkoitetaan ja mitä ominaisuuksia sillä on. Kolmenkymmenenyhdeksän kokelaan kohdalla ratkaisussa oikeat ratkaisutavat puuttuvat kokonaan. Tässä virheluokassa ratkaisut vaihtelivat sellaisista, joissa ratkaisuyritys on miltein olematon sellaisiin, joissa yleisesti tilavuuden käsitteen hahmotamisessa ilmenee vakavia puutteita. Tässäkin tehtävässä esiintyi aiemmissa tutkimuksissa (esim. Clements, Battista 1992) mainittu kolmion pinta-alaan liittyvä virhekäsitys, jossa kolmion kannan viereisen sivun pituus tulkitaan kolmion korkeudeksi.

Syksyn 2020 tehtävä 5 käsittelee prosenttiosuuksia ja niiden muutoksia. Tässä tehtävässä yleinen osaaminen oli melko heikkoa. Tutkimusaineiston ratkaisuihin jaettujen pisteiden keskiarvo 4,2 pistettä ja yleisin pistemäärä oli 1 piste, jonka sai melkein puolet otoksen kokelaista.

Erilaisia virheluokkia esiintyi tehtävässä viittä eri tyyppiä. Yleisin virhetyyppi oli, että prosentin ja prosenttiyksikön eroa ei ole ymmärretty ja prosentin muutos ollaan rinnastettu samaksi prosenttiyksikön muutoksen kanssa. Tämä virhekäsitys esiintyi yli puolella oppilaista. Tässä tehtävässä esiintyi jälleen harmillisen paljon ratkasuja, joissa laskuja tai selityksiä ei ole kirjoitettu lainkaan auki. Vakavia puutteita prosentti-käsitteen ymmärtämisessä ja yleisesti prosenttilaskennan perustaidoissa esiintyi seitsemän kokelaan kohdalla. Huolimattomuusvirheet näkyivät muun muassa siten, että muuten oikeassa ratkaisussa saattoi jossain vaiheessa mennä prosentti

ja prosenttiyksikkö sekaisin.

Kevään 2021 tehtävä 3 käsittelee useammasta termeistä koostuvia kaavoja ja tehtävänä on ratkaista jokin termi yhtälönratkaisutaitoja hyödyntäen. Tehtävä on A-osion tehtävä eli se ei ole ollut valinnainen. Tutkimusaineiston kokelaisten yleinen osaamisen taso tässä tehtävässä on kohtalaisen heikko keskiarvon ollessa 4 pistettä. Yleisin pistemäärä oli 2 pistettä ja alle puolet kokelaista saivat tehtävästä yli 3 pistettä. Toki on huomioitavaa, että pelkillä matematiikan perustaidoilla tehtävästä olisi ollut saavutettavissa korkeintaan 10 pistettä, sillä tehtävän kuudes kohta vaatii jo syvempää matemaattista osaamista.

Virheluokkia löytyi tästä tehtävästä neljää tyyppiä, joista selkeästi yleisimmässä kokelaalla ilmeni merkittäviä puutteita taidoissa ratkaista tehtävän yhtälöitä. Tämä esiintyi yli puolella tutkimusaineiston kokelaista. Huolimattomuusvirheet olivat myös yleisiä ja niitä esiintyi neljänneksellä kokelaista. Muita virhetyyppejä olivat virhekäsitykset termien käsittelystä yhtälössä sekä ongelmat tunnistaa neliöjuurten erotuksen ja erotuksen neliöjuuren eroa ratkaistaessa tuntematonta kateettia Pythagoraan lausetta hyödyntämällä.

Tämän tehtävän kaavoissa esiintyi useampaa tuntematonta muuttujaa, joten täysin suoria johtopäätöksiä ei voida yhtälönratkasuun liittyvistä perustaidoista tehdä. Vaikka tehtävän osaaminen oli keskimäärin heikkoa ja vaikka peräti viidelläkymmenellä kokelaalla oli haasteita tehtävän osaamisessa, ei voida suoraan päätellä, että heiltä puuttuisivat yhtälönratkasuun liittyvät perustaidot kokonaan. Ratkaisuisissa esiintyi kuitenkin merkittäviä käsitteellisiä virheitä yhtälönratkaisuisissa, kuten esimerkiksi se, että kerrointermi on vähennetty pois yhtälöstä. Ratkaisuisissa korostui yleisesti muuttuja-käsitteen heikko ymmärtäminen. Tämä näkyi muun muassa siten, että kirjainten paikalle saatettiin sijoittaa numeroita tai siten, että yhtälöä osattiin käsitellä, kun se sisälsi jonkin numeroarvoisen vakion. Näiden kokelaisten ymmärryksen muoto olisi kolmannella ja neljännellä tasolla Küchemannin (1981) esittämässä mallin (taulukko 1) mukaan eli joko kirjain kuvastaa jotain konkreettista objektia tai muuttujan nähdään kuvaavan yhtä tiettyä lukua.

### 7.3 Johtopäätökset

Tutkielman tuloksista voidaan todeta, että vaikka tutkielmassa käsiteltävät matematiikan perustaidot olivat pääasiassa hyvällä tasolla kokelaisten keskuudessa, ilmeni niissä myös huomattavia puutteita ja virhekäsityksiä. Tasogeometriaan liittyvät perustaidot olivat pääasiassa hyvällä tasolla kokelaisten keskuudessa. Yleisimmät haasteet liittyivät kolmion pinta-alaan ja kolmion korkeusjanan määrittämiseen. Kolmiulotteisessa geometriassa tilavuus-käsitteen ymmärtäminen ja laskeminen oli yleisesti ottaen hyvällä tasolla, mutta pyramidin ja säännöllisen kahdeksankulmiopohjaisen särmiön tilavuuden laskemisessa taidot olivat usein puutteelliset. Prosenttilaskennan perustaidot oli lähtökohtaisesti varsin hyvät, mutta prosenttiyksikön ja prosentin ero ei yleisesti tunnistettu. Monen muuttujan yhtälöidenratkaisutaidoissa oli merkittäviä vaikeuksia enemmistöllä kokelaista, mutta perustason yhtälönratkaisutaidoista ei näiden kokelaisten kohdalla voida tehdä suurempia johtopäätöksiä.

Lukiossa matematiikka muuttuu peruskoulun matematiikkaa haastavammaksi ja opiskelijoiden oppimisen kannalta olisi erittäin tärkeää, että matematiikan perustai-

dot olisivat kunnossa. Tässä tutkielmasta saadut tulokset antavat mielenkiintoista tietoa lukion päättävien lyhyen matematiikan opiskelijoiden perustaitojen tasosta ja heillä esiintyvistä virhekäsityksistä.

Tässä tutkielmassa käsitellyt ratkaisut olivat vain murto-osa koko kokelasjoukon ratkaisuksista, joten siinä mielessä suurien johtopäätösten tekeminen voidaan nähdä haastavana. Toisaalta ratkaisujen kokelaiden pistemäärien ja kaikkien kokelaiden pistemäärien jakaumista voidaan päätellä, että ratkaisuissa ilmenevä osaamistaso kuvaa melko hyvin koko kokelasjoukkoa. Näiden perusteella voitaisiin olettaa, että samojen virhetyyppien ja virhekäsitysten suhteellinen esiintyvyysskin voisi olla suurin piirtein yhtäsuuri koko kokelasjoukolla.

Tutkimuksen tuloksia voidaan hyödyntää niin peruskoulun kuin lukion matematiikan opetuksessa ja opetuksen suunnittelussa. Tuloksia voidaan hyödyntää esimerkiksi virhekäsitysten kartoittamisessa sekä siinä, miten virhekäsitysten syntyminen voitaisiin välttää opetustilanteessa. Tutkielman aihe jättää paljon varaa myös jatkotutkimuksille. Tämän tutkielman tuloksista voi esimerkiksi olla hyötyä matematiikan opetusta ja sen kehittämistä käsittelevissä tutkimuksissa.

## Viitteet

Agbata B.C., Obeng-Denteh W., Kwabi P.A., Abraham S., Okpako S.O., Arivi S.S., Asante-Mensa F., Adu Gyamfi W.K. (2024). Everyday uses of mathematics and the roles of a mathematics teacher. *Science World Journal* Vol. 19(No 3).

Atkinson, J., Spilsbury, M., Williams, M. (1993). *The Basic Skills Needed at Work: A Directory*, Basic Skills Agency, London.

Burger, W. F., Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31–48.

Center Point Schools. Basic Math Skills: Definition, Examples and How to Improve. <https://centrepoinchools.com/blogs/basic-math-skills-definition-examples-and-how-to-improve/>

Clements, D., Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. Teoksessa Grouws, D. (toim.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: (A Project of the National Council of Teachers of Mathematics)* (s. 420–458). National Council of Teachers of Mathematics.

Fletcher, J. M., Loveland, K. A. (1986). Neuropsychology of arithmetic disabilities in children. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8, 23-40.

Geary, D. C. (2011). Cognitive Predictors of Achievement Growth in Mathematics: A 5-Year Longitudinal Study. *Developmental Psychology*.

Joutsenlahti, J., Räsänen, P., Silfverberg, H., Aro, M. (2018). *Matematiikan opetus ja oppiminen* (1. painos.). Niilo Mäki Instituutti.

Kadarisma G., Fitriani N., Amelia R. (2020). Relationship between misconception and mathematical abstraction of geometry at junior high school. *Infinity*, 9(2), 213-222.

Korkatti, Sirkku. (2016). Geometriaa laatoittamalla? Rovaniemi, Finland: Lapin yliopisto. 21–36, 41–59.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. Teoksessa K. M. Hart (toim.), Children's Understanding of Mathematics, 11–16, (s. 102-119). Lontoo.

Light, J. G., DeFries, J. C. (1995). Comorbidity of Reading and Mathematics Disabilities: Genetic and Environmental Etiologies. Journal of learning disabilities. Vol.28. 96-106

Mayberry, J. (1983). The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. Journal for Research in Mathematics Education, 14(1), 58–69.

Mursalin, M., Fonna, M., Muliana M., Ali, M., Setiawan S., Armita D. (2025). The Role of Teacher Communication in Mathematics Learning: A Literature Review. Electronic Journal of Education, Social Economics and Technology. Vol. 6, No. 1, pp. 66-75.

Ojose, B. (2015). Common misconceptions in mathematics : strategies to correct them. Lanham, Maryland: University Press of America, Inc.

Opetushallitus. (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.

Saatavilla:[https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124\\_lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2015.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf) [viitattu 9.10.2025].

Opetushallitus. (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.

Saatavilla:[https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2014.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf) [viitattu 9.10.2025].

Opetus ja kulttuuriministeriö. PISA-tutkimus ja tulokset 2022.

Saatavilla: <https://okm.fi/pisa-2022>. [Viitattu 24.11.2025].

Ryan, Julie, Williams, Julian. (2007). Children's Mathematics 4-15 Learning from Errors and Misconceptions. Maidenhead: McGraw-Hill/Open University Press.

Räsänen Pekka, Koponen Tuire. (2015). Matemaattisten oppimisvaikeuksien neuropsykologisesta tutkimuksesta. Niilo Mäki Instituutti.

Sarwadi1, Roselizawati, Shahrill, Masitah. (2014). Understanding Students' Mathematical Errors and Misconceptions: The Case of Year 11 Repeating Students. Mathematics Education Trends and Research, 1–10.

Taipale, Airi. (2009). Matematiikan, lukemisen ja kirjoittamisen vaikeuksien päällekkäistyminen nuoruusiässä. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta.

ThinkMath- tietopalvelu. Aritmeettiset perustaidot.

<https://blogs.helsinki.fi/thinkmath/tietopalvelu/matematiikka/matemaattisten-taitojen-aritmeettiset-perustaidot/>.

Welder, Rachael M. (2012). Improving Algebra Preparation: Implications From Research on Student Misconceptions and Difficulties: Improving Algebra Preparation. School science and mathematics, 255–264.

Ylioppilastutkintolautakunta. Tutkinon rakenne.

Saatavilla:<https://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/tutkinon-suorittaminen/tutkinon-rakenne>. [Viitattu 9.10.2025].

Ylioppilastutkintolautakunta. (2019). Matematiikka (lyhyt oppimäärä), kevät 2019. Saatavilla:<https://yle.fi/a/20-282706> [viitattu 9.10.2025].

Ylioppilastutkintolautakunta. (2020). Matematiikka (lyhyt oppimäärä), kevät 2020. Saatavilla:<https://yle.fi/a/20-296489> [viitattu 9.10.2025].

Ylioppilastutkintolautakunta. (2020). Matematiikka (lyhyt oppimäärä), syksy 2020. Saatavilla:<https://yle.fi/a/20-303747> [viitattu 9.10.2025].

Ylioppilastutkintolautakunta. (2020). Matematiikka (lyhyt oppimäärä), kevät 2021. Saatavilla:<https://yle.fi/a/20-308080> [viitattu 9.10.2025].