TURUN YLIOPISTO

Burnsiden Lemma

KTK Oskari Tuomela

LuK-tutkielma
Huhtikuu 2026

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

LuK-tutkielma
Pääaine: Matematiikka
Tekijä: Oskari Tuomela
Otsikko: Burnsiden Lemma
Sivumäärä: 10 sivua
Aika: Huhtikuu 2026

Tässä tutkielmassa esitellään tapa laskea toisistaan eroavien geometristen kuvioiden ja kappaleiden lukumääriä, kun huomioidaan niiden symmetrisyys. Tutkielmassa käytettyä menetelmää kutsutaan Burnsiden lemmaksi.

Tutkielmassa määritellään joukon X permutaatioryhmä sekä symmetriaryhmä ja tutkitaan kuvioiden symmetrioita sekä värityksiä. Burnsiden lemmaa varten määritellään myös väritysten stabilaattori, minkä jälkeen esitetään ja todistetaan Burnsiden lemma.

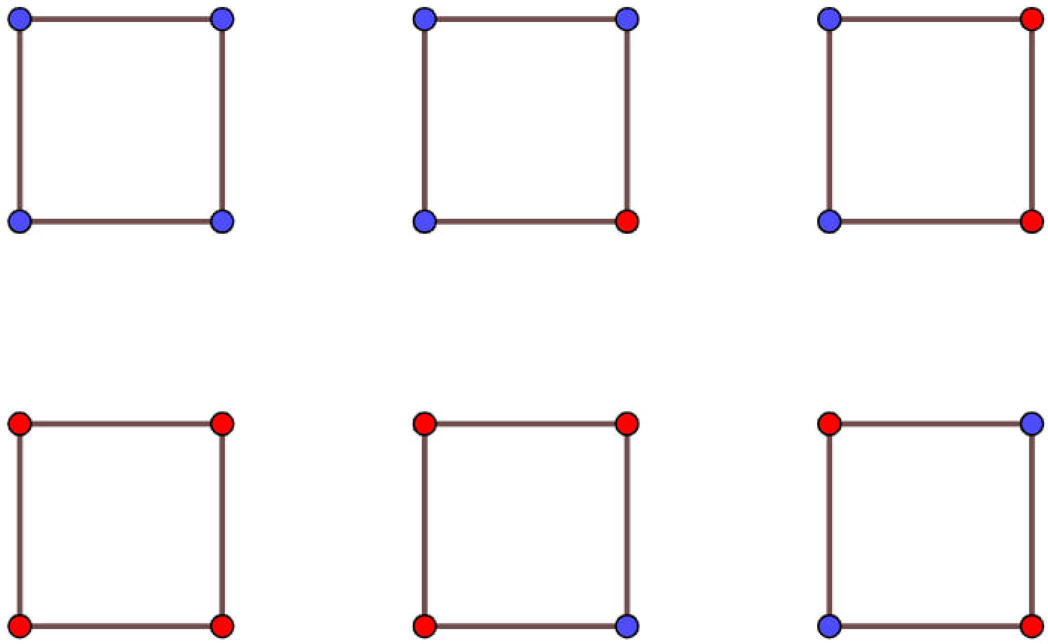
Tutkielman viimeisessä luvussa käsitellään esimerkkejä Burnsiden lemman käytöstä.

Sisällys

1 Johdanto

Oletetaan, että sinulla on neliö ja haluat värittää sen kulmat. Sinulla on käytössäsi kaksi väriä - esimerkiksi sininen ja punainen. Kuinka monta erilaista neliöä voit muodostaa? Neliössä on neljä kulmaa, joista kunkin voi värittää kahdella eri värillä, joten vastaus ongelmaan voisi olla $2^4 = 16$. Ovatko kuitenkin kaikki 16 näin muodostettua neliöä todellakin erilaisia? Jos pidämme neliön paikallaan, kaikki 16 neliöä ovat erilaisia, mutta jos sallimme neliön liikuttamisen, huomaamme, että jotkin neliöistä ovatkin keskenään samanlaisia.

Toinen tapa pohtia ongelmaa on laskea sinisten kulmien lukumäärä. Neliössä voi olla joko 0, 1, 2, 3 tai 4 sinistä kulmaa. Näin ollen voidaan päätellä, että erilaisia neliöitä on oltava vähintään viisi. On kuitenkin huomioitava, että kahden sinisen kulman tapauksessa siniset kulmat voivat olla joko vierekkäin tai vastakkain, jolloin saamme kaksi erilaista neliöä. Yhteensä erilaisia neliöitä on siis $1+1+2+1+1 = 6$ kappaletta. Erilaiset neliöt on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1: Erilaiset neliöt, kun kulmat on väritetty siniseksi tai punaiseksi.

Mikäli kaksi tai useampi neliöä saadaan toisistaan niitä liikuttamalla, sanotaan tässä tutkielmassa, että neliöt ovat toistensa kanssa *ekvivalentteja*. Muussa tapauksessa sanotaan, että neliöt *eroavat toisistaan*. Toisistaan eroavien neliöiden lukumäärä on siis sama kuin erilaisten neliöiden lukumäärä. Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä tapa laskea toisistaan eroavien neliöiden lukumäärä. Työ perustuu Richard A. Brualdin teokseen *Introductory Combinatorics* [1].

2 Permutaatioista ja symmetriaryhmistä

Olkoon X äärellinen joukko. Voidaan olettaa, että X on joukko $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ eli se koostuu ensimmäisistä n positiivisesta kokonaisluvusta. Jokainen permutaatio voidaan puolestaan nähdä bijektiivisenä kuvauksena $f : X \to X$, missä

$$f(1) = i_1, f(2) = i_2, \ldots, f(n) = i_n.$$

Tämän voi myös ilmaista $2 \times n$-matriisina

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Esimerkki Joukon $\{1, 2, 3\}$ permutaatioiden matriisiesitykset:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutaatiota, joka kuvaa jokaisen joukon X alkion itsekseen, kutsutaan identiteettipermutaatioksi $\imath$.

$$\imath = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Merkitään joukon $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kaikkien $n!$ permutaatioiden joukkoa merkinnällä S_n. Joukon X *permutaatioryhmä* määritellään epätyhjäksi permutaatioiden osajoukoksi $G \subseteq S_n$, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa:

1. Kaikille permutaatioille $f \in G$ ja $g \in G$ pätee $f \circ g \in G$.

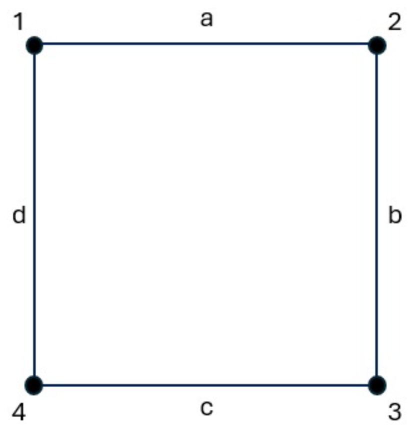
2. Ryhmän S_n identiteettipermutaatio $\imath \in G$.

3. Kaikille permutaatioille $f \in G$ myös käänteispermutaatio $f^{-1} \in G$.

Kaikista joukon $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$ permutaatioista koostuvaa joukkoa S_n kutsutaan joukon X n asteen *symmetriaryhmäksi.*

Olkoon Ω geometrinen kuvio (tai kappale). Kuviot koostuvat kulmista (tai kärjistä) ja niitä yhdistävistä sivuista (tai särmistä) ja kappaleet myös särmien rajaamista alueista, tahkoista. Kuvion Ω *symmetriaksi* kutsutaan geometrista liikettä tai yhtenevyyskuvausta, joka vie kuvion tai kappaleen Ω alkuperäisen positionsa päälle. Jokaista symmetriaa voidaan pitää kulmien, sivujen ja kolmiulotteisten kappaleiden tapauksessa tahkojen permutaatioina. Symmetrioiden peräkkäinen soveltaminen on myös symmetria, sillä kuvio tai kappale on edelleen alkuperäisellä paikallaan. Samoin symmetrian käänteissymmetria on myös symmetria. Lisäksi liike, joka pitää kappaleen paikoillaan, eli identiteettisymmetria, on symmetria. Näin voidaan päätellä, että kuvion Ω symmetriat muodostavat kulmien permutaatioryhmän G_K, sivujen permutaatioryhmän G_S sekä kolmiulotteisten kappaleiden tapauksessa tahkojen permutaatioryhmän G_T. Tästä seuraa, että joukko permutaatioita, joka sisältää kaikki kuvion symmetriat, on automaattisesti permutaatioryhmä. Näin saadut permutaatioryhmät voidaan nimetä *kulmapermutaatioryhmäksi*, *sivupermutaatioryhmäksi* ja *tahkopermutaatioryhmäksi*.

Esimerkki Tarkastellaan neliöä Ω ja merkitään sen kulmia luvuilla 1, 2, 3 ja 4, kuten kuvassa 2. Neliöllä on kahdeksan eri symmetriaa ja ne voidaan jakaa kiertoihin ja peilauksiin. Neliöä voidaan kiertää neljällä tavalla niin, että neliö päätyy täsmälleen alkuperäisen sijaintinsa päälle. Näin tapahtuu, kun neliöä kierretään keskipisteensä ympäri 0, 90, 180 tai 270 astetta. Näitä neljää symmetriaa kutsutaan kuvion Ω *tasosymmetrioiksi* eli symmetrioiksi, joissa kuvion Ω liike tapahtuu sillä tasolla, jossa kuvio Ω on. Tasosymmetriat itsessään muodostavat ryhmän. Muut kuvion Ω symmetriat ovat peilauksia vastakkaisten kulmien (1 ja 3 sekä 2 ja 4) läpi kulkevien suorien sekä vastakkaisten sivujen keskipisteiden kautta kulkevien suorien suhteen. Näissä tapauksissa liike tapahtuu avaruudessa, sillä neliö on väliaikaisesti otettava pois tasolta, jolla kuvio Ω on.



Kuva 2: Esimerkkineliö Ω.

Kierroista saamme siis neljä permutaatiota neliölle

$$\rho_4^0 = \imath = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \rho_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Merkitään τ_1 on peilaus kulmien 1 ja 3 sekä τ_2 kulmien 2 ja 4 läpi kulkevan suoran suhteen. Merkitään τ_3 on peilaus sivujen a ja c sekä τ_4 sivujen b ja d keskipisteiden läpi kulkevan suoran suhteen. Tällöin

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Täten neliön kulmasymmetriaryhmä on

$$G_K = \{\imath, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}.$$

Jos tarkastellaan sivuja a, b, c ja d, huomataan, että, kun samat neliön Ω symmetriat operoivat neliön sivuille, muodostuu neliön sivusymmetriaryhmä G_S.

Oletetaan, että on joukon X permutaatioiden ryhmä G, missä X on edelleen joukko $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ eli se koostuu n ensimmäisestä kokonaisluvusta. Joukon X *väritys* on kuvaus, jossa jokaiselle joukon X alkiolle annetaan väri. Olkoon C joukon X kaikkien väritysten kokoelma ja olkoon c joukon X väritys ja alkioiden $1, 2, \ldots, n$ värit $c(1), c(2), \ldots, c(n)$. Olkoon

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 4 \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_4 \end{pmatrix} \in G$$

joukon X permutaatio. Tällöin $f * c$ määritellään olevan väritys, jossa i_k saa värin $c(k)$ eli

$$(f * c)(i_k) = c(k), \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Eli f siirtää alkion k värin alkion i_k väriksi.

Kaikille $f \in G$ ja $c \in C$ on oltava voimassa $f * c \in C$. Tämä tarkoittaa sitä, että $f * c$ siirtää jokaisen värityksen C alkion värin jollekin värityksen C alkiolle. Operaatioiden $\circ$ (ryhmän G permutaatioiden kompositio) ja $*$ (ryhmän G permutaatioiden operoiminen värityksiin $c \in C$) välillä on perussuhde

$$(g \circ f) * c = g * (f * c). \tag{1}$$

Yhtälön vasen puoli on väritys, jossa väri k siirtyy paikkaan $(g \circ f)(k)$. Oikea puoli on puolestaan väritys, jossa väri k siirtyy alkiolle $g(f(k))$. Komposition määritelmän mukaan nämä ovat sama alkio, joten yhtälö pitää paikkansa.

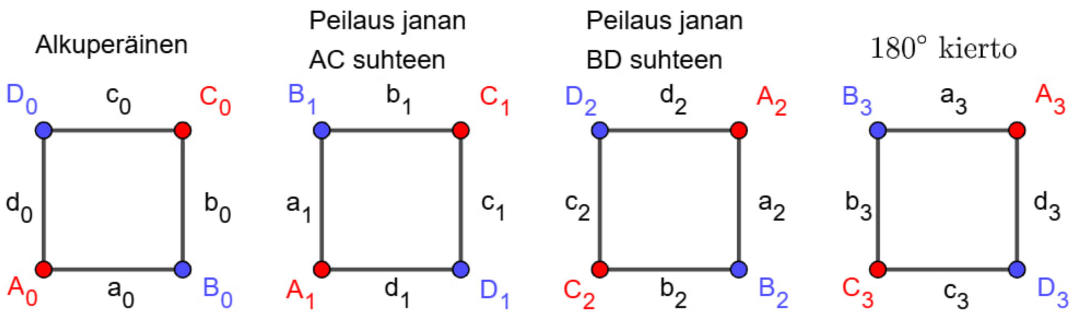
3 Burnsiden lemma

Tässä luvussa esitetään Burnsiden lemma ja annetaan esimerkkejä siitä, miten sitä käytetään joukon X toisistaan eroavien väritysten laskemiseen, kun otetaan huomioon joukon X permutaatioiden vaikutus.

Olkoon G joukon X permutaatioiden ryhmä ja C sellainen joukon X väritysten joukko, että G operoi joukossa C. Tämä tarkoittaa sitä, että G pitää väritykset joukossa C (jos se on väritysten jokin aito osajoukko). On mahdollista, että sopivilla valinnoilla

$$f * c = c. \tag{2}$$

Esimerkiksi, jos kuvassa 3 esitetyn neliön $A_0B_0C_0D_0$ kulmat A ja C väritetään punaisiksi ja kulmat B ja D sinisiksi ja peilataan neliö janan A_0C_0 suhteen, saadaan



Kuva 3: Neliön $ABCD$ peilaus janojen AC ja BD suhteen sekä 180° kierto.

neliö $A_1B_1C_1D_1$, joka on värityksiltään yhtenevä neliön $A_0B_0C_0D_0$ kanssa. Samoin käy, jos neliön peilaa janan B_0D_0 suhteen tai jos kiertää neliöä 180°. Kaikki nämä liikkeet pitävät siis neliön kulmien väritykset samana. Jos sallitaan, että yhtälössä 2 joko f käy läpi kaikki ryhmän G permutaatiot tai c käy läpi kaikki joukon C väritykset, saadaan joukko kaikista ryhmän G permutaatioista, jotka säilyttävät värityksen c

$$G(c) = \{f \in G : f * c = c\},$$

sekä joukko kaikista värityksistä C, joita f ei muuta

$$C(f) = \{c \in C : f * c = c\}.$$

Joukkoa $G(c)$, joka koostuu kaikista permutaatioista, jotka säilyttävät värityksen c, kutsutaan värityksen c *stabilaattoriksi*. Minkä tahansa värityksen stabilaattori muodostaa permutaatioryhmän.

Lause 1. *Jokaisen värityksen c stabilaattori $G(c)$ on permutaatioryhmä. Lisäksi mille tahansa permutaatiolle $f \in G$ ja $g \in G$ $g*c = f*c$, jos ja vain jos $f^{-1} \circ g \in G$.*

Todistus. Jos sekä f että g pitävät värityksen c samana, niin väritys pysyy samana myös tekemällä f ja g peräkkäin. Siis $(g \circ f)(c) = c$. Tästä seuraa, että $G(c)$ on suljettu yhdisteen $g \circ f$ suhteen. Selvästi myös identiteettikuvaus i säilyttää värityksen c. Lisäksi, jos f säilyttää värityksen c, myös f^{-1} säilyttää sen eli $f^{-1} \in G(c)$. Kaikki permutaatioryhmän edellytykset toteutuvat, joten $G(c)$ on permutaatioryhmä. Oletetaan, että $f * c = g * c$. Tällöin yhtälön (1) nojalla saadaan

$$(f^{-1} \circ g) * c = f^{-1} * (g * c) = f^{-1} * (f * c) = (f^{-1} \circ f) * c = i * c = c,$$

mistä seuraa, että $f^{-1} \circ g$ säilyttää värityksen c ja siten $f^{-1} \circ g \in G(c)$. Käänteisesti, jos $f^{-1} \circ g \in G(c)$, niin vastaavalla laskulla saadaan, $f * c = g * c$. □

Lauseen 1 seurauksena voidaan annetun värityksen c avulla laskea, kuinka monta erilaista väritystä syntyy, kun ryhmä G operoi joukossa C.

Seuraus 1. *Olkoon c joukon C väritys. Niiden väritysten lukumäärä, jotka ovat ekvivalentteja värityksen c kanssa saadaan jakamalla ryhmän G permutaatioiden lukumäärä värityksen c stabilaattorien lukumäärällä eli*

$$|\{f * c : f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}.$$

Todistus. Olkoon f permutaatio ryhmässä G. Lauseen 1 ne permutaatiot g, joille pätee $g*c = f*c$ ovat täsmälleen ne permutaatiot, jotka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\{f \circ h : h \in G(c)\}.$$

Supistamislain mukaan, jos $f \circ h = f \circ h'$, niin $h = h'$. Tästä seuraa, että joukon $f \circ h$ permutaatioiden lukumäärä on sama kuin värityksen c stabilaattorien lukumäärä $|G(c)|$. Siis jokaiselle permutaatiolle f on täsmälleen $|G(c)|$ permutaatiota, joilla on sama vaikutus väritykseen c kuin permutaatiolla f. Koska permutaatioita on yhteensä $|G|$, niiden väritysten lukumäärä, jotka ovat ekvivalentteja värityksen c kanssa on

$$|\{f * c : f \in G\}|.$$

Täten lukumäärä on

$$\frac{|G|}{|G(c)|}.$$

□

Seuraavaksi esitellään Burnsiden lemma, jolla voidaan laskea symmetria huomioon ottaen toisistaan eroavien väritysten lukumäärä.

Lause 2. *Olkoon G joukon X permutaatioryhmä ja C joukon X väritysten joukko siten, että $f * c \in C$ kaikilla $f \in G$ ja $c \in C$. Tällöin toisistaan eroavien eli epäekvivalenttien väritysten lukumäärä $N(G, C)$ saadaan kaavalla*

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |C(f)|. \tag{3}$$

Toisin sanoen, toisistaan eroavien väritysten lukumäärä on yhtä suuri kuin ryhmän G permutaatioiden samoina pitämien väritysten lukumäärien keskiarvo.

Todistus. Käydään läpi kaikki $f \in G$, lasketaan, montako väritystä f säilyttää ja lasketaan kaikki yhteen. Näin saadaan

$$\sum_{f \in G} |C(f)|,$$

sillä $C(f)$ on niiden väritysten joukko, jotka f säilyttää. Toisaalta käydään läpi kaikki $c \in C$ ja lasketaan montako permutaatiota f toteuttaa ehdon $f * c = c$ ja summataan tulokset yhteen. Jokaiselleväritykselle c näiden permutaatioiden joukko f on aiemmin määritelty stabilaattori $G(c)$. Siis jokainen väritys c tuo $|G(c)|$ permutaatiota laskettavaksi yhteen. Näin saadaan

$$\sum_{c \in C} |G(c)|$$

Molemmat laskut antoivat sellaisten parien (f, c) lukumäärän, jotka toteuttavat ehdon $f * c = c$. Siis molempien summien on oltava sama eli

$$\sum_{f \in G} |C(f)| = \sum_{c \in C} |G(c)|. \tag{4}$$

Seurauksesta 1 voidaan päätellä, että

$$|G(c)| = \frac{|G|}{\text{väritysten lukumäärä, jotka ovat ekvivalentteja värityksen } c \text{ kanssa}}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (4) saadaan

$$\sum_{c \in C} |G(c)| = |G| \sum_{c \in C} \frac{1}{\text{väritysten lukumäärä, jotka ovat ekvivalentteja värityksen } c \text{ kanssa}}.$$

Tässä esiintyvä jälkimmäinen summa voidaan sieventää, jos väritykset ryhmitellään ekvivalenssiluokittain. Tällöin, jokainen värityksen c kanssa samaan ekvivalenssiluokkaan kuuluva väritys lisää summaan

$$\frac{1}{\text{väritysten lukumäärä, jotka ovat ekvivalentteja värityksen } c \text{ kanssa}}.$$

Täten, jokainen ekvivalenssiluokka kasvattaa summan arvoa luvulla 1. Koska ekvivalenssiluokkia on yhtä monta kuin erilaisia värityksiä $N(G, C)$, saadaan

$$\sum_{c \in C} |G(c)| = N(G, C) \cdot |G|.$$

Sijoittamalla tämän yhtälöön 4 saadaan

$$\sum_{f \in G} |C(f)| = N(G, C) \cdot |G|,$$

mistä väite seuraa, kun ratkaistaan $N(G, C)$. □

4 Esimerkkejä

Tässä luvussa käydään läpi esimerkkejä Burnsiden lemman käytöstä.

4.1 Ympyräpermutaatioiden laskeminen

Esimerkki. Kuinka monella tavalla n kappaletta erilaista objektia voidaan järjestää ympyrään.

Kyseessä on sama ongelma kuin kysymyksessä "kuinka monella tavalla säännöllisen n-kulmion Ω kärjet voidaan värittää n eri värillä siten, että väritykset, jotka ovat toistensa kiertoja, lasketaan samoiksi". Olkoon C kaikkien niiden väritysten joukko, joilla monikulmion Ω voidaan värittää n eri värillä. Näitä värityksiä on yhteensä $n!$ kappaletta. Tällöin syklinen ryhmä

$$C_n = \{\rho_n^0 = \imath, \rho_n, \dots, \rho_n^{n-1}\},$$

missä ρ_n on $\frac{360}{n}$ asteen kierto, operoi joukossa C ja ympyräpermutaatioiden lukumäärä on yhtä suuri kuin niiden väritysten lukumäärä, jotka eivät ole ekvivalentteja joukossa C. Ryhmän C_n identiteettipermutaatio $\imath$ säilyttää kaikki $n!$ väritystä joukossa C. Koska kaikki kulmat on väritetty eri väreillä, mikään muu permutaatio ei säilytä väritystä. Siispä Burnsiden lemmaa käyttämällä voimme laskea eri ympyröiden lukumääräksi

$$N(C_n, C) = \frac{1}{n}(n! + 0 + 0 + \ldots + 0) = (n-1)!.$$

4.2 Erilaisten kaulakorujen laskeminen

Esimerkki. Kuinka monella tavalla n eri väristä helmeä sisältävän kaulakorun voi tehdä?

Kyseessä on lähes sama tapaus kuin edellisessä esimerkissä. Ero tulee siitä, että kaulakorun voi kääntää ympäri. Permutaatioiden ryhmäksi G on nyt valittava koko säännöllisen n-kulmion kärkisymmetrioiden ryhmä eli tässä tapauksessa G on dihedraaliryhmä D_n, jonka kertaluku on $2n$. Kuten edellisessä esimerkissä, myös tässä ainoa värityksen säilyttävä permutaatio on identiteettipermutaatio $\imath$, joka säilyttää kaikki $n!$ väritystä. Siten niiden väritysten, jotka eivät ole ekvivalentteja toistensa kanssa, lukumäärä on

$$N(D_n, C) = \frac{1}{2n}(n! + 0 + 0 + \ldots + 0) = \frac{(n-1)!}{2}.$$

4.3 Erilaisten neliöiden laskeminen

Kuvassa 3 esitettiin muutamia neliön stabilaattoreita tapauksessa, jossa vastakkaiset värit olivat samanvärisiä. Seuraavassa lähteen [1] ulkopuolisessa esimerkissä selvitetään Burnsiden lemman avulla, kuinka monta erilaista neliöä on, kun neliön kulmat voi värittää kahdella eri värillä (esim. punainen ja sininen).

Esimerkki. Monellako tavalla neliön $ABCD$ kulmat voidaan värittää väreillä punainen ja sininen, kun sallitaan peilaus janojen AC ja BD suhteen sekä 90, 180 ja 270° kierrot.

Olkoon C niiden väritysten joukko, joilla neliön $ABCD$ kulmat voidaan värittää. Koska kunkin kulman voi värittää kahdella tavalla, on värityksiä yhteensä $|C| = 2^4 =$

16 kappaletta. Symmetriaryhmä G sisältää 8 alkiota (identiteettialkio g_0, 90° kierto g_1, 180° kierto g_2, 270° kierto g_3, peilaus janan AC suhteen g_4, peilaus janan BD suhteen g_5 sekä peilaukset pysty- ja vaaka-akselin suhteen) eli $|G| = 8$. Lasketaan seuraavaksi kuinka monta väritystä kukin rotaatio säilyttää:

$g_0 = 16$ (identiteettikuvaus säilyttää kaikki väritykset),

$g_1 = 2$ (90° kierto säilyttää vain ne, joissa kaikki kulmat ovat samaa väriä),

$g_2 = 4$ (180° kierto säilyttää ne, joissa molemmat vastakkaiset kulmat ovat samaa väriä),

$g_3 = 2$ (270° kierto säilyttää vain ne, joissa kaikki kulmat ovat samaa väriä),

$g_4 = 8$ (peilaus janan AC suhteen säilyttää kaikki, joissa kulmat B ja D ovat samaa väriä),

$g_5 = 8$ (peilaus janan BD suhteen säilyttää kaikki, joissa kulmat A ja C ovat samaa väriä),

$g_6 = 4$ (peilaus pystyakselin suhteen säilyttää ne, joissa akselin vastakkaisilla puolilla olevat kulmat ovat samaa väriä),

$g_7 = 4$ (peilaus vaaka-akselin suhteen säilyttää ne, joissa akselin vastakkaisilla puolilla olevat kulmat ovat samaa väriä).

Näin ollen Burnsiden lemman perusteella värityksiä on yhteensä

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C(g)| = \frac{1}{8}(16 + 2 + 4 + 2 + 8 + 8 + 4 + 4) = 6.$$

4.4 Mitä, jos sallitaan symmetrioiden joukko, joka ei ole ryhmä?

Seuraavassa lähteen [1] ulkopuolisessa esimerkissä tutkitaan, mitä tapahtuu, jos Burnsiden lemmaa yritetään soveltaa symmetrioille, jotka eivät muodosta ryhmää.

Esimerkki. Monellako tavalla neliön $ABCD$ kulmat voidaan värittää väreillä punainen ja sininen, kun sallitaan peilaus janojen AC ja BD suhteen sekä 90, 180 ja 270° kierrot.

Olkoon C niiden väritysten joukko, joilla neliön $ABCD$ kulmat voidaan värittää. Koska kunkin kulman voi värittää kahdella tavalla, on värityksiä yhteensä $|C| = 2^4 = 16$ kappaletta. Symmetrioiden joukko G sisältää 6 alkiota (identiteettialkio g_0, 90° kierto g_1, 180° kierto g_2, 270° kierto g_3, peilaus janan AC suhteen g_4 ja peilaus janan BD suhteen g_5, peilaus pystyakselin suhteen g_7 ja peilaus vaaka-akselin suhteen g_8) eli $|G| = 8$. Lasketaan seuraavaksi kuinka monta väritystä kukin rotaatio säilyttää:

$g_0 = 16$ (identiteettikuvaus säilyttää kaikki väritykset),

$g_1 = 2$ (90° kierto säilyttää vain ne, joissa kaikki kulmat ovat samaa väriä),

$g_2 = 4$ (180° kierto säilyttää ne, joissa molemmat vastakkaiset kulmat ovat samaa väriä),

$g_3 = 2$ (270° kierto säilyttää vain ne, joissa kaikki kulmat ovat samaa väriä),

$g_4 = 8$ (peilaus janan AC suhteen säilyttää kaikki, joissa kulmat B ja D ovat samaa väriä),

$g_5 = 8$ (peilaus janan BD suhteen säilyttää kaikki, joissa kulmat A ja C ovat samaa väriä).

Näin ollen Burnsiden lemman perusteella värityksiä on yhteensä

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C(g)| = \frac{1}{6}(16 + 2 + 4 + 2 + 8 + 8) = \frac{20}{3}.$$

Tämän mukaan erilaisia neliöitä olisi $\frac{20}{3}$ kappaletta, mikä ei voi pitää paikkansa, sillä $\frac{20}{3}$ ei ole kokonaisluku. Voimme siis todeta, että jos symmetrioiden joukko ei ole ryhmä, Burnsiden lemma ei välttämättä pidä paikkansa.

4.5 Erilaisten viisikulmioiden laskeminen

Esimerkki. Monellako tavalla, jotka eivät ole toistensa kanssa ekvivalentteja, viisikulmion kulmat voidaan värittää

a) kahdella eri värillä

b) kolmella eri värillä.

a) Viisikulmion symmetriaryhmän muodostaa dihedraalinen ryhmä

$$D_5 = \{\rho_5^0 = \imath, \rho_5, \rho_5^2, \rho_5^3, \rho_5^4, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5\},$$

jossa τ_j on peilaus sellaisen suoran suhteen, joka kulkee kulman j ja sen vastaisen sivun keskikohdan läpi ja ρ_5 on $72°$ kierto. Olkoon C kaikkien $2^5 = 32$ säännöllisen viisikulmion väritysten joukko. Identiteettipermutaatio $\imath$ pitää kaikki väritykset samoina. Kaikki muut kierrot pitävät samoina ne kaksi väritystä, joissa kaikki kulmat on väritetty samalla värillä. Eli

$$|C(\rho_5^i)| = \begin{cases} 32 & \text{kun } i = 0 \\ 2 & \text{kun } i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Tarkastellaan seuraavaksi peilauksia τ_j, jotka symmetrian perusteella säilyttävät keskenään yhtä monta väritystä, joten riittää tarkastella yhtä peilausta. Esimerkiksi τ_1 säilyttää värityksen, kun sekä kulmat 2 ja 5 ovat samaa väriä että kulmat 3 ja 4 ovat samaa väriä. Sekä kulmalle 1, että kullekin kulmaparille on 2 mahdollista väritystä, joten yhteensä ehdot täyttäviä värityksiä on $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ kappaletta. Siis

$$|C(\tau_j)| = 8 \quad \text{kaikille } j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Siten Burnsiden lemman perusteella värityksiä, jotka ovat toistensa kanssa epäekvivalentteja, on

$$N(D_5, C) = \frac{1}{10}(32 + 2 + 2 + 2 + 2 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8) = 8.$$

b) Kolmen värin tapauksessa säännöllisen viisikulmion väritysten lukumäärä on $3^5 = 243$. Kuten kahden värin tapauksessa myös kolmen värin tapauksessa identiteettipermutaatio säilyttää kaikki 243 väritystä ja muut kierrot säilyttävät väritykset tapauksissa, joissa kaikki kulmat ovat samaa väriä eli kolme kappaletta. Peilaukset puolestaan säilyttävät $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ väritystä. Siten Burnsiden lemman mukaan väritysten, jotka eivät ole ekvivalentteja toistensa kanssa, lukumäärä on

$$N(D_5, C) = \frac{1}{10}(243 + 3 + 3 + 3 + 3 + 27 + 27 + 27 + 27 + 27) = 39.$$

Viitteet

[1] Richard A. Brualdi: *Introductory Combinatorics, Fifth Edition.* Pearson Prentice-Hall, 2009.