Analyyttista geometriaa GeoGebralla

Piia Muuttonen

Pro gradu -tutkielma
Maaliskuu 2012

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

MUUTTONEN, PIIA: Analyyttista geometriaa GeoGebralla
Pro gradu -tutkielma, 88 s., 24 liites., 1 liite-cd-rom.
Matematiikka
Maaliskuu 2012

GeoGebra on ilmainen, Java-pohjainen, dynaaminen matematiikkaohjelmisto, jossa geometriaan on yhdistetty algebraa, funktio-oppia sekä differentiaali- ja integraalilaskentaa. Tämän tutkielman aiheena on matematiikkaohjelma GeoGebran käyttö lukion analyyttisen geometrian opetuksessa, jonka keskeisimpiä tavoitteita on saada oppilas ymmärtämään algebrallisten ja geometristen käsitteiden välisiä yhteyksiä. Lukion analyyttisen geometrian kurssin keskeisistä aihealueista on tässä tutkielmassa valittu käsiteltäviksi piste, suora ja jana koordinaatistossa sekä pistejoukon yhtälöt. Pistejoukon yhtälöistä tarkemmin käsitellään suorien ja kartioleikkausten yhtälöitä.

Tutkielmassa esitellään GeoGebra-ohjelman käyttömahdollisuuksia analyyttisen geometrian opetuksessa ja laaditaan monipuolisia opetuskäyttöön soveltuvia dynaamisia GeoGebra-konstruktioita. Käsiteltyihin analyyttisen geometrian aiheisiin on laadittu myös harjoitustehtäviä ratkaisuineen. Kaikki GeoGebra-konstruktiot ovat vapaasti käytettävissä dynaamisina tiedostoina sekä liitteenä olevalla cd-rom-levyllä että osoitteessa https://sites.google.com/site/analyyttistageometriaageogebra/. Sähköinen materiaali on saatavilla sekä GeoGebran omassa tallennusmuodossa (.ggb) että html-muodossa. Html-tiedostot avautuvat Java-sovelluksina suoraan verkkoselaimeen, joten niiden käyttö on helppoa myös ilman erityistä GeoGebran käytön osaamista.

Asiasanat: analyyttinen geometria, GeoGebra, tietokoneavusteinen opetus.

Sisältö

1 Johdanto **1**

1.1 Matemaattiset ohjelmistot opiskelun tukena 3

1.2 Analyyttinen geometria lukio-opetuksessa 4

2 GeoGebra **7**

2.1 Johdatus GeoGebraan 7

2.2 GeoGebra-ohjelman käytön aloittaminen 12

2.2.1 Matemaattiset kaavat GeoGebra-ohjelmassa 14

3 Analyyttista geometriaa GeoGebralla **17**

3.1 Suorakulmainen koordinaatisto 17

3.1.1 Piste 17

3.1.2 Kahden pisteen välinen etäisyys 18

3.1.3 Janan keskipiste koordinaatistossa 21

3.1.4 Janan jakopisteet koordinaatistossa 23

3.1.5 Suuntakulma ja kulmakerroin 26

3.1.6 Suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus 29

3.1.7 Leikkaavien suorien välinen kulma 32

3.1.8 Kolmion pinta-ala koordinaatistossa 35

3.1.9 Monikulmion pinta-ala 39

3.2 Pistejoukon yhtälö 41

3.3 Suora 41

3.3.1 Suoran yhtälö 42

3.3.2 Suoran normaalin yhtälö 46

3.3.3 Pisteen etäisyys suorasta 48

3.4 Toisen asteen käyrät eli kartioleikkaukset 52

3.4.1 Ympyrä 54

3.4.2 Ympyrä ja suorat – tangentit, normaalit, sekantit ja napasuorat 58

3.4.3 Paraabeli 62

3.4.4 Paraabeli, akseli koordinaattiakselin suuntainen 65

3.4.5 Ellipsi 67

3.4.6 Hyperbeli 74

Kirjallisuutta **85**

A Harjoitustehtävien ratkaisut **89**

Hakemisto **111**

1 Johdanto

Tässä työssä tutkitaan, miten GeoGebra-ohjelmaa voidaan hyödyntää lukion analyyttisen geometrian kurssin opetuksessa. Tarkoitus on syventyä GeoGebra-ohjelman käyttöön niin hyvin, että sen käyttäminen tulee olemaan luonnollinen osa opetustyötä. Monissa kouluissa on luokkiin asennettu kiinteät videotykit, joiden avulla GeoGebra-ohjelmalla laadittujen esimerkkien esittäminen on helppoa. Mikäli verkkoyhteys on käytettävissä, ei GeoGebra-ohjelmaa tarvitse asentaa koneelle, vaan sitä voi käyttää suoraan verkkoselaimessa Java-sovelluksena.

Teknisten apuvälineiden, kuten tietokoneiden ja graafisten laskinten, käyttö on määritelty opetussuunnitelman perusteissa olennaisena osana matematiikan opetusta. Opetus- ja kulttuuriministeriö on päättänyt lisätä tieto- ja viestintäteknologian käyttöä lukion opetuksessa ja oppimisessa sekä oppimisen arvioinnissa. "Muutoksen toteutumiseksi koulutuksen järjestäjiä tuetaan lukioiden tieto- ja viestintäteknisten laitteiden, ohjelmistojen ja verkkoyhteyksien hankinnassa sekä teknisten tukipalvelujen järjestämisessä. Opettajien ja opiskelijoiden riittävät tieto- ja viestintäteknologiset käyttötaidot varmistetaan koulutuksella ja riittävillä tukipalveluilla." [22] Myöskin ylioppilastutkintoa uudistetaan tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäväksi.

Opetus- ja kulttuuriministeriön asettaman työryhmän laatimassa visiossa vuodelle 2020 on määritelty tavoitteeksi muun muassa seuraavat seikat: Kaikilla opettajaksi valmistuvilla on opiskeluaikana saadut hyvät perusvalmiudet hyödyntää päivittäin ajanmukaista tieto- ja viestintätekniikkaa opetus- ja muun työn tukena ja mahdollistajana. Koulutuksen parissa työskentelevällä henkilöstöllä ja opiskelijoilla on käytössään työssä ja opinnoissa tarvittava ajanmukainen tekninen laiteympäristö ja pääsy verkkoon, tarvittavat tiedot ja taidot sekä motivaatio käyttää teknologiaa pedagogisesti mielekkäällä tavalla oppimisen tukena ja muussa vuorovaikutuksessa. Opetushenkilöstön omassa ammatillisessa täydennyskoulutuksessa hyödynnetään tieto- ja viestintätekniikkaa osaamispalvelujen yksilöllisten tarpeiden huomioimisessa, alueellisen saatavuuden ja joustavan osallistumisen varmistamisessa.

Tieto- ja viestintätekniikkaa käytetään luontevasti opiskelussa sekä opetuksen ja hallinnon tukena kaikissa kouluissa ja oppilaitoksissa, kaikilla koulutuksen tasoilla. Oppimisen tukena hyödynnetään sähköisiä oppimateriaaleja ja muuta verkossa vapaasti käytettävissä olevaa aineistoa. Korkealaatuisen e-oppimateriaalin (ml. pelit ja simulaatiot) tarjonta kattaa koko opetussuunnitelman ja tutkintojen perusteet.[21] Liitutaulu ja piirtoheitin eivät siis enää voi olla ainoita opetusvälineitä, myös opetuksen on elettävä ympäröivän maailman mukana.

Materiaali on laadittu käytettäväksi pääosin apuvälineenä lukion pakollisen analyyttisen geometrian kurssin opetuksessa, mutta mukaan on lisätty myös mielenkiintoisia ongelmia ja esimerkkejä lukiotason yläpuolelta. Itseisarvoyhtälöt sekä yhtälöryhmien ratkaisut ovat olennainen osa analyyttisen geometrian kurssia, mutta niiden käsittely on rajattu tästä työstä pois. Eri oppikirjoissa analyyttisen geometrian aiheiden käsittelyjärjestykset voivat olla hyvinkin erilaisia, mutta eri aiheisiin liittyvät GeoGebra-esimerkit löytyvät helposti sisällysluettelon avulla. Tämän työn loppuun on lisätty myös hakemisto, josta on helppo löytää tietoa sekä GeoGebran ominaisuuksista että neuvoja eri työvälineiden käyttöön. Kun jotain GeoGebran toimintoa käytetään ensimmäisen kerran, sen käyttö neuvotaan perusteellisesti, mutta tämän jälkeen asia oletetaan opituksi.

GeoGebra-mallien laatimisohjeisiin ei ole myöskään lisätty kuvakaappauksia erikseen jokaisesta GeoGebra-mallin laatimisvaiheesta, vaan lukijan oletetaan pystyvän itse etsimään tarvittavat työvälineet GeoGebran valikoista. Yksi GeoGebran parhaista puolista on sen selkeys, joten työvälineidenkin etsiminen on helppoa.

Kaikkiin GeoGebra-malleihin on lisätty yksityiskohtaisia laskentakaavoja vaikka tämä vaikuttaa negatiivisesti dokumenttien ulkoasuun. On tärkeää, ettei lukiomatematiikassakaan hairahduta ”kuvastakatsomistodistuksiin”, vaan on tarkoitus, että opiskelijan täsmälliset matemaattisen ratkaisemisen taidot kehittyvät myös. Selkeänä tavoitteena on luoda yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille kuten opetussuunnitelma velvoittaa.

Pääasiallisena teorialähteenä työssä on käytetty teosta Schaums's outline series theory and problems of plane and solid analytic geometry [14], muista lähteistä on mainittu erikseen.

Kaikki työssä esitellyt GeoGebra-dokumentit on nähtävissä ja vapaasti käytettävissä dynaamisina tiedostoina osoitteessa https://sites.google.com/site/analyyttistageometriaageogebra/.

1.1 Matemaattiset ohjelmistot opiskelun tukena

Pitkän matematiikan opetuksen tavoitteena on, että opiskelija tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa. Kokeilevaan, tutkivaan toimintaan rohkaistuminen ja erityisesti ratkaisujen kriittinen arviointi ovat keskeisiä asioita. Opiskelijan tulee oppia ymmärtämään, lukemaan ja käyttämään matematiikan kieltä sekä arvostamaan matemaattisen esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä. Opiskelijan tulisi osata käyttää tarkoituksenmukaisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä. [20]

Opetussuunnitelman perusteissa ei suoraan viitata tietokoneiden käyttöön, vaikkakin jatko-opintojen ja työelämän tarpeiden takia raportointi-, laskenta- ja suunnitteluohjelmiin tutustuttamista on pidettävä välttämättömänä: Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.[10]

Laskinten käyttö kouluissa oli Suomessa 1999 huipputasolla verrattuna muuhun maailmaan. Laskinten ja tietokoneiden mahdollisuudet on otettava opetuksessa huomioon, mutta niiden ei pidä antaa aiheuttaa numerosokeutta. Ensiksi on opittava ymmärtämään laskutoimitukset, ja vasta sitten otettava koneet avuksi [17]. Graafisia laskimia on ylioppilaskirjoituksissa saanut käyttää jo pitkään ja keväästä 2012 lähtien sallitaan myös niin sanotut symboliset laskimet. Tuleva muutos mietityttää monia, ja on pohdittu muun muassa sitä, kuinka suuressa määrin siirrytään oppimaan jonkin tietyn ohjelmiston tai laskimen toimintalogiikkaa ja näppäinsarjoja itse matematiikan sijasta. [16] Laskinten rinnalla tietokone- ja älypuhelinsovellukset ovat tuoneet matemaattiset sovellukset kaikkien ulottuville.

1.2 Analyyttinen geometria lukio-opetuksessa

Analyyttinen geometria muodostaa oman, yhtenäisenä kurssina opiskeltavan, kokonaisuutensa lukio-opetuksessa. Pakollisia matematiikan pitkän oppimäärän kursseja on kaikkiaan kymmenen, joista analyyttinen geometria suoritetaan neljäntenä. Opiskelijalta oletetaan siis esitietoina funktiot ja yhtälöt-, polynomifunktiot-, sekä geometria-kurssit.

Funktiot ja yhtälöt -kurssin keskeisimpiin tavoitteisiin kuuluu yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktiokäsitteen syventäminen. Käsiteltävinä ovat potenssi-, eksponentti- ja juurifunktiot. Polynomifunktiot-kurssilla harjaannutaan käsittelemään polynomifunktioita, sekä ratkaisemaan polynomiyhtälöitä ja epäyhtälöitä. Geometrian kurssin tavoitteena on, että opiskelija harjaantuu hahmottamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa, harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita, ratkaisee geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa. [20]

Opiskelijan oletetaan siis ymmärtävän funktion käsitteen ennen analyyttisen geometrian kurssille osallistumistaan, sekä hallitsevan hyvin yhtälön ratkaisemisen periaatteet. Analyyttisen geometrian kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää kuinka analyyttinen geometria luo yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille
- ymmärtää pistejoukon yhtälön käsitteen ja oppii tutkimaan yhtälöiden avulla pisteitä, suoria, ympyröitä ja paraabeleja
- syventää itseisarvokäsitteen ymmärtämystään ja oppii ratkaisemaan

sellaisia itseisarvoyhtälöitä ja vastaavia epäyhtälöitä, jotka ovat tyyppiä $|f(x)| = a$ tai $|f(x)| = |g(x)|$

- vahvistaa yhtälöryhmän ratkaisemisen taitojaan.

Keskeisiä sisältöjä ovat

- pistejoukon yhtälö
- suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälöt
- itseisarvoyhtälön ja epäyhtälön ratkaiseminen
- yhtälöryhmän ratkaiseminen
- pisteen etäisyys suorasta. [20]

2 GeoGebra

2.1 Johdatus GeoGebraan

GeoGebra on ilmainen opetuskäyttöön tarkoitettu dynaaminen matematiikkaohjelmisto, jossa on yhdistetty geometriaan algebraa, funktio-oppia sekä differentiaali- ja integraalilaskentaa.

2000-luvun alussa GeoGebra-hanke lähti liikkeelle itävaltalaisen opiskelijan Markus Hohenwarterin opinnäytetyöstä. Hanke jatkui opetusministeriön myöntämän apurahan turvin väitöskirjaan asti. Vuonna 2006 avoin ohjelmointiympäristö salli muiden samanhenkisten tulla mukaan kehitystyöhön, ja näin kehitystyö laajeni nopeasti ympäri maailman.[29] Kansainvälinen GeoGebra-instituutti (IGI) toimii epäkaupallisena järjestönä, jossa opettajat ja tutkijat maailmanlaajuisesti toimivat yhdessä matematiikan oppimisen ja opettamisen tukemiseksi GeoGebra-ohjelmistolla. Tavoitteena on kehittää ilmaisia GeoGebra-oppimateriaaleja, tarjota koulutusta opettajille ja opettaja-opiskelijoille, kehittää GeoGebra-ohjelmistoa edelleen ja tehdä GeoGebra-ohjelmiston käyttöön liittyvää tutkimustyötä monella taholla.

Useisiin maihin on perustettu GeoGebra-instituutteja osaksi koulu- ja korkeakoulujärjestelmää. GeoGebra on siis yhteisön tukema ohjelmisto, joka jatkaa kehittymistään.[18] Myös Suomi on ollut mukana kehitystyössä jo vuodesta 2006 alkaen. Vuonna 2010 suomeen perustettiin GeoGebra-instituutti joka toimii suomalaisen GeoGebra-verkoston puitteissa. Se tekee yhteistyötä opetushallituksen ja matemaattisten aineiden opettajien liiton kanssa. Suomen GeoGebra-instituutin päätavoiteena on kääntää suomen kielelle GeoGebra-ohjelmaa sekä GeoGebraan liittyviä verkkosivuja ja käyttöohjeita. Tavoitteena on myös lisätä GeoGebra-ohjelman käyttöä suomalaisissa kouluissa [28].

Suomen GeoGebra-instituutti on myös yhteistyössä matemaattisten aineiden opettajien liiton, MAOL:n, e-kerhon kanssa järjestänyt mm. verkkokurssin, jolla on perehdytetty suomalaisten lukioiden ja yläkoulujen matematiikan aineenopettajia GeoGebran peruskäyttöön. Kurssimateriaalina oli Hohenwaterien suomeksi käännetty kirja Johdanto GeoGebraan [10], jossa harjoitellaan mm. GeoGebran perustyövälineiden käyttöä, kuvien lisäämistä ja tiedostojen tallentamista. Kirja on saatavissa osoitteesta http://geogebra.fi/artikkelit/JohdantoGeoGebraan.pdf, ja kurssin materiaaleihin voi tutustua osoitteessa http://avoinmedia.net/maolmoodle/course/view.php?id=28. Kurssille osallistuneet opettajat pitivät kurssia erittäin hyödyllisenä ja monet myös jatkoivat koulutusta omissa kouluissaan. [15]

Vastaavalla kurssilla on saatu innostumaan myös alakoulun opettajia: Aluksi useilla opettajilla oli kielteinen asenne GeoGebra-verkkokurssiin, mikä voi johtua aikaisemmista hankaluuksista ohjelman käytössä. Kuitenkin tehokkaan ohjaamisen avulla lähes kaikki opettajat olivat lopuksi sitä mieltä, että GeoGebra on mielekäs opetusväline, ja jopa 80% aikoo jatkaa sen käyttöä. [4] Opettajien koulutuksessa tulee ottaa huomioon, että opettajat eivät usein itse ole oppineet matematiikkaa teknologian avulla. Kun opettajille annetaan mahdollisuus kokeilla teknologian avulla opiskelemista – mihin heillä ei välttämättä ole ollut tilaisuutta opiskelijoina – he voivat ymmärtää dynaamisen oppimisympäristön arvon myös oppilaidensa kannalta [26].

GeoGebra-ohjelma sopii erinomaisesti kouluopetukseen, sillä ohjelma on täysin ilmainen ja sitä on mahdollista käyttää asentamatta ohjelmaa tietokoneelle. Oppilaiden on samasta syystä helppoa käyttää ohjelmaa myös kotitietokoneella. GeoGebran voi kuka tahansa ladata osoitteesta http://www.geogebra.org/cms/fi/download (suomenkielinen sivu). Mikäli verkkoyhteyttä ei ole aina käytettävissä, voi GeoGebra-ohjelman ladata myös Portable-versiona verkosta esimerkiksi muistitikulle. Portable-version käyttö mahdollistaa GeoGebran käytön ilman verkkoyhteyttä, ja asentamatta mitään käytettävälle tietokoneelle. Portable-version voi ladata osoitteesta http://www.geogebra.org/cms/fi/portable.

Suomalaisissa kouluissa opetusmateriaalin on oltava suomen- tai ruotsinkielistä. Myöskin opetuskäytössä olevissa tietokoneohjelmissa on suomen-tai ruotsinkielisyys suuri etu. Matemaattisten käsitteiden hallinta on usein kyllin hankalaa jo omalla äidinkielellä, saati sitten jos samat käsitteet pitäisi hallita peruskoulu- tai lukiotasolla myös englanniksi. GeoGebra-ohjelmaa voi käyttää 43:lla eri kielellä ja kieltä voi helposti vaihtaa milloin tahansa ohjelman käytön aikana. Tästä voi olla hyötyä monikulttuurisessa opetustilanteessa.

Erilaisia opetusmenetelmiä ja opetusvälineitä tutkitaan aktiivisesti, tavoitteena opetuksen jatkuva kehitys ja oppimistulosten paraneminen. Myös GeoGebran käyttöä opetuksen apuvälineenä on laajasti tutkittu. Tutkimusmenetelmänä on usein vertaileva tutkimus perinteisten opetusmenetelmien ja GeoGebra-avusteisen opetuksen välillä. Yleensä tutkimuksessa on kaksi eri ryhmää; toiselle ryhmälle opetetaan sama asia perinteisin menetelmin ja toiselle ryhmälle GeoGebra-avusteisesti. GeoGebra-avusteinen opetus voidaan toteuttaa joko opettajajohtoisesti niin, että opettaja opettaa uuden teorian dynaamisen GeoGebra-mallin avulla, tai niin, että oppilaat saavat opiskella asian esimerkiksi tietokoneluokassa hyvän GeoGebra-opetusmateriaalin avulla. Oppimista vertaillaan esitietotestillä, jonka avulla selvitetään ovatko opiskelijaryhmän olennaisesti eri tasoilla ennen tutkittavan asian opetusta, sekä yhdellä tai useammalla testillä opetuksen jälkeen. Useissa tutkimuksissa tultu siihen tulokseen, että GeoGebran käyttö opetuksessa parantaa oppimistuloksia perinteiseen opetukseen verrattuna. [1, 3, 4, 6, 18, 12, 23, 24, 25, 31]

GeoGebran hyötynä ei ole se, että se itsessään tekisi opetuksesta jotenkin erilaista, vaan lähinnä tuo opetukseen erilaisia tasoja[25] ja auttaa näin myös paremmin kiinnittämään oppilaan huomion opetettavaan aiheeseen.[24] Dalen oppimiskartioteorian mukaan ihminen muistaa vain 10% siitä mitä lukee, 20% siitä mitä kuulee, ja niin edelleen. Mitä useammalla eri tasolla opetettavaa asiaa esitetään, ja mitä useammalla tasolla oppilas on itse mukana prosessissa, sitä parempia oppimistulokset ovat. Analyyttisen geometrian kurssin tavoitteena on, että oppilas ymmärtää geometristen ja algebrallisten käsitteiden välisen yhteyden [20], joten erityisesti analyyttisessa geometriassa GeoGebran kaltaisen ohjelmiston käyttö on perusteltua. Pelkkä kuvien ja kuvioiden näyttäminen ei ole riittävää, kun tarkoituksena on kannustaa oppilaita visualisoimaan ja käyttämään erilaisia esitystapoja matemaattisessa mallintamisessa.[7] Erityisesti sellaisten oppilaiden, joiden avaruudellinen hahmotuskyky on keskimääräistä heikompi, GeoGebra-avusteinen opetus tuottaa selvästi parempia oppimistuloksia kuin perinteinen opetus. [23]

Nykyinen opiskelijasukupolvi, joka on varttunut kehittyvän teknologian parissa, haluaa oppia asioita näkemällä ja kokeilemalla. Jos käytössä on hyvä oppimateriaali, oppilas pystyy oman tekemisen kautta oppimaan asioita itse, ja opettajan työksi jää olla asiantuntevana ohjaajana tarpeen mukaan. Tämäntyyppiseen oppimiseen GeoGebra on hyvä työkalu, erityisesti analyyttisessa geometriassa, jossa visuaalisuus on olennainen seikka.[12] Perinteisillä menetelmillä kuvioiden, kappaleiden ja kuvaajien piirtäminen vie luokkaopetuksessa paljon aikaa, mutta GeoGebraa käytettäessä oppilaalle jää enemmän aikaa kokonaisuuksien hahmottamiseen.

Teknologisten sovellusten käyttö tuo opetukseen myös haasteensa. Oppilailla on taipumusta luottaa teknologiaan, kun heidän pitäisi tulkita erilaisia matemaattisia esityksiä, mikä voi haitata matemaattista kehitystä.[7] Dynaamisten geometria-ohjelmistojen käyttö voi haitata myös matemaattisen todistamisen käsitteen ymmärtämistä. Koska oppilailla on taipumusta käyttää ennemmin kokeellisia tuloksia kuin deduktiivista päättelyä matemaattisten väitteiden osoittamiseen, voi olla, että dynaaminen oppimisympäristö ei edistä ollenkaan vaan pikemminkin haittaa matemaattisen todistamisen arvostusta. Pelkästään perinteisten staattisten kuvien vaihtaminen dynaamiseen muotoon GeoGebran avulla ei helpota oikeiden käsitteiden muodostumista. Teknologiaa tulisi käyttää yhdessä geometrisen konstruktioprosessin ja väitteen todeksi osoittamisen kanssa ja näin johdattaa formaalin matemaattiseen todistamiseen. [2] GeoGebran monipuolisista ominaisuuksista saa parhaan hyödyn, jos opettajalla on syvä ja kokonaisvaltainen opetettavan asian tuntemus [26].

Opettajan kannalta GeoGebran käytöstä on hyötyä myös erinomaisena matemaattisten kuvien laatimisohjelmistona. Kokeisiin ja harjoitustehtävämonisteisiin voi laatia kuvat GeoGebra-ohjelmalla ja liittää ne sitten esimerkiksi word-tiedostoon. Liittäminen onnistuu valitsemalla GeoGebrassa *Muokkaa -> Kopioi piirtoalue leikepöydälle (Ctrl+Shift+C),* ja kohdeohjelmassa Liitä (Ctrl+v) ilman, että kuvia tarvitse edikseen tallentaa tietokoneen muistiin. Pienempien testien laatiminen onnistuu suoraan GeoGebralla, tiedostomuodoksi voi valita esimerkiksi käytännöllisen pdf:n.

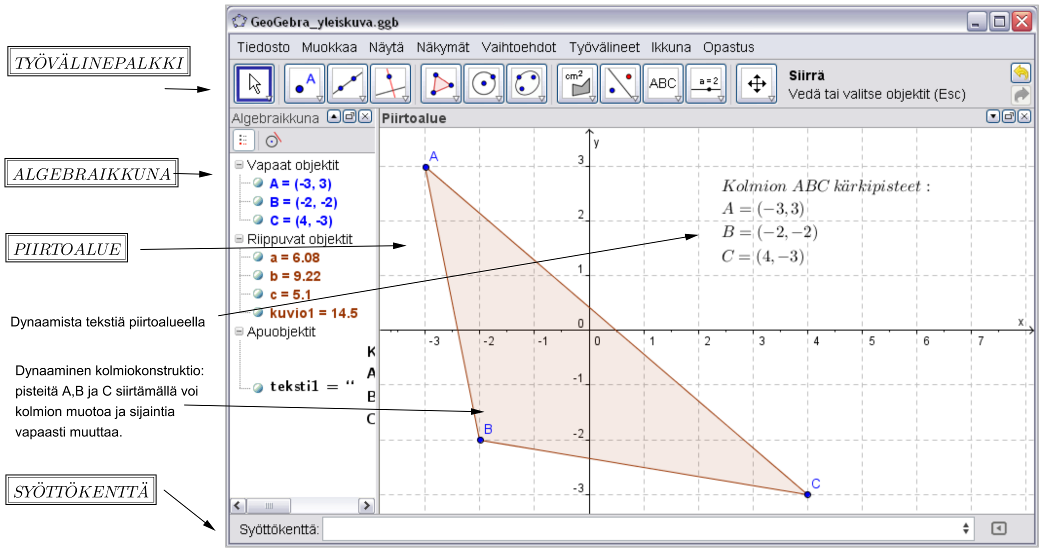
Tähän työhön on kaikki kuvat laadittu GeoGebra-ohjelmalla. Ainoastaan kuvassa 1 oleva kuvaruutukaappaus on pitänyt ensin tallentaa toisella ohjelmalla ennen jälkikäsittelyä GeoGebralla.

2.2 GeoGebra-ohjelman käytön aloittaminen

GeoGebra-ohjelman käyttöön on laadittu paljon oppaita joissa esitellään selkeästi kaikki GeoGebran ominaisuudet, työvälineet, valikot ja erikoistoiminnot. Tämän työn tarkoituksena on tutkia ja esitellä ohjelman käyttöä analyyttisen geometrian opetuksessa, joten GeoGebra-ohjelman ominaisuuksia esitellään ainoastaan tarvittavin osin. Kiinnostuneille suosittelen tutustumista hyvään suomeksi käännettyyn GeoGebra-oppaaseen *Virallinen käsikirja 3.2* joka on saatavissa pdf-muodossa osoitteesta www.http://www.geogebra.org/help/docufi.pdf. Aakkostetun sisällysluettelon avulla tiedon etsiminen on helppoa ja nopeaa. Lyhyempi suomenkielinen GeoGebra-ohje löytyy pdf-muodossa osoitteesta http://www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_fi.pdf. Mainitut oppaat on kirjoitettu versiolle 3.2, joten valitettavasti kaikkia GeoGebra 4.0 toimintoja ei oppaissa ole. Peruskäytön opetteluun ne soveltuvat kuitenkin hyvin.

Kuvassa 1 on näkymä GeoGebra-ikkunasta. GeoGebrassa piirtämiseen tarkoitetut työvälineet ovat *työvälinepalkiksi* kutsutussa *työvälinelaatikoiden* kokoelmassa GeoGebra-ikkunan yläreunassa. Jokainen työvälinepalkin ikoni edustaa *työvälinelaatikkoa*, jonka alareunassa olevaa pientä kolmiota klikkaamalla saa auki alasvetovalikon josta löytyvät kaikki laatikon työvälineet. Työvälinepalkkiin jää näkyviin kussakin työvälinelaatikossa viimeksi käytössä olleen työvälineen kuva, jota klikkaamalla sama työväline on helppo ottaa uudestaan käyttöön työvälinelaatikkoa avaamatta.

Kun jokin työväline on valittuna, neuvoo GeoGebra automaattisesti työvälinepalkin oikealla puolella olevassa ruudussa työvälineen oikeaan käyttöön. Esimerkiksi *Suora kahden pisteen kautta* -työvälineen ohje neuvoo: *"Valitse kaksi pistettä"*. Tällöin on piirtoalueella oltava joko kaksi pistettä joita vuoron perään klikkaamalla ohjelma piirtää näiden kautta suoran tai jos piirtoaluetta klikkaa kahdessa mielivaltaisessa kohdassa, GeoGebra piirtää sekä pisteet että niiden kautta kulkevan suoran. Jos työvälineen lyhyt käyttöohje ei ohjeista tarpeeksi hyvin, pääsee ohjetta klikkaamalla



Kuva 1: GeoGebra-ikkuna.

online-ohjeeseen jossa on yksityiskohtaisemmat neuvot työvälineen käyttöön. Valitettavasti online-ohjeet ovat tällä hetkellä saatavina ainoastaan englannin kielellä.

Piirretyn *objektin* voi piilottaa klikkaamalla *algebraikkunassa*, joksi siis kutsutaan piirtoalueen vasemmalla puolella olevaa ruutua, *objektin* edessä olevan vaaleansinisen ympyrän valkoiseksi. Toinen vaihtoehto on klikata objektia hiiren oikealla painikkeella ja poistaa avautuvasta valikosta valinta *Näytä objekti*. Objektia voi muokata tai sen voi poistaa valikosta, jonka saa auki joko klikkaamalla hiiren oikeaa painiketta objektin päällä tai kaksoisklikkaamalla objektia piirto- tai algebraikkunassa. Objektin poistaminen onnistuu myös klikkaamalla poistettavaa objektia hiirellä, ja painamalla tietokoneen näppäimistöllä Delete-näppäintä. Valikon alimmaisena on *Ominaisuudet*, josta saa avattua *Ominaisuudet*-ikkunan jossa voi muokata objektin ominaisuuksia. Muokattavat ominaisuudet riippuvat siitä minkälainen objekti on kyseessä. *Ominaisuudet*-ikkunan vasemmassa reunassa on lista kaikista dokumentin objekteista, joten usean objektin muokkaaminen ja ominaisuuksien selaaminen on helppoa. Esimerkiksi jos dokumentissa on useita eri kulmia, voidaan *Ominaisuudet*-ikkunassa valita kaikki kulmat kerralla klikkaamalla vasemmassa reunassa olevasta listasta sanaa *Kulma*. Jos on tärkeää, että kahdesta mahdollisesta kulmasta valitaan aina pienempi, poistamalla valinta *Salli kupera kulma* *Perusominaisuudet*-välilehdellä, niin saadaan kyseinen ominaisuus muokattua kaikille kulmille yhtäaikaisesti.

2.2.1 Matemaattiset kaavat GeoGebra-ohjelmassa

Matemaattisia kaavoja voidaan lisätä piirto-alueelle käyttämällä *Lisää teksti* -työvälinettä. Kaavat ladotaan LaTeX-kielellä, jonka käytön aloittaminen vaatii sen käyttöön aiemmin perehtymättömältä käyttäjältä hieman opettelemista. Tekstin lisäys -ruudussa on hyvin kattava valikoima valmiita LaTeX-kaavoja ja -symboleja, jotka saa helposti valittua alasvetovalikosta klikkaamalla. Esimerkiksi luvun $\sqrt{5}$ saa kirjoitettua kun valitaan *LaTeX-kaava* -valikosta *Juuret ja murtoluvut* ja edelleen $\sqrt{x}$, ja sitten *Muokkaa*-ruudussa korvataan kirjain x kaavasta `\sqrt{x}` numerolla 5. Kun LaTeX-kaava -ruudussa on rasti, niin tekstinsyöttöruudun alapuolella olevassa *esikatselu*-ruudussa voi seurata virheettömien LaTeX-kaavojen kirjoitusta sellaisessa muodossa, jossa ne tulevat olemaan valmiissa tekstissä.

LaTeX-kielestä enemmän kiinnostuneille suosittelen tutustumista suomenkieliseen oppaaseen: Pitkänpuoleinen johdanto LaTeX2e:n käyttöön [19]. Verkosta löytyy myös loistava englanninkielinen LaTeX-opas, josta on helppoa löytää vinkkejä vaikkapa yksittäisten komentojen käyttöön. Verkko-opas, joka on tarvittaessa saatavina myös pdf-muodossa, löytyy osoitteesta http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX [27].

Objektit-alasvetovalikosta voi kaavoihin lisätä olemassa olevia objekteja. Dynaamisen objektin erottaa muusta tekstistä siitä, että sen ympärillä on siniset "kehykset". Klikkaamalla hiiren oikeanpuoleista painiketta kehyksen päällä voi valita haluaako näkyviin objektin *arvon* vai *määritelmän*. Esimerkiksi jos objektina on piste $A = (1, 2)$, voi valita, näkyykö tekstissä tai kaavassa pisteen koordinaatit $(1, 2)$ vai pisteen nimi A. Objekteja voi lisätä kaavoihin myös kirjoittamalla objektin nimen syöttökenttään. Tällöin ns. tavallinen teksti on erotettava dynaamisesta tekstistä lainausmerkein.

Joskus on tarpeen käyttää kaavassa tai tekstissä koko objektin sijaan jotain tiettyä objektin osaa, esimerkiksi pisteen A sijaan vain sen x-koordinaattia. Tällöin ei objektin lisääminen listasta onnistu, vaan on kirjoitettava $x(A)$, tai esimerkiksi laskettaessa pisteiden A ja B x-koordinaattien erotusta $(x(A) - x(B))$. Mikäli laskutoimituksen haluaa näkyviin, on vähennysmerkki on erotettava dynaamisesta tekstistä lainausmerkein. Laskun vastauksineen voi siis kirjoittaa näkyviin komennolla x(A)"-" x(B) "=" (x(A)-x(B)). Huom! Dynaamiset laskut kirjoitetaan sulkuihin.

Dynaamista tekstiä, esimerkiksi tiettyjä kaavan osia, voi myös halutessaan korostaa eri värein. Esimerkiksi, jos piste $A = (1, 2)$ on GeoGebramallissa punainen, voi LaTeX-kaavassa myös kirjoittaa punaisella pisteen nimen ja koordinaatit. Näin geometriset ja algebralliset käsitteet saadaan myös visuaalisesti yhdistettyä. Värin lisäämiseen on olemassa komento `\textcolor{Color}{text}`. Haluttu väri syötetään sanan 'Color' paikalle, ja värilliseksi haluttu teksti jälkimmäisiin kaarisulkeisiin. Esimerkiksi lauseessa `"Piste\; \textcolor{Red}{A="A"}"` on sana piste oletusvärillä, ja teksti $A = (1, 2)$ punaisella.

Monet ovat tottuneet käyttämään hiirellä tuttua kolmen toiminnon – maalaa, kopioi/leikkaa, liitä – sarjaa. Valitettavasti tämä ei toimi GeoGebraan kaavoja kirjoitettaessa, mutta näppäinyhdistelmillä Ctrl+x (leikkaa), Ctrl+c (kopioi) ja Ctrl+v (liitä) nämäkin toiminnot onnistuvat.

Tässä työssä on selvyyden vuoksi kirjoitettu LaTeX-kielellä kirjoitettavat komennot `kirjoituskonekirjasimella`, ja GeoGebraan liittyvät toiminnot *vinolla kirjasimella*. GeoGebran komennot, esimerkiksi *syöttökenttään* tai *näkyvyysehtoihin* kirjoitettavat komennot, on kirjoitettu **lihavoidulla fontilla**.

3 Analyyttista geometriaa GeoGebralla

3.1 Suorakulmainen koordinaatisto

Tason suorakulmaisessa koordinaatistossa vaakasuora x-akseli ja sitä vastaan kohtisuorassa oleva y-akseli jakavat tason neljään osaan. Koordinaattiakselien leikkauskohtaa kutsutaan origoksi. Jos tason koordinaatistoon lisätään vielä sekä x- että y-akselia kohtisuorassa oleva, origon kautta kulkeva z-akseli saadaan kolmiulotteinen avaruuskoordinaatisto.

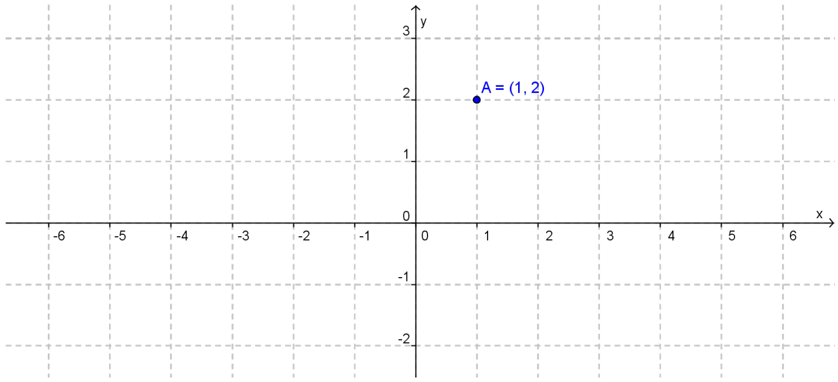
GeoGebra-ohjelmassa on automaattisesti koordinaatisto näkyvissä heti ohjelman käynnistyttyä. Koordinaatistoon voidaan lisätä helposti myös koordinaattiruudusto valitsemalla *Näytä*-valikosta vaihtoehto *Koordinaattiruudusto*. Samassa valikossa onnistuu myös koko koordinaatiston piilottaminen, mikäli tarpeen. Koordinaatiston ominaisuuksia voidaan muokata valikossa *Vaihtoehdot -> Asetukset -> Piirtoalue*. Voi olla tarpeen esimerkiksi asettaa näkyviin koordinaattiakselien nimet ja mahdolliset yksiköt.

Oletuskoordinaatistona on karteesinen eli suorakulmainen koordinaatisto, mutta vaihtoehtoisesti voi valita isometrisen koordinaatiston tai napakoordinaatiston. Tässä työssä käsitellään ainoastaan suorakulmaista, eli karteesista koordinaatistoa.

3.1.1 Piste

Määritelmä 3.1. Piste on geometriassa yksinkertaisin objekti, jolla on sijainti mutta ei pituutta, pinta-alaa, tilavuutta tai muutakaan mitattavaa ominaisuutta. Koordinaatistossa minkä tahansa pisteen sijainti voidaan yksikäsitteisesti määrittää. Tason suorakulmaisessa koordinaatistossa pisteen etäisyyttä y-akselista kutsutaan x-koordinaatiksi, ja etäisyyttä x-akselista y-koordinaatiksi. Nämä koordinaatit määrittelevät pisteen (x, y).

GeoGebra-ohjelmassa on automaattisesti koordinaatisto näkyvissä heti ohjelman käynnistyttyä. Pisteiden piirtämisen helpottamiseksi voidaan koor-



Kuva 2: Piste A=(1,2) koordinaatistossa.

dinaatistoon lisätä helposti myös koordinaattiruudusto valitsemalla *Näytä*-valikosta vaihtoehto *Koordinaattiruudusto*. Samassa valikossa onnistuu myös koko koordinaatiston piilottaminen, mikäli tarpeen.

Mielivaltaisen pisteen voi piirtää piirtoalueelle valitsemalla työvälinepalkin toisesta työvälinelaatikosta työvälineen *Uusi piste*. Hiiren ollessa piirtoalueella, voidaan pisteen paikkaa havainnollistaa jos piirtoalueen asetuksista (*Vaihtoehdot* -> *Asetukset* -> *Piirtoalue*) valitaan "Näytä kohdistin koordinaatit". Tällöin hiiren osoittimen vieressä näkyy osoittimen koordinaatit muodossa (x, y). Piirtoaluetta klikkaamalla pisteen saa piirrettyä haluamaansa paikkaan koordinaatistossa. Toinen vaihtoehto piirtää piste on kirjoittaa pisteen koordinaatit *Syöttökenttään*, esim $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$. GeoGebra nimeää pisteet automaattisesti isoilla kirjaimilla aakkosjärjestyksessä. Kuvassa 2 piste $(1, 2)$ on näin ollen nimetty kirjaimella A.

Harjoitustehtävä 1. *Piirrä koordinaatistoon pisteet* $A = (4, 2)$, $B = (3, 3)$, $C = (2, 3)$, $D = (1, 2)$, $E = (1, 1)$, $F = (2, -1)$, $G = (4, -3)$, $H = (6, -1)$, $I = (7, 1)$, $J = (7, 2)$, $K = (6, 3)$ *ja* $L = (5, 3)$. *Yhdistä pisteet järjestyksessä. Mikä kuvio syntyy?*

3.1.2 Kahden pisteen välinen etäisyys

Määritelmä 3.2. Olkoon tasossa pisteet $A = (x_A, y_A)$ ja $B = (x_B, y_B)$. Pythagoraan lauseesta seuraa, että pisteiden A ja B välinen etäisyys d saadaan laskemalla

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

GeoGebra-ohjelmalla kahden pisteen etäisyyttä tasossa on helppo havainnollistaa piirtämällä kaksi pistettä, esim. pisteet A ja B, sekä käyttämällä tämän jälkeen *Etäisyys tai pituus* -työvälinettä. Klikkaamalla pisteitä vuoron perään ohjelma luo piirtoalueelle objektin, joka ilmoittaa pisteiden välisen etäisyyden muodossa $\overline{AB}$. Tämän jälkeen pisteitä voi siirtää vapaasti piirtoalueella, jolloin myös etäisyys muuttuu. Etäisyyttä ilmoittavan objektin voi siirtää mihin tahansa kohtaan piirtoalueella klikkaamalla sitä hiiren oikealla painikkeella ja valitsemalla *Todellinen paikka näytöllä.* Muuten pisteitä siirrettäessä tekstiobjekti liikkuu mukana. Pisteiden välimatkaa voi myös havainnollistaa yhdistämällä pisteet janalla käyttäen *Kahden pisteen välinen jana* -työvälinettä.

Piirtoalueelle voi luoda näkyviin LaTeX-kaavan *Lisää teksti* -työvälineellä. Kaavaan saa sisällytettyä pisteiden koordinaattien arvot dynaamisina objekteina, ja onkin hyödyllistä kirjoittaa sellainen kaava missä lähdetään liikkeelle yleisestä kaavasta ja lisätään välivaiheissa objektien – tässä tapauksessa pisteen koordinaattien – arvoja ennen lopullista vastausta. *Muokkaa*-ruutuun kirjoitetaan kaava LaTeX-muodossa seuraavasti:

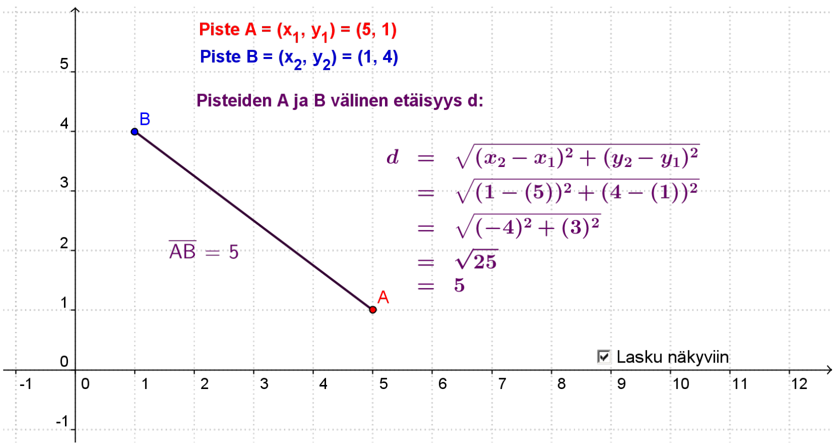
```
"\begin{eqnarray}
d&=& \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\
&=&\sqrt{(" x(B) "-(" x(A) "))^2+(" y(B) "-(" y(A) "))^2} \\
&=&\sqrt{("(x(B) - x(A)) ")^2 + ( " (y(B) - y(A)) ")^2} \\
&=&\sqrt{ "((x(B) - x(A))^2+(y(B) - y(A))^2)"} \\
&=& " etäisyysAB "
\end{eqnarray}"
```

Pitkät, useita välivaiheita sisältävät kaavat, kuten tässä, on selkeintä esittää käyttäen LaTeX:in `eqnarray`-ympäristöä. Komento `\begin{eqnarray}` aloittaa taulukon, jossa on kolme saraketta: yhtälön vasen puoli, '='-merkki ja yhtälön oikea puoli. Sarakkeet erotetaan &-merkillä, ja merkki \\ tarkoittaa rivinvaihtoa. Komento `\end{eqnarray}` taas päättää taulukon.

Teksti on erotettava dynaamisista objekteista (etäisyysAB, x(A) ja x(B)) lainausmerkein. Tässä koordinaattien $x(A)$ ja $y(A)$ ympärille on myös lisätty sulut, jotta koordinaattien saadessa negatiivisia arvoja vältetään $(2 - -3)^2$-tyyppiset merkinnät.

Lisää teksti -työvälineellä voi lisätä piirtoalueelle useita aiheeseen liittyviä selventäviä tekstejä. Opetuskäyttöön laadittaviin malleihin kannattaa osa laskuista asettaa niin, etteivät ne ole heti näkyvissä, vaan otettavissa esille vasta, kun opiskelija on ensin saanut mahdollisuuden miettiä tilannetta itse. Tähän tarkoitukseen soveltuu erinomaisesti työväline *Luo näytä/piilota-valintaruutu*. Klikataan haluttua sijaintia piirtoalueella, kirjoitetaan *Teksti*-ruutuun piirtoalueella näkyviin haluttava teksti, tässä esimerkissä **Lasku näkyviin**, ja valitaan sitten alasvetovalikosta objekti tai objektit joka halutaan näyttää/piilottaa.

Näin on saatu valmiiksi dynaaminen GeoGebra-tiedosto, jossa kahden pisteen etäisyyttä voi tutkia siirtämällä pisteitä A ja B mielivaltaisesti koordinaatistossa. Kuvassa 3 on malli valmiista GeoGebra-tiedostosta.



Kuva 3: Kahden pisteen välinen etäisyys.

Harjoitustehtävä 2. *Laske pisteiden* $(5, 1)$ *ja* $(1, 4)$ *välinen etäisyys.*

3.1.3 Janan keskipiste koordinaatistossa

Määritelmä 3.3. (Janan keskipiste) Pisteiden $A = (x_A, y_A)$ ja $B = (x_B, y_B)$ välisen janan keskipiste $C = (x_C, y_C)$ jakaa janan $\overline{AB}$ kahteen yhtä pitkään osaan.

Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla voidaan osoittaa, että janan keskipisteen C koordinaatit ovat sen päätepisteiden koordinaattien keskiarvot, eli

$$C = (x_C, y_C) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Piirretään GeoGebralla jana $\overline{AB}$ *Kahden pisteen välinen jana* -työvälineellä. Tämän jälkeen piirretään janan $\overline{AB}$ keskipiste C valitsemalla työväline *Keskipiste*, ja klikkaamalla tämän jälkeen pisteitä A ja B. Pisteestä C tulee päätepisteistä A ja B riippuva objekti, eli jos pisteiden A tai B koordinaatteja muutetaan, niin myös pisteen C koordinaatit muuttuvat.

Suorakulmaisen apukolmion ADC piirtämiseksi tarvitaan ensin pisteen A kautta kulkeva y-akselin normaali sekä pisteen C kautta kulkeva x-akselin normaali. Nämä saa piirrettyä työvälineellä *Normaali* klikkaamalla ensin pistettä jonka kautta normaali piirretään ja tämän jälkeen koordinaattiakselia jonka normaali halutaan. Toinen vaihtoehto olisi käyttää *Yhdensuuntainen*-työvälinettä päinvastaisille akseleille.

Apupisteen D saa nyt piirrettyä käyttäen työvälinettä *Kahden objektin leikkauspiste* klikkaamalla juuri piirrettyjen normaalien leikkauspistettä. Tämän jälkeen molemmat normaalit kannattaa piilottaa kuvan sekavuuden välttämiseksi klikkaamalla hiiren oikeaa painiketta normaalin kohdalla ja poistamalla valinta *Näytä objekti*. Apukolmion ADC saa nyt piirrettyä työvälineellä *Monikulmio* klikkaamalla kärkipisteitä järjestyksessä A,C,D,A. Vastaavalla tavalla piirretään myös apukolmiot CEB ja AFB. Muokataan vielä kolmioiden ääriviivat katkoviivaksi, jotta ne selkeämmin erottuvat varsinaisesta objektista. Tämä onnistuu *Ominaisuudet*-ikkunan *Objektin tyyli* -välilehdellä.

Jotta olisi selkeämpää, että kolmiot ADC, CEB ja AFB todellakin ovat suorakulmaisia, piirretään *Kulma*-työvälineellä näkyviin suorat kulmat $\measuredangle ADC$, $\measuredangle CEB$ ja $\measuredangle AFB$ klikkaamalla pisteitä C, D, A; B, E, C ja B, F, A tässä järjestyksessä. GeoGebra muuttaa automaattisesti kaarevan kulmamerkinnän neliöksi kun kyseessä on suora kulma. *Ominaisuudet*-ikkunassa poistetaan valinta kohdasta *Salli kupera kulma*, jotta janaa käännellessä kulma saa arvon 90° eikä 270°. Tekstit 90° kannattaa piilottaa sekavuuden välttämiseksi klikkaamalla algebraikkunassa hiiren oikeaa painiketta tekstien 90° päällä ja poistamalla valinta *Näytä nimi*.

Kolmioiden yhdenmuotoisuus- ja yhtenevyyslauseet sekä samankohtaisten kulmien yhtäsuuruusehdot oletetaan tunnetuksi geometrian kurssilta, joten niihin ei puututa tässä enempää. GeoGebrassa on hyödyllinen työväline *Kahden objektin välinen suhde*, jonka avulla voidaan tarkistaa numeerisesti ovatko kuviot yhtenevät klikkaamalla peräkkäin kolmiota ADC ja CEB. Koska kolmiot ovat yhtenevät niin GeoGebra ilmoittaa *"Kolmiot ovat samat"*. Valitettavasti yhdenmuotoisia mutta epäyhteneviä kolmioita GeoGebra ei tunnista.

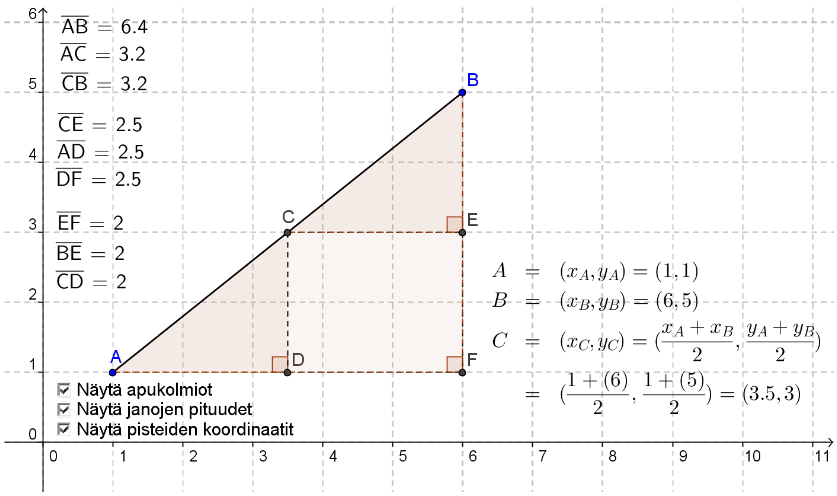
Yhdenmuotoisuuden havainnollistamiseksi kannattaa apukolmioihin lisätä janojen pituudet. Jotta pituudet saadaan muodossa $\overline{AC} = 5$ eikä pelkkänä lukuna 5, täytyy kolmioiden sivut määritellä ensin janoiksi *Kahden pisteen välinen jana* -työkalulla. Kuvion turhan sekavuuden välttämiseksi kannattaa tekstit taas siirtää esimerkiksi piirtoalueen reunaan ja luoda *näytä/piilota-valintaruutu* kuten edellisessä kappaleessa 3.1.2 jolloin pituudet saadaan näkyviin vain tarvittaessa.

Tämän jälkeen luodaan vielä valintaruutu jolla saadaan apukolmiot piilotettua. Lisää piilotettavien objektien listaan kaikki muut objektit, paitsi pisteet A, B ja C sekä $jana[A, B]$. Piilotettavien objektien listalle tulee siis myös *Looginen arvo* $\boldsymbol{o}$, joka tarkoittaa tässä GeoGebra-mallissa janojen pituuksien piilottamiseksi luotua *näytä/piilota-valintaruutua.*

Pisteiden A, B ja C koordinaatit laskukaavoineen saadaan lisättyä piirtoalueelle *Lisää teksti* -työvälineellä. Laskukaavassa kannattaa lisätä sulut x_B- ja y_B-koordinaattien arvojen ympärille jotta laskun ulkoasu pysyy asiallisena myös silloin kun koordinaatin arvo on negatiivinen. Toinen vaihtoehto olisi määrittää eri näkyvyysehdoin kullekin tapaukselle eri tekstit. Kuten edellisessä kappaleessa 3.1.2 todettiin, niin dynaamiset objektit tulee erottaa muusta tekstistä lainausmerkein. Tässä yksi LaTeX-kaavamalli:

```
"\begin{eqnarray}
A&= &( x_A , y_A )=("x(A)","y(A)") \\
B&= &( x_B , y_B )=("x(B)","y(B)") \\
C&= &( x_C , y_C )=(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})\\
 &= &(\frac{"x(A)"+("x(B)")}{2},\frac{"y(A)"+("y(B)")}{2})
  =("x(C)","y(C)")
  \end{eqnarray}"
```

Kuvassa 4 nähdään valmis GeoGebra-malli, jolla voidaan havainnollistaa janan keskipisteen ja päätepisteiden välistä yhteyttä koordinaatistossa.



Kuva 4: Janan $\overline{AB}$ keskipiste C.

3.1.4 Janan jakopisteet koordinaatistossa

Janan keskipisteen lisäksi voidaan yhdenmuotoisten kolmioiden avulla määrittää myös minkä tahansa janalla $\overline{AB}$ olevan pisteen C koordinaatit.

Määritelmä 3.4. (Jakopiste) Janan $\overline{AB}$ pituus on sama kuin kahden pisteen, A ja B, etäisyys. Mielivaltainen piste $C = (x_C, y_C)$ janalla $\overline{AB}$ jakaa janan kahteen osaan. Tällöin janojen $\overline{AC}$ ja $\overline{CB}$ pituuksien suhde on $r = \frac{|AC|}{|CB|}$. Jos piste C on janan $\overline{AB}$ keskipiste, se jakaa janan $\overline{AB}$ kahteen yhtä suureen osaan ja tällöin $r = 1$.

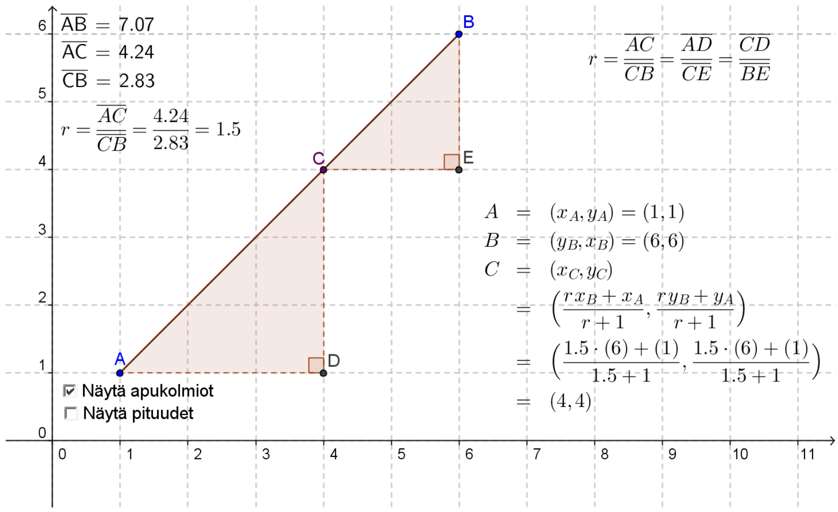
Pisteen C koordinaatit voidaan määrittää yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Käytetään kuvassa 5 näkyviä merkintöjä.

Nyt $\frac{\overline{AD}}{\overline{CE}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r$. Tästä saadaan ratkaistua

$$\begin{aligned} \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} &= r \\ x_C - x_A &= rx_B - rx_C \\ x_C(1+r) &= rx_B + x_A \\ x_C &= \frac{rx_B + x_A}{r+1}. \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$y_C = \frac{ry_B + y_A}{r+1}.$$



Kuva 5: Piste C jakaa janan $\overline{AB}$ suhteessa r.

Kun $r = 1$, on kyseessä janan keskipiste ja kaavat yksinkertaistuvat edellisestä kappaleesta tuttuun muotoon

$$x_C = \frac{x_B + x_A}{2} \text{ ja } y_C = \frac{y_B + y_A}{2}.$$

Piirretään GeoGebralla ensin mielivaltainen jana $\overline{AB}$. Mielivaltaisen pisteen C janalle $\overline{AB}$ saa valitsemalla työvälineen *Piste objektilla* ja klikkaamalla tämän jälkeen janaa $\overline{AB}$. Pistettä C voi tämän jälkeen siirtää vapaasti janalla $\overline{AB}$. Havainnollistavat apukolmiot ja janojen pituudet lisätään aivan samalla tavalla kuin edellisessä kappaleessa 3.1.3 janan keskipisteen yhteydessä.

Kolmiot ADC ja CEB ovat yhdenmuotoiset ja niiden vastinsivujen suhde r vakio. Kolmiot ovat yhtenevät ainoastaan silloin kun piste C on janan $\overline{AB}$ keskipiste.

Lisätään *Lisää teksti* -työvälineellä piirtoalueelle teksti $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}$. Suhteen r todellisen arvon saa kirjoittamalla *syöttökenttään* **etäisyysAC/etäisyysCB** ja painamalla "enter". Nyt piirtoalueelle ei ilmesty mitään, vaan *algebraikkunaan* syntyy uusi *riippumaton objekti* g, joka on nyt suhde r. LaTeX-kaavassa käytetään pituuksia $\overline{AD}$ ja $\overline{CE}$ sekä suhteen arvoa g dynaamisina objekteina seuraavasti:

```
  "\begin{eqnarray}
A&=&(x_A,y_A)= ("x(A)","y(A)") \\
B&=&(y_B,x_B)= ("x(B)","x(B)") \\
C&=&( x_C , y_C ) \\
&=&\Big(\frac{r\,x_B+x_A}{r+1},\frac{r\,y_B+y_A}{r+1}\Big)\\
&=&\Big(\frac{"g"\cdot("x(B)")+("x(A)")}{"g"+1} ,
   \frac{"g"\cdot("y(B)")+("y(A)")}{"g"+1}\Big)\\
&=&("x(C)","y(C)")
\end{eqnarray}
```

Huomaa, että tavallinen teksti on taas erotettava dynaamisista objekteista lainausmerkein. Koska koordinaattien arvot voivat olla myös negatiivisia, on parasta laittaa sulkeet sellaisten koordinaattien arvojen ympärille joita edeltää jokin laskutoimitussymboli. Painoteknisistä syistä kaava pisteen C koordinaattien määrittämiseen on jaettu kahdelle riville. GeoGebraan kaavaa kirjoitettaessa tämä ei ole välttämätöntä.

Huom! Piste C voi sijaita myös janan $\overline{AB}$ jatkeella. Tällöin sen koordinaattien laskemiseen pätee sama laskukaava kuin janalla sijaitsevan pisteen koordinaattien laskemiseen. Tässä laadittu GeoGebra-malli ei toimi jos piste C sijaitsee janan jatkeella, mutta mallin voi helposti muokata tilanteeseen sopivaksi käyttämällä janan $\overline{AB}$ sijaan pisteiden A ja B kautta kulkevaa suoraa. Suoran saa piirrettyä *Suora kahden pisteen kautta* -työvälineellä.

Harjoitustehtävä 3. *Kolmion ABC mediaanit leikkaavat toisensa kolmion painopisteessä $P = (x, y)$, jonka etäisyys on 2/3 mistä tahansa kolmion kärjestä kärjen vastakkaisen sivun keskipisteeseen. Määritä pisteen P koordinaatit, kun $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ ja $C = (x_C, y_C)$. [14]*

3.1.5 Suuntakulma ja kulmakerroin

Määritelmä 3.5 (Suuntakulma)**.** Suoran suuntakulma on suoran ja x-akselin positiivisen suunnan välinen terävä tai suora kulma.

Suuntakulma on positiivinen x-akselin yläpuolella, ja negatiivinen x-akselin alapuolella. Mikäli suora on yhdensuuntainen x-akselin kanssa, niin suuntakulma on $0°$.

Merkitään suuntakulmaa kreikkalaisella kirjaimella θ (theeta). Suuntakulmalle θ on voimassa ehto $-90° < \theta \leq 90°$. Radiaaneissa vastaavasti $-\pi < \theta \leq \pi$.

Määritelmä 3.6 (Kulmakerroin)**.** Suoran kulmakerroin k on suoran suuntakulman θ tangentti, $k = \tan\theta$, $\theta \neq 90°$. Pisteiden $A = (x_A, y_A)$ ja $B = (x_B, y_B)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \tan\theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad \text{kun } x_B \neq x_A.$$

Pystysuoran, eli y-akselin suuntaisen suoran, kulmakerrointa ei ole määritelty.

GeoGebralla kahden pisteen välinen suora a saadaan piirrettyä *Suora kahden pisteen kautta* -työvälineellä klikkaamalla piirtoaluetta halutuissa kahdessa pisteessä. Muodostuneita pisteitä A ja B liikuttamalla voidaan suoraa liikuttaa vapaasti piirtoalueella. Oletetaan ensin, että $x_A < x_B$. Suuntakulma saadaan näkyviin *Kulma*-työvälineellä klikkaamalla ensin suuntakulman oikeaa kylkeä ja sitten vasenta. Toisena kylkenä on nyt määritelmän mukaisesti x-akseli ja toisena suora a. Koska suuntakulman θ on määritelty saavan vain arvoja $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$, niin määritellään *Kulma*-objektille *näyttämisehto.* Tämä tapahtuu *Ominaisuudet*-ikkunassa, kun valitaan välilehti *Erikoista* ja *Objektin näyttämisehto* -ruutuun kirjoitetaan $\alpha < \mathbf{90}^\circ$. Erikoismerkit saadaan valittua valikosta, joka aukeaa painamalla kirjoitusruudun oikeassa reunassa olevaa $\boxed{\alpha}$-kuvaketta. Vastaavasti määritellään toinen mahdollinen suuntakulma β kääntämällä suora ensin oikeaan asentoon.

Tapauksessa $x_A > x_B$ kulmat täytyy määritellä toisella tavalla, sillä GeoGebra pystyy määrittämään automaattisesti suoran ja x-akselin välisen kuperan kulman vain yhdellä tavalla. Nyt tarvitaan kulman kärkipiste, eli x-akselin ja suoran leikkauspiste. Sen saa määritettyä *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä. Lisäksi piirretään *Piste objektilla* -työvälineellä piste D kulman oikealle kyljelle. Piste on piirrettävä tarpeeksi kauas. Kulma γ saadaan nyt määriteltyä työvälineellä *Kulma: koko annetaan* klikkaamalla ensin pisteitä D ja C tässä järjestyksessä, ja sitten syöttämällä automaattisesti avautuvaan ikkunaan $\mathbf{180}^\circ - \alpha$. Piirtoalueelle ilmestyy nyt myös piste D' jota tarvitaan viimeisen kulman määrittelyyn. Käännetään ensin suora oikeaan asentoon ja piirretään sitten viimeinen kulma $\delta = D'CD$ työvälineellä *Kulma* klikkaamalla pisteitä tässä järjestyksessä. Kaikille kulmille on määritettävä näyttämisehto $< 90^\circ$.

Koska GeoGebrassa kaikki kulmat ovat positiivisia, voidaan negatiiviset suuntakulmat erottaa positiivisista suuntakulmista esimerkiksi valitsemalla niille eri värit. Tämä onnistuu *Ominaisuudet*-ikkunan *Väri*-välilehdellä. Tässä GeoGebra-mallissa on positiiviset kulmat määritelty punaisella ja negatiiviset sinisellä.

Kulmien tyyliksi kannattaa valita sellainen kulmamerkintä $\sphericalangle$, joka korostaa kulmien yhtäsuuruutta. Tämä onnistuu *Ominaisuudet*-ikkunan *Koristelu*-välilehdellä.

Seuraavaksi piilotetaan objektit C, D ja D' sekä piirretään suorakulmainen apukolmio AEB kuten kappaleessa 3.1.3. Merkitään kolmioon näkyviin kulma $\theta = EAB$, joka on yhtä suuri kuin suoran suuntakulma.

Suoran kulmakertoimen määrittämiselle on GeoGebrassa oma työvälineensä, *Kulmakerroin*, mutta sitä käytettäessä GeoGebra muodostaa itse oman apukolmion jossa x-akselin suuntaisen kateetin pituus on vakio, 1. Koska on tärkeää, että oppilas oppii laskemaan minkä tahansa suoran kulmakertoimen kun kaksi suoran pistettä tunnetaan, määritellään kulmakerroin itse apukolmiosta AEB.

Koska GeoGebra ei tunne negatiivisia kulman arvoja, laaditaan kaksi erillistä kaavatekstiä ja muokataan niiden näkyvyysehdoksi suoran kulmakerroin. Kulmakerroin saadaan määritettyä valitsemalla *Kulmakerroin*-työväline ja klikkaamalla suoraa. Koska kulmakertoimen arvoa tarvitaan ainoastaan näkyvyysehtojen määrittelyyn, piilotetaan se näkyvistä. Selkeyden vuoksi nimetään kulmakerroinobjekti uudelleen kirjaimella k.

Dynaamista kulman θ arvoa ei saa kirjoitettua kaavatekstiin suoraan, vaan se on lisättävä GeoGebran *Objektit*-valikosta. Alla olevassa tekstissä on merkitty ***:llä kohdat, jotka on korvattava kulman θ arvolla. Tämän tekstin näkyvyysehdoksi määritellään $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$.

```
"\begin{eqnarray}
A&=&(x_A,y_A)=("x(A)","y(A)") \\
B&=&(x_B,y_B)=("x(B)","y(B)") \\
\theta&=& ***\\
k&=& \Bigg\{ \begin{array} {ll}
  \tan{\theta}= \tan{***}= "(y(B)-y(A))/(x(B)-x(A))"\\
  \frac{\Delta y}{\Delta x}= \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=
\frac{"y(B)"-("y(A)")}{"x(B)"-("x(A)")}
   =\frac{"(y(B)-y(A))"}{"(x(B)-x(A))"}
            ="(y(B)-y(A))/(x(B)-x(A))"
\end{array}
\end{eqnarray}"
```

Toisen tekstin näkyvyysehdoksi määritellään $\mathbf{k} < \mathbf{0}$. Teksti on muuten samanlainen, mutta rivit 4–6 korvataan seuraavasti:

```
\theta&=& -***\\
k&=& \Bigg\{ \begin{array} {ll}
\tan{\theta}= \tan{(-***)}= "(y(B)-y(A))/(x(B)-x(A))"\\
```

Edelleen jos kuvaaja on pystysuora jolle kulmakerrointa ei ole määritelty, lisätään näkyvyysehdolla $\mathbf{x}(\mathbf{A}) = \mathbf{x}(\mathbf{B})$ seuraava teksti:

```
"\begin{eqnarray}
A&=&(x_A,y_A)=("x(A)","y(A)") \\
B&=&(x_B,y_B)=("x(B)","y(B)")\\
\theta&=& 90^{\circ}\\
\end{eqnarray}"
```

Olennainen suoran ominaisuus on myös se onko suora nouseva, laskeva vai vaakasuora. Lisätään vielä piirtoalueelle tekstit jotka kertovat sanallisesti mistä tapauksesta on kyse. Matemaattisen esityksen selvyyden vuoksi ilmoitetaan nyt kulmakertoimen arvo murtolukuna. Kun *syöttökenttään* syötetään **Murtolukuteksti**[**k**], GeoGebra luo piirtoalueelle objektin joka kertoo kulmakertoimen arvon murtolukuna. Piilotetaan objekti, mutta käytetään sen arvoa LaTeX-kaavoissa kuten alla olevassa taulukossa. Selkeyden vuoksi kulmakertoimen ilmoittava objekti on nimetty uudelleen nimellä ”KKfrac”.

Teksti	Näkyvyysehto
`’’\textrm{Suora on nouseva, } k=’’KKfrac’’ >0’’`	k>0
`’’\textrm{Suora on laskeva, } k=’’KKfrac’’ <0’’`	k<0
`\textrm{Suora on vaakasuora, k=0}`	k>0
`\textrm{Suora on pystysuora, k ei määritelty}`	x(A)=x(B)

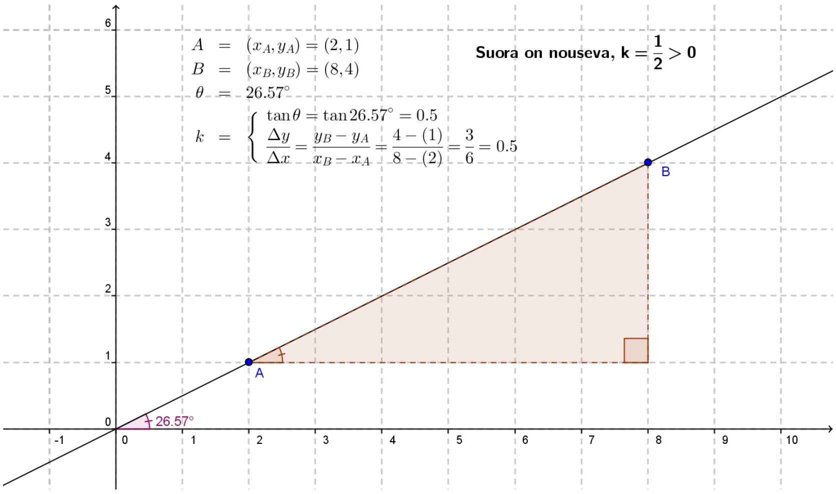
3.1.6 Suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus

Määritelmä 3.7 (Suorien yhdensuuntaisuus)**.** Suorat a ja b ovat yhdensuuntaiset jos niiden kulmakertoimet k_a ja k_b ovat samat tai jos molemmat suorat ovat y-akselin suuntaiset, eli

$$a||b \Leftrightarrow k_a = k_b.$$

Määritelmä 3.8 (Suorien kohtisuoruus)**.** Suorat a ja c ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan jos niiden kulmakertoimien tulo $k_a \cdot k_c = -1$ tai jos suorat ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

$$a \perp c \Leftrightarrow k_a \cdot k_c = -1.$$



Kuva 6: Kahden pisteen kautta kulkevan suoran suuntakulma ja kulmakerroin.

Suoraa, joka on kohtisuorassa annettua suoraa vastaan, sanotaan suoran normaaliksi.

Konstruoidaan GeoGebra-malli, jolla voidaan tutkia samanaikaisesti suoria a, b ja c. Ensin piirretään suora a työvälineellä *Suora kahden pisteen kautta*, jolloin piirtoalueelle muodostuvat myös riippumattomat pisteet A ja B. Tämän jälkeen piirretään suoran a kanssa yhdensuuntainen suora b *Yhdensuuntainen*-työvälineellä klikkaamalla ensin mielivaltaista kohtaa piirtoalueella ja tämän jälkeen suoraa a, jolloin piirtoalueelle muodostuu yhdensuuntaisen suoran b lisäksi myös riippumaton piste C. Sitten piirretään vielä *Normaali*-työvälineellä suora c klikkaamalla ensin piirtoaluetta mielivaltaisessa kohdassa ja tämän jälkeen suoraa a, jolloin piirtoalueelle muodostuu kohtisuoran suoran c lisäksi myös riippumaton piste D. Nyt myös suorat b ja c ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Valitaan vielä kaikille suorille *Näytä nimi*.

Määritellään sitten kulmakertoimet kullekin suoralle käyttäen *Kulmakerroin*-työvälinettä. Suoria klikkaamalla GeoGebra muodostaa itse apukolmion kullekin suoralle. Myöhemmin määriteltäviä kaavoja varten kulmakertoimet kannattaa nimetä uudelleen nimillä k_a, k_b ja k_c. Alaindeksin saa kirjoittamalla edeltäväksi merkiksi alaviivan, esimerkiksi k_a kirjoitetaan k_a. Jos alaindeksiin kirjoitetaan useita merkkejä, on käytettävä aaltosulkeita. Esimerkiksi k_{ab} kirjoitetaan k_{ab}. Kulmakertoimen laskemiseen on perehdytty aiemmin kappaleessa 3.1.5.

GeoGebra antaa kulmakertoimen arvoksi desimaaliluvun, vaikka murtolukumuoto olisi joissain tapauksissa selkeämpi. Kun *syöttökenttään* syötetään **Murtolukuteksti**[**k_a**], GeoGebra luo piirtoalueelle objektin joka kertoo kulmakertoimen k_a arvon murtolukuna. Nimeä objekti uudelleen nimellä "kk_a". Määrittele vastaavasti murtolukumuodot suorien b ja c kulmakertoimille. Tämän jälkeen piilota murtolukuobjektit piirtoalueelta.

Dynaaminen teksti kirjoitetaan LaTeX-kaavana seuraavasti:

```
"\begin{array}{rclcc}
k_a&=&"kk_a"="k_a"\\
k_b&=&"kk_b"="k_b"=k_a&\Rightarrow &a&||&b\\
k_c&=&"kk_c"="k_c"=-\frac{1}{k_a}\\
k_a\cdot k_c&=&"kk_a"\cdot\bigg("kk_c"\bigg)
=-1&\Rightarrow & a\bot c\\
k_b\cdot k_c&=&"kk_b"\cdot\bigg("kk_c"\bigg)
=-1&\Rightarrow & b\bot c\\
\end{array}"
```

Tässä LaTeX:in `array`-ympäristö on vastaava kuin aiemmin käsitelty `eqnarray`, mutta sarakkeiden lukumäärän voi määritellä itse. Komennon argumentit `rclcc` kertovat, että taulukossa on viisi saraketta, joissa teksti on tasattu oikealle (r), keskelle (c) tai vasemmalle (l).

Kulmakerrointa ei ole määritelty, kun suora on y-akselin suuntainen, joten tekstiobjektin näkyvyysehdoksi pitää määrittää $(\mathbf{x}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{x}(\mathbf{B})) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{y}(\mathbf{B}))$. Y-akselin suuntaisia suoria varten määritellään vielä näkyvyysehdolla $(\mathbf{x}(\mathbf{A}) = \mathbf{x}(\mathbf{B})) \vee (\mathbf{y}(\mathbf{A}) = \mathbf{y}(\mathbf{B}))$ seuraava teksti:

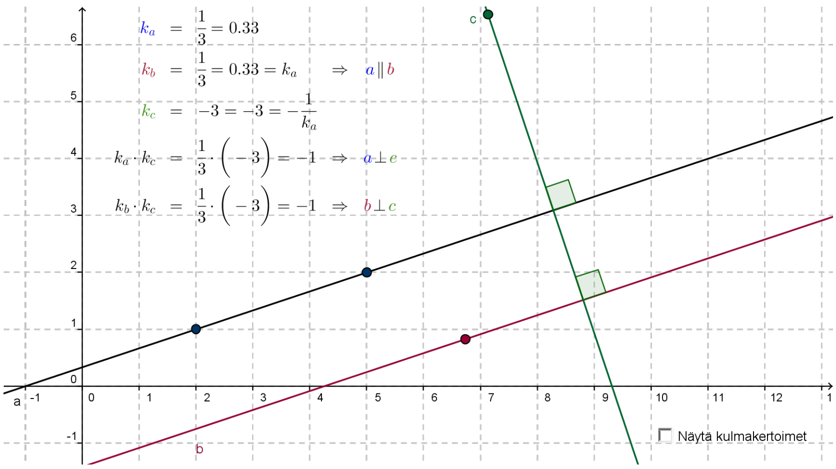
```
\begin{array}{rcl}
 a & || & b \\
a & \bot & c \\
```

```
b & \bot & c
\end{array}
```

Koska tekstiobjekti on aika suuri, määritellään se muiden objektien ”alapuolelle” jolloin suoria voidaan liikuttaa myös tekstin päällä. Tämä tapahtuu *Ominaisuudet*-ikkunan *Erikoista*-välilehdellä määrittelemällä tekstiobjektin *Taso*-ruudussa tasoksi 0 ja kaikkien muiden näkyvien objektien tasoksi 1.

Nyt valmiina on kuvan 7 dynaaminen GeoGebra-tiedosto, jossa suorien sijaintia pystyy mielivaltaisesti muuttamaan pisteitä A, B, C ja D siirtämällä niin, että suorien b ja c suhde suoraan a pysyy ennallaan.

Muokataan vielä suorien ja pisteiden värit selkeämmiksi sekä piilotetaan pisteiden nimet. Kulmakertoimien apukolmioille luodaan *näytä/piilota-valintaruutu*, jotta ne saa näkyviin vain tarvittaessa. Suorien kohtisuoruuden korostamiseksi merkitään näkyviin vielä suorien a ja c sekä b ja c välinen suora kulma.



Kuva 7: Suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus.

Harjoitustehtävä 4. *Osoita kulmakertoimien avulla, että pisteet* $A = (9, 3)$, $B = (5, 5)$ *ja* $C = (3, 1)$ *ovat suorakulmaisen kolmion kärkipisteet.*

3.1.7 Leikkaavien suorien välinen kulma

Määritelmä 3.9 (Suorien välinen kulma)**.** Jos suorat a ja b eivät ole yhdensuuntaiset, niin ne leikkaavat toisensa jossain pisteessä. Tällöin suorien leikkauskohtaan muodostuu kulma $\alpha \leq 90°$.

Jos suorien kulmakertoimet ovat k_a ja k_b, $k_a k_b \neq -1$, niin

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_a - k_b}{1 + k_a k_b} \right|.$$

Piirretään GeoGebralla ensin vapaa suora a. Näin piirtoalueelle muodostuu myös pisteet A ja B, joita siirtämällä suora saadaan liikutettua haluttuun asemaan. Suora b piirretään klikkaamalla mielivaltaista pistettä piirtoalueella ja tämän jälkeen pistettä A. Merkitään suorien nimet näkyviin. Seuraavaksi määritellään suorien välinen kulma α *Kulma*-työvälineellä klikkaamalla pisteitä B, A ja C. Kulman α näkyvyysehdoksi määritellään $\alpha \leq \mathbf{90°}$. Koska kahden suoran leikkauspisteeseen muodostuu kaksi erikokoista kulmaa, pitää määritellä myös kulman α vieruskulma β jotta saadaan aina näkyviin terävä kulman vaikka suoria siirrettäisiin. Tätä varten tarvitaan piste D suoralta a. Kulman $\beta = \angle CAD$ näkyvyysehdoksi määritellään $\beta < \mathbf{90°}$. Kaavatekstejä varten määritellään vielä kulma γ *Jos*-ehtolausekkeella $\gamma = \mathbf{Jos}[\alpha \leq \mathbf{90°}, \alpha, \beta]$. Ehtolausekkeen rakenne on yleisesti $Jos[< \mathit{Ehto} >, < \mathit{Niin} >, < \mathit{Muuten} >]$.

Sitten määritellään kulmakertoimet suorille a ja b. Nimetään kulmakertoimet uudelleen k_a:ksi ja k_b:ksi, ja piilotetaan tämän jälkeen apukolmiot näkyvistä. Määritetään kulmakertoimille vielä murtolukumuodot ja nimetään ne uudelleen kuten kappaleessa 3.1.6. Kulman laskemiseksi laadittavaa lauseketta varten kirjoitetaan *syöttökenttään* $(\mathbf{k\_a} - \mathbf{k\_b})/(\mathbf{1} + \mathbf{Tulo}[\mathbf{k\_a}, \mathbf{k\_b}])$ jotta saadaan laskuissa käytettyä lausekkeen arvoa. Lausekkeen arvosta tulee objekti c, josta saadaan murtolukumuoto cc kirjoittamalla syöttökenttään $\mathbf{cc} = \mathbf{Murtolukuteksti}[\mathbf{c}]$.

Laskulauseke, jolla lasketaan leikkaavien suorien välisen terävän kulman arvo, on seuraavanlainen:

```
"\begin{eqnarray}
\tan{\alpha}&=&\bigg|\frac{k_a-k_b}{1+k_ak_b}\bigg| \\
\tan{\alpha}&=&
\bigg|\frac{"kk_a"-"kk_b"}{1+"(kk_a)"\cdot"kk_b"}\bigg| \\
\tan{\alpha}&=&|"cc"|\\
```

```
\alpha      &=& \arctan{|"cc"|}\\
\alpha      &=& ***
\end{eqnarray}"
```

Koska kulmakerrointa ei ole määritelty y-akselin suuntaisille suorille, eikä lauseketta $\tan\alpha$ ole määritelty kun nimittäjä menee nollaksi (eli kun suorat ovat kohtisuorat, $k_a k_b = -1$), määritellään tekstin näkyvyysehdoksi $(\mathbf{x(A)} \neq \mathbf{x(B)}) \wedge (\mathbf{x(A)} \neq \mathbf{x(BC)}) \wedge (\mathbf{k_a k_b} \neq \mathbf{-1})$.

Kulmakertoimet ovat tässä oleellisia, joten laaditaan piirtoalueelle vielä erikseen dynaaminen teksti joka ilmoittaa suorien kulmakertoimet murtolukuina. Tässä kk_a on murtolukumuoto suoran a kulmakertoimesta k_a, kuten kappaleessa 3.1.6. Tekstin näkyvyysehdoksi määritellään $(\mathbf{x(A)} \neq \mathbf{x(B)}) \wedge (\mathbf{x(A)} \neq \mathbf{x(C)})$ jotta ei jouduta ongelmiin määrittelemättömien kulmakertoimien kanssa.

```
  "\begin{eqnarray}
\text{Suoran a kulmakerroin }k_a&=&"kk_a" \\
\text{Suoran b kulmakerroin }k_b&=&"kk_b"
\end{eqnarray}"
```

Pystysuoria suoria varten määritellään omat laskukaavat. Alla oleva on määritelty tapaukselle jossa suora b on y-akselin suuntainen, joten näkyvyysehdoksi on määriteltävä $(\mathbf{x(A)} = \mathbf{x(C)}) \wedge (\mathbf{y(A)} \neq \mathbf{y(B)})$. Huomaa, että myös kohtisuorat suorat on tässä kielletty, koska suoran a kulmakerroin olisi tälllöin 0. Vastaavalla tavalla tehdään teksti tapaukselle, jossa suora a on y-akselin suuntainen.

```
  "\begin{array}{rcl}
\text{Suora} & b & \text{on  y-akselin suuntainen}, \\
\tan{\alpha} & = & \bigg|\frac{1}{k_a}\bigg|
   = \bigg|\frac{1}{"k_a"}\bigg| \\
\alpha & = & ***
```

```
\end{array}"
```

Kohtisuorille suorille, joille $k_a \cdot k_b = -1$, on laadittava vielä oma tekstinsä, näkyvyysehdolla $\mathbf{k\_ak\_b = -1}$.

```
\begin{array}{c}
\textrm{Suorat a ja b ovat kohtisuorat}\\
k_a\cdot k_b  =-1 \\
\alpha =90^{\circ}\\
\end{array}
```

Edelleen tapaukselle, jossa suorat a ja b ovat molemmat akselien suuntaiset, on määriteltävä oma tekstinsä. Näkyvyysehtona on nyt $(\mathbf{x}(\mathbf{A}) = \mathbf{x}(\mathbf{B})) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{A}) = \mathbf{y}(\mathbf{C}))$.

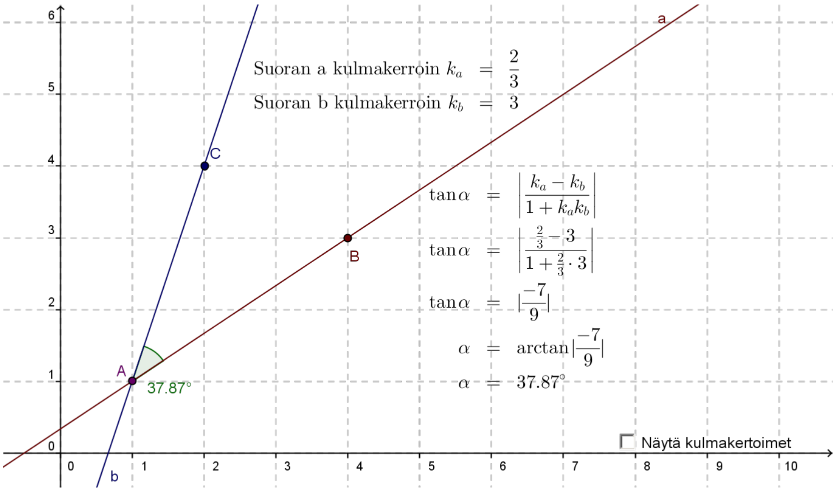
```
\begin{array}{c}
\text{Suora a on y-akselin suuntainen, } \\
\text{Suora b on x-akselin suuntainen, } \\
\alpha=90^{\circ}\\
```

Nyt valmiina on kuvassa 8 näkyvä dynaaminen tiedosto, jossa leikkaavia suoria voidaan mielivaltaisesti liikuttaa piirtoalueella pisteitä A, B ja C siirtämällä niin, että suorien välinen kulma saadaan määritettyä. Jälkiviisaana olisi kannattanut piste C määrittää suorien leikkauspisteeksi, jolloin pisteellä A olisi vapaa liikkuvuus suoralla a ja vastaavasti pisteellä B olisi vapaa liikkuvuus suoralla b.

Harjoitustehtävä 5. *Määritä tehtävän 4, s.32, kolmion kulmien suuruudet.*

3.1.8 Kolmion pinta-ala koordinaatistossa

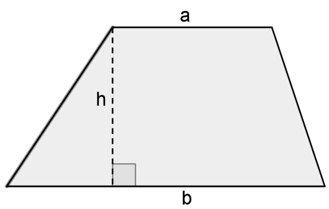
Kolmion pinta-alan laskukaava $A = \frac{kanta \cdot korkeus}{2}$ oletetaan tunnetuksi aiemmalta geometrian kurssilta. Tässä kappaleessa hyödynnetään kolmion kärki-



Kuva 8: Leikkaavien suorien välinen kulma.

pisteiden koordinaatteja pinta-alan laskemiseksi. Kolmion pinta-alan laskemiselle voidaan johtaa kaava hyödyntämällä puolisuunnikkaita, jotka muodostuvat kolmion sivujen ja x-akselin väliin. Kertauksen vuoksi esitellään ensin geometrian kurssilta tuttu puolisuunnikkaan laskukaava:

Määritelmä 3.10. Puolisuunnikkaan pinta-ala $A = \frac{(a+b)h}{2}$



Määritelmä 3.11 (Kolmion pinta-ala)**.** Kolmion, jonka kärkipisteet ovat $A = (x_a, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ ja $C = (x_C, y_C)$, pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}|x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C|.$$

Pinta-alan laskukaava saadaan johdettua kolmion sivujen ja x-akselin rajoittamien puolisuunnikkaiden pinta-alojen avulla. Kaavoissa termi M_i viittaa kolmion kärkipisteen i kautta kulkevan x-akselin normaalin ja x-akselin leikkauspisteeseen, katso kuva 9.

- Puolisuunnikkaan ABM_BM_A pinta-ala
$A_{AB} = \frac{1}{2}(\overline{|M_AA|} + \overline{|M_BB|})(\overline{|M_BM_A|})$
$= \frac{1}{2}((y_A - y_{M_A}) + (y_B - y_{M_B}))(x_{M_B} - x_{M_A}) = \frac{1}{2}(y_A + y_B)(x_B - x_A)$

- Puolisuunnikkaan BCM_CM_B pinta-ala
$A_{BC} = \frac{1}{2}(\overline{|M_BB|} + \overline{|M_CC|})(M_C - M_B)$
$= \frac{1}{2}((y_B - y_{M_B}) + (y_C - y_{M_C}))(x_{M_C} - x_{M_B}) = \frac{1}{2}(y_B + y_C)(x_C - x_B)$

- Puolisuunnikkaan ABM_BM_A pinta-ala
$A_{AC} = \frac{1}{2}(\overline{|M_AA|} + \overline{|M_CC|})(M_C - M_A)$
$= \frac{1}{2}((y_A - y_{M_A}) + (y_C - y_{M_C}))(x_{M_C} - x_{M_A}) = \frac{1}{2}(y_A + y_C)(x_C - x_A)$

- Kolmion ABC pinta-ala
$A_{ABC} = |A_{AB} + A_{BC} - A_{AC}|$
$= \frac{1}{2}|(y_A + y_B)(x_B - x_A) + (y_B + y_C)(x_C - x_B) - (y_A + y_C)(x_C - x_A)|$
$= \frac{1}{2}|(y_Ax_B - y_Ax_A + y_Bx_B - y_Bx_A + y_Bx_C - y_Bx_B + y_Cx_C - y_Cx_B -$
$y_Ax_C + y_Ax_A - y_Cx_C + y_Cx_A|$
$= \frac{1}{2}|x_Ay_C + x_Cy_B + x_By_A - x_Ay_B - x_Cy_A - x_By_C|.$

Piirretään GeoGebran *Monikulmio*-työvälineellä kolmio ABC. Sitten piirretään kunkin kärkipisteen kautta erikseen x-akselin normaali *Normaali*-työvälineellä. Pisteet M_a, M_b ja M_c merkitään normaaleiden ja x-akselin leikkauspisteisiin *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä. Alaindeksi ilmaisee minkä pisteen kautta normaali kulkee. Seuraavaksi piilotetaan normaalit ja piirretään janat AM_A,BM_B ja CM_C *Kahden pisteen välinen jana* -työvälinellä. Janojen tyyliksi valitaan katkoviiva.

Seuraavaksi määritellään puolisuunnikkaat ABM_BM_A, BCM_CM_B ja ACM_CM_A *Monikulmio*-työvälineellä, ja nimetään nämä uudelleen puolisuunnikkaiksi $PSAB$, $PSAC$ ja $PSBC$ sen mukaan, mikä kolmion sivuista on yhtenä puolisuunnikkaan sivuna. Tämän jälkeen piilotetaan monikulmio-objektit näkyvistä.

Seuraavaksi sidotaan pisteen B x-koordinaatti välille $x_A \leq x_B \leq x_C$, jotta puolisuunnikkaiden ja kolmion pinta-alojen yhteys pystytään esittämään asiallisesti. Tämä tapahtuu niin, että tehdään ensin työvälineellä *Liuku* piirtoalueelle liukusäädin nimeltä x_B, jonka väliksi määritellään Min:x(A) ja

Max:x(C). Liu'un ulkoasulla ei ole merkitystä, koska se tullaan piilottamaan myöhemmin. Koska yksittäistä pisteen B koordinaattia ei pysty sitomaan, on sidottava molemmat, ja myös y-koordinaatille tehtävä liukusäädin. Koska liukusäädin tullaan piilottamaan myöhemmin, on oikeastaan aivan samantekevää miten sitä rajoitetaan. Esimerkissä on valittu liu'un y_B väliksi Min:-100 ja Max:100. Piste B voidaan nyt sitoa kirjoittamalla *Syöttökenttään* $\mathbf{B} = (\mathbf{x_B}, \mathbf{y_B})$. Kun piste on sidottu, voidaan muuten turhat liukusäätimet piilottaa näkyvistä. Nyt pistettä B voi siirtää piirtoalueella muuten vapaasti, mutta ei alueen $x_A \leq x_B \leq x_C$ ulkopuolelle.

Koska puolisuunnikkaita ei ole määritelty, eivätkä puolisuunnikkaan pinta-alan laskukaavat toimi jos kolmion kärkipisteistä osa on x-akselin yläpuolella ja osa x-akselin alapuolella, laitetaan piirtoalueelle vielä huomioteksti. Huomiotekstin 'Hei, nyt puolisuunnikkaita ei ole määritelty!' näkyvyysehdoksi tulee $((\mathbf{y}(\mathbf{A}) > \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{C}) < \mathbf{0})) \vee ((\mathbf{y}(\mathbf{A}) > \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{B}) < \mathbf{0})) \vee ((\mathbf{y}(\mathbf{B}) > \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{C}) < \mathbf{0})) \vee ((\mathbf{y}(\mathbf{C}) > \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{A}) < \mathbf{0})) \vee ((\mathbf{y}(\mathbf{B}) > \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{A}) < \mathbf{0})) \vee ((\mathbf{y}(\mathbf{C}) > \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{B}) < \mathbf{0}))$, eli teksti näkyy ainoastaan silloin kun pisteitä on x-akselin molemmin puolin.

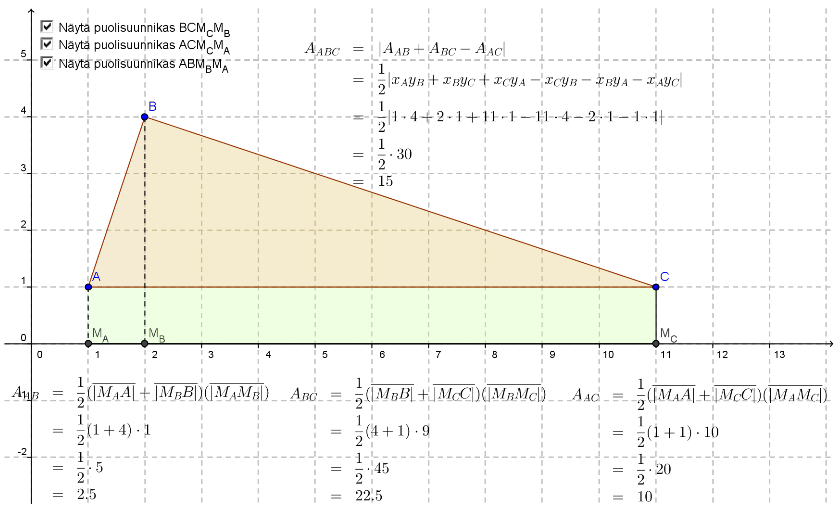
Laaditaan dynaaminen LaTeX-kaava kolmion pinta-alan laskemiseksi.

```
  "\begin{eqnarray}
A_{ABC}&=& |A_{AB} + A_{BC} - A_{AC} | \\
&=&\frac{1}{2}|x_Ay_B+x_By_C+x_Cy_A-x_Cy_B-x_By_A-x_Ay_C| \\
&=&\frac{1}{2}|"x(A)"\cdot"y(B)"+"x(B)"\cdot"y(C)"
   +"x(C)"\cdot"y(A)"-"x(C)"\cdot "y(B)"
   -"x(B)"\cdot "y(A)"-"x(A)"\cdot "y(C)"| \\
&=& \frac{1}{2}\cdot "w"
&=&"kolmioABC" \\
\end{eqnarray}"
```

Kyseisessä tekstissä w on summalausekkeen itseisarvo, joka on saatu kirjoittamalla *syöttökenttään* $\mathbf{w} = \mathbf{abs}$ $(\mathbf{x}(\mathbf{A})\mathbf{y}(\mathbf{B}) + \mathbf{x}(\mathbf{B})\mathbf{y}(\mathbf{C}) + \mathbf{x}(\mathbf{C})\mathbf{y}(\mathbf{A}) - \mathbf{x}(\mathbf{C})\mathbf{y}(\mathbf{B}) + \mathbf{x}(\mathbf{B})\mathbf{y}(\mathbf{A}) + \mathbf{x}(\mathbf{A})\mathbf{y}(\mathbf{C}))$.

Yksittäisten suunnikkaan pinta-alan laskemisen havainnollistamiseksi tehdään vielä *näytä/piilota-valintaruutu* "Näytä puolisuunnikas ABM_BM_A", jolla laskukaavan ja puolisuunnikkaan saa halutessa näkyviin. Alla oleva kaavateksti, suunnikkaan ABM_BM_A pinta-ala A_AB, on nimetty AlaAB:ksi. Valintaruutuun sidottaviksi objekteiksi valitaan siis *objektivalikosta*: NelikulmioPSAB sekä TekstiAlaAB.

```
"\begin{eqnarray}
A_{AB}&=&
\frac{1}{2}(\overline{|M_AA|}+\overline{|M_BB|})
(\overline{|M_AM_B|})\\
      &=& \frac{1}{2}("AM_A"+"BM_B")\cdot "MAMB" \\
      &=& \frac{1}{2} \cdot "(AM_A+BM_B)*(MAMB)" \\
      &=& "(AM_A+BM_B)*(MAMB)/2"
\end{eqnarray}"
```



Kuva 9: Kolmion pinta-ala koordinaatistossa.

Nyt valmiina on kuvassa 9 näkyvä dynaaminen tiedosto, jossa kolmion ABC pinta-alaa voidaan tutkia puolisuunnikkaiden pinta-alojen avulla.

3.1.9 Monikulmion pinta-ala

Edellinen tulos voidaan yleistää mille tahansa itseään leikkaamattomalle monikulmiolle.

Määritelmä 3.12. Olkoon n-kulmaisen monikulmion kärkipisteet $P_i = (x_i, y_i))$, missä $i = 1, \ldots, n$. Monikulmion pinta-ala saadaan summana

$$A = \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|.$$

Harjoitustehtävä 6. *Laske tehtävän 1 pisteiden* $A = (4, 2)$, $B = (3, 3)$, $C = (2, 3)$, $D = (1, 2)$, $E = (1, 1)$, $F = (2, -1)$, $G = (4, -3)$, $H = (6, -1)$, $I = (7, 1)$, $J = (7, 2)$, $K = (6, 3)$ *ja* $L = (5, 3)$ *muodostaman monikulmion pinta-ala.*

3.2 Pistejoukon yhtälö

Uraksi kutsutaan pistejoukkoa, joka toteuttaa tietyt annetut ehdot. Kaikki ne pisteet (x, y), jotka toteuttavat kahden muuttujan yhtälön, muodostavat uran eli tasokäyrän. Esimerkiksi toisen asteen funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, kuvaaja on paraabeli, jonka pisteet toteuttavat ehdon $y = ax^2+bx+c$. Piste on siis käyrällä, jos ja vain jos sen koordinaatit toteuttavat käyrän yhtälön.

GeoGebralla voi piirtää minkä tahansa kahden muuttujan yhtälön ratkaisujoukkoa kuvaavan uran kirjoittamalla yhtälön sellaisenaan *Syöttökenttään.* Eksponentit saa kirjoitettua ˆ-merkin avulla, esim. $y = x^7 + 3$ kirjoitetaan $\mathbf{y = x\hat{}7 + 3}$. Jos eksponentti koostuu luvusta, jossa on enemmän kuin yksi merkki, tulee eksponentti kirjoittaa aaltosulkeisiin. Esim. $y = x^{-12} + 3$ kirjoitetaan $\mathbf{y = x\hat{}\{-12\} + 3}$.

Harjoitustehtävä 7. *Piirrä koordinaatistoon niiden pisteiden joukko, jotka toteuttavat seuraavat yhtälöt:*
a) $x^2 + y^2 = 16$
b) $2x^7 - 3x^3 - y + 1 = 0$
c) $x^2y^2 - (1 + x)^2(4 - x^2) = 0$.

3.3 Suora

Suoralle on olemassa paljon erilaisia määritelmiä. Peruskoulussa suora lähdetään määrittämään pisteen ja viivan kautta. Piste oletetaan tasogeometrian peruskäsitteeksi, pisteellä ei ole pituutta eikä leveyttä. Viivan määritellään koostuvan peräkkäisistä pisteistä niin, että viivalla ei ole leveyttä. Kun piste ja viiva on esitelty, suora määritellään usein suoraksi viivaksi jolla ei ole päätepisteitä. Viivan suoruus oletetaan usein itsestään selväksi käsitteeksi.

Täsmällisempi määritelmä suoralle on esimerkiksi seuraava: ”Tason suora on ääretön järjestetty joukko pisteitä. Jos $P, Q, R \in l$ ovat suoran l eri pisteitä, on tarkalleen yksi niistä kahden muun välissä [8].” Aiemmin, kappaleessa 3.1.2, määritellyn kahden pisteen etäisyyden avulla suora voidaan määritellä seuraavasti: "Tason kolme pistettä ovat samalla suoralla, jos ne voidaan nimetä kirjaimilla P, Q ja R siten, että $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$."

3.3.1 Suoran yhtälö

Ensimmäisen asteen kahden muuttujan yhtälön $Ax + By + C = 0$ kuvaaja on suora, kun $A \neq 0$ tai $B \neq 0$.

Määritelmä 3.13 (Yleinen muoto)**.** Olkoon A, B ja C reaalilukuja. Suoran yhtälön yleinen muoto on

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{missä } A \neq 0 \vee B \neq 0.$$

Jos $A = 0$, niin suoran yhtälön kuvaaja on vaakasuora suora, joka kulkee pisteen $y = \frac{C}{B}$ kautta. Suoran kulmakerroin on tällöin 0. Jos $B = 0$, niin kuvaaja on pystysuora suora, joka kulkee pisteen $x = -\frac{C}{A}$ kautta. Jos $B \neq 0$, niin yhtälö voidaan ratkaista muotoon $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Suora leikkaa tällöin y-akselin pisteessä $(0, -\frac{C}{B})$ ja suoran kulmakerroin $k = -\frac{A}{B}$.

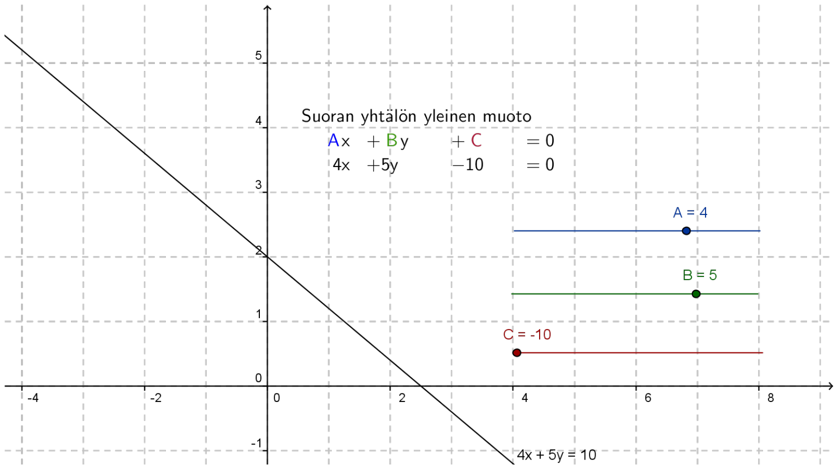
GeoGebralla voidaan tutkia suoran yleisen muodon yhtälön parametrien A, B ja C vaikutusta suoran asemaan koordinaatistossa. Tehdään ensin *liuku*-työvälineellä parametreille liukusäätimet joiden avulla parametrien arvoja voidaan helposti muuttaa. Liukujen *nimeksi* annetaan A, B ja C; *väliksi* Min:-10, Max:10 ja liu'un *leveydeksi* 200. Liukujen värit muokataan vielä *Ominaisuudet*-ikkunan *Väri*-välilehdellä niin, että kullakin liukusäätimellä on oma värinsä. Samoja värejä käytetään myöhemmin teksteissä.

Tämän jälkeen suora saadaan piirrettyä kirjoittamalla *syöttökenttään* $\mathbf{Ax + By + C = 0}$. Suoran yhtälön saa näkyviin suoran vierelle, kun valitsee suoran *Ominaisuudet*-valikosta *Näytä nimi: Arvo*. Suoran yhtälö, jossa on dynaamiset vakiot A, B ja C, lisätään piirtoalueelle tuttuun tapaan *Lisää teksti* -työvälineellä. Valitettavasti GeoGebrassa ei toimi LaTeX-komento `\setlength\arraycolsep{}` jolla taulukon sarakkeiden väliä voisi pienentää, vaan pitää tyytyä kaavaan, joka on vähän turhan ilmava.

```
"\begin{array}{rlll}
```

```
\multicolumn{4}{l}{\text{Suoran yhtälön yleinen muoto}}\\
\textcolor{Blue}{A}\,x& + \;\textcolor{OliveGreen}{B}\,y& +
  \;\textcolor{Maroon}{C}& = 0 \\
"A"x&+"B"y&+"C"& = 0
\end{array}"
```

Koska vakiot voivat saada myös negatiivisia arvoja, kannattaa kauneussyistä laatia kuhunkin tapaukseen omat tekstinsä, joille määritellään sopivat näkyvyysehdot. Jos vakio B on negatiivinen, poistetaan viidenneltä riviltä + -merkki: `"A"x& "B"y&+"C"&= 0`. Vastaavasti muokataan muut tapaukset. Kaikkien *paikaksi* määritellään *Alkupiste:* $(\mathbf{2}, \mathbf{1.5})$, jotta kaavojen vaihtumista ei huomaa niin selkeästi. Desimaaliluvuissa on käytettävä desimaalipistettä desimaalipilkun sijaan. Valmis GeoGebra-malli on kuvassa 10.



Kuva 10: Suoran yhtälön yleinen muoto.

Määritelmä 3.14 (Ratkaistu muoto)**.** Suoran yhtälön ratkaistu muoto on $y = kx+b$ tai $x = a$. Vakio k on suoran kulmakerroin ja vakiotermi b ilmoittaa pisteen, jossa suora leikkaa y-akselin.

Jos suoran kulmakerroin on k ja suoralta tunnetaan yksi piste $A = (x_A, y_A)$, niin tällöin kulmakertoimen määritelmän mukaan (kulmakerrointa on käsitelty aiemmin luvussa 3.1.5) $k = \frac{y-y_A}{x-x_A}$, missä (x, y) on jokin mielivaltainen suoran piste. Tästä saadaan suoran yhtälöksi $y - y_A = k(x - x_A)$.

Jos suora on y-akselin suuntainen ja kulkee pisteen $A = (x_A, y_A)$ kautta, niin sen yhtälö on $x = x_A$.

Määritelmä 3.15 (Suoran yhtälö, kun tunnetaan kulmakerroin k ja yksi suoran piste)**.** Olkoon suoran kulmakerroin k, ja tiedetään, että suora kulkee pisteen (x_A, y_A) kautta. Tällöin suoran yhtälö on

$$y - y_A = k(x - x_A).$$

Jos tunnetaan kaksi suoran pistettä, $A = (x_A, y_A)$ ja $B = (x_B, y_B)$, niin suoran yhtälö voidaan määrittää näiden avulla. Lasketaan suoran kulmakerroin $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, ja sijoitetaan se edelliseen yhtälöön.

Määritelmä 3.16 (Suora kahden pisteen kautta)**.** Pisteiden $A = (x_A, y_A)$ ja $B = (x_B, y_B)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A), \quad \text{missä } x_A \neq x_B.$$

Suoran yhtälön havainnollistamiseksi laadittavan GeoGebra-tiedoston pohjana voidaan käyttää kappaleessa 3.1.5 laadittua tiedostoa. Koska on tarkoitus käsitellä vain suoran yhtälöä kolmella edellä mainitulla lähestymistavalla, tallennetaan ensin vanha tiedosto uudelleen uudella nimellä ja poistetaan tämän jälkeen kaikki kulmiin ja suoran muihin tässä yhteydessä ylimääräisiin ominaisuuksiin liittyvät asiat.

Olennainen asia tässä yhteydessä on suoran ja y-akselin leikkauspiste, joten määritellään se *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä. Koska pohjana käytetään vanhaa tiedostoa, GeoGebra nimeää uuden pisteen automaattisesti kirjaimella G. Piilotetaan pisteen nimi, ja vaihdetaan pisteen väri punaiseksi.

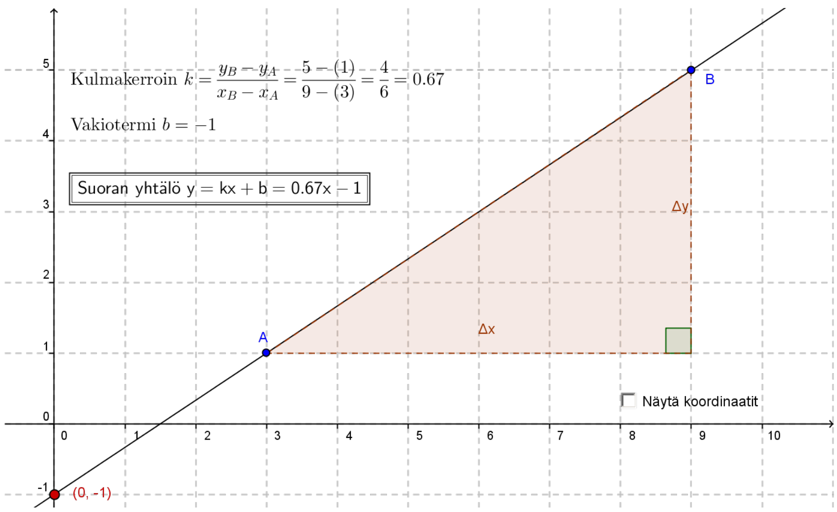
Laaditaan sitten erilliset tekstiobjektit pisteiden A, B ja C koordinaateille sekä kulmakertoimelle k aikaisempia pohjia hyväksikäyttäen seuraavasti:

```
"\begin{eqnarray}
A=(x_A,y_A)&=&("x(A)" ,"y(A)" )\\
B=(x_B,y_B)&=&("x(B)" ,"y(B)" )\\
C=(0,b)&=&(0 ,"y(G)" )
\end{eqnarray}"
```

```
"\text{Kulmakerroin} k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}
     =\frac{"y(B)"-("y(A)")}{"x(B)"-("x(A)")}
     =\frac{"(y(B)-y(A))"}{"(x(B)-x(A))"}
     = "(y(B)-y(A))/(x(B)-x(A))"
```

Sitten lisätään vielä sekä vakiotermin että suoran yhtälön yleisessä muodossa määrittävät tekstit: `”\text{Vakiotermi } b = ”y(G)` ja `”\doublebox{\text{Suoran yhtälö } y = kx + b = ”(y(B)-y(A))/(x(B)-x(A))”x + ”y(G)}`. Komento `\doublebox` tekee tekstin ympärille ”laatikon”, ja on tässä vain koristeellisuuden vuosi. Se lisätään kaavaan vasta jälkeenpäin.

Kauneussyistä kannattaa laatia monta eri tekstiä sellaisille tapauksille, joissa $k = 1$, $k = 0$, $k = -1$, $b < 0$ tai suora on pystysuora, ja määrittää näkyvyysehdot sen mukaan. Kaikkiaan erilaisia vaihtoehtoja on yksitoista kappaletta, mutta vaivannäkö kannattaa.



Kuva 11: Suoran yhtälö.

Harjoitustehtävä 8. *Muodosta sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden* $(4, -3)$ *ja* $(-2, 6)$ *kautta. (Yo-tehtävä 1b/S2007, pitkä matematiikka.[30])*

Harjoitustehtävä 9. *Suorakulmaisen kolmion kaikki kärjet sijaitsevat paraabelilla* $y = x^2$*; suoran kulman kärki on paraabelin huipussa. Osoita, että* *jokaisen tällaisen kolmion hypotenuusa leikkaa paraabelin akselin samassa pisteessä. Määritä tämä piste. (Yo-tehtävä 8/K2001, sekä pitkä- että lyhyt matematiikka.[30])*

3.3.2 Suoran normaalin yhtälö

Kuten jo kappaleessa 3.1.6 todettiin, suorat a ja b ovat kohtisuorat jos niiden kulmakerrointen tulo $k_a k_b = -1 \Leftrightarrow k_b = -\frac{1}{k_a}$. Nyt pisteen $C = (x_C, y_C)$ kautta kulkevan, suoran $y = k_a x + b$ normaalin, yhtälö saadaan sijoittamalla suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$. kulmakerroin $k_b = -\frac{1}{k_a}$ ja piste (x_C, y_C).

Määritelmä 3.17 (Suoran a normaalin b yhtälö)**.** Olkoon k_a suoran a kulmakerroin. Suoran a normaali, suora b, kulkee pisteen $C = (x_C, y_C)$ kautta. Suoran b yhtälö on tällöin

$$y - y_C = -\frac{1}{k_a}(x + x_C).$$

GeoGebralla suoran a normaalin b saa piirrettyä työvälineellä *Normaali*. Ensin klikataan pistettä jonka kautta normaali kulkee, ja tämän jälkeen sitä suoraa jonka normaali halutaan. Merkitään näkyviin suorien nimet a ja b. Suorien *Ominaisuudet*-valikosta *Algebra*-välilehdeltä voi valita suoran yhtälön halutussa muodossa. Valitaan *Yhtälö: y=mx+b*. Suorien kohtisuoruuden korostamiseksi merkitään suora kulma näkyviin *Kulma*-työvälineellä, ja poistetaan kulman ominaisuuksista vaihtoehto *kupera kulma*.

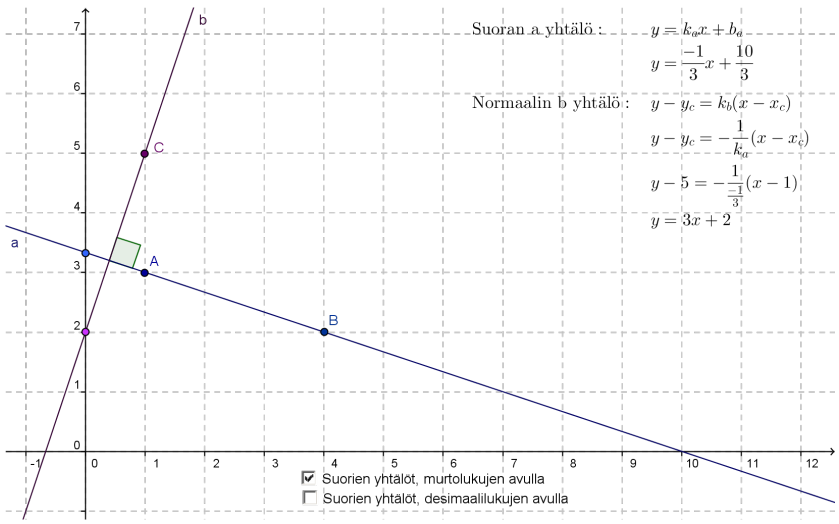
GeoGebra antaa oletuksena kulmakertoimen k ja vakiotermin b desimaalilukuna, joten matemaattisesti kauniimman esityksen aikaansaamiseksi muutetaan ne murtoluvuiksi. Kulmakerrointen muuttaminen murtoluvuiksi tapahtuu kuten kappaleessa 3.1.5. Kulmakertoimille annetaan nimet k_a ja k_b, ja näiden murtolukuarvoille nimet kk_a ja kk_b. Vakioiden b murtolukumuotoon saattamista varten on ensin määritettävä suorien ja y-akselin leikkauspisteet työvälineellä *Kahden objektin leikkauspiste*. Suoran a ja y-akselin leikkauspisteeksi tulee piste D ja suoran b leikkauspisteeksi piste E. Syötetään *Syöttökenttään* $\mathbf{b_a} = \mathbf{y(D)}$ ja $\mathbf{b_b} = \mathbf{y(E)}$, missä b_a on suoran a vakiotermi, ja vastaavasti b_b suoran b vakiotermi. Murtolukumuotoon vakiotermit b_a ja b_b saadaan komennolla $\mathbf{bb_a} = \textbf{Murtolukuteksti}[\mathbf{b_a}]$ ja

$\mathbf{bb_b} = \mathbf{Murtolukuteksti[b_b]}$. Piilotetaan kaikki kulmakerroin- ja vakiotermiobjektit näkyvistä, sillä niitä käytetään vain kaavoissa. Laaditaan kaksi vaihtoehtoista tekstiä: toisessa käytetään murtolukuja ja toisessa desimaalilukuja.

```
  "\begin{array}{ll}
\text{Suoran a yhtälö: }
& y=k_ax+b_a \\
& "a" \\
& \\
\text{Normaalin b yhtälö: }
& y-y_c=k_b(x-x_c) \\
& y-y_c=-\frac{1}{k_a}(x-x_c) \\
& y-"y(C)"=-\frac{1}{"k_a"}(x-"x(C)") \\
& "b"
\end{array}"
```

```
  "\begin{array}{ll}
\text{Suoran a yhtälö: }
& y=k_ax+b_a \\
& y="kk_a"x+ "bb_a" \\
& \\
\text{Normaalin b yhtälö: }
& y-y_c=k_b(x-x_c) \\
& y-y_c=-\frac{1}{k_a}(x-x_c) \\
& y-"yy_c"=-\frac{1}{"kk_a"}(x-"xx_c") \\
& y="kk_b"x+"bb_b"\\
\end{array}"
```

Molemmille teksteille annetaan näkyvyysehdoksi että kummankin suoran kulmakerroin on nollasta poikkeava, *näytä/piilota-valintaruudun* lisäksi. Tämä onnistuu komennolla $\mathbf{d} \wedge (\mathbf{k_a} \neq \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{k_b} \neq \mathbf{0})$, missä d viittaa *näytä/piilota*-valintaruudun arvoon.



Kuva 12: Suoran normaalin yhtälö.

Murtolukumuodot näyttävät hieman ikäviltä, kun osoittaja on nimittäjää suurempi. Murtoluvun sekaluvuksi muuttamista varten ei GeoGebrassa kuitenkaan ole vielä valmista komentoa, joten tyydytään GeoGebran antamiin murtolukuihin. Valmis GeoGebra-malli on näkyvissä kuvassa 12.

Harjoitustehtävä 10. *Määritä yhtälö suoralle, joka on suoran* $y = 2x - 5$ *normaali ja kulkee pisteen* $(1, 2)$ *kautta.*

3.3.3 Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen etäisyydellä suorasta tarkoitetaan aina lyhintä mahdollista etäisyyttä. Lyhin mahdollinen etäisyys saadaan, kun etäisyys määritetään kohtisuoraan suoraa vastaan. Pisteen $P = (x_P, y_P)$ ja suoran s välisen etäisyyden laskemiseksi tarvitaan siis suoran s normaali, joka kulkee pisteen P kautta. Suoran s ja sen normaalin n leikkauspisteen Q ja pisteen P etäisyys saadaan nyt laskettua kahden pisteen etäisyyden kaavalla. Mikäli piste $P = (x_P, y_P)$ on suoralla s, niin etäisyys $d = 0$.

Olkoon suoran s yhtälö yleisessä muodossa $Ax + By + C = 0$. Suoran kulmakerroin on $-\frac{A}{B}$, joten suoran normaalin n kulmakerroin on oltava $\frac{B}{A}$. Pisteen P kautta kulkevan normaalin yhtälöksi saadaan näin ollen $y - y_P = \frac{B}{A}(x - x_P) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{B}{A}x + (y_P - \frac{B}{A}x_P)$. Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan leikauspisteen Q koordinaatit, ja sijoittemalla ne kahden pisteen välisen etäisyyden kaavaan saadaan lauseke pisteen etäisyydelle suorasta. Kaavan johtaminen sivuutetaan.

Määritelmä 3.18. Pisteen $P = (x_P, y_P)$ etäisyys d suorasta $s: \ Ax + By + C = 0$, missä $A \neq 0 \ \vee \ B \neq 0:$

$$d = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Jos piste $P = (x_P, y_P)$ on suoralla s, niin etäisyys $d = 0$.

GeoGebralla piirretään ensin suora ja jokin mielivaltainen piste suoran ulkopuolelta. Nimetään suora uudelleen nimellä s ja piste nimellä P määritelmää 3.18 vastaaviksi. GeoGebrassa on valmis työväline, *Etäisyys tai pituus*, etäisyyden määrittämiseen. Työvälineellä saa määritettyä esimerkiksi kahden pisteen välisen etäisyyden, janan pituuden, ympyrän kehän pituuden, monikulmion piirin, tai kuten tässä: pisteen etäisyyden suorasta. Etäisyyden määrittäminen on helppoa; klikataan vain pistettä P ja suoraa s vuoron perään. Tällöin GeoGebra luo piirtoalueelle tekstiobjektin, joka ilmoittaa suoran ja pisteen välisen etäisyyden muodossa $\overline{Ps}$.

Etäisyyden hahmottamiseksi piirretään pisteen P ja suoran s välille suoraa vastaan kohtisuoran janan. Tätä varten tehdään ensin pisteen P kautta kulkeva suoran normaali, ja sitten suoran ja normaalin leikkauspisteeseen piste Q. Nyt saadaan *Kahden pisteen välinen jana* -työvälineellä piirrettyä jana $\overline{PQ}$. Valitaan janan tyyliksi katkoviiva, jotta selvemmin käy ilmi sen olevan vain apuobjekti. Normaalia ei nyt enää tarvita, joten se voidaan piilottaa.

GeoGebrassa suoran yhtälöksi on mahdollista valita joko $y = mx+b$, $ax+by = c$ tai parametrimuoto, mutta ei muotoa $Ax + By + C = 0$. Kertoimien A, B ja C arvot saadaan kuitenkin lisättyä komennoilla $x(s)$, $y(s)$ ja $z(s)$. Hyödynnetään näitä, kun laaditaan suoran yhtälö:

```
"\begin{eqnarray}
\text{Suora \textcolor{Blue}{s}: } \quad A\,x+B\,y+C&=&0\\
```

```
"x(s)"\,x + "y(s)"\,y+"z(s)"&=&0
\end{eqnarray}"
```

Koska kertoimet voivat saada myös negatiivisia arvoja, laaditaan neljä erilaista tekstiä joille asetetaan sopivat *näkyvyysehdot*. Jätetään siis +-merkit kirjoittamatta silloin kun kerroin on negatiivinen. Muuten suoran yhtälöön voi tulla matemaattisesti epäesteettisiä muotoja kuten $2x + -4y + -5 = 0$.

Korvataan edellisestä kaavatekstistä kolmas rivi seuraavasti:

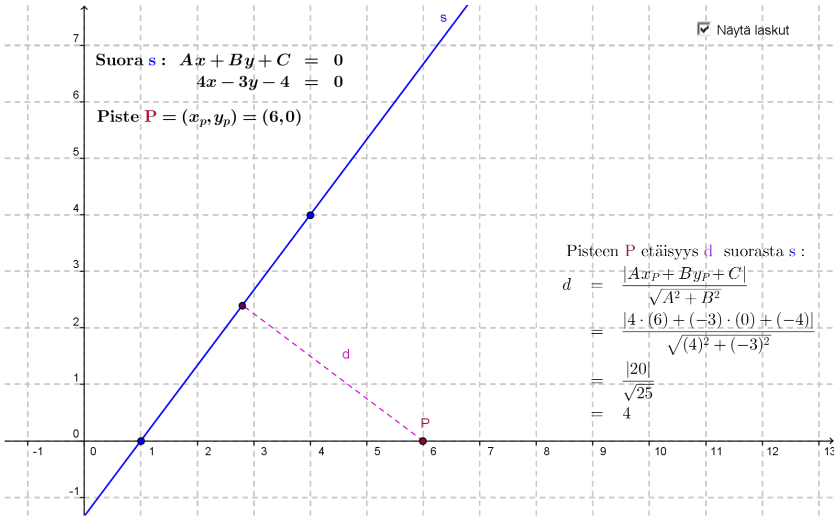
Teksti	Näkyvyysehto
$''x(s)''\backslash, x +'' y(s)''\backslash, y +'' z(s)''\& = \&0$	$(y(s) \geq 0) \wedge (z(s) \geq 0)$
$''x(s)''\backslash, x \quad ''y(s)''\backslash, y +'' z(s)''\& = \&0$	$(y(s) < 0) \wedge (z(s) \geq 0)$
$''x(s)''\backslash, x +'' y(s)''\backslash, y \quad ''z(s)''\& = \&0$	$(y(s) \geq 0) \wedge (z(s) < 0)$
$''x(s)''\backslash, x \quad ''y(s)''\backslash, y \quad ''z(s)''\& = \&0$	$(y(s) < 0) \wedge (z(s) < 0)$

LaTeX-komennolla `\,` saadaan aikaan pieni väli muuttujan ja sen kertoimen väliin, jottei yhtälöstä tule liian tiivis.

Pisteen ja suoran välisen etäisyyden laskemiseksi laaditaan vielä seuraavanlainen kaavateksti:

```
"\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{c}{\text{Pisteen \textcolor{Maroon}{P}
 etäisyys \textcolor{Mulberry}{d}
 suorasta \textcolor{Blue}{s}: }} \\
d&=&\frac{|A\,x_P+B\,y_P+C\,|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\
 &=&\frac{|"x(s)"\cdot("x(P)")+("y(s)")\cdot("y(P)")+("z(s)")|}
            {\sqrt{("x(s)")^2+("y(s)")^2}} \\
 &=&\frac{|"(x(s)x(P)+y(s)y(P)+z(s))"|}
   {\sqrt{"(x(s)^2y(s)^2)"}}\\
 &=&"etäisyysPs"
\end{array}"
```

Tässä käytetään sulkuja dynaamisten arvojen ympärillä, koska erillisten kaavojen laatiminen jokaista eri negatiivisen arvon tapausta varten kävisi liian työlääksi. Eri yhdistelmiä varten pitäisi laatia 2^5 eri tekstiä, joten tingitään tällä kertaa esityksen kauneudesta. Teksteihin ja geometrisiin objekteihin on lisätty värejä, jotta niiden yhteys toisiinsa olisi selvempi. Valmis GeoGebra-malli on kuvassa 13.



Kuva 13: Pisteen P etäisyys suorasta Ax+By+C=0.

Harjoitustehtävä 11. *Laske suorien* $x + y = 1$*,* $x + y = 6$*,* $x - 3y = 1$ *ja* $x - 3y = -4$ *väliin jäävän alueen pinta-ala. (Yo-tehtävä 4/K2007, pitkä matematiikka.[30])*

3.4 Toisen asteen käyrät eli kartioleikkaukset

Määritelmä 3.19 (Kartioleikkaukset)**.** Sellaisia käyriä, joiden yhtälö on toista astetta oleva polynomiyhtälö, sanotaan toisen asteen käyriksi. Suorakulmaisessa koordinaatistossa kaikkia toisen asteen käyriä kutsutaan myös *kartioleikkauksiksi,* sillä kaikki käyrät voidaan muodostaa leikkaamalla ympyräkartion pintaa tasolla.

Toisen asteen käyrien yleinen muoto on

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

$$\begin{array}{llll} Jos & A = C \wedge B = 0 & \text{niin kuvaaja on} & \text{ympyrä,} \\ & B^2 - 4AC < 0, & \text{niin kuvaaja on} & \text{ellipsi,} \\ & B^2 - 4AC = 0 & \text{niin kuvaaja on} & \text{paraabeli,} \\ & B^2 - 4AC > 0 & \text{niin kuvaaja on} & \text{hyperbeli.[5]} \end{array}$$

Jos toisen asteen yhtälön $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ratkaisujoukko on piste, suora tai kaksi suoraa, kartioleikkaus on degeneroitunut; muut ovat niin kutsuttuja varsinaisia kartioleikkauksia.

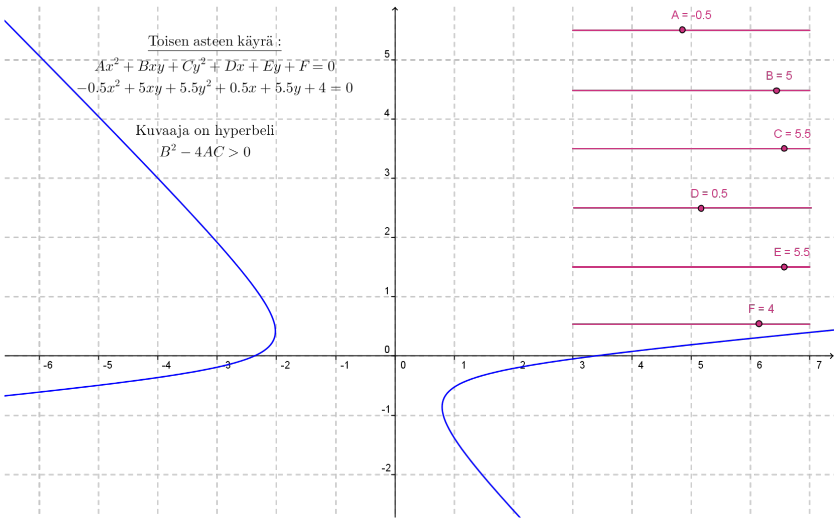
GeoGebralla voidaan laatia dynaaminen malli, jonka avulla voidaan tutkia parametrien A, B, C, D, E ja F vaikutusta toisen asteen yhtälön kuvaajaan. Tässä yhteydessä käytetään liukusäätimiä, joiden avulla parametrien arvoja voidaan vaihdella tietyllä välillä. Liukusäätimet luodaan *Liuku*-työvälineellä. *Nimi*-ruutuun annetaan parametrin nimi, esim. A, väliksi esim. Min:-7, Max:7, animaatioaskeleeksi 0.5 (jotta kokonaislukuarvojen säätäminen helpottuu) ja liu'un leveydeksi 200. Liu'un leveys tarkoittaa piirtoalueelle muodostuvan liukusäätimen leveyttä, ja animaatioaskel 0.5 tarkoittaa että parametrin arvoja voi säätää liukusäätimellä $0,5$ yksikön välein.

Kun kullekin parametrille on luotu oma liukusäätimensä, syötetään *syöttökenttään* $\mathbf{A * x^2 + B * x * y + C * y^2 + D * x + E * y + F = 0}$, jolloin piirtoalueelle muodostuu toisen asteen yhtälön kuvaaja. Nyt parametrien vaikutusta kuvaajaan voidaan tutkia säätämällä parametrien arvoja liukusäätimillä.

Luodaan vielä piirtoalueelle teksti, josta nähdään toisen asteen yhtälö sekä yleisessä muodossa että dynaamisten parametrien avulla esitettynä. Valitettavasti taas tulee eteen merkkiongelma plus- ja miinusmerkkien peräkkäisyyden kanssa, mutta annettakoon sen olla tällä kertaa. Vaihtoehtona olisi käyttää dynaamista yhtälöä, mutta GeoGebrassa yhtälö on muotoa $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = -F$, mikä ei ole edellä esitetyn määritelmän mukainen.

```
 "\begin{array}{c}
\text{Toisen asteen käyrä}\\
Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\\
"A"x^2+"B"xy+"C"y^2+"D"x+"E"y+"F"=0
\end{array}"
```

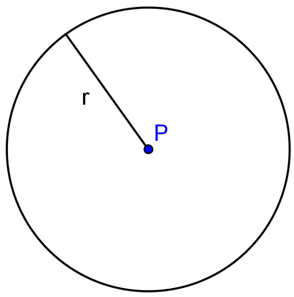
Lisäksi luodaan vielä tekstit, jotka ilmoittavat mikä kartioleikkausten erikoistapaus on kyseessä. Esimerkiksi: ”Kuvaaja on ympyrä, $A = C = 2 \wedge B = 0$”. Tekstin näyttämisehdoksi määritellään annettu ehto $\mathbf{A} = \mathbf{C} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Vastaavat tekstit laaditaan myös ellipseille, paraabeleille ja hyperbeleille. Koska ympyrä on ellipsin erikoistapaus, tulee ympyrää ja ellipsiä käsittelevät tekstit sijoittaa niin että ne eivät mene piirtoalueella päällekkäin. Kuvassa 14 on valmis GeoGebra-malli.



Kuva 14: Toisen asteen käyrät eli kartioleikkaukset.

3.4.1 Ympyrä

Määritelmä 3.20 (Ympyrä)**.** Ympyrä on tason käyrä, joka muodostuu kaikista niistä pisteistä, jotka ovat samalla etäisyydellä r kiinteästä pisteestä P. Piste P on ympyrän keskipiste ja vakioetäisyys r on ympyrän säde. [11]



Ennen analyyttisen geometrian kurssia ympyrää on käsitelty geometrian kurssilla, jossa on käsitelty yleisimmät ympyrään liittyvät nimitykset ja laskukaavat. Nyt tarkoituksena on käsitellä ympyrän yhtälöä koordinaatistossa.

Ympyrän määritelmän mukaan kaikki ympyrän pisteet ovat vakioetäisyydellä r ympyrän keskipisteestä $P = (x_P, y_P)$. Jos valitaan mielivaltainen piste $Q = (x, y)$, jonka etäisyys pisteestä P on r, niin kappaleessa 3.1.2 määriteltyä kahden pisteen välisen etäisyyden kaavaa käyttämällä saadaan $r = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2}$, josta edelleen saadaan alla oleva ympyrän keskipistemuotoinen yhtälö.

Määritelmä 3.21 (Ympyrän yhtälö, keskipistemuoto)**.** Olkoon piste $P = (x_P, y_P)$ ympyrän keskipiste ja r ympyrän säde. Nyt

$$(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 = r^2.$$

Huom. Kun ympyrän keskipiste sijaitsee origossa, ympyrän yhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

GeoGebrassa on valmis työväline *Ympyrä: keskipiste ja säde* ympyrän piirtämiseen keskipisteen ja tunnetun säteen avulla. Keskipisteen antamisen jälkeen avautuu automaattisesti ikkuna, johon syötetään säteen arvo.

Dynaamista mallia varten laaditaan ensin liukusäädin sädettä r varten. Liu'un r *väliksi* annetaan nyt Min:0, Max:10, sillä r ei voi saada negatiivisia arvoja. Liu'un leveydeksi annetaan 200. Kun liuku on valmis, piirretään piirtoalueelle mielivaltainen piste, joka välittömästi nimetään uudelleen nimellä P.

Nyt ympyrä voidaan piirtää *Ympyrä: keskipiste ja säde* -työvälineellä klikkaamalla ensin pistettä P, ja syöttämällä sitten avautuvaan ikkunaan säteeksi **r**. Ympyrän sijaintia voi nyt mielivaltaisesti muuttaa pistettä P liikuttamalla, ja ympyrän kokoa voi säätää liukusäätimellä.

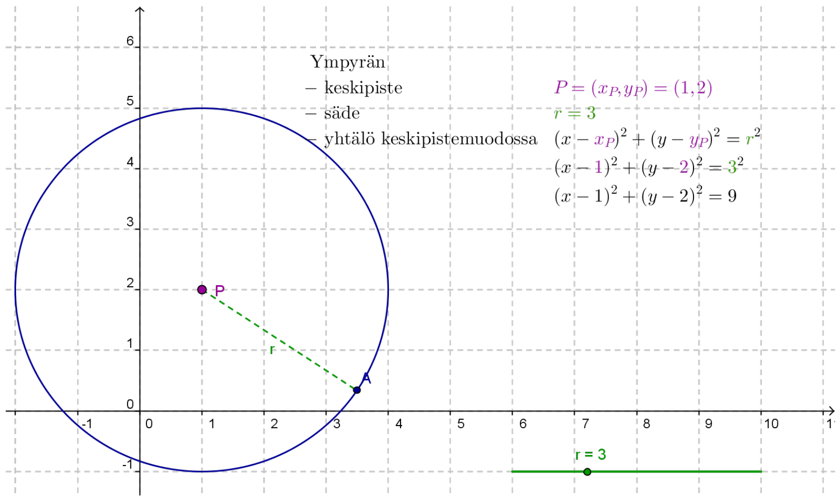
Muokataan pisteen P väriksi violetti, ja säteen r väriksi vihreä. Käytetään samoja värejä myös seuraavaksi laadittavassa tekstissä:

```
"\begin{array}{ll}
\text{ Ympyrän}    & \\
-\text{ keskipiste}&
 \textcolor{RedViolet}{P=(x_P, y_P)=("x(P)","y(P)")} \\
-\text{ säde}      &\textcolor{OliveGreen}{r="r"} \\
-\text{ yhtälö keskipistemuodossa}
 & (x-\textcolor{RedViolet}{x_P})^2
 +(y-\textcolor{RedViolet}{y_P})^2
 =\textcolor{OliveGreen}{r}^2 \\
       & (x-\textcolor{RedViolet}{"x(P)"})^2
               +(y-\textcolor{RedViolet}{"y(P)"})^2
        =\textcolor{OliveGreen}{"r"}^2\\
       &"c"
\end{array}"
```

Viimeisen rivin c on ympyrän yhtälö GeoGebran omana objektina. Varmista, että ympyrän *Ominaisuudet*-ikkunan *Algebra*-välilehdellä on valittu ympyrän yhtälön muoto $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$. Koska pisteen P koordinaatit x_P ja y_P voivat saada myös negatiivisia arvoja, tehdään rumien merkkiyhdistelmien välttämiseksi erilaisia tekstejä, joissa lisätään sulut negatiivisia arvoja saavien koordinaattien ympärille. Tässä tapauksessa vaihtoehtoja on vain neljä, yksi kutakin koordinaatiston neljännestä kohti, joten urakka on äärellinen. Kullekin tekstille asetetaan näkyvyysehdot asianmukaisesti.

Kuvaan lisätään vielä havainnollisuuden vuoksi säde r. Valitaan *Kahden pisteen välinen jana* -työväline ja piirretään säde klikkaamalla ensin pistettä P ja sitten ympyrän kehää. Näin syntyy myös piste A, joka on sidottu ympyrän kehälle ja näin ollen vapaasti siirreltävissä ympyrän kehällä. Säteen, eli janan PA nimeksi tulee automaattisesti a. Nyt sädettä ei voi nimetä uudelleen nimellä r, koska r on jo käytössä liukusäätimessä. Ongelma voidaan kiertää janan a *Ominaisuudet*-ikkunassa *Perusominaisuudet*-välilehdellä kirjoittamalla *Teksti*-ruutuun **r**, ja valitsemalla *Näytä nimi: Teksti*. Nyt siis janan nimi on edelleen a, mutta näkyvissä on ikään kuin nimenä r.

Nyt valmiina on dynaaminen GeoGebra-malli, kuvassa 15, jolla voidaan havainnollistaa keskipisteen sijainnin ja säteen pituuden vaikutusta ympyrän yhtälöön.



Kuva 15: Ympyrän yhtälö keskipisteen ja säteen avulla.

Toisen asteen käyrän yhtälöstä $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ saadaan ympyrän yhtälö yleisessä muodossa, kun otetaan huomioon ehdot $A = C$ ja $B = 0$.

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \quad ||A = C, B = 0 \\ Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F &= 0 \quad || : A \\ x^2 + y^2 + D/A\,x + E/A\,y + F/A &= 0 \end{aligned}$$

Nimeämällä parametrit uudelleen saadaan ympyrän yhtälö yleisessä muodossa.

Määritelmä 3.22 (Ympyrän yhtälö yleisessä muodossa)**.** Parametrien a, b ja c avulla saadaan suoran yhtälön yleiseksi muodoksi

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

GeoGebralla voidaan tutkia parametrien a, b ja c vaikutusta ympyrään muodostamalla ensin liukusäätimet kullekin parametrille erikseen. Koska parametrit voivat saada myös negatiivisia arvoja, määritellään liukujen väliksi esimerkiksi **Min** : **−7**, **Max** : **7**. Muokataan vielä kullekin liu'ulle oma väri. Kun liu'ut ovat valmiit, saadaan ympyrä piirrettyä kirjoittamalla *Syöttökenttään* **x^2 + y^2 + a ∗ x + b ∗ y + c = 0**.

Ympyrä piirtyy nyt ilman keskipistettä, mutta halutessaan keskipisteen saa määritettyä *Keskipiste*-työvälineellä yksinkertaisesti vain klikkaamalla ympyrän kehää. *Keskipiste*-työväline soveltuu monenlaisten keskipisteiden määrittämiseen, muun muassa kahden pisteen, janan tai erilaisten kartioleikkausten keskipisteen määritämiseen.

Ympyrän yhtälöä kuvaava teksti kirjoitetaan niin, että parametrien värit ovat samat kuin liukusäätimien värit. Eri näkyvyysehdoilla laaditaan kahdeksan eri tekstiä niin, että parametrien a, b ja c saadessa negatiivisia arvoja niiden edessä oleva '+'-merkki poistuu.

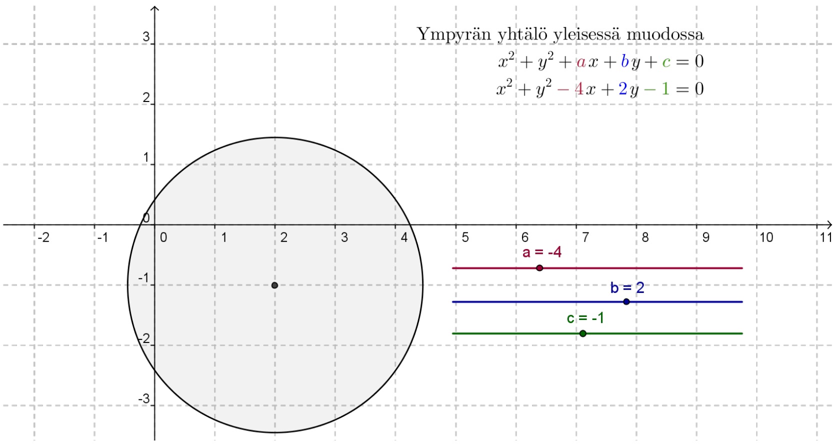
```
 "\begin{array}{r}
\text{Ympyrän yhtälö yleisessä muodossa} \\
x^2+y^2+\textcolor{Maroon}{a}\,x + \textcolor{Blue}{b}\,y
      + \textcolor{OliveGreen}{c}=0 \\
x^2+y^2+\textcolor{Maroon}{"a"}\,x + \textcolor{Blue}{"b"}\,y
   +\textcolor{OliveGreen}{"c"}=0
 \end{array}"
```

Jos kaikki parametrit a, b ja c saavat arvon nolla, ympyrä kutistuu pisteeksi origossa, joten laaditaan tätä varten vielä yksi teksti:

```
"\textcolor{Maroon}{a}=\textcolor{Blue}{b}
=\textcolor{OliveGreen}{c}=0
\text{, joten ympyrä kutistuu pisteeksi}"A"."
```

Koska ympyrään ei tässä mallissa tule sädettä tai mitään muutakaan visuaalista lisää, tuodaan ympyrää nyt muulla tavoin esiin piirtoalustasta. Valitaan ympyrän *Ominaisuudet*-ikkunan *Objektin tyyli* -välilehdeltä *Viivan paksuudeksi* 3 ja *Peittävyydeksi* 5. Nyt koko ympyrän pinta-ala näkyy vaalean harmaana, ja ympyrä erottuu näin paremmin taustasta.

Valmis GeoGebra-malli on kuvassa 16



Kuva 16: Ympyrän yhtälö yleisessä muodossa.

3.4.2 Ympyrä ja suorat – tangentit, normaalit, sekantit ja napasuorat

Suoralla ja ympyrällä voi olla kaksi, yksi tai ei yhtään leikkauspistettä. Leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 & \text{(Ympyrän yhtälö)} \\ ax+by+c = 0 & \text{(Suoran yhtälö)} \end{cases}$$

Jos yhtälöparin ratkaisuja on kaksi, niin suora leikkaa ympyrän kahdessa pisteessä. Tällöin leikkaavaa suoraa kutsutaan sekantiksi. Mikäli yhtälöparilla on vain yksi ratkaisu, niin suora vain sivuaa ympyrää niin että suoralla ja ympyrällä on ainoastaan yksi yhteinen piste. Tällöin suoraa kutsutaan ympyrän tangentiksi. Jos suora ja ympyrä eivät leikkaa, ei yhtälöparillakaan ole ratkaisuja.

Napasuora voi leikata ympyrää millä tahansa edellä mainitulla tavalla, mutta sen määrittämiseen tarvitaan napapiste Q', joka on mielivaltaisen, ympyrän keskipisteestä poikkeavan pisteen Q inversio ympyrän suhteen.

Määritelmä 3.23 (Ympyrän tangentti)**.** Ympyrän tangentti on suora, joka sivuaa ympyrää ainoastaan yhdessä pisteessä. Ympyrällä ja sen tangentilla on siis yksi yhteinen piste. Tangentin etäisyys ympyrän keskipisteestä on näin ollen oltava ympyrän säteen suuruinen. Tangentti ja sivuamispisteeseen piirretty säde ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta voidaan aina piirtää ympyrälle kaksi tangenttia.[9]

Jos tangentti sivuaa origokeskistä ympyrää pisteessä $T = (x_T, y_T)$, niin tällöin tangentin yhtälö on muotoa

$$y - y_T = -\frac{x_T}{y_T}(x - x_T).$$

Määritelmä 3.24 (Ympyrän sekantti)**.** Sekantti on suora, joka leikkaa ympyrän kahdessa eri pisteessä. Sekantin yhtälö voidaan määrittää tutulla 'suora kahden pisteen kautta' -kaavalla kun leikkauspisteet tunnetaan.

Määritelmä 3.25 (Ympyrän normaali)**.** Ympyrän normaali pisteessä $T = (x_T, y_T)$ on sellainen suora, joka on kohtisuorassa ympyrän tangenttia vastaan. Ympyrän normaali kulkee aina ympyrän keskipisteen kautta. Näin ollen normaali on siis eräs sekantin erikoistapaus.

Origokeskisen ympyrän pisteeseen $T = (x_T, y_T)$ piirretyn normaalin yhtälö on muotoa

$$y - y_T = \frac{y_T}{x_T}(x - x_T).$$

Normaalin yhtälö voidaan määrittää myös käyttäen kaavaa 'suora kahden pisteen kautta':

$$y - y_T = \frac{y_O - y_T}{x_O - x_T}(x - x_T),$$

missä $O = (x_O, y_O)$ on ympyrän keskipiste.

Määritelmä 3.26 (Ympyrän napapiste)**.** Olkoon piste $O = (x_O, y_O)$ ympyrän keskipiste ja piste $Q = (x_Q, y_Q)$ mielivaltainen tason piste, $O \neq Q$. Pisteen Q inversiopiste $Q' = (x_{Q'}, y_{Q'})$ on ympyrän napapiste, joka toteuttaa ehdon $|OQ| \cdot |OQ'| = r^2$, missä r on ympyrän säde. Molemmat pisteet, Q ja Q', sijaitsevat samalla ympyrän normaalilla.

Määritelmä 3.27 (Ympyrän napasuora)**.** Olkoon pisteet Q, Q' ja O määritelty kuten edellä. Ympyrän napasuora on suora, joka on kohtisuorassa pisteiden Q, Q' ja O kautta piirrettyä suoraa vastaan ja kulkee pisteen Q kautta.

Jos napapiste Q' sijaitsee ympyrän ulkopuolella, niin napapisteen kautta voidaan piirtää kaksi ympyrän tangenttia. Olkoon ympyrän ja tangenttien leikkauspisteet N ja N'. Tällöin napasuora kulkee pisteiden N ja N' kautta.

Jos napapiste Q' sijaitsee ympyrän kehällä, $|OQ'| = r$ niin myös Q sijaitsee ympyrän kehällä. Tällöin napasuora on ympyrän tangentti.

Jos napapiste Q' on ympyrän sisällä, niin napasuora on ympyrän ulkopuolella.

Jos piste B on pisteen A napasuoralla, niin piste A on pisteen B napasuoralla.

Rakennetaan yhteinen GeoGebra-malli kaikille ympyrään liittyville suorille. Ensin on selvästikin piirrettävä ympyrä. Ympyrän piirtämistä varten on GeoGebrassa neljä työvälinettä: '*Ympyrä: keskipiste ja kehän piste*', '*Ympyrä: keskipiste ja säde*', '*Harppi*' ja '*Ympyrä: kolme kehän pistettä*'. Valitaan niistä työväline *Ympyrä: Keskipiste ja kehän piste*. Klikkaamalla kahta mielivaltaista pistettä piirtoalueella piirtyy ympyrä, jonka keskipiste nimetään kirjaimella O.

Tangenttien määrittämistä varten on oma työväline, *Tangentit*, jolla molempien tangenttien piirtäminen onnistuu klikkaamalla ensin jotain piirtoalueen pistettä ja sitten ympyrän kehää. Tangenttien leikkauspistettä B siirtelemällä huomataan, että tangentteja on aina kaksi jos B on ympyrän ulkopuolella; yksi, jos B on ympyrän kehällä; ei yhtään, jos B on ympyrän kehän sisäpuolella. Lisätään vielä *Kahden pisteen välinen jana* -työvälineellä säteet näkyviin tangenttien ja ympyrän leikkauspisteisiin. Jos molemmille halutaan näkyviin "r", on toisen säteen *Ominaisuudet*-ikkunassa kirjoitettava *Teksti*: r ja valittava *Näytä nimi: Teksti*.

Muokataan objektien värejä, ja laaditaan *näytä/piilota-valintaruutu* 'Näytä tangentit', johon valitaan kaikki tangentteihin liittyvän objektit.

Sekantin piirtämistä varten määritellään ympyrän kehälle kaksi pistettä P_S ja P'_S työvälineellä *Piste objektilla*. Sekantin s saa helposti piirrettyä *Suora kahden pisteen kautta* -työvälineellä klikkaamalla molempia pisteitä. Sekantillekin tehdään oma *näytä/piilota-valintaruutu* johon valitaan sekantti s sekä pisteet P_S ja P'_S.

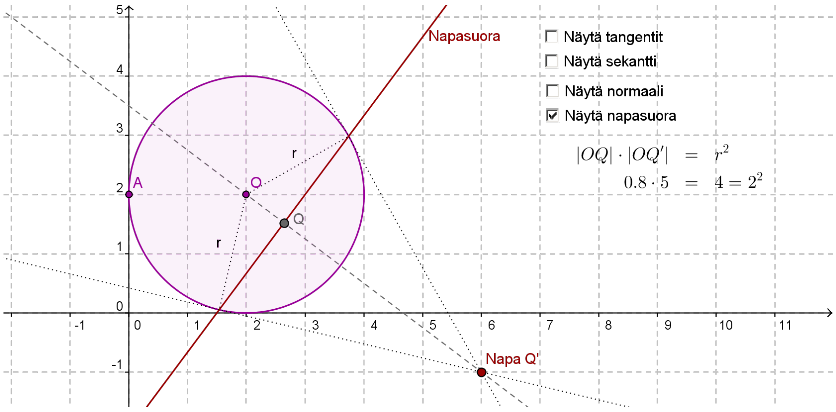
Napasuoraa varten tehdään ensin piirtoalueelle piste Q'. GeoGebrassa on valmis työväline *Napasuora* napasuoran määrittämiseen. Napasuora piirtyy klikkaamalla ensin pistettä Q' ja sitten ympyrän kehää. Käyttämällä samaa työvälinettä, mutta klikkaamalla napasuoraa ja ympyrän kehää piirtyy suora, jolla ympyrän keskipiste K, napa Q' ja sen inversiopiste Q sijaitsevat. Pisteen Q saa nyt helposti näkyviin *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä.

Piirtämällä *Tangentit*-työvälineellä pisteen Q kautta kulkevat ympyrän tangentit huomataan, että ne tosiaan leikkaavat ympyrän samoissa pisteissä kuin napasuora. Lisätään vielä havainnollistava teksti pisteiden O, Q ja Q' seuraavasti:

```
"\begin{array}{rcl}
|OQ| \cdot |OQ'| & = & r^2 \\
"etäisyysOQ"\cdot"etäisyysOQ'" & = & "r^2"="r"^2 \\
\end{array}".
```

Kuvassa 17 on esitetty ainoastaan napasuora-osuus valmiista GeoGebramallista.

Harjoitustehtävä 12. *Etsi yhtälö ympyrälle, jonka kehällä ovat pisteet* $A = (3, 2)$, $B = (9, 3)$ *ja* $C = (4, -4)$.



Kuva 17: Ympyrä ja suorat – kuvassa napasuora.

Harjoitustehtävä 13. *Ympyrän keskipiste on* $(-4, 2)$ *ja ympyrän tangentin yhtälö on* $3x + 4y - 16 = 0$*. Määritä ympyrän yhtälö. [14]*

Harjoitustehtävä 14. *Olkoon* $x_0^2 + y_0^2 = 1$*. Osoita, että* $x_0x + y_0y = 1$ *on ympyrän* $x^2 + y^2 = 1$ *tangentti. Mitkä ovat sivuamispisteen koordinaatit? (Yo-tehtävä 11/K2003, pitkä matematiikka.[30])*

3.4.3 Paraabeli

Määritelmä 3.28 (Paraabeli)**.** Olkoon suora l jokin mielivaltainen suora xy-tasossa, sekä piste F mielivaltainen piste suoran ulkopuolella. Pisteet, jotka ovat yhtä etäällä sekä polttopisteestä F että johtosuorasta l, muodostavat toisen asteen käyrän, jota kutsutaan paraabeliksi. Polttopisteen F kautta kulkeva johtosuoran l normaali on paraabelin akseli, jonka suhteen paraabeli on symmetrinen. Paraabelin huipuksi kutsutaan pistettä, jossa paraabeli leikkaa akselinsa.

Yleisen toisen asteen polynomiyhtälön $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$ kuvaaja on paraabeli, kun $B^2 - 4AC = 0$.

Mikäli paraabelin johtosuora l on koordinaattiakselien suuntainen, niin paraabelin yhtälölle saadaan yksinkertaisempi muoto. Jos lisäksi paraabelin akselina on koordinaattiakseli, niin yhtälö yksinkertaistuu edelleen.

- Jos johtosuora on x-akselin suuntainen, niin paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$.
  - Jos lisäksi paraabelin akseli on y-akseli, niin paraabelin yhtälö yksinkertaistuu muotoon $y = ax^2 + c$.
  - Jos $a > 0$, niin paraabeli on ylöspäin aukeneva.
  - Jos $a < 0$, niin paraabeli on alaspäin aukeneva.
- Jos johtosuora on y-akselin suuntainen, niin paraabelin yhtälö on muotoa $x = ay^2 + by + c$.
  - Jos lisäksi paraabelin akseli on x-akseli, niin paraabelin yhtälö yksinkertaistuu muotoon $x = ay^2 + c$.
  - Jos $a > 0$, niin paraabeli on oikealle aukeneva.
  - Jos $a < 0$, niin paraabeli on vasemmalle aukeneva.

GeoGebralla piirretään *Uusi piste* -työvälineellä kaksi pistettä, pisteet A ja B. *Suora kahden pisteen kautta* -työvälineellä piirretään sitten pisteiden A ja B kautta suora, joka nimetään uudelleen kirjaimella l. Tämän jälkeen piirretään vielä suoran ulkopuolelle yksi uusi piste, joka nimetään uudelleen kirjaimella F. Nyt paraabeli saadaan piirrettyä käyttämällä *Paraabeli*-työvälinettä. Kun klikataan suoraa l ja pistettä F, niin piirtolalueelle piirtyy dynaaminen paraabeli. Kun pisteitä A, B ja F liikutetaan, voidaan tutkia johtosuoran l ja polttopisteen F sijainnin vaikutusta paraabelin muotoon ja sijaintiin.

Paraabeli määriteltiin niin, että sen pisteet ovat yhtä etäällä sekä johtosuorasta l että polttopisteestä F. Lsätään GeoGebra-malliin dynaaminen objekti, joka havainnollistaa tämä ominaisuutta.

Piirretään ensin *Piste objektilla* -työvälineellä mielivaltainen piste paraabelille. Nimetään piste uudelleen kirjaimella P. Seuraavaksi piirretään pisteiden F ja P välille jana *Kahden pisteen välinen jana* -työvälineellä. Pisteen P ja johtosuoran l välistä etäisyyttä havainnollistavaa janaa ei saada yhtä helposti määritettyä, vaan ensin on piirrettävä suoran l normaali, joka kulkee pisteen P kautta. Tämä onnistuu *Normaali*-työvälineellä klikkaamalla ensin pistettä P ja sitten suoraa l. Määritellään suoran l ja sen normaalin leikkauspiste *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä, ja nimetään se uudelleen kirjaimella Q. *Kahden pisteen välinen jana* -työvälineellä piirretään nyt jana $\overline{PQ}$ ja piilotetaan sitten jatkon kannalta turha normaali. Korostetaan janan $\overline{PQ}$ ja suoran l kohtisuoruutta merkitsemällä *Kulma*-työvälineellä näkyviin niiden välinen suora kulma. Kulman *Ominaisuudet*-välilehdellä poistetaan valinta *Salli kupera kulma*, jotta kuvaajia käännellessä kulma saa arvon 90° eikä 270°.

Lisätään kuvaan vielä paraabelin akseli, joka on siis polttopisteen F kautta kulkeva johtosuoran l normaali. Akselin tyyliksi valitaan katkoviiva, jotta dynaamisessa konstruktiossa se erottuu hyvin varsinaisesta paraabelista. Kuvan selkeyttä voi vielä parantaa valitsemalla paraabelille, janoille ja suoralle l eri värit.

Janojen $\overline{FP}$ ja $\overline{PQ}$ pituudet saadaan näkyviin *Etäisyys tai pituus* -työvälineellä klikkaamalla janoja. Nyt voidaan pisteitä A, B, F ja P liikutella mielivaltaisesti piirtoalueella, ja näin havaitaan että janat $\overline{FP}$ ja $\overline{FP}$ ovat yhtä pitkät aina. Tätä voidaan vielä korostaa *Ominaisuudet*-ikkunan *Koristelu*-välilehdellä valitsemalla janan tyyliksi: ——+——.

Sitten lisätään vielä piirtoalueelle informatiivisia tekstejä, mallit alla. Kahta ensimmäistä lukuunottamatta tekstien sijainniksi määritellään *Ominaisuudet*-ikkunan *Paikka*-välilehdellä $(3, 1)$. Näin paraabelin "erikoistapauksia" kuvailevat tekstit tulevat aina samaan kohtaan.

- `"|\overline{FP}| = |\overline{PQ}| =" PF`
- `"Paraabelin\; yhtälö:\; "c`, missä c on paraabeli-objektin nimi GeoGebrassa.
- `Ylöspäin\; aukeava\; paraabeli\; y=ax^2+bx+c,\; a>0` , näkyvyysehto: $(y(A) = y(B)) \wedge (y(F) > y(A)) \wedge (x(F) \neq 0)$
- `Ylöspäin\; aukeava\; paraabeli\; y=ax^2+c,\; a>0` , näkyvyysehto: $(y(A) = y(B)) \wedge (y(F) > y(A)) \wedge (x(F) = 0)$

- `Alaspäin\; aukeava\; paraabeli\; y=ax^2+bx+c,\; a<0` , näkyvyysehto: $(y(A) = y(B)) \wedge (y(F) > y(A)) \wedge (x(F) \neq 0)$

- `Alaspäin\; aukeava\; paraabeli\; y=ax^2+c,\; a<0` , näkyvyysehto: $(y(A) = y(B)) \wedge (y(F) > y(A)) \wedge (x(F) = 0)$

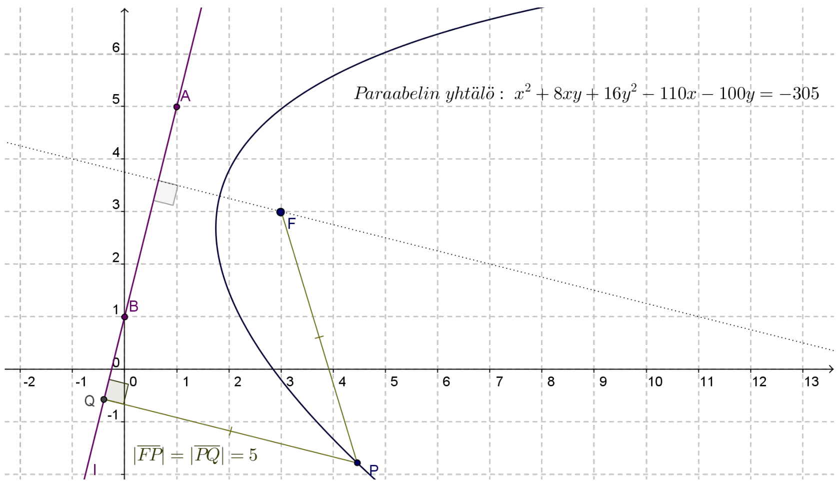
- `Oikealle\; aukeava\; paraabeli\; x=ay^2+by+c,\; a>0` , näkyvyysehto: $(x(A) = x(B)) \wedge (x(F) > x(A)) \wedge (y(F) \neq 0)$

- `Oikealle\; aukeava\; paraabeli\; x=ay^2+c,\; a>0` , näkyvyysehto: $(x(A) = x(B)) \wedge (x(F) > x(A)) \wedge (y(F) = 0)$

- `Vasemmalle\; aukeava\; paraabeli\; x=ay^2+by+c,\; a<0` , näkyvyysehto: $(x(A) = x(B)) \wedge (x(F) < x(A)) \wedge (y(F) \neq 0)$

- `Vasemmalle\; aukeava\; paraabeli\; x=ay^2+c,\; a<0` , näkyvyysehto: $(x(A) = x(B)) \wedge (x(F) < x(A)) \wedge (y(F) = 0)$

Valmis dynaaminen GeoGebra-konstruktio on esitetty kuvassa 18.



Kuva 18: Paraabeli.

3.4.4 Paraabeli, akseli koordinaattiakselin suuntainen

Kuten jo aiemmin mainittiin, paraabelien erikoistapauksia ovat sellaiset paraabelit joiden johtosuorat ovat koordinaattiakselien suuntaisia. Nämä erikoistapaukset jaotellaan kahteen ryhmään sen mukaan, onko johtosuora x- vai y-akselin suuntainen. Paraabelin akseli on tällöin vastakkaisen koordinaattiakselin suuntainen.

Määritelmä 3.29 (Ylöspäin tai alaspäin aukeava paraabeli)**.** Paraabelin yhtälö on perusmuodossa

$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$$

ja sen akseli on y-akselin suuntainen. Paraabeli aukeaa ylöspäin jos $a > 0$ ja alaspäin, jos $a < 0$. Paraabelin huipun x-koordinaatti on $x = \frac{-b}{2a}$.

Jos paraabelin akseli on y-akseli, niin yhtälö yksinkertaistuu muotoon $y = ax^2 + c,\ a \neq 0$. Paraabelin huipun x-koordinaatti on tällöin $x = 0$, ja paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä $(0, c)$.

Määritelmä 3.30 (Oikealle tai vasemmalle aukeava paraabeli)**.** Paraabelin yhtälö on perusmuodossa

$$x = ay^2 + by + c,\ a \neq 0,$$

ja sen akseli on x-akselin suuntainen. Paraabeli aukeaa oikealle jos $a > 0$ ja vasemmalle, jos $a < 0$. Paraabelin huipun y-koordinaatti on $y = -\frac{b}{2a}$.

Jos paraabelin akseli on x-akseli, niin yhtälö yksinkertaistuu muotoon $x = ay^2 + c,\ a \neq 0$. Paraabelin huipun y-koordinaatti on tällöin $y = 0$, ja paraabeli leikkaa x-akselin pisteessä $(c, 0)$.

Laaditaan dynaaminen GeoGebra-malli, jolla voidaan tutkia parametrien a, b ja c vaikutusta paraabelin ulkoasuun.

Ensin määritellään liukusäätimet a, b ja c *Liuku*-työvälineellä. Liukujen *Väliksi* annetaan Min:-10 Max:10, *Pituudeksi* 200 ja *Animaatioaskeleen pituudeksi* 0.5.

Nyt voidaan piirtää paraabeli $y = x^2 + bx + c$ kirjoittamalla *Syöttökenttään*: $\mathbf{y = a * x^2 + b * x + c}$. Nimetään paraabeli nimellä py. Vastaavasti piirretään myös paraabeli $\mathbf{x = a * y^2 + b * y + c}$, ja annetaan sille nimi px.

Lisätään piirtoalueelle tekstit kuvaamaan paraabeleita. Laaditaan omat tekstit sekä ylös- että alaspäin aukeavalle paraabelille, ja sekä oikealle että vasemmalle aukeavalle paraabelille. Alla esimerkki ensimmäisestä tapauksesta:

```
"\begin{array}{l}
Ylöspäin\; aukeava\; paraabeli   \\
y=\textcolor{RoyalBlue}{a}x^2 + \textcolor{Magenta}{b}x
  + \textcolor{PineGreen}{c}     \\
y=\textcolor{RoyalBlue}{"a"}x^2 + \textcolor{Magenta}{("b")}x
  + \textcolor{PineGreen}{("c")} \\
"py"
\end{array}"
```

Jotta halutessaan voi tarkastella vain jompaa kumpaa paraabelia, lisätään piirtoalueelle *näytä/piilota-valintaruudut.* "Näytä paraabeli $y = ax^2 + bx + c$" valintaruutuun sidotaan objektilistasta paraabeli py sekä siihen liittyvät tekstit. Vastaavasti "Näytä paraabeli $x = ay^2 + by + c$" valintaruutuun sidotaan objektilistasta paraabeli px sekä siihen liittyvät tekstit.

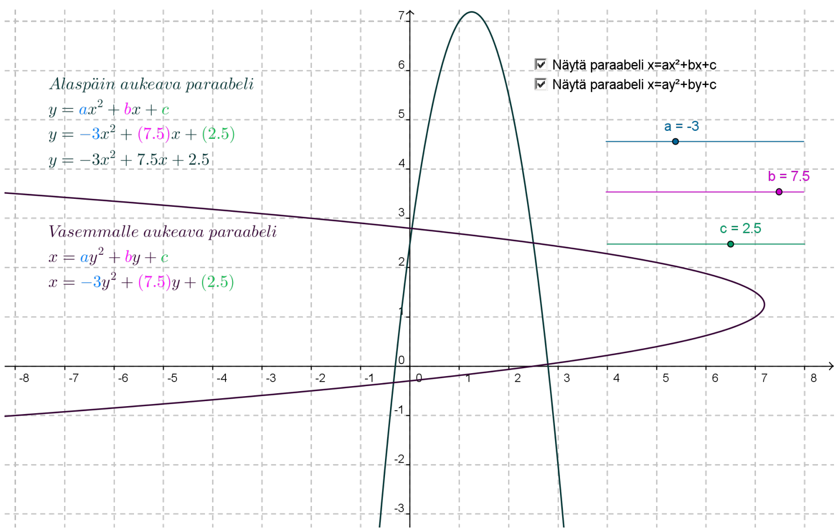
Nyt kaikkien tekstien *Näyttämisehtona* on jompikumpi looginen arvo. Lisätään näyttämisehtoihin vielä $\wedge(a > 0)$ tai $\wedge(a < 0)$ sen mukaan, kumman ehdon mukainen teksti on kyseessä. Tämän jälkeen kummallekin paraabelille näkyy vain yksi teksti kerrallaan ja tekstit häviävät kokonaan näkyvistä jos kyseessä ovat niin kutsutut degeneroituneet paraabelit, joiden kuvaajat ovatkin suoria. (Kuvaajat ovat suoria aina kun $a = 0$.) Koska suoria ja niiden yhtälöitä on jo käsitelty aiemmin, emme lisää enää tähän konstruktioon suorien yhtälöitä vaan keskitymme paraabeleihin.

Kuvassa 19 on valmis GeoGebra-konstruktio.

Harjoitustehtävä 15. *Paraabelin akseli on koordinaattiakselin suuntainen. Paraabeli leikkaa x-akselin kohdissa $x = 0$ ja $x = 8$, ja paraabelin huipun y-koordinaatti on 8. Johda paraabelin yhtälö.*

3.4.5 Ellipsi

Jos ympyräpohjaisen kartion pintaa leikataan tasolla vinosti kartion akselia vastaan, syntyy kartioleikkaus, jota kutsutaan ellipsiksi. Ellipsi on suljettu toisen asteen käyrä. Ympyrä on eräs ellipsin erikoistapaus.



Kuva 19: Paraabelit $y = ax^2 + bx + c$ ja $x = ay^2 + by + c$.

Määritelmä 3.31 (Ellipsi)**.** Olkoon tasossa kaksi pistettä F ja F'. Olkoon lisäksi piste P sellainen piste, jonka etäisyys pisteeseen F' on PF' ja etäisyys pisteeseen F on PF. Ellipsin muodostavat sellaiset pisteet, joille etäisyyksien summa on vakio, $PF' + PF = 2a$, missä $2a$ on isoakselin pituus. Isoakseli on ellipsin pidempi symmetria-akseli, lyhyempää kutsutaan pikkuakseliksi. Pikkuakselin pituus on $2b$. Pisteitä F ja F' kutsutaan ellipsin polttopisteiksi.

Polttopisteitä sekä akseleita yhdistää symmetrian ja Pythagoraan lauseen mukaan:

$$|\frac{1}{2}FF'|^2 = a^2 - b^2.$$

Jos polttopisteen etäisyyttä keskipisteestä merkitään kirjaimella c, saadaan $a^2 = b^2 + c^2$.

Ellipsin yleinen yhtälö on

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{missä} B^2 - 4AC < 0.$$

Ellipsin eksentrisyys, e, on sen polttopisteiden välimatkan suhde ellipsin isoakselin pituuteen, $0 \leq e < 1$. Mitä suurempi suhde e on, sitä pitkänomaisempi on ellipsi. Mikäli polttopisteet yhtyvät, kyseessä on ympyrä jonka eksentrisyys on selvästi nolla.

Vastaavasti kuin paraabeleilla, myös ellipseillä on niin sanottu johtosuora. Itse asiassa, koska ellipsillä on kaksi polttopistettä, niin myös johtosuoria on kaksi kappaletta, l ja l'. Johtosuorat ovat aina kohtisuorassa ellipsin isoakselia vastaan. 'Johtojana' olisi tosiasiassa tarkempi ilmaus, sillä ellipsi on suljettu käyrä, jonka 'johtojanan' pituus tarkalleen sama kuin pikkuakselin, eli $2b$.

Paraabelin määriteltiin olevan niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys sekä polttopisteestä että johtosuorasta on sama. Ellipsin tapauksessa mielivaltaisen pisteen P etäisyys polttopisteestä F ja johtosuorasta l ei ole sama, mutta niiden suhde on vakio: eksentrisyys e:

$$e = \frac{|FF'|}{2a} = \frac{|PF|}{d(P, l)}.$$

Tutustumme ensin sellaisen ellipsin yhtälöön, jossa ellipsin keskipiste on origossa ja akselit ovat koordinaattiakseleilla. Tutkitaan ensin tapausta, jolloin isoakseli on x-akselilla.

Olkoon ellipsin keskipiste piste origossa ja polttopisteet $F = (c, 0)$ sekä $F' = (-c, 0)$. Ellipsin isoakselin pituus on $2a$ ja piste $P = (x, y)$ on mielivaltainen ellipsin piste. Ellipsin määritelmästä johtuen on nyt

$$\begin{aligned}
PF + PF' &= 2a \\
\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a - \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} \qquad ||()^2 \\
(x-c)^2 + \cancel{y^2} &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + \cancel{y^2} \\
\cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} \\
-4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad || : 4, ()^2 \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2c^2 + a^4 \qquad || : a^2(a^2 - c^2) \\
\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1, \qquad \text{missä } a > c.
\end{aligned}$$

Koska $a^2 - c^2 = b^2$, niin origokeskisen ellipsin – jonka isoakseli on x-akselilla – yhtälö saadaan ilmaistua isoakselin puolikkaan a ja pikkuakselin puolikkaan b avulla:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vastaavasti, jos origokeskisen ellipsin isoakseli on y-akselilla, niin yhtälö on muotoa

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

.

Mikäli ellipsin akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, mutta keskipiste sijaitsee jossain muualla kuin origossa, esim. pisteessä $K = (x_K, y_K)$, niin ellipsin yhtälö on tällöin muotoa:

- $\frac{(x-x_K)^2}{a^2} + \frac{(y-y_K)^2}{b^2} = 1$ jos isoakseli on x-akselin suuntainen
- $\frac{(x-x_K)^2}{b^2} + \frac{(y-y_K)^2}{a^2} = 1$ jos isoakseli on y-akselin suuntainen.
- $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F$, missä $A \wedge C < 0$ tai $A \wedge C > 0$ (Yleinen muoto).

Laaditaan GeoGebralla malli, jonka avulla voidaan tutustua ellipsin eri ominaisuuksiin. Mielivaltaisen ellipsin piirtämiseen on GeoGebrassa oma työväline, *Ellipsi*. Tällä työvälineellä saa ellipsin piirrettyä klikkaamalla ensin piirtoalueella kohtia, johon polttopisteet sijoittuvat, ja tämän jälkeen jotain ellipsin kehän pistettä. GeoGebra luo piirtoalueelle dynaamisen ellipsin, jonka kaikkia kolmea määrittelypistettä voi nyt siirrellä.

Nimetään seuraavaksi polttopisteet uudelleen nimillä F ja F'.

Polttopisteiden kautta piirretään suora p. *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä määritellään suoran ja ellipsin leikkauspisteet. Näiden pisteiden välillä määritellään *Kahden pisteen välinen jana*, joka on nyt ellipsin isoakseli. Pikkuakseli saadaan piirrettyä käyttäen työvälinettä *Keskinormaali*. Työväline piirtää normaalin janan keskipisteen kautta, kun klikataan janaa tai janan päätepisteitä. Määritellään uuden janan ja ellipsin leikkauspisteet kuten edellä, ja piirretään niiden välille jana, pikkuakseli. Vaihdetaan polttopisteiden kautta kulkevan suoran tyyliksi pisteviiva, ja piilotetaan normaali näkyvistä.

Seuraavaksi määritellään ellipsin eksentrisyys e. Sen määrittämiseksi tarvitaan polttopisteiden välinen etäisyys FF' sekä isoakselin pituus $2a$. GeoGebralla nämä saa helposti esiin *Etäisyys tai pituus* -työvälineellä klikkaamalla janojen päätepisteitä. Eksentrisyys saadaan laskettua kirjoittamalla *Syöttökenttään* $\mathbf{e = etäisyysF'F/etäisyysEE'}$, missä nyt E ja E' ovat isoakselin päätepisteet. Piirtoalueelle lisätään teksti `"e=\frac{|FF'|}{2a}=\frac{"etäisyysF'F "}{"(2a)"}="e`.

Määritetään seuraavaksi mielivaltainen ellipsin piste P klikkaamalla ellipsiä *Piste objektilla* -työvälineellä. Piirretään sitten janat PF ja PF' *Kahden pisteen välinen jana* -työvälineellä. Janojen pituudet saa näkyviin *Etäisyys tai pituus* -työvälineellä klikkaamalla janojen päätepisteitä. Ellipsin määritelmän mukaan janojen pituuksien summa on aina vakio, joten lisätään tämä oleellinen teksti piirtoalueelle seuraavasti:

```
"\begin{eqnarray}
\overline{PF} &=& "etäisyysPF  " \\
\overline{PF'}&=& "etäisyysPF' " \\
\overline{PF}+\overline{PF'} &=&"(etäisyysPF+etäisyysPF')"=2a
\end{eqnarray}"
```

Johtosuoran l määrittämistä varten tehdään ensin uusi jana PF. Koska janaa PF tarvitaan ellipsin monen eri ominaisuuden määrittelyyn, on tulevia *näytä/piilota-valintaruutuja* ajatellen hyvä että niitä on käytössä useampia. Nyt pisteen P etäisyys johtosuorasta l on oltava $d = e|PF|$. Johtosuora on kohtisuorassa polttopisteiden kautta piirrettyä suoraa p vastaan, joten pisteen P etäisyyden määrittämiseen tarvitaan suoran p kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen P kautta. Luonnollisesti tämä onnistuu *Yhdensuuntainen* -työvälineellä. Juuri piirretyn suoran ja johtosuoran välinen leikkauspiste saadaan määritettyä käyttäen pientä kepulikonstia: määritetään ensin *Ympyrä: keskipiste ja säde* -työvälineellä ympyrä, jonka keskipiste on P ja säde, joka syötetään avautuvaan ikkunaan, **etäisyysPF/e**. Nyt ympyrä on siis dynaaminen objekti, jonka säteen suuruus muuttuu kun pistettä P liikutetaan tai ellipsin muotoa muutetaan. Määritetään ympyrän ja suoran leikkauspisteet ja piilotetaan tämän jälkeen ympyrä sekä ylimääräinen leikkauspiste näkyvistä. Jäljelle jäävä leikkauspiste nimetään uudelleen kirjaimella L, ja tämän jälkeen määritetään jana PL. Pisteen L kautta piirretään suoran p normaali, eli ellipsin johtosuora l.

Piirtoalueelle lisätään vielä teksti

```
"\begin{eqnarray}
 \overline{PF} & = & e \overline{PL} \\
 "etäisyysPF" & = & "e" \cdot "etäisyysPL"
\end{eqnarray}"
```

Johtosuoran l' määrittämisen voi suorittaa samalla tavalla kuin johtosuoran l, mutta ellipsin symmetriaa hyödyntäen voimme hieman oikaista. Käytetään työvälinettä *Peilaus suoran suhteen*. Työväline toimii niin, että klikataan ensin objektia joka halutaan peilata, esimerkiksi suoraa l, ja tämän jälkeen suoraa jonka suhteen peilaus suoritetaan. Tässä tapauksessa peilaus suoritetaan ellipsin pikkuakselin suhteen. GeoGebra nimeää automaattisesti peilatut objektit samalla kirjaimella kuin alkuperäiset objektit, mutta pilkulla erotettuna. Esimerkiksi juuri peilattu suora on automaattisesti haluttu l'. Nyt täytyy ottaa huomioon, että kun pistettä P liikuttaa ellipsillä, niin myös piste P' liikkuu vastaavasti.

Peilataan kaikki tarvittavat objektit. Peilauksen aikana saattaa syntyä turhia peilauspisteitä, esimerkiksi F_1', mutta nämä voi huoletta piilottaa näkyvistä. Teksti lisätään samoin kun edellä.

Nyt dynaamisessa ellipsi-mallissa on kaikki olennaiset ominaisuudet, mutta lopputulos on kieltämättä hieman sekava. Sekavuutta vähennetään määrittämälllä objekteille eri tyylejä ja värejä, sekä luomalla piirtoalueelle *näytä/piilota-valintaruutuja* joiden avulla ylimääräiset objektit voi piilottaa. Värit on hyvä muokata ennen valintaruutujen luomista, näin oikeiden objektien etsiminen suuresta objektien joukosta on helpompaa. Mikäli jokin objekti unohtuu listasta, voi sen jälkeenpäin lisätä kirjoittamalla objektin *Näyttämisehto*-ruutuun *loogisen arvon* kirjaimen. Oikean kirjaimen voi tarkistaa esimerkiksi pitämällä hiiren kursoria oikean *näytä/piilota valintaruudun* päällä, jolloin kyseisen ruudun nimi korostuu *Ominaisuudet*-ikkunan vasemmassa reunassa olevassa listassa. Tarvittaessa avaa lista klikkaamalla – -merkkiä tekstin *Looginen arvo* edessä.

Vielä puuttuu yksi olennainen asia, eli ellipsin yhtälö. Laaditaan viisi erilaista ellipsin yhtälöä: yksi yleinen yhtälö ja kaksi yhtälöä sekä origokeskiselle että piste $K = (x_K, y_K)$-keskiselle ellipsille sen mukaan, onko isoakseli x- vai y-akselin suuntainen. Oletuksena GeoGebrassa on mahdollista valita ellipsin yhtälö joko muodossa $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$ tai $(x-m)^2/a^2 + (y-n)^2/b^2 = 1$. Kumpikaan vaihtoehdoista ei ole järin kaunis, mutta valitaan esitysmuodoksi jälkimmäinen. Valinta onnistuu ellipsin *Ominaisuudet*-ikkunan *Algebra*-välilehdellä. GeoGebra muuttaa automaattisesti muodon ensin esitettyyn muotoon, jos kaavasta ei tule tarpeeksi sievää.

Kirjoitetaan teksti

```
"\begin{array}{l}
\underline{Ellipsin\; yhtälö}: \\
         Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F \\
         "c"
\end{array}",
```

missä c on ellipsi-objektin nimi. Tälle tekstille annetaan näkyvyysehdoksi $(\mathbf{x}(\mathbf{F}) \neq \mathbf{x}(\mathbf{F}')) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{F}) \neq \mathbf{y}(\mathbf{F}'))$. Tämä takaa sen, että tämä kaava tulee näkyviin ainoastaan jos parempaa ei ole tarjolla.

Sitten laaditaan yhtälö ellipsille, jonka keskipiste on $K = (x_K, y_K) \neq (0,0)$ ja isoakseli x-akselin suuntainen. *Näyttämisehdoksi* annetaan $(\mathbf{y}(\mathbf{F}) = \mathbf{y}(\mathbf{F}')) \wedge (\mathbf{K} \neq (\mathbf{0},\mathbf{0})) \wedge (\mathbf{F} \neq \mathbf{F}')$. Ehdolla $F \neq F'$ rajataan pois vaihtoehto että polttopisteet yhtyvät, ympyrää varten laaditaan teksti myöhemmin.

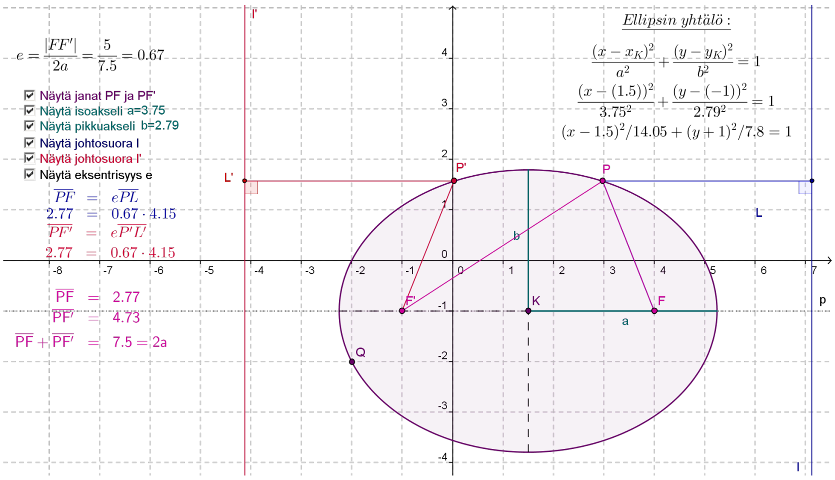
```
 "\begin{array}{r}
\underline{Ellipsin\; yhtälö:} \\
\\
\frac{(x-x_K)^2}{a^2}+\frac{(y-y_K)^2}{b^2} = 1\\
\frac{(x-("x(K)"))^2}{"a"^2}+\frac{(y-("y(K)"))^2}{"b"^2}=1\\
"c"
\end{array}"
```

Samalla tavalla määritellään yhtälö ellipsille, jonka isoakseli on y-akselin suuntainen. Tällöin *näyttämisehdoksi* tulee $(\mathbf{x}(\mathbf{F}) = \mathbf{x}(\mathbf{F}')) \wedge (\mathbf{K} \neq (\mathbf{0},\mathbf{0})) \wedge (\mathbf{F} \neq \mathbf{F}')$.

Enää ovat jäljellä origokeskiset ellipsit joiden akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Edellisistä teksteistä saa käyttökelpoiset muokkaamalla osoittajista pois sulut sekä termit $-x_K$ ja $-y_K$. Näyttämisehdoksi ellipsille, jonka isoakseli on x-akselin suuntainen, tulee $(\mathbf{y(F) = 0}) \wedge (\mathbf{y(F') = 0}) \wedge (\mathbf{x(F) = -x(F')}) \wedge (\mathbf{F \neq F'})$ ja $(\mathbf{x(F) = 0}) \wedge (\mathbf{x(F') = 0}) \wedge (\mathbf{y(F) = -y(F')}) \wedge (\mathbf{F \neq F'})$ ellipsille, jonka isoakseli on y-akselin suuntainen.

Ympyrä on tärkeä ellipsin erikoistapaus, joten laaditan tälle vielä oma teksti `"Ellipsi\; on\; ympyrä \;" c`. Näkyvyysehdoksi annetaan $\mathbf{F} = \mathbf{F'}$, koska ellipsi on myös ympyrä ainoastaan silloin kun polttopisteet yhtyvät.

Valmis GeoGebra-malli ellipsin ominaisuuksista on kuvassa 20. Kuva saattaa vaikuttaa sekavalta, sillä siinä on tarkoituksella esillä kaikki edellä määritetyt ellipsin ominaisuudet.

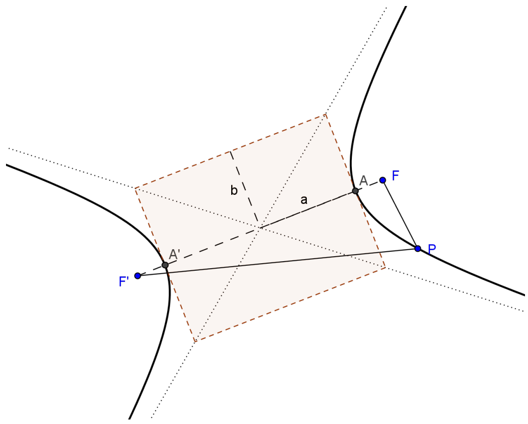


Kuva 20: Ellipsi.

Harjoitustehtävä 16. *Määritä ellipsin yhtälö annetuilla ehdoilla.: Ellipsin keskipiste on pisteessä* $(1, 2)$*, toinen polttopiste pisteessä* (6.2) *ja piste* $(4, 6)$ *on ellipsin kehällä. [14]*

3.4.6 Hyperbeli

Hyperbeli on toisen asteen käyrä, jonka muodostavat ne tason pisteet, joiden kahdesta polttopisteestä mitattujen etäisyyksien erotuksien itseisarvo on vakio. Hyperbeli syntyy myös, kun taso leikkaa kaksiosaisen ympyräkartion molempia osakartioita kartioiden akselin suuntaisesti. Hyperbeli on koostuu siis kahdesta toisiaan leikkaamattomasta käyrästä, joita kutsutaan haaroiksi.



Kuva 21: Hyperbeli.

Määritelmä 3.32 (Hyperbeli)**.** Olkoon tasossa kaksi eri pistettä F ja F'. Olkoon lisäksi piste P sellainen piste, jonka etäisyys pisteeseen F' on PF', ja etäisyys pisteeseen F on PF. Hyperbelin muodostavat sellaiset pisteet, joille etäisyyksien erotus on vakio, $PF' - PF = 2a$, missä $2a$ on hyperbelin huippujen A ja A' etäisyys (katso kuva 21). Poikittaisakseli on hyperbelin huippujen välinen jana AA', jonka kautta kulkee myös hyperbelin se symmetria-akseli jolla polttopisteetkin sijaitsevat. Hyperbelin toista akselia kutsutaan liittoakseliksi, sen pituus on $2b$. Mikäli $a = b$, sanotaan, että hyperbeli on tasasivuinen. Pisteitä F ja F' kutsutaan hyperbelin polttopisteiksi.

Polttopisteitä sekä akseleita yhdistää symmetrian ja Pythagoraan lauseen mukaan:

$$|\frac{1}{2}FF'|^2 = a^2 + b^2.$$

Jos polttopisteen etäisyyttä keskipisteestä merkitään kirjaimella c, saadaan $c^2 = a^2 + b^2$, missä $0 < a < c$ ja $0 < b < c$.

Hyperbelin yleinen yhtälö on

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{missä } B^2 - 4AC > 0.$$

Hyperbelin eksentrisyys, e, on sen polttopisteiden välimatkan suhde poikittaisakselin pituuteen, $e > 1$. Mitä suurempi suhde e on, sitä leveämmät ovat hyperbelin haarat.

Vastaavasti kuin paraabeleilla ja ellipseillä, myös hyperbeleillä on niin sanottu johtosuora. Itse asiassa, koska hyperbelillä on kaksi polttopistettä, niin myös johtosuoria on kaksi kappaletta l ja l'. Johtosuorat ovat aina kohtisuorassa hyperbelin poikittaisakselia vastaan.

Samoin kuin ellipseillä, myös hyperbeleillä mielivaltaisen hyperbelin pisteen P etäisyys polttopisteestä F ja johtosuorasta l ei ole sama, mutta niiden suhde on vakio: eksentrisyys e.

$$e = \frac{|FF'|}{2a} = \frac{|PF|}{d(P,l)} > 1.$$

Hyperbelin asymptootit ovat kaksi hyperbelin keskipisteessä leikkaavaa suoraa, joita hyperbelin haarat lähestyvät mutta eivät koskaan saavuta. Liittohyperbeliksi kutsutaan hyperbeliä, jonka poikittaisakseli on varsinaisen hyperbelin liittoakseli ja päinvastoin. Hyperbelillä ja sen liittohyperbelillä asymptootit ovat yhteiset.

Tutustumme ensin sellaisen hyperbelin yhtälöön, jossa hyperbelin keskipiste on origossa ja akselit ovat koordinaattiakseleilla. Tutkitaan ensin tapausta, jolloin poikittaisakseli on x-akselilla.

Olkoon hyperbelin keskipiste piste origossa ja polttopisteet $F = (c, 0)$ sekä $F' = (-c, 0)$. Hyperbelin poikittaisakselin pituus on $2a$ ja piste $P = (x, y)$ on mielivaltainen hyperbelin piste. Hyperbelin määritelmästä johtuen on nyt

$$PF' - PF = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a,$$

josta saadaan kuten kappaleessa 3.4.5

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2-a^2)^2} = 1.$$

Koska $c^2 - a^2 = b^2$, niin origokeskisen hyperbelin – jonka isoakseli on x-akselilla – yhtälö saadaan ilmaistua poikittaisakselin puolikkaan a ja liittoakselin puolikkaan b avulla:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tällöin hyperbelin asymptootit ovat suorat $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Vastaavasti, jos origokeskisen hyperbelin isoakseli on y-akselilla, niin yhtälö on muotoa

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

ja hyperbelin asymptootit ovat suorat $y = \pm\frac{a}{b}x$.

Mikäli hyperbelin akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, mutta keskipiste sijaitsee jossain muualla kuin origossa, esim. pisteessä $K = (x_K, y_K)$, niin hyperbelin yhtälö on tällöin muotoa:

- $\frac{(x-x_K)^2}{a^2} - \frac{(y-y_K)^2}{b^2} = 1$, jos poikittaisakseli on x-akselin suuntainen
- $\frac{(y-y_K)^2}{a^2} - \frac{(x-x_K)^2}{b^2} = 1$, jos poikittaisakseli on y-akselin suuntainen.
- $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F$, missä $A > 0 \wedge C < 0$ tai $A < 0 \wedge C > 0$ (Yleinen muoto).

Asymptootit ovat muotoa:

- $y - y_K = \pm\frac{b}{a}(x - x_K)$, jos poikittaisakseli on x-akselin suuntainen
- $y - y_K = \pm\frac{a}{b}(x - x_K)$, jos poikittaisakseli on y-akselin suuntainen

Laaditaan GeoGebralla malli, jonka avulla voidaan tutustua hyperbelin eri ominaisuuksiin. Mielivaltaisen hyperbelin piirtämiseen on GeoGebrassa oma työväline, *Hyperbeli.* Tällä työvälineellä saa hyperbelin piirrettyä klikkaamalla ensin piirtoalueella kohtia, johon polttopisteet sijoittuvat, ja tämän jälkeen jotain hyperbelin kehän pistettä. GeoGebra luo piirtoalueelle dynaamisen hyperbelin, jonka kaikkia kolmea määrittelypistettä voi nyt siirrellä.

Nimetään seuraavaksi polttopisteet uudelleen nimillä F ja F' ja hyperbelin piste kirjaimella Q.

Polttopisteiden kautta piirretään suora p. *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä määritellään suoran ja hyperbelin leikkauspisteet A ja A'. Näiden pisteiden välille määritellään *Kahden pisteen välinen jana*, joka on nyt hyperbelin poikittaisakseli. Janan keskinormaali saadaan piirrettyä käyttäen työvälinettä *Keskinormaali*. Työväline piirtää normaalin janan keskipisteen kautta, kun klikataan joko janaa tai molempia janan päätepisteitä. Määritetään suorien leikkauspiste K sekä *etäisyys* $|KA|$ ja kirjoitetaan *Syöttökenttään*: $\mathbf{a} = \mathbf{etäisyysKA}$. Vastaavalla tavalla määritetään $\mathbf{c} = \mathbf{etäisyysKF}$.

Nyt parametrin b arvo saadaan kirjoittamalla syöttökenttään $\mathbf{b} = \mathbf{sqrt}(\mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2)$. Liittoakselin saa rajattua edellä piirretyltä normaalilta, kun piirretään ensin *Ympyrä: keskipiste ja säde* -työvälineellä ympyrä, jonka keskipiste on K ja säde, joka syötetään avautuvaan ikkunaan, **b**. Ympyrän säde siis muuttuu aina kun pikkuakselin puolikkaan pituus b muuttuu. Määritetään ympyrän ja suoran leikkauspisteet, ja piilotetaan tämän jälkeen ympyrä näkyvistä. Nimetään pisteet nimillä A_L ja A'_L, sillä nämä pisteet ovat myöhemmin laadittavan liittohyperbelin huiput. Leikkauspisteiden A_L ja A'_L kautta määritetään suoran p kanssa yhdensuuntaiset suorat. Sitten pisteiden A ja A' kautta piirretään suoralle p kaksi normaalia. Muodostunut suorakulmio määritetään suorakulmioksi *Monikulmio*-työvälineellä klikkaamalla suorakulmion kärkipisteitä.

Suorakulmion piirtämisen avuksi laaditut apusuorat voi nyt piilottaa näkyvistä. Seuraavaksi voidaan piirtää hyperbelin asymptootit *Suora kahden pisteen kautta* -työvälineellä klikkaamalla suorakulmion kärkipisteitä niin, että suorakulmion lävistäjät ovat asymptoottisuorilla. Asymptoottisuorien *Objektin tyyliksi* valitaan pisteviiva.

Seuraavaksi määritellään hyperbelin eksentrisyys *e=|FF'|/2a=2c/2a=c/a*. Eksentrisyys saadaan laskettua kirjoittamalla *Syöttökenttään* $\mathbf{e} = \mathbf{c}/\mathbf{a}$. Piirtoalueelle lisätään teksti `"e=\frac{|FF'|}{2a}=\frac{"etäisyysF'F "}{"(2a)"}="e`.

Määritetään seuraavaksi mielivaltainen hyperbelin piste P klikkaamalla hyperbeliä *Piste objektilla* -työvälineellä. Piirretään sitten janat PF ja PF' *Kahden pisteen välinen jana* -työvälineellä. Janojen pituudet saadaan näkyviin *Etäisyys tai pituus* -työvälineellä klikkaamalla janojen päätepisteitä.

Hyperbelin määritelmän mukaan janojen pituuksien erotuksen itseisarvo on aina vakio, joten lisätään tämä oleellinen teksti piirtoalueelle seuraavasti:

```
"\begin{eqnarray}
\overline{PF } & = & " etäisyysFP " \\
\overline{PF’}& = & " etäisyysF’P " \\
|\overline{PF}-\overline{PF’}| & = &
|"etäisyysFP"-"etäisyysF’P "| \\
& = & |"(etäisyysFP-etäisyysF’P)"|
="abs(etäisyysFP-etäisyysF’P )" = 2a
\end{eqnarray}"
```

Komennolla *"abs(etäisyysFP-etäisyysF'P)"* saadaan laskettua kaavaan dynaaminen erotuksen itseisarvo.

Johtosuoran l määrittämistä varten tehdään ensin uusi jana PF. Koska janaa PF tarvitaan hyperbelin monen eri ominaisuuden määrittelyyn, on tulevia *näytä/piilota-valintaruutuja* ajatellen hyvä että niitä on käytössä useampia. Nyt pisteen P etäisyys johtosuorasta l on oltava $d = e|PF|$. Johtosuora on kohtisuorassa polttopisteiden kautta piirrettyä suoraa p vastaan, joten pisteen P etäisyyden määrittämiseen tarvitaan suoran p kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen P kautta. Luonnollisesti tämä onnistuu *Yhdensuuntainen* -työvälineellä. Juuri piirretyn suoran ja johtosuoran välinen leikkauspiste saadaan määritettyä käyttäen pientä kepulikonstia: määritetään ensin *Ympyrä: keskipiste ja säde* -työvälineellä ympyrä, jonka keskipiste on P ja säde, joka syötetään avautuvaan ikkunaan, **etäisyysPF/e**. Määritetään ympyrän ja suoran leikkauspisteet, ja piilotetaan tämän jälkeen ympyrä sekä ylimääräinen leikkauspiste näkyvistä. Jäljelle jäävä leikkauspiste nimetään uudelleen kirjaimella L, ja tämän jälkeen määritetään jana PL. Pisteen L kautta piirretään suoran p normaali, eli johtosuora l.

Piirtoalueelle lisätään vielä teksti

```
"\begin{eqnarray}
 \overline{PF} & = & e \overline{PL} \\
```

```
 "etäisyysPF" & = & "e" \cdot "etäisyysPL" \\
              & = & "(e*etäisyysPL)"
\end{eqnarray}"
```

Johtosuoran l' määrittämisen voi suorittaa samalla tavalla kuin johtosuoran l, mutta hyperbelin symmetriaa hyödyntäen voimme hieman oikaista. Käytetään työvälinettä *Peilaus suoran suhteen*. Työväline toimii niin, että klikataan ensin objektia joka halutaan peilata, esimerkiksi suoraa l, ja tämän jälkeen suoraa jonka suhteen peilaus suoritetaan. Tässä tapauksessa peilaus suoritetaan hyperbelin liittoakselin kautta kulkvan suoran suhteen. GeoGebra nimeää automaattisesti peilatut objektit samalla kirjaimella kuin alkuperäiset objektit, mutta pilkulla erotettuna. Esimerkiksi juuri saatu suora on automaattisesti haluttu l'. Nyt täytyy ottaa huomioon, että kun pistettä P liikuttaa hyperbelillä, niin myös piste P' liikkuu vastaavasti. Piste P on mahdollista siirtää hyperbelin haaralta toiselle, mutta jos näin tekee, niin määritelmä $PF = ePL$ ei ole enää voimassa.

Peilataan kaikki tarvittavat objektit. Peilauksen aikana saattaa syntyä turhia peilauspisteitä, esimerkiksi F_1', mutta nämä voi huoletta piilottaa näkyvistä. Tekstin lisäys samoin kun edellä.

Nyt dynaamisessa hyperbeli-mallissa on kaikki olennaiset ominaisuudet, mutta lopputulos on kieltämättä hieman sekava. Sekavuutta vähennetään määrittämälllä objekteille eri tyylejä ja värejä, sekä luomalla piirtoalueelle *näytä/piilota-valintaruutuja* joiden avulla ylimääräiset objektit voi piilottaa. Värit on hyvä muokata ennen valintaruutujen luomista, niin oikeiden objektien etsiminen suuresta joukosta on helpompaa. Mikäli jokin objekti unohtuu listasta, voi sen jälkeenpäin lisätä kirjoittamalla objektin *Näyttämisehto*-ruutuun *loogisen arvon* kirjaimen. Oikean kirjaimen voi tarkistaa esimerkiksi pitämällä hiiren kursoria oikean *näytä/piilota-valintaruudun* päällä.

Määritellään vielä valmiin hyperbelin liittohyperbeli. Liittohyperbelin poikittaisakseli on $2b$ ja liittoakselin pituus $2a$. Liittohyperbelin polttopisteet F_L ja F_L' ovat yhtä etäällä hyperbelin keskipisteestä kuin pisteet F ja F'. Polttopisteet saadaan määritettyä, kun muodostetaan ensin ympyrä, jonka keskipiste on K ja säde c. Ympyrän ja symmetria-akselin leikkauspisteisiin muodostuvat nyt polttopisteet F_L ja F'_L. Piilotetaan ympyrä näkyvistä ja otetaan esille aiemmin määritellyt huiput A_L ja A'_L. Liittohyperbeli piirretään nyt *Hyperbeli*-työvälineellä klikkaamalla ensin polttopisteitä ja sitten toista huippupistettä A_L.

Vielä puuttuu olennainen, eli hyperbelin yhtälö. Laaditaan viisi erilaista hyperbelin yhtälöä: yksi yleinen yhtälö ja kaksi yhtälöä sekä origokeskiselle että $K = (x_K, y_K)$-keskiselle hyperbelille sen mukaan, onko poikittaisakseli x- vai y-akselin suuntainen. Oletuksena GeoGebrassa on mahdollista valita hyperbelin yhtälö joko muodossa $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$ tai $(x - m)^2/a^2 - (y - n)^2/b^2 = 1$. Kumpikaan annetuista vaihtoehdoista ei ole järin kaunis, mutta valitaan esitysmuodoksi jälkimmäinen. Valinta onnistuu hyperbelin *Ominaisuudet*-ikkunan *Algebra*-välilehdellä. GeoGebra muuttaa automaattisesti muodon ensin esitettyyn muotoon, jos kaavasta ei tule tarpeeksi sievää.

Kirjoitetaan teksti

```
"\begin{array}{l}
\underline{Hyperbelin \; yhtälö}: \\
        Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F \\
        "h"
\end{array}",
```

missä h on hyperbeli-objektin nimi. Tälle tekstille annetaan näkyvyysehdoksi $(\mathbf{x(F)} \neq \mathbf{x(F')}) \wedge (\mathbf{y(F)} \neq \mathbf{y(F')})$. Tämä takaa sen, että tämä kaava tulee näkyviin ainoastaan jos parempaa ei ole tarjolla.

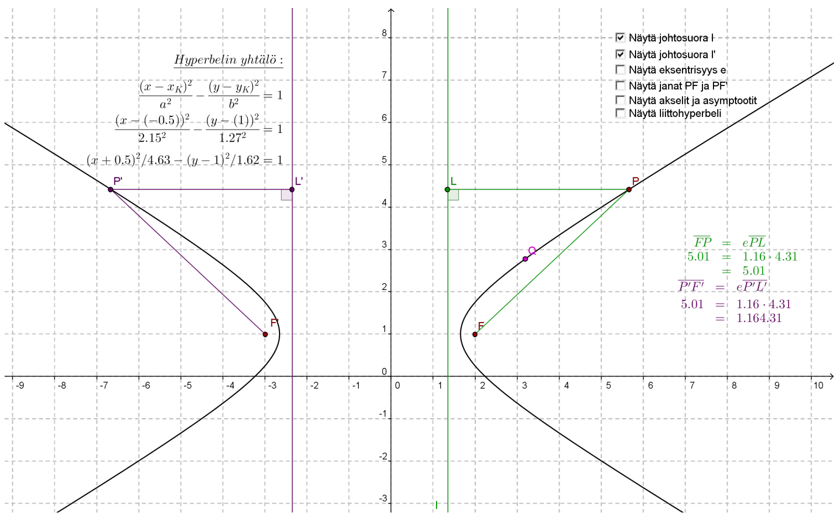
Sitten laaditaan yhtälö hyperbelille, jonka keskipiste on $K = (x_K, y_K) \neq (0, 0)$ ja poikittaisakseli x-akselin suuntainen. *Näyttämisehdoksi* annetaan $(\mathbf{y(F)} = \mathbf{y(F')}) \wedge (\mathbf{K} \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})) \wedge (\mathbf{F} \neq \mathbf{F'})$.

```
 "\begin{array}{r}
\underline{Hyperbelin\; yhtälö:} \\
\\
\frac{(x-x_K)^2}{a^2}-\frac{(y-y_K)^2}{b^2} = 1\\
\frac{(x-("x(K)"))^2}{"a"^2}-\frac{(y-("y(K)"))^2}{"b"^2}=1\\
```

"h"
\end{array}"

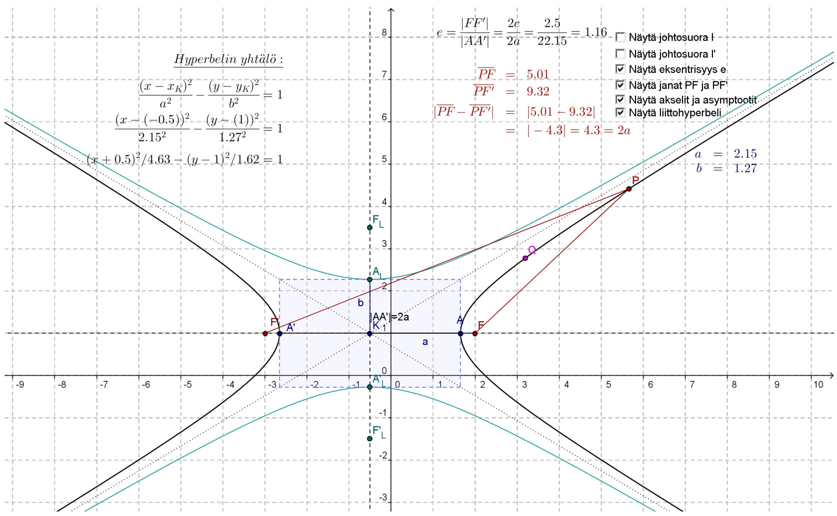
Samalla tavalla määritellään yhtälö hyperbelille, jonka poikittaisakseli on y-akselin suuntainen. Tällöin *näyttämisehdoksi* tulee $(\mathbf{x}(\mathbf{F}) = \mathbf{x}(\mathbf{F}')) \wedge (\mathbf{K} \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})) \wedge (\mathbf{F} \neq \mathbf{F}')$.

Vielä ovat jäljellä origokeskiset hyperbelit, joiden akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Edellisistä teksteistä saa käyttökelpoiset muokkaamalla osoittajista pois sulut ja termit $-x_K$ ja $-y_K$. Näyttämisehdoksi hyperbelille, jonka poikittaisakseli on x-akselin suuntainen, tulee $(\mathbf{y}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{F}') = \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{x}(\mathbf{F}) = -\mathbf{x}(\mathbf{F}')) \wedge (\mathbf{F} \neq \mathbf{F}')$ ja $(\mathbf{x}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{x}(\mathbf{F}') = \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{y}(\mathbf{F}) = -\mathbf{y}(\mathbf{F}')) \wedge (\mathbf{F} \neq \mathbf{F}')$ hyperbelille, jonka poikittaisakseli on y-akselin suuntainen.



Kuva 22: Hyperbeli

Valmis GeoGebra-malli hyperbelin ominaisuuksien tutkimista varten on sekä kuvassa 22 että 23. Kuvassa 22 on valittu näkyviin hyperbelit johtosuorineen ja kuvassa 23 on näkyvissä muut ominaisuudet. Tässä GeoGebramallissa on niin runsaasti erilaisia objekteja, että niiden kaikkien esittäminen yhdessä kuvassa tekisi kuvasta aivan liian sekavan. Opetustilanteessa on toki



Kuva 23: Hyperbeli

suotavaa valita näkyviin vain ne hyperbelin ominaisuudet, joita on tarkoitus tarkemmin tarkastella.

Harjoitustehtävä 17. *Määritä yhtälö sellaiselle origokeskisen hyperbelille, jonka huippu on pisteessä* $(2, 0)$ *ja jonka toisen asymptootin yhtälö on* $4x - 3y = 0$.

Kirjallisuutta

[1] Adnan Akkaya et al.: *Using Dynamic Software in Teaching of the Symmetry in Analytic Geometry: The Case of GeoGebra* Procedia - Social and Behavioral Sciences 15, pp. 2540-2544, 2011.

[2] Aksoy, Y., Bayazit, I., Soybas, D.: *The effects of GeoGebra in conjectures and proofs,* Proceedings of the First North American GeoGebra Conference, 2010, p.190-195.

[3] Bayazit, I., Aksoy, Y., Ilhan, O.: *GeoGebra as a instrucional tool to promote students' operational and structural conception of function,* Proceedings of the First North American GeoGebra Conference, 2010, p.117-122.

[4] Bu, L., Mumba, F., Henson, H., Wright, M., Alghazo, Y.: *GeoGebra-integrated professional development: The experience of rural inservice elementary (K-8) teachers,* Proceedings of the First North American GeoGebra Conference, 2010, p.2-10.

[5] Edwards, C.H., Jr., Penney, D.A. : *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice-Hall, Inc., 1990.

[6] Fahlberg-Stojanovska, L., Stojanovski, V.: *GeoGebra in the college classroom: multiple representations,* Proceedings of the First North American GeoGebra Conference, 2010, p.147-153.

[7] Haciomeroglu, E. S., Bu, L., Schoen, R. C., Hohenwarter, M.: *Learning to Develop Mathematics Lessons with GeoGebra*, MSOR Connections Vol 9 No 2 May – July 2009
Pdf: http://mathstore.ac.uk/headocs/9224_haciomeroglu_e_etal_geogebramathlessons.pdf

[8] Harju, Tero: *Geometria, lyhyt kurssi*, luentomoniste, Turun yliopisto, 2009.

[9] Heutajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola, L.: *Laudatur 4: Analyyttinen geometria*, Otava, 2005.

[10] Hohenwater, J., Hohenwater, M., suom. Luoma-Aho, E.: *Johdanto GeoGebraan*, 2010
Pdf: http://geogebra.fi/artikkelit/JohdantoGeoGebraan.pdf

[11] Jäppinen, P., Kupiainen, A., Räsänen, M.:*Lukion Calculus 2. MAA3 Geometria. MAA4 Analyyttinen geometria.* Otava 2005.

[12] Türkan Berrin Kağizmanliet al.: *Analytic Analysis of Lines with Dynamic Mathematical Software*, Procedia - Social and Behavioral Sciences 15, pp 2505-2509, 2011.

[13] Kangasaho, J., Piri, P. Taavitsainen, H. : *Pitkän matematiikan ylioppilaskokeet 2001-2011*, WSOY, 2011.

[14] Kindle, Joseph H. : *Schaums's outline series theory and problems of plane and solid analytic geometry*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1989

[15] Korhinen, H., Leino, J., Luoma-Aho, E., Rahikka, M., Setälä, M.: *Verkkokurssilla oppivat sekä kurssilaiset että ohjaajat*, Matemaattisluonnontieteellinen aikakauslehti Dimensio, 5/2011.

[16] Lappi, E., Lappi, M.: *Symboliset laskimet tulevat – ollaanko valmiita?* Matematiikkalehti Solmu, 2011
pdf: http://solmu.math.helsinki.fi/2011/symbolinen_laskin.pdf

[17] Martio, O.: Keskustelua, *Didaktinen matematiikka?*, Tieteessä tapahtuu 21 2/2004.

[18] May, M.: *A Plan for producing a comprehensive suite of applets for a course, with single variable calculus as a case study,* Proceedings of the First North American GeoGebra Conference, 2010, p.100-105.

[19] Oetiker, T., Partl, H., Hyna, I., Schlegl, E., Suomentanut Hellgren, T.: *Pitkänpuoleinen johdanto LaTeX2e:n käyttöön*, 1998

[20] Opetushallitus: *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003.*

[21] Opetus- ja kulttuuriministeriö: *Koulutuksen tietoyhteiskuntakehittäminen 2020. Parempaa laatua, tehokkaampaa yhteistyötä ja avoimempaa vuorovaikutusta,* Opetus- ja kulttuuriministeriön työryhmämuistioita ja selvityksiä 2010:12
Pdf: http://www.okm.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2010/liitteet/okmtr12.pdf?lang=filuettu30.9.2011

[22] Opetus- ja kulttuuriministeriö: *Lukiokoulutuksen kehittämisen toimenpide-ehdotuksia valmistelevan työryhmän muistio* Opetus- ja kulttuuriministeriön työryhmämuistioita ja selvityksiä 2010:14
Pdf: http://www.tieke.fi/mp/db/file_library/x/IMG/41524/file/Laitinen_tvt_tulee_yokirjoituksiin.pdf

[23] Royati Abdul Saha et. al.: *The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning*, Procedia Social and Behavioral Sciences 8 (2010) 686-693.

[24] Z. A. Reis, S. Ozdemir: *Using Geogebra as an information technology tool: parabola teaching*, Procedia - Social and Behavioral Sciences 9, pp 565-572, 2010.
Pdf: http://www.sciencedirect.com/science/article/B9853-521RBDG-BP/2/a3e0037a7d4b4eeac238c60d127b42f7

[25] Z. A. Reis: *Computer supported mathematics with Geogebra*, Procedia - Social and Behavioral Sciences 9, pp. 1449-1455 , 2010.
Pdf: http://www.sciencedirect.com/science/article/B9853-521RBDG-35/2/16b0122edfa17d2219fb6574d068ab96

[26] Sherman, M.: *A conceptual framework for using GeoGebra with teachers and students.* Proceedings of the First North American GeoGebra Conference, 2010, p.205-213.

[27] Verkko-opas: LaTeXWikibook, http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX
Pdf: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2d/LaTeX.pdf

[28] Verkkosivu: Suomalainen GeoGebra-verkosto http://www.geogebra.fi/index.html, Luettu 30.9.2011.

[29] Verkkosivu: Suomalainen GeoGebra-verkosto, tavoitteet ja historia. http://www.geogebra.fi/tavoitteet.html Luettu 28.10.2011

[30] Ylioppilastutkintolautakunta *Pitkän matematiikan ylioppilaskokeet* Tehtävät vuosilta 1999-2010 saatavilla pdf-muodossa osoitteesta http://matta.hut.fi/yoteht/.

[31] Zengin, Y., Furkan, H., Kutluca, T.: *The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry*, Procedia - Social and Behavioral Sciences 31 (2012) 183-187.
Pdf: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042811029673

A Harjoitustehtävien ratkaisut

Harjoitustehtävä 1

Piirrä koordinaatistoon pisteet $A = (4, 2)$, $B = (3, 3)$, $C = (2, 3)$, $D = (1, 2)$, $E = (1, 1)$, $F = (2, -1)$, $G = (4, -3)$, $H = (6, -1)$, $I = (7, 1)$, $J = (7, 2)$, $K = (6, 3)$ ja $L = (5, 3)$. Yhdistä pisteet järjestyksessä. Mikä kuvio syntyy?

Ratkaisu

GeoGebralla voi vastaavia pisteenyhdistämistehtäviä laatia helposti. Valitaan jokin käyttökelpoinen kuva ja lisätään se piirtoalueelle *Lisää kuva* -työvälineellä. Kuvan tulee olla tallennettu kuva. Kuvan *Ominaisuudet* -ikkunan *Objektin tyyli* -välilehdellä valitaan kuvan *Peittävyys* väliltä $0 - 100$ sellaiseksi, että koordinaatisto näkyy hyvin kuvan läpi. Nyt *Uusi Piste* -työvälineellä piirretään sopivat pisteet kuvan ääriviivoille niin, että pisteiden koordinaatit ovat kokonaislukuja. Pisteet yhdistetään joko *Kahden pisteen välinen jana* -työvälineellä tai *Monikulmio*-työvälineellä. Jälkimmäisellä kuvion sisäosa värittyy piirtäessä.

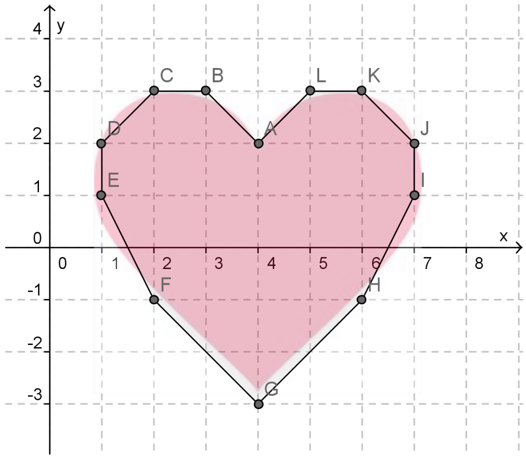
Pisteiden koordinaatit saa koottua seuraavasti: Piilota ensin näkyvistä kaikki objektit pisteitä lukuun ottamatta. Sitten 'maalaa' hiirellä piirtoalue niin, etä kaikki pisteet tulevat mukaan. Nyt valitse työväline *Lista*, jolloin algebraikkunaan muodostuu lista pisteistä aakkosjärjestyksessä. Klikkaa listaa hiiren oikealla painikkeella ja valitse *Kopioi syöttökenttään*. Nyt syöttökentästä on helppo kopioida ja liittää lista pisteistä tehtävänantoon.

Kuvassa 24 on näkyvissä sekä alkuperäinen kuva että yhdistetyt pisteet.

Vast. Sydän.

Harjoitustehtävä 2

Laske pisteiden $(5, 1)$ ja $(1, 4)$ välinen etäisyys.



Kuva 24: Harjoitustehtävän 1 ratkaisu.

Ratkaisu

Olkoon piste $A = (5, 1)$ ja piste $B = (1, 4)$. Nyt pisteiden välinen etäisyys on

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Pisteiden etäisyys on siis 5, kuten GeoGebra-mallillakin (kuva 3) voimme havaita.

Vast. 5.

Harjoitustehtävä 3

Kolmion ABC mediaanit leikkaavat toisensa kolmion painopisteessä $P = (x, y)$, jonka etäisyys on 2/3 mistä tahansa kolmion kärjestä kärjen vastakkaisen sivun keskipisteeseen. Määritä pisteen P koordinaatit, kun $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ ja $C = (x_C, y_C)$. [14]

Ratkaisu

Olkoon piste D kärjen A vastaisen sivun keskipiste, samoin E kärjen B ja F kärjen D. Hahmotellaan tilannetta GeoGebralla. Piirretään ensin *Monikulmio*-työvälineellä mielivaltainen kolmio ABC. Sivujen keskipisteet D, E ja F saadaan näkyviin *Keskipiste*-työvälineellä klikkaamalla kolmion kärkipisteitä. Nyt mediaanijanat on helppo piirtää *Kahden pisteen välinen jana* -työvälineellä ja sen jälkeen määrittää mediaanien leikkauspiste.

Nyt kolmion kärkipisteitä siirtämällä voidaan esitarkastella miten kärkipisteiden koordinaatit voisivat olla yhteydessä pisteen P koordinaatteihin. Tässä pisteitä kannattaa siirtää nuolinäppäimillä hiiren sijaan, jotta koordinaattien A, B ja C arvot pysyvät kokonaislukuina. Tarkastelun helpottamiseksi lisätään piirtoalueelle dynaaminen *Teksti* `"\begin{array}{l} A="A" \\ B="B" \\ C="C" \\ P=("MPX","MPY") \end{array}`, missä MPX ja MPY ovat pisteen P murtolukumuotoja, jotka on saatu kirjoittamalla *Syöttökenttään* **MPX = Murtolukuteksti**[**x**(**P**)] ja **MPY = Murtolukuteksti**[**y**(**P**)].

Tarkkaavainen tutkija huomaakin, että pisteen P x-koordinaatti on kolmasosa muiden x-koordinaattien summasta, eli näiden keskiarvo. Samoin pisteen P y-koordinaatti on muiden pisteiden y-koordinaattien keskiarvo.

Osoitetaan arvaus vielä todeksi matemaattisesti.

Piste P on mediaanilla AD, ja jakaa sen tehtävänannon mukaisesti suhteessa $\frac{AP}{AD} = \frac{2}{3}$. Näin ollen janojen AP ja PD suhde $r = \frac{AP}{PD} = \frac{2}{1} = 2$.

Piste D on pisteiden B ja C keskipiste, joten sen koordinaatit ovat

$$D = (\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}).$$

Nyt saadaan pisteen P x-koordinaatiksi

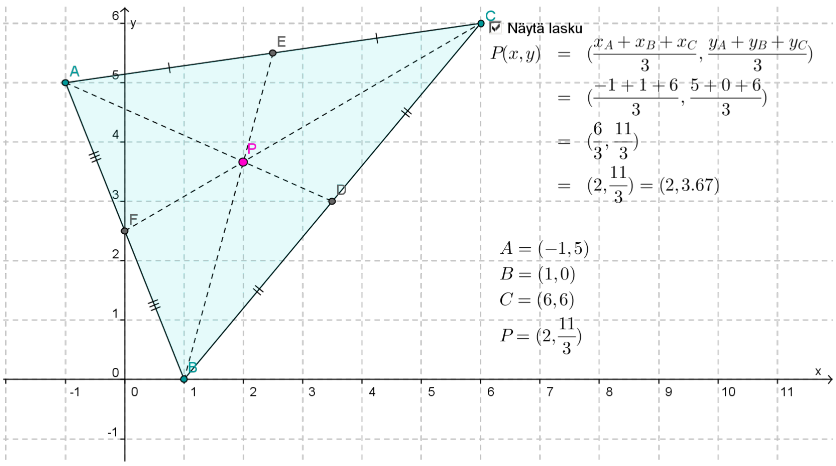
$$x = \frac{rx_D + x_A}{r+1} = \frac{2 \cdot (\frac{x_B + x_C}{2}) + x_A}{2+1} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

ja y-koordinaatiksi

$$y = \frac{ry_D + x_A}{r+1} = \frac{2 \cdot (\frac{y_B + y_C}{2}) + y_A}{2+1} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Lisätään vielä lasku GeoGebra-malliin seuraavasti:

```
 "\begin{array}{rcl}
P(x,y)&=&(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}) \\
      &=&(\frac{"x(A)"+"x(B)"+"x(C)"}{3},
          \frac{"y(A)"+"y(B)"+"y(C)"}{3}) \\
      &=&(\frac{"(x(A)+x(B)+x(C))"}{3},
          \frac{"(y(A)+y(B)+y(C))"}{3}) \\
      &=&("MPX","MPY")="P"
\end{array}".
```



Kuva 25: Harjoitustehtävän 3 ratkaisu.

Käyttökelpoinen GeoGebra-malli mediaanien leikkauspisteiden tutkimiseen on kuvassa 25.

Vast. $P = (\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$.

Harjoitustehtävä 4

Osoita kulmakertoimien avulla, että pisteet $A = (9,3)$, $B = (5,5)$ ja $C = (3,1)$ ovat suorakulmaisen kolmion kärkipisteet.

Ratkaisu

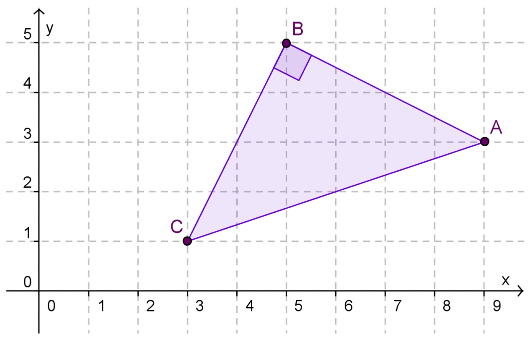
Tutkitaan janojen AB, BC ja CA kulmakertoimia:

$$\begin{aligned} k_{AB} &= \tfrac{5-3}{5-9} = \tfrac{2}{-4} = -\tfrac{1}{2} \\ k_{BC} &= \tfrac{3-5}{1-5} = \tfrac{-2}{-4} = 2 \\ k_{CA} &= \tfrac{3-1}{9-3} = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Havaitaan, että janojen AB ja BC kulmakertoimien tulo on

$$k_{AB} \cdot k_{BC} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1,$$

joten janat AB ja BC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Kolmio ABS on siis suorakulmainen, kateetteja ovat sivut AB ja BC, hypotenuusa on sivu CA (Kuva 26.)



Kuva 26: Harjoitustehtävän 4 ratkaisu.

Harjoitustehtävä 5

Määritä Harjoitustehtävän 4 kolmion kulmien suuruudet.

Ratkaisu

Harjoitustehtävässä 4 onkin jo laskettu kulman CBA suuruus $90°$. Lasketaan kulman $\alpha = \angle ACB$ suuruus kulmakertoimien avulla:

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_{CA} - k_{BC}}{1 + k_{CA} k_{BC}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{3} - 2}{1 + \frac{1}{3} \cdot 2} \right| = 1.$$

$$\alpha = \arctan 1 = 45°.$$

Kolmannen kulman suuruus on oltava myös $45°$, kun muistetaan että kolmion kulmien summa on $180°$. Kolmion ABC kulmat ovat siis $45°, 45°$ ja $90°$, eli kolmio on tasakylkinen suorakulmainen kolmio.

Vast. $45°, 45°$ ja $90°$.

Harjoitustehtävä 6

Laske Harjoitustehtävän 1 pisteiden $A = (4, 2)$, $B = (3, 3)$, $C = (2, 3)$, $D = (1, 2)$, $E = (1, 1)$, $F = (2, -1)$, $G = (4, -3)$, $H = (6, -1)$, $I = (7, 1)$, $J = (7, 2)$, $K = (6, 3)$ ja $L = (5, 3)$ muodostaman monikulmion pinta-ala.

Ratkaisu

Olkoon $A = P_1$, $B = P_2$, . . . , $L = P_{12}$. Nyt on huomattava, että kaikkien pisteiden x-koordinaatit ovat positiivisia, mutta kolmen pisteen y-koordinaatit ovat negatiivisia. Suunnikasmenetelmä ei toimi, jos pisteitä on koordinaattiakselien molemmilla puolilla, joten on joko tarkasteltava 1. ja 4. koordinaatiston neljännes erikseen, tai sitten tehtävä pieni temppu. Lisätään jokaisen pisteen y-koordinaattiin 3, jolloin monikulmion pinta-ala ei muutu, mutta kaikista koordinaateista saadaan positiivisia.

Sijoitetaan pisteiden koordinaatit kaavaan

$$A = \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i(y_{i+1} + 3) - x_{i+1}(y_i + 3)) \right|,$$

missä $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$, eli $P_{13} = P_1$.

Saadaan

$$\begin{aligned} A &= \big| \tfrac{1}{2}(4 \cdot 6 - 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \\ &\quad +1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 6 \cdot 0 + 6 \cdot 4 - 7 \cdot 2 \\ &\quad +7 \cdot 5 - 7 \cdot 4 + 7 \cdot 6 - 6 \cdot 5 + 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 + 5 \cdot 5 - 4 \cdot 6) \big| \\ &= \big| \tfrac{1}{2} \cdot 48 \big| = 24. \end{aligned}$$

Symmetrian huomaamalla olisi laskuista saanut hieman lyhyempiä. Saadun tuloksen $A = 24$ voi tarkistaa GeoGebran avulla piirtämällä ensin monikulmion $ABCDEFGHIJKL$ ja klikkaamalla sitten *Pinta-ala*

-työvälineellä monikulmiota.

Vast. $A = 24$.

Harjoitustehtävä 7

Piirrä koordinaatistoon niiden pisteiden joukko, jotka toteuttavat yhtälön
a) $x^2 + y^2 = 16$,
b) $y = 2x^2 - 4$,
c) $x^2y^2 - (1+x)^2(4-x^2) = 0$.

Ratkaisu

Kirjoita syöttökenttään yhtälöt yksi kerrallaan alla olevassa muodossa ja paina enter.

a) $\mathbf{x\hat{}2 + y\hat{}2 = 16}$

b) $\mathbf{2x\hat{}7 - 3x\hat{}3 - y + 1 = 0}$

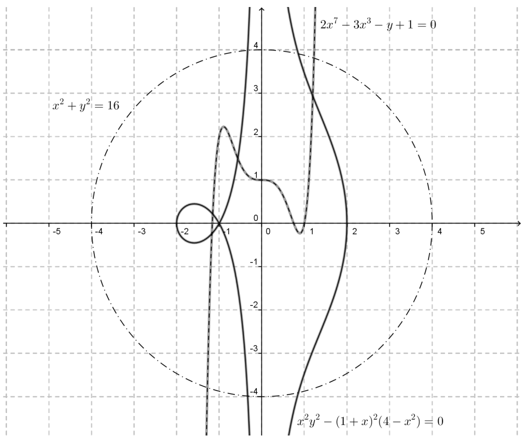
c) $\mathbf{x\hat{}2y\hat{}2 - (1 + x)\hat{}2(4 - x\hat{}2) = 0}$.

Eksponentit syötetään siis ˆ-merkin avulla. Jos eksponenttina on 2 tai 3, on nämä mahdollista valita myös syöttökentässä olevasta $\boxed{\alpha}$-merkkiä klikkaamalla avautuvasta valikosta.

Kuvassa 7 on kaikkien kolmen yhtälön kuvaajat. Havainnollisuuden vuoksi kullekin käyrälle on käytetty erilaista suoran tyyliä. Huomaa, että yhtälöä $x^2y^2-(1+x)^2(4-x^2) = 0$ vastaava käyrä, konkoidi, koostuu kahdesta osasta. (Yhtälöllä ei ole ratkaisua kun $x = 0$.)

Harjoitustehtävä 8

Muodosta sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden $(4, -3)$ ja $(-2, 6)$ kautta. (Yo-tehtävä 1b/S2007, pitkä matematiikka.)



Kuva 27: Harjoitustehtävän 7 ratkaisu.

Ratkaisu

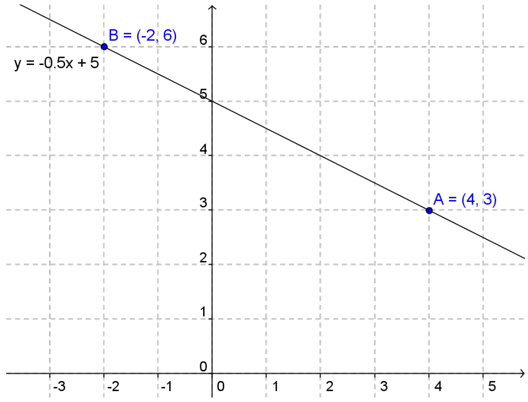
Olkoon piste $A = (4, -3)$ ja piste $B = (-2, 6)$. Suoran yhtälö saadaan sijoittamalla pisteiden koordinaatit kaavaan 'Suora kahden pisteen kautta' (Kpl 3.16, s. 44):

$$\begin{aligned}
y - y_A &= \tfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \\
y - (-3) &= \tfrac{6-(-3)}{-2-4}(x - 4) \\
y + 3 &= \tfrac{9}{-6}(x - 4) \\
y + 3 &= -\tfrac{3}{2}(x - 4) \\
y + 3 &= -\tfrac{3}{2}x + 6 \\
y &= -\tfrac{3}{2}x + 3.
\end{aligned}$$

Vast. $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Harjoitustehtävä 9

Suorakulmaisen kolmion kaikki kärjet sijaitsevat paraabelilla $y = x^2$; suoran kulman kärki on paraabelin huipussa. Osoita, että jokaisen tällaisen kolmion hypotenuusa leikkaa paraabelin akselin samassa pisteessä. Määritä tämä piste. (Yo-tehtävä K2001, sekä pitkä- että lyhyt matematiikka.)



Kuva 28: Harjoitustehtävän 8 ratkaisu.

Ratkaisu

Laaditaan GeoGebra-malli, jolla voidaan tutkia kolmiota joka toteuttaa tehtävässä annetut ehdot.

Ensin piirretään paraabeli $y = x^2$ syöttämällä *Syöttökenttään* **y = x^2**. Piste A paraabelin huippuun saadaan *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä klikkaamalla sekä paraabelia että y-akselia. Aikaisemmilta kursseilta sekä yläkoulusta on tuttua, että muotoa $y = ax^2 + b$ olevan paraabelin akseli on aina y-akselilla, ja näin myös paraabelin huippu. Piste A on nyt *riippuva objekti*, jota ei voi siirtää.

Seuraavaksi piirretään piste B paraabelille $y = x^2$ työvälineellä *Piste objektilla* klikkaamalla paraabelia mielivaltaisessa kohdassa koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä.

Pisteiden A ja B kautta piirretään suora a työvälineellä *Suora kahden pisteen kautta* klikkaamalla molempia pisteitä. Suorakulmaisen kolmion suoran kulman kärki on paraabelin huipussa, pisteessä A, ja toinen kateeteista on jana $\overline{AB}$. Kolmion toisen kateetin on siis oltava pisteen A kautta kulkevalla suoran a normaalilla. Suoran normaali b piirretään *Normaali*-työvälineellä klikkaamalla ensin pistettä A ja tämän jälkeen suoraa a. Suorakulmaisen kolmion kolmannen kärjen, pisteen D, on sijaittava paraabelin ja normaalin leikkauspisteessä. Tämä piste saadaan näkyviin *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä klikkaamalla paraabelia $y = x^2$ ja normaalia b. Huom! Normaalilla b ja paraabelilla on kaksi leikkauspistettä, joista toinen sijaitsee origossa ja toinen halutussa pisteessä. GeoGebra ilmoittaa nämä molemmat ja nimeää ne niin, että piste C on origossa ja piste D haluttu kolmion kärkipiste. Tästä syystä kolmion kärkipisteet eivät ole aakkosjärjestyksessä.

Kun kaikki kärkipisteet ovat valmiita, piirretään suorakulmainen kolmio *Monikulmio*-työvälineellä klikkaamalla pisteitä $ABDA$ tässä järjestyksessä. Merkitään vielä kolmioon suora kulma *Kulma*-työvälineellä klikkaamalla pisteitä B,A ja D. Nyt voidaan piilottaa kaikki tehtävän kannalta epäolennaiset asiat, kuten suorat a ja b ja piste C.

Nyt kolmion kärkipistettä B voidaan vapaasti liikutella paraabelilla. Pistettä liikuttamalla voidaan huomata, että hypotenuusa leikkaa y-akselin, joka on myös paraabelin $y = x^2$ akseli, aina samassa pisteessä $(0, 1)$.

Matemaattisen todistuksen ideakin hahmottuu mallia tarkastelemalla. Selvästi tehtävä saadaan ratkaistua, mikäli onnistutaan selvittämään sellaisen suoran yhtälö jolla hypotenuusa on.

Tutkitaan ensin kateettia AB. Se on origon kautta kulkevalla suoralla, jonka yhtälö on muotoa $y = kx$. Piste $B = (x_B, y_B)$ on toinen tämän suoran ja paraabelin leikkauspisteistä, ja sen koordinaatit saadaan ratkaisemalla yhtälö $x^2 = kx$, eli $x(x - k) = 0$. Tämän yhtälön ratkaisuja ovat $x = 0$ ja $x = k$. Origossa sijaitsevan leikkauspisteen x-koordinaatti on 0, joten pisteen B x-koordinaatin on oltava k. Nyt $y = x^2 = k^2$, ja näin ollen piste $B = (x_B, y_B) = (k, k^2)$.

Suora, jolla kateetti AD on, on origon kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa edellä mainittua suoraa $y = kx$ vastaan. Suoran kulmakerroin on siis $-\frac{1}{k}$, ja suoran yhtälö muotoa $y = -\frac{1}{k}x$. Piste $D = (x_D, y_D)$ on toinen tämän suoran ja paraabelin leikkauspisteistä, ja sen koordinaatit saadaan ratkaisemalla yhtälö $x^2 = -\frac{1}{k}x$, eli $x(x + \frac{1}{k}) = 0$. Tämän yhtälön ratkaisuja ovat $x = 0$ ja $x = -\frac{1}{k}$. Origossa sijaitsevan leikkauspisteen x-koordinaatti on 0, joten pisteen D x-koordinaatin on oltava $-\frac{1}{k}$. Nyt $y = x^2 = (-\frac{1}{k})^2 = \frac{1}{k^2}$, ja näin ollen piste $D = (x_D, y_D) = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})$.

Hypotenuusa on pisteiden B ja D, $B \neq D$, kautta kulkevalla suoralla, jonka yhtälö saadaan määritelmää 3.16 hyödyntäen, kun sijoitetaan kaavaan pisteiden B ja D koordinaatit.

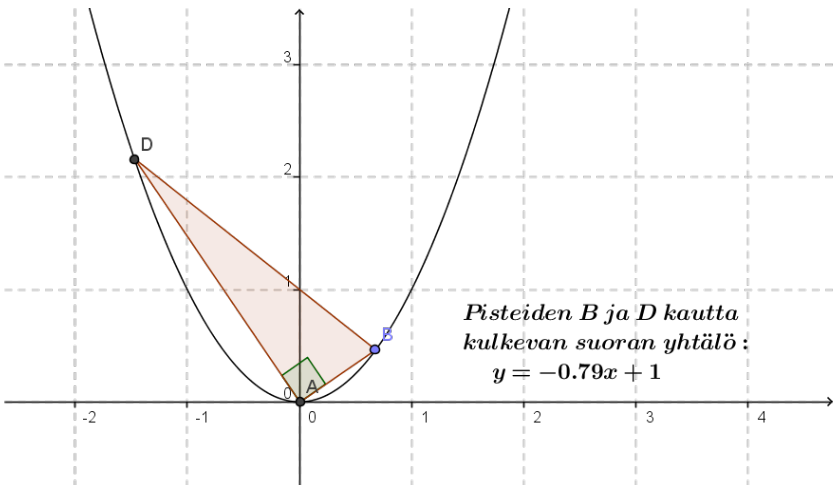
Kulmakerroinlausekkeesta tulee aika hirmuisen näköinen kasa murtolukuja, joten sievennetään se ensin:

$$\frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{k^2 \frac{1}{k^2} - k^2}{-\frac{1}{k} - k} = \frac{1 - k^4}{-k - k^3} = \frac{\cancel{(1 + k^2)}(1 - k^2)}{-k\cancel{(1 + k^2)}} = \frac{1 - k^2}{-k}.$$

Suoran yhtälö on siis:

$$\begin{aligned} y - y_B &= \tfrac{y_D - y_B}{x_D - x_B}(x - x_B) \\ y - k^2 &= \tfrac{1-k^2}{-k}(x - k) \\ y &= -\tfrac{1-k^2}{k}x + \tfrac{1-k^2}{\cancel{-k}} \cdot \cancel{(-k)} + k^2 \\ y &= -\tfrac{1-k^2}{k}x + 1 - k^2 + k^2 \qquad || Merk. K = -\tfrac{1-k^2}{k} \\ y &= Kx + 1. \end{aligned}$$

Hypotenuusa on suoralla, jonka yhtälö on muotoa $y = Kx + 1$, joten se leikkaa paraabelin akselin, y-akselin, aina pisteessä $(1, 0)$.



Kuva 29: Harjoitustehtävän 9 ratkaisu.

Vast. Piste $(1, 0)$.

Harjoitustehtävä 10

Määritä yhtälö suoralle, joka on suoran $y = 2x - 5$ normaali ja kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta.

Ratkaisu

Olkoon suoran kulmakerroin $k = 2$. Tällöin suoran normaalin kulmakerroin on $-\frac{a}{k}$. Piste $C = (x_C, y_C) = (1, 2)$.

Matemaattisesti suoran normaalin yhtälön määrittäminen onnistuu seuraavasti:

$$\begin{aligned} y - y_C &= -\frac{1}{k}(x + x_C) \\ y - 2 &= -\frac{1}{2}(x + 1) \\ y - 2 &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

GeoGebralla syotetään suoran $y = 2x - 5$ yhtälö *Syöttökenttään* jolloin suora piirtyy piirtoalueelle. Pisteen $(1, 2)$ voi piirtää piirtoalueelle itse, tai syöttää syöttökenttään $(1, 2)$. GeoGebra nimeää pisteen kirjaimella A. Normaalin saa piirrettyä *Normaali*-työvälineellä klikkaamalla ensin pistettä A ja sen jälkeen suoraa a. Suorien yhtälöt saa näkyviin valitsemalla *Ominaisuudet*-ikkunan *Algebra*-välilehdellä *Yhtälö: y=mx+b* ja *Perusominaisuudet*-välilehdellä *Näytä nimi:Arvo*.

Kahden objektin suhde -työvälineellä voi vielä tarkistaa, että suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Toinen vaihtoehto on kirjoittaa *Syöttökenttään*: **Kulmakerroin**[a]**Kulmakerroin**[b], jonka arvo on -1 jos suora b on suoran a normaali.

Vast. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Harjoitustehtävä 11

Laske suorien $x + y = 1$, $x + y = 6$, $x - 3y = 1$ ja $x - 3y = -4$ väliin jäävän alueen pinta-ala. (Yo-tehtävä 5/K2007, pitkä matematiikka.)

Ratkaisu

Piirretään ensin GeoGebralla suorat $x + y = 1$, $x + y = 6$, $x - 3y = 1$ ja $x - 3y = -4$ kirjoittamalla suorien yhtälöt *Syöttökenttään*. Suorat näyttävän muodostavat suunnikkaan, jonka pidempinä sivuina ovat suorat $x - 3y = 1$ ja $x - 3y = -4$ ja lyhyempinä sivuina suorat $x + y = 1$ ja $x + y = 6$. Suorien yhdensuuntaisuus voidaan alustavasti tarkistaa *Kahden objektin välinen suhde* -työvälineellä, mutta matemaattisempaa päättelyä varten muokataan suorat ratkaistuun muotoon. Suorien yhtälöt ratkaistussa muodossa ovat

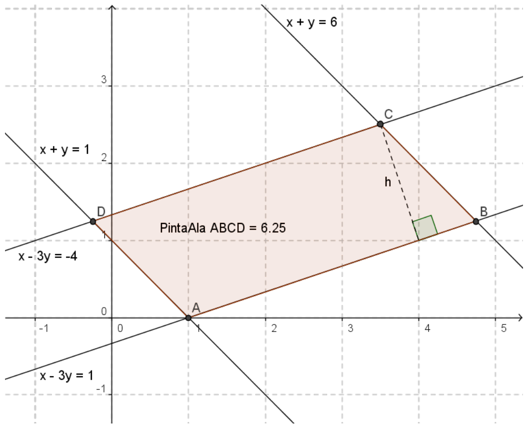
$$\begin{array}{lll} y = -x + 1, & y = -x + 6 & (k = -1) \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}, & y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} & (k = \frac{1}{3}) \end{array}$$

Kulmakertoimista voidaan päätellä että sekä ylemmät että alemmat suorat ovat keskenään yhdensuuntaiset. Näin ollen suorien rajaama alue on suunnikas.

Nimetään suunnikkaan kärkipisteet kirjaimilla A, B, C ja D. Tämä onnistuu GeoGebran *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä klikkaamalla suorien leikkauspisteitä aloittaen alimmasta ja kiertäen sitten muut leikkauspisteet vastapäivään. *Monikulmio*-työvälineellä saadaan korostettua suunnikas $ABCD$, jonka pinta-ala saadaan näkyviin *Pinta-ala*-työvälineellä klikkaamalla suunnikasta. Pinta-alaksi saadaan $A = 6,5$.

Matemaattisesti suunnikkaan pinta-ala saadaan laskettua tutulla kaavalla *kanta · korkeus*, eli $A = ah$. Valitaan kannaksi a jana $\overline{AB}$ jolloin korkeudeksi h voidaan valita esimerkiksi suoran $x - 3y = 1$ ja pisteen C välinen etäisyys. Kuvassa 30 on piirrettynä olennaiset suorat, janat ja pisteet.

Kannan $a = \overline{AB}$ ja korkeuden h pituudet saadaan laskettua kun tiedetään pisteiden A, B ja C koordinaatit. Kahden suoran leikkauspiste



Kuva 30: Harjoitustehtävän 11 ratkaisu.

toteuttaa molempien suorien yhtälöt, joten leikkauspisteet saadaan laskettua ratkaisemalla suorien yhtälöiden muodostamat yhtälöparit:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-3y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=6 \\ x-3y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=6 \\ x-3y=-4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\ y=0,\ x=1 \quad \Rightarrow\ y=\tfrac{5}{4},\ x=\tfrac{19}{4} \quad \Rightarrow\ y=\tfrac{5}{2},\ x=\tfrac{7}{2}$$

$$A=(1,0) \qquad B=(\tfrac{19}{4},\tfrac{5}{4}) \qquad C=(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2})$$

Suunnikkaan kannan pituus saadaan kahden pisteen etäisyys -kaavaa (kpl. 3.1.2 s. 18) käyttämällä: $a=\overline{AB}=\sqrt{(\frac{19}{4}-1)^2+(\frac{5}{4}-0)^2}=\sqrt{\frac{125}{8}}$.

Korkeuden h laskemiseksi muutetaan ensin suora $x-3y=1$ yleiseen muotoon $x-3y-1=0$. Kappaleesta 3.18 s. 49 tuttua kaavaa $d=\frac{|Ax_P+By_P+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ käyttämällä saadaan korkeudeksi

$$h=\frac{|1\cdot\frac{7}{2}-3\cdot\frac{5}{2}-1|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}.$$

Suunnikkaan pinta-ala on

$$A=ah=\sqrt{\frac{125}{8}}\cdot\frac{5}{\sqrt{10}}=5\cdot\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{10}}=5\sqrt{\frac{125^5}{80}}=5\sqrt{\frac{25}{16}}=5\cdot\frac{5}{4}=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}.$$

Vast. $A=6\frac{1}{4}$.

Harjoitustehtävä 12

Etsi yhtälö ympyrälle, jonka kehällä ovat pisteet $A = (3, 2)$, $B = (8, -3)$ ja $C = (10, 2)$.

Ratkaisu

Annettujen tietojen pohjalta voi ympyrän yhtälön määrittää, kunhan ensin selvitetään ympyrän keskipiste. Kaikki ympyrän normaalit kulkevat ympyrän keskipisteen kautta, joten selvittämällä kahden normaalin yhtälöt saadaan keskipiste ratkaistua yhtälöparin avulla. Kahden ympyrän kehällä olevan pisteen välisen janan, jänteen, keskinormaali on myös ympyrän normaali.

Tarkastellaan ensin janaa AB. Janan kulmakerroin on $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-2}{8-3} = -\frac{5}{5} = -1$. Janaa vastaan kohtisuoran suoran, ympyrän normaalin, kulmakertoimen on siis oltava 1.

Määritettävä ympyrän normaali on janan AB keskinormaali, joka kulkee siis janan AB keskipisteen, pisteen $D = (\frac{3+8}{2}, \frac{2+(-3)}{2}) = (\frac{11}{2}, -\frac{1}{2})$, kautta.

Näin pisteen D kautta kulkevan normaalin yhtälöksi saadaan $y - (-\frac{1}{2}) = 1(x - \frac{11}{2}) \Leftrightarrow y = x + 6$.

Vastaavalla tavalla saadaan toinen keskinormaali pisteiden B ja C välille: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{31}{10}$.

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -\frac{2}{5}x + \frac{31}{10} \end{cases} \Rightarrow x - 6 = -\frac{2}{5}x + \frac{31}{10} \Rightarrow \begin{cases} x = 6\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Varmuuden vuoksi lasketaan vielä janan AC keskinormaalin yhtälö. Koska janan AC kulmakerroin on 0, niin sen keskinormaalin on oltava y-akselin suuntainen. Janan AC keskipisteen x-koordinaatti on $\frac{3+10}{2} = 6\frac{1}{2}$, joten keskinormaalin yhtälö on $x = 6\frac{1}{2}$. Selvästikin piste $(6\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ toteuttaa tämänkin suoran yhtälön, joten voimme turvallisesti todeta, että piste $(6\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ on ympyrän keskipiste.

Ympyrän säde r on minkä tahansa kehän pisteen etäisyys keskipisteestä, lasketaan pisteen C ja keskipisteen välinen etäisyys:

$$r = \sqrt{(10 - 6\frac{1}{2})^2 + (2 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{29}{2}}.$$

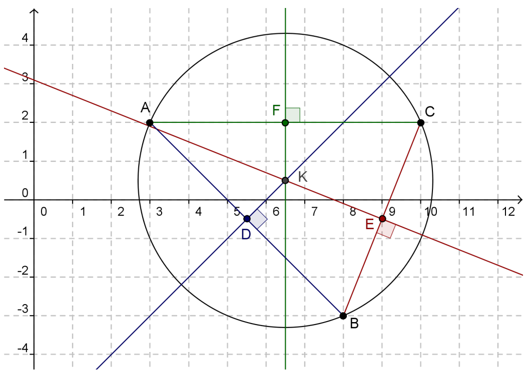
Näillä tiedoilla saadaan määritettyä ympyrän yhtälö:

$$(x - 6\frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 14\frac{1}{2}.$$

Vast: Keskipiste: $(6\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ympyrän yhtälö: $(x - 6\frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 14\frac{1}{2}$.

GeoGebralla kolmen pisteen kautta kulkeva ympyrä on helppo määrittää. Tätä varten on työväline *Ympyrä: kolme kehän pistettä*. Työvälineellä saa piirrettyä ympyrän minkä tahansa kolmen eri pisteen kautta, kunhan pisteet eivät ole samalla suoralla. Keskipisteen ympyrälle voi määrittää *Keskipiste*-työvälineellä yksinkertaisesti vain klikkaamalla ympyrän kehää.

Tehtävän ratkaisussa mainitut keskinormaalit voi GeoGebralla piirtää, kun muodostaa ensin *Kahden pisteen välinen jana* -työvälineellä jänteen kahden kehän pisteen välille. Janalle saa tehtyä keskinormaalin *Keskinormaali*-työvälineellä klikkaamalla edellä piirrettyä jännettä. *Kahden objektin leikkauspiste* -työvälineellä saa näkyviin näin määritetyn ympyrän keskipisteen. Kaikki normaalit on piirretty kuvaan 31.



Kuva 31: Harjoitustehtävän 12 ratkaisu.

Harjoitustehtävä 13

Ympyrän keskipiste on $C = (-4, 2)$ ja ympyrän tangentin yhtälö on $3x + 4y - 16 = 0$. Määritä ympyrän yhtälö. [14]

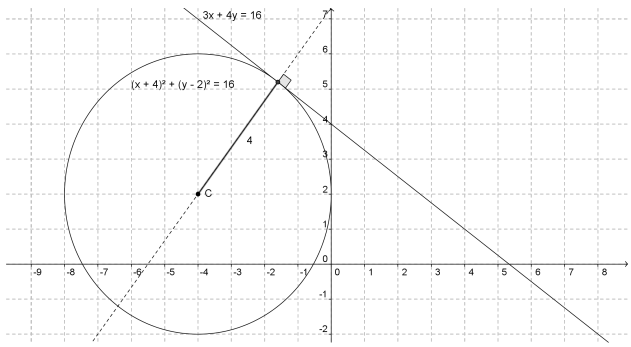
Ratkaisu

Tangentilla ja ympyrällä on yksi leikkauspiste T. Tangentin etäisyys ympyrän keskipisteestä C on yhtä kuin säde r. Käytetään 'pisteen etäisyys suorasta' -kaavaa:

$$\begin{aligned} r &= \frac{|Ax_C+By_C+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ r &= \frac{|3\cdot(-4)+4\cdot2-16)|}{\sqrt{3^2+4^2}} \\ r &= \frac{|-20|}{5} \\ r &= 4 \end{aligned}$$

Nyt ympyrän yhtälö keskipistemuodossa on $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Kuvassa 32 on ympyrä tangentteineen.

Vast. $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$.



Kuva 32: Harjoitustehtävän 13 ratkaisu.

Harjoitustehtävä14

Olkoon $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Osoita, että $x_0x + y_0y = 1$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ tangentti. Mitkä ovat sivuamispisteen koordinaatit? (Yo-tehtävä 11/K2003, pitkä matematiikka.)

Ratkaisu

Ympyrän yhtälöstä nähdään, että ympyrän keskipiste on origo $O = (0,0)$ ja säde on 1. Suoran $x_0x + y_0y = 1$, eli $x_0x + y_0y - 1 = 0$ etäisyys pisteestä $(0,0)$ on

$$
\begin{aligned}
r &= \tfrac{|Ax_C + By_C + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\
r &= \tfrac{|x_0 \cdot 0 + y_0 \cdot 0 - 1)|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \qquad ||x_0^2 + y_0^2 = 1 \\
r &= \tfrac{|-1|}{\sqrt{1}} \\
r &= 1
\end{aligned}
$$

Suoran $x_0x + y_0y = 1$ etäisyys ympyrän keskipisteestä on yhtä suuri kuin ympyrän säde, joten suora on ympyrän tangentti. Koska $x_0^2 + y_0^2 = 1$, niin piste (x_0, y_0) on ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Piste (x_0, y_0) on myös suoralla $x_0x + y_0y = 1$, sillä $x_0x_0 + y_0y_0 = x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Siis piste (x_0, y_0) on ympyrän ja tangentin yhteinen piste eli sivuamispiste.

Vast. (x_0, y_0). [13]

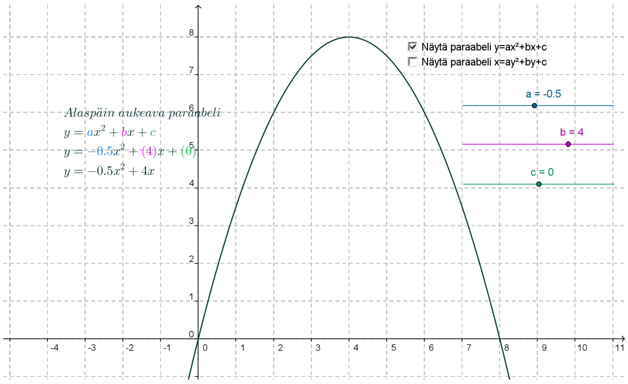
Harjoitustehtävä15

Paraabelin akseli on koordinaattiakselin suuntainen. Paraabeli leikkaa x-akselin kohdissa $x = 0$ ja $x = 8$, ja paraabelin huipun y-koordinaatti on 8. Johda paraabelin yhtälö.

Ratkaisu

Paraabeli leikkaa x-akselin kahdessa eri pisteessä, joten paraabelin akseli on y-akselin suuntainen. Paraabelin huipun y-koordinaatti on positiivinen, joten paraabelin on oltava alaspäin aukeava. Paraabelin yhtälö on siis muotoa $y = ax^2 + bx + c$, missä $a < 0$.

Kokeillaan valmiilla GeoGebra-mallilla säätää alaspäin aukeavan paraabelin yhtälön parametreja a, b ja c niin, että annetut ehdot toteutuvat. Havaitaan, että parametrien on oltava $a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$ ja $c = 0$. Kuvasta katsominen (kuva 33) ei tietenkään riitä, vaan osoitetaan oletus todeksi myös matemaattisesti.



Kuva 33: Harjoitustehtävän 15 ratlkaisu.

Symmetriasyistä huipun x-koordinaatti on x-akselin leikkauspisteiden keskiarvo, $(0+8)/2 = 4$.

Nyt tunnetaan kolme pistettä, jotka toteuttavat paraabelin yhtälön: $(0,0)$, $(0,8)$ ja $(4,8)$. Sijoitetaan nämä pisteet paraabelin yhtälöön

$$y = ax^2 + bx + c,$$

jolloin saadaan kolmen yhtälön yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & \Rightarrow \quad c = 0 \\ 0 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c & \Rightarrow \quad b = -8a \\ 8 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c & \Rightarrow \quad b = -4a + 2. \end{cases}$$

Saadaan yhtälö $-8a = -4a + 2$, josta ratkaistaan $a = -\frac{1}{2}$. Nyt $b = -8a = -8 \cdot (-\frac{1}{2}) = 4$.

Vast. Paraabelin yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$.

Harjoitustehtävä 16

Määritä ellipsin yhtälö annetuilla ehdoilla: Ellipsin keskipiste on pisteessä $(1,2)$, toinen polttopiste pisteessä $(6,2)$ ja piste $(4,6)$ on ellipsin kehällä. [14]

Ratkaisu

Valmiilla GeoGebra-mallilla voidaan tilannetta lähteä helposti hahmottamaan. Siirretään ensin polttopiste F pisteesen $F = (6, 2)$ ja kehän piste Q pisteeseen $Q = (4, 6)$. Koska keskipisteen $K = (1, 2)$ y-koordinaatti on sama kuin polttopisteen y-koordinaatti, niin myös polttopisteen F' y-koordinaatin on oltava 2. Dynaamisessa mallissa pisteen F' sijainti löytyy helposti kokeilemalla, ja ellipsin yhtälö nähdään valmiina myös.

Matemaattisesti tehtävää lähdetään ratkaisemaan huomaamalla ensin, että ellipsin isoakseli on x-akselin suuntainen, joten ellipsin yhtälö on muotoa

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1.$$

Koska piste $Q = (4, 6)$ on ellipsin kehällä, niin

$$\frac{(4-1)^2}{a^2} + \frac{(6-2)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1.$$

Polttopisteen F ja keskipisteen K välinen etäisyys

$$c = \sqrt{(x_F - x_K)^2 + (y_F - y_K)^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (2-2)^2} = 5.$$

Nyt $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - 5^2 = a^2 - 25$.

Sijoitetaan $b^2 a^2 - 25$ aiempaan yhtälöön, ja ratkaistaan a^2 :

$$\begin{aligned}
\tfrac{9}{a^2} + \tfrac{16}{a^2-25} &= 1 \qquad || \cdot a^2(a^2-25) \\
9(a^2-25) + 16a^2 &= a^2(a^2-25) \\
-a^4 + 50a^2 - 225 &= 0 \\
a^2 &= \tfrac{1}{-2}(-50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-225)}) \\
a^2 &= 5 \ \wedge \ a^2 = 45.
\end{aligned}$$

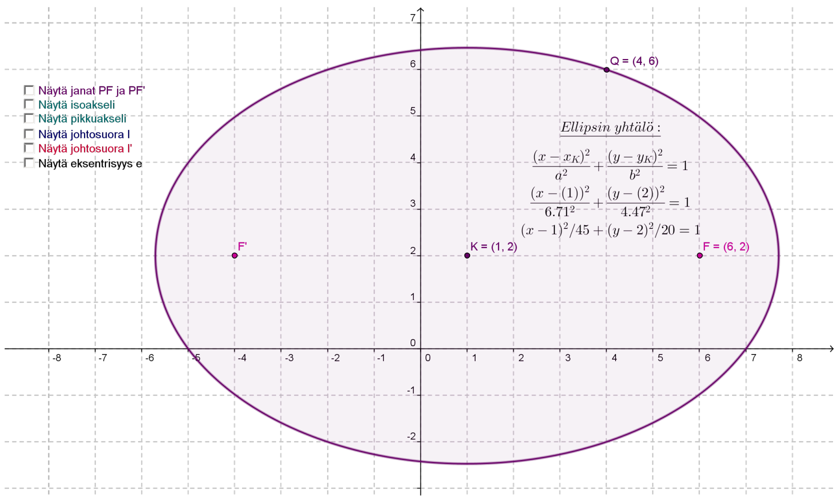
Juuri $a^2 = 5$ täytyy hylätä, sillä ellipseillä on aina $a > c$. On siis $a^2 = 45$ ja näin ollen $b^2 = 45 - 25 = 20$.

Kysytyn ellipsin (kuvassa 34) yhtälö on siis

$$\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1.$$

Harjoitustehtävä 17

Määritä yhtälö sellaiselle origokeskisen hyperbelille, jonka huippu on pisteessä $(3, 0)$ ja jonka toisen asymptootin yhtälö on $4x - 3y = 0$.



Kuva 34: Harjoitustehtävän 16 ratkaisu.

Ratkaisu

GeoGebra-mallilla voidaan kokeilemalla etsiä kysyttyä hyperbeliä. Koska hyperbeli on origokeskinen ja sen huippu on pisteessä $(3,0)$, niin tiedetään että hyperbelin poikittaisaksli on x-akselilla. Näin ollen myös polttopisteet sijaitsevat x-akselilla. Muutetaan ensin asymptootin yhtälö muotoon $y=\frac{4}{3}x$, mistä nähdään, että asymptootin kulmakertoimen tulee olla $\frac{4}{3}$. Siirretään piste Q pisteeseen $(0,3)$, ja tämän jälkeen yritetään etsiä polttopisteille sellaiset sijainnit x-akselilta, että keskipiste K sijoittuu origoon ja asymptootti suoraksi $y=\frac{4}{3}x$. Kokeilemalla löydetään oikeannäköinen hyperbeli (kuva 35), kun polttopisteet ovat pisteissä $(\pm 5,0)$. Dynaaminen malli antaa tällöin ellipsin yhtälöksi

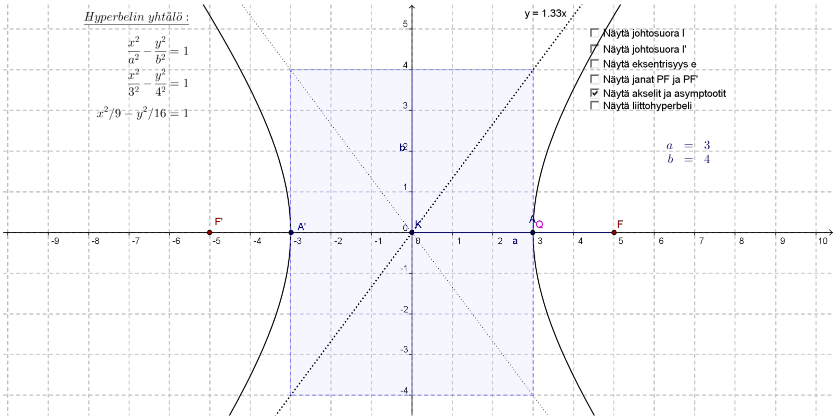
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Kuvasta katsominen ei toki riitä, vaan todetaan asia myös matemaatisesti: Origokeskisen hyperbelin asymptootit ovat muotoa $y=\pm\frac{b}{a}x$, missä a on isoakselin puolikkaan pituus, eli tässä tapauksessa huipun etäisyys origosta.

Nyt siis $\frac{b}{a}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow b=\frac{4a}{3}$.

Huipun $(0,3)$ etäisyys origosta on $a=3$, joten saadaan $b=\frac{4\cdot 3}{3}=4$.

Sijoittamalla arvot $a=3$ ja $b=4$ origokeskisen hyperbelin yhtälöön $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, saadaan kysytty yhtälö.



Kuva 35: Harjoitustehtävän 17 ratkaisu.

Vast. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$

Hakemisto

--, +-, 20, 22, 50
LaTeX, 14

abs(x), 79
Algebra, 73, 81
Algebra-välilehti, 46, 55
Algebraikkuna, 13
Alkupiste, 43
array, LaTeX, 31

Dynaaminen objekti, 15, 20

Eksponentit, 95
Ellipsi, 70
eqnarray, LaTeX, 19
Erikoista, 27, 32
Etäisyys tai pituus, 19, 49, 64, 70

Hyperbeli, 77, 81

Ikoni, 12

Jos-ehtolauseke, 33

Kahden objektin leikkauspiste, 27, 37, 44, 70, 78
Kahden objektin välinen suhde, 22
Kahden pisteen välinen jana, 19, 22, 49, 56, 63
Keskinormaali, 70, 78, 104
Keskipiste, 57, 91, 104
Koordinaatisto, 17
Koordinaattiruudusto, 17, 18
Kopioi piirtoalue leikepöydälle, 11
Kopioi syöttökenttään, 89
Koristelu, 27, 64
Kulma, 21, 26, 27
Kulma: koko annetaan, 27
Kulmakerroin, 27, 28, 30

Lisää kuva, 89
Lisää teksti, 14, 19
Lista, 89
Liuku, 37, 42, 52, 66
Liukusäädin, *katso* Liuku
Looginen arvo, 22, 72, 80
Luo näytä/piilota-valintaruutu, 20, 22, 38, 47, 61, 67, 72

Monikulmio, 21, 37, 78, 91, 98
Murtoluku, 29
Murtolukuteksti, 31, 91
Murtoluvut, 47

Näkyvyysehto, 31, 50
Näytä, 17, 18
Näytä nimi, 22
Näytä nimi: Arvo, 42
Näytä nimi: Teksti, 56, 61
Näytä-piilota-valintaruutu, *katso* Luo näytä/piilota-valintaruutu
Näyttämisehto, 27
Napasuora, 61
Nimeä uudelleen, 29
Normaali, 21, 30, 37, 46

Objekti, 13, 15

Objektin piilottaminen, 13
Objektin siirtäminen, tekstiobjekti, 19
Objektin tyyli, 58
Objektit-valikko, 14, 28, 39
Ominaisuudet, 13, 56
Ominaisuudet-ikkuna, 27

Paikka, 43, 64
Paraabeli, 63
Peilaus suoran suhteen, 72, 80
Peittävyys, 58, 89
Piirtoalue, 12
Pinta-ala, 94, 101
Piste objektilla, 61, 63, 97

Riippuva objekti, 97

Salli kupera kulma, 14
Suora kahden pisteen kautta, 12, 26, 30
Suoran yhtälö, 49
Syöttökenttä, 18, 25, 29, 31, 33, 41
Syöttökenttään, 91

Tangentit, 60, 61
Taso, 32
Teksti, 61, 91
- Lisää teksti, 14, 19
- Näytä nimi:Teksti, 56, 61

Työvälinelaatikko, 12
Työvälinepalkki, 12
Tyyli, 37

Uusi piste, 18, 63

Väri, 42
Väri, LaTeX, 15, 42, 51, 57, 72

Yhdensuuntainen, 21, 30, 71, 79
Ympyrä: keskipiste ja kehän piste, 60
Ympyrä: keskipiste ja säde, 54, 71, 78, 79
Ympyrä: kolme kehän pistettä, 104